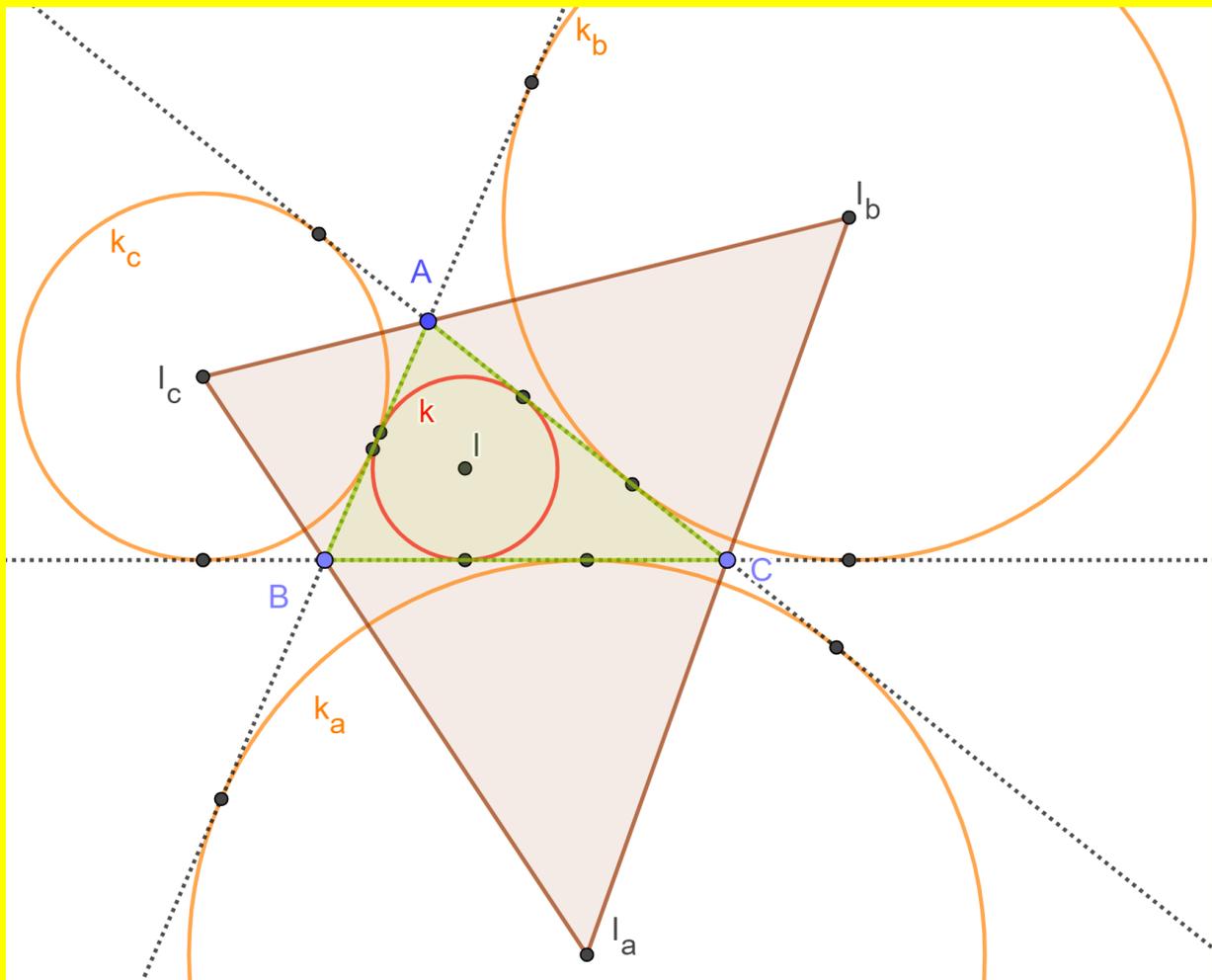


Ex-incentros: teoria, construções e problemas



Juan López Linares

JUAN LÓPEZ LINARES

Ex-incentros: teoria, construções e problemas

DOI: 10.11606/9786587023328

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2023

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-Reitora: Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

Diretor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Vice-Diretor: Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

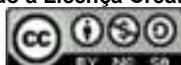
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da
Universidade de São Paulo

L864e	López Linares, Juan Ex-incentros: teoria, construções e problemas. / Juan López Linares. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2023. 80 p. ISBN 978-65-87023-32-8 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023328 1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino médio. 6. Formação de professores. I. Título.
-------	--

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



Dedico este livro a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores e Estudantes do curso de Geometria Olímpica com GeoGebra que motivaram a escrita deste livro eletrônico.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

AUTOR

Prof. Associado JUAN LÓPEZ LINARES: <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Quando adolescente participava como estudante de um grupo de treinamento para olimpíadas de Física. Embora tivesse sucessos nas competições desta disciplina, nas olimpíadas de Matemática não tinha resultados espetaculares. Sempre sentiu falta de um grupo de treinamento em Matemática. Essa experiência extracurricular determinou seu futuro profissional e motivou sua linha de trabalho hoje.

Professor Associado do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores e estudantes de alto rendimento.

Na área de Ensino de Matemática Olímpica, publicou 17 artigos, 14 livros eletrônicos (e-book), um capítulo de livro, uma dissertação de mestrado e uma tese de livre docência. Textos completos e gratuitos podem ser encontrados [aqui](#). Também disponibilizou mais de 750 vídeo aulas. Adicionalmente, no site do [GeoGebra](#) estão disponíveis mais de 1000 construções geométricas interativas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProFMat) pela UFSCar em 2019 e Livre Docente na área de Ensino de Matemática Olímpica na FZEA USP em 2022.

Título

Ex-incentros: teoria, construções e problemas

Prefácio

Todo triângulo permite a construção de um incírculo e três ex-incírculos. Os centros destes são chamados de incentro e ex-incentros. Seu estudo está diretamente relacionado com as bissetrizes internas e externas. Muitos problemas olímpicos exploram geometrias que utilizam esses elementos. A discussão neste e-book é organizada em quatro capítulos: Fundamentos teóricos;

Construções, exercícios e desafios; Teorema de Feuerbach; Problemas de olimpíadas internacionais. Este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 50 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mãos na massa.

Palavras-chave: Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

Lista de Figuras

2.1	Definição e construção de bissetriz. Versão interativa aqui	13
2.2	Pontos sobre a bissetriz equidistam dos lados. Versão interativa aqui	14
2.3	As três bissetriz internas de um triângulo são concorrentes. Versão interativa aqui	16
2.4	As bissetrizes externas de quaisquer dois ângulos de um triângulo são concorrentes com a bissetriz interna do terceiro ângulo. Versão interativa aqui	17
2.5	Definição de Ex-incentros, Ex-incírculos, Ex-inraios e Triângulo Ex-central. Versão interativa aqui	18
2.6	Guia para a demonstração da Proposição 4. Versão interativa aqui	19
2.7	Guia para a demonstração da Proposição 5. Versão interativa aqui	20
2.8	Guia para a demonstração do Corolário 6. Versão interativa aqui	21
2.9	Guia para a demonstração da Proposição 7. Versão interativa aqui	22
2.10	Ilustração do Teorema 8. Versões interativas aqui e aqui	23
2.11	Guia para a demonstração do Teorema 9. Versão interativa aqui	24
2.12	Guia para a demonstração do Teorema 10. Versão interativa aqui	25
2.13	Guia para a demonstração da Proposição 12. Versão interativa aqui	27
2.14	Guia para a demonstração da Proposição 13. Versão interativa aqui	28
2.15	Guia para a demonstração da Proposição 14. Versão interativa aqui	29
2.16	Área de um triângulo utilizando o incírculo. Demonstração 1. Versão interativa aqui	30
2.17	Área de um triângulo utilizando o incírculo. Demonstração 2. Versão interativa aqui	32
2.18	Área de um triângulo utilizando o ex-incírculo. Versão interativa aqui	33
2.19	Guia para a demonstração da Proposição 17. Versão interativa aqui	34
2.20	Guia para a demonstração da Proposição 18. Versão interativa aqui	35
3.1	Ilustração inicial do Problema 1. Versão interativa aqui	37
3.2	Ilustração do Problema 1. Versão interativa aqui	38
3.3	Ilustração inicial do Problema 2. Versão interativa aqui	39
3.4	Ilustração do Problema 2. Versão interativa aqui	40

3.5	Ilustração inicial do Problema 3. Versão interativa aqui	41
3.6	Ilustração do Problema 3. Versão interativa aqui	42
4.1	Apresentação do Teorema de Feuerbach. Versão interativa aqui	43
4.2	Lema 20. Teorema de Feuerbach. Versão interativa aqui	44
4.3	Lema 21. Teorema de Feuerbach. Versão interativa aqui	45
4.4	Lema 22. Teorema de Feuerbach. Versão interativa aqui	46
4.5	Demonstração do Teorema de Feuerbach. Versão interativa aqui	47
4.6	Enunciado do Teorema de Ptolomeu. Para um quadrilátero ser inscrito o produto dos comprimentos das diagonais deve ser igual à soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos e vice-versa. Versão interativa aqui	49
4.7	Demonstração da forma direta do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa aqui	50
4.8	Demonstração da recíproca do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa aqui	51
4.9	Teorema de Casey. A versão interativa aqui permite verificar diferentes configurações.	53
4.10	Demonstração do Teorema de Casey no caso em que as quatro circunferências são internas a c . Versão interativa aqui	55
4.11	Caso em que a circunferência c_1 é interna e c_2 externa a c . Versão interativa aqui	56
4.12	Teorema de Feuerbach. Versão interativa aqui	57
4.13	Teorema de Feuerbach, incírculo. Versão interativa aqui	58
4.14	Teorema de Feuerbach, ex-incírculo. Versão interativa aqui	59
5.1	Construção geométrica para o Problema 4. Versão interativa aqui	61
5.2	Construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa aqui	63
5.3	Construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa aqui	65
5.4	Construção geométrica inicial para o Problema 6. Versão interativa aqui	66
5.5	Guia para a demonstração do Lema 28. Versão interativa aqui	67
5.6	Construção geométrica para o Problema 6. Versão interativa aqui	68
5.7	Construção geométrica inicial para o Problema 7. Versão interativa aqui	69
5.8	Construção geométrica para o Problema 7. Versão interativa aqui	71
5.9	Construção geométrica inicial para o Problema 8. Versão interativa aqui	72
5.10	Construção geométrica para o Problema 8. Versão interativa aqui	73

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	11
2	Fundamentos teóricos	13
2.1	Definição e construção da reta bissetriz	13
2.2	Pontos sobre a bissetriz equidistam dos lados	14
2.3	As três bissetriz internas de um triângulo são concorrentes	15
2.4	Duas bissetrizes externas e uma interna de um triângulo são concorrentes	16
2.5	Relações métricas devidas ao Incírculo	18
2.6	Relações métricas devidas ao Ex-incírculo	20
2.7	Base Média de um Trapézio	21
2.8	Teorema de Tales	22
2.9	Teorema da Bissetriz Interna	24
2.10	Teorema da Bissetriz Externa	25
2.11	Teorema da Bissetriz	26
2.12	Medida dos segmentos determinados pela bissetriz interna	26
2.13	Razão das medidas vértice-incentro e incentro-pé da bissetriz interna	28
2.14	Medida da bissetriz interna	29
2.15	Área de um triângulo utilizando o incírculo	30
2.16	Área de um triângulo utilizando o ex-incírculo	32
2.17	Ponto equidistante de dois vértices, o incentro e o ex-incentro	33
2.18	Distância Incentro-Circuncentro ou Fórmula de Euler	35
3	Construções, exercícios e desafios	37
3.1	Bissetrizes internas e externas, ex-incentro	37
3.1.1	Resolução do Problema 1	37
3.2	Bissetrizes internas e externas, ex-incentro-II	38
3.2.1	Resolução do Problema 2	39
3.3	Bissetrizes internas e externas, ex-incentro-III	40

3.3.1	Resolução do Problema 3	40
4	Teorema de Feuerbach	43
4.1	Teorema de Feuerbach utilizando inversão	43
4.2	Teorema de Ptolomeu	48
4.3	Teorema de Casey	52
4.4	Teorema de Feuerbach utilizando Casey	56
5	Problemas de olimpíadas internacionais	60
5.1	Ex-incírculos. Incentro. Relação de Stewart. P1 IMO 1970.	60
5.1.1	Resolução do Problema 4.	60
5.2	Ex-incírculo. Incírculo. Semelhança de triângulos. P4 IMO 1992.	63
5.2.1	Resolução do Problema 5.	63
5.3	Incírculo. Ex-incírculo. Potência de um ponto relativo a uma circunferência. P5 IMO 1999.	65
5.3.1	Resolução do Problema 6.	66
5.4	Bissetrizes. Paralelogramo. Semelhança de triângulos. P16 SL IMO 2005.	69
5.4.1	Resolução do Problema 7.	69
5.5	Ex-incírculo. Potência de um ponto relativo a uma circunferência. Ângulos. P18 SL IMO 2006.	71
5.5.1	Resolução do Problema 8.	71
6	Referências Bibliográficas	74

Capítulo 1

Introdução

Todo triângulo permite a construção de um incírculo e três ex-incírculos. Os centros destes são chamados de incentro e ex-incentros. Seu estudo está diretamente relacionado com as bissetrizes internas e externas. Muitos problemas olímpicos exploram geometrias que utilizam esses elementos.

A discussão neste e-book é organizada em quatro capítulos: Fundamentos teóricos; Construções, exercícios e desafios; Teorema de Feuerbach; Problemas de olimpíadas internacionais. O livro faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O mesmo aconteceu na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma Moodle de Cultura e Extensão da USP.

O texto conta com 50 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, links para os gráficos interativos são disponibilizados em páginas do [GeoGebra](#). Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa.

Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contra partida, na versão impressa tradicional o aprendente precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma resolução. O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movimentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes.

Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendizado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar e buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Bruno Holanda [5], do Prof. Rodrigo Pinheiro [40] e do Prof. Cícero Thiago [44]. Também serviram como referência os livros de Geometria [37], Geometria Analítica [1] e Matemática Discreta [36] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Oito livros eletrônicos gratuitos com as notas de aulas do curso Geometria Olímpica com GeoGebra estão disponíveis em [22], [23], [24], [18], [16], [13], [14] e [8]. Também foram publicados quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [21], [9], [10] e [11]. Outros trabalhos da área de Matemática são [15], [25], [26], [27], [20], [28], [29], [6], [30], [32], [33], [34], [35], [41], [31], [42], [17], [19], [12] e [43].

Capítulo 2

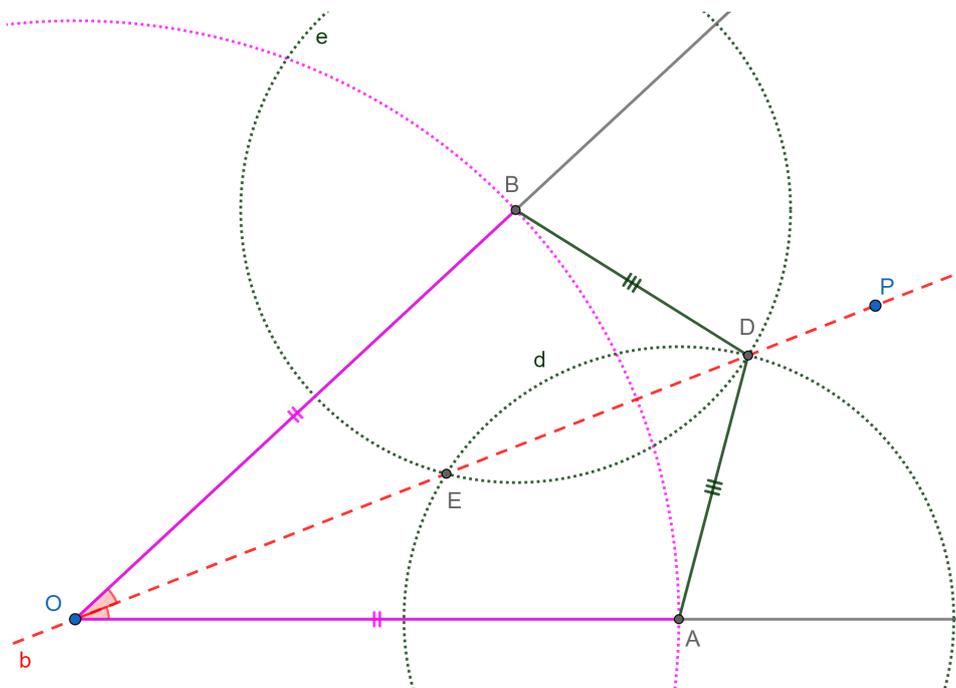
Fundamentos teóricos

Parte do conteúdo deste e-book está disponível em vídeos de [2021](#), [2022](#) e [2023](#).

2.1 Definição e construção da reta bissetriz

Definição 1 (Reta bissetriz). *Seja o ângulo $\angle AOB$. Define-se a reta bissetriz b como o conjunto de pontos P tais que $\angle POA = \angle POB$ (Figura 2.1). Em outras palavras, se $P \in b$ e b é uma bissetriz do ângulo $\angle AOB$, então $\angle POA = \angle POB$.*

Figura 2.1: Definição e construção de bissetriz. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seguem os passos de construção da reta bissetriz b do ângulo $\angle AOB$ (Figura 2.1):

1. Centro em O , abertura qualquer do compasso, determina-se sobre os lados do ângulo, os pontos A e B . Ou seja, $OA = OB$.
2. Centro em A , abertura do compasso maior que $\frac{AB}{2}$, traça-se uma circunferência d .
3. Centro em B , mesma abertura que d , esboça-se a circunferência e , que concorre com d nos pontos D e E (basta um deles). Nota-se que $AD = BD$ e $AE = BE$.
4. A reta b determinada pelos segmentos OD ou OE é a bissetriz procurada.

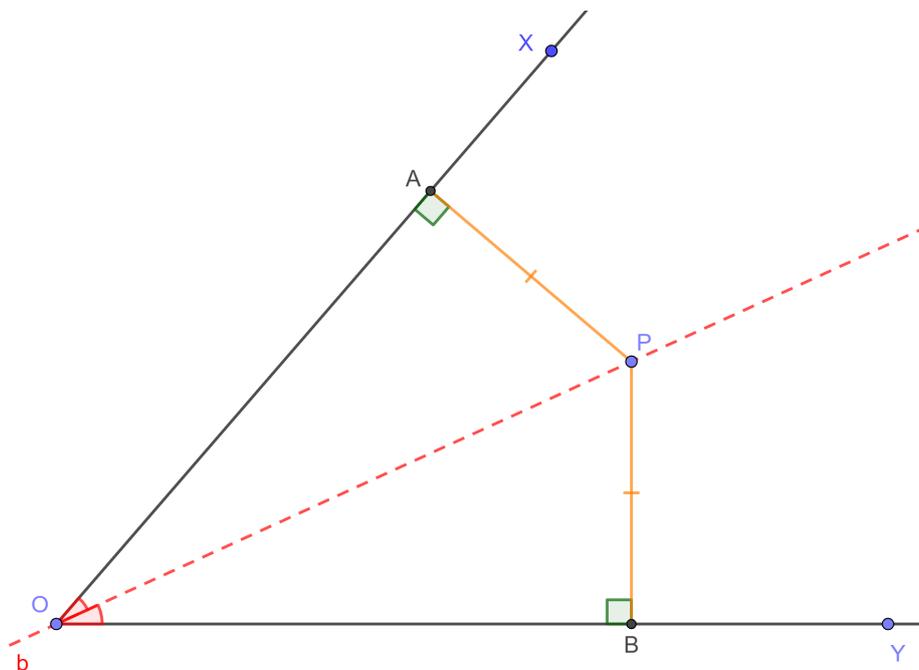
De fato, os triângulos OAD e OBD são congruentes pelo critério LLL. Segue que:

$$\angle DOA = \angle DOB.$$

2.2 Pontos sobre a bissetriz equidistam dos lados

Proposição 1. *Seja $\angle XOY$ um ângulo dado e P um ponto em seu interior. Então, as distâncias de P até as retas XO e YO são iguais se, e somente se, o ponto P pertence à bissetriz b (Figura 2.2).*

Figura 2.2: Pontos sobre a bissetriz equidistam dos lados. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Suponha-se inicialmente que o ponto $P \in b$. Sejam A e B os pés das perpendiculares baixadas desde P sobre OX e OY , respectivamente. Obtêm-se:

$$\begin{cases} OP(\text{comum}) \\ \angle POA = \angle POB \\ \angle PAO = \angle PBO = 90^\circ \end{cases} .$$

Pelo critério de congruência LAAo tem-se: $\triangle PAO \equiv \triangle PBO$. Logo, $PA = PB$.

Reciprocamente, parte-se de $PA = PB$. Obtêm-se:

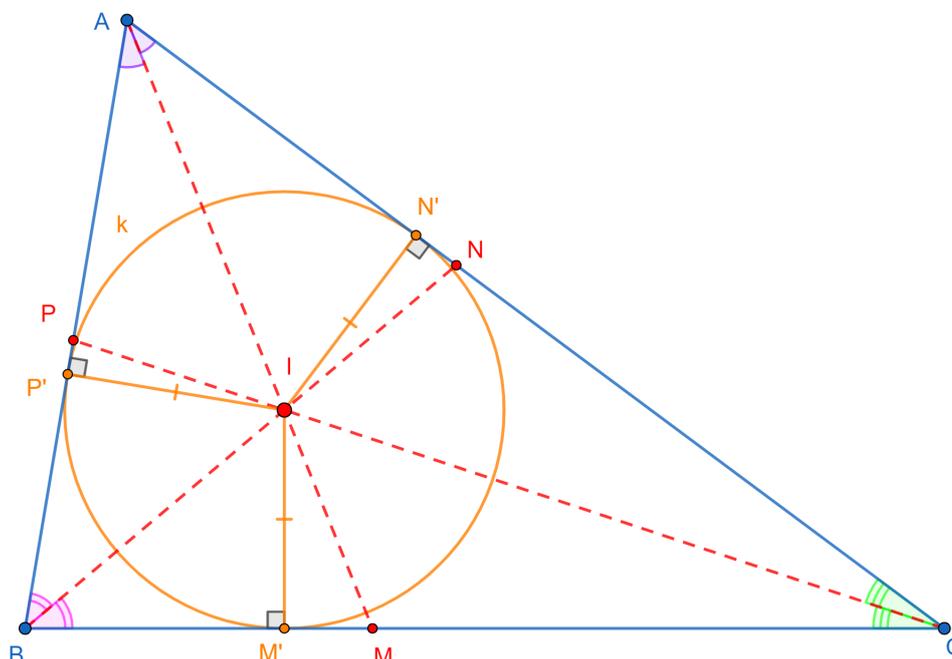
$$\begin{cases} PA = PB \\ \angle PAO = \angle PBO = 90^\circ \\ OP(\text{hipotenusa comum}) \end{cases} .$$

Pelo critério especial de congruência CH tem-se: $\triangle PAO \equiv \triangle PBO$. Logo, $\angle POA = \angle POB$ e o ponto $P \in b$. □

2.3 As três bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes

Proposição 2. *As três bissetrizes internas de um triângulo ABC intersectam-se num ponto I , chamado incentro, que é equidistante dos lados e centro da circunferência inscrita k (Figura 2.3).*

Figura 2.3: As três bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Sejam BN e CP as bissetrizes relativas aos vértices B e C , respectivamente, e $I = BN \cap CP$. Sejam ainda M' , N' e P' as projeções ortogonais de I sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente. Como o ponto I pertence às bissetrizes BN e CP , pela Proposição 1, vale que $IM' = IP'$ e $IM' = IN'$. Portanto, $IP' = IN'$. Segue, novamente pela Proposição 1, que I pertence à bissetriz do $\angle A$. \square

O incentro é o ponto $X(1)$ na lista de centros de triângulos de Clark Kimberling [7]. As coordenadas trilineares do incentro são $(1 : 1 : 1)$ e as baricêntricas $(a : b : c)$. Para a construção rápida no GeoGebra, relativa ao $\triangle ABC$, do incentro, pode ser utilizado o comando:

$$I = \text{CentroDoTriângulo}(A, B, C, 1).$$

2.4 Duas bissetrizes externas e uma interna de um triângulo são concorrentes

Proposição 3. *As bissetrizes externas de quaisquer dois ângulos de um triângulo são concorrentes com a bissetriz interna do terceiro ângulo (Figura 2.4).*

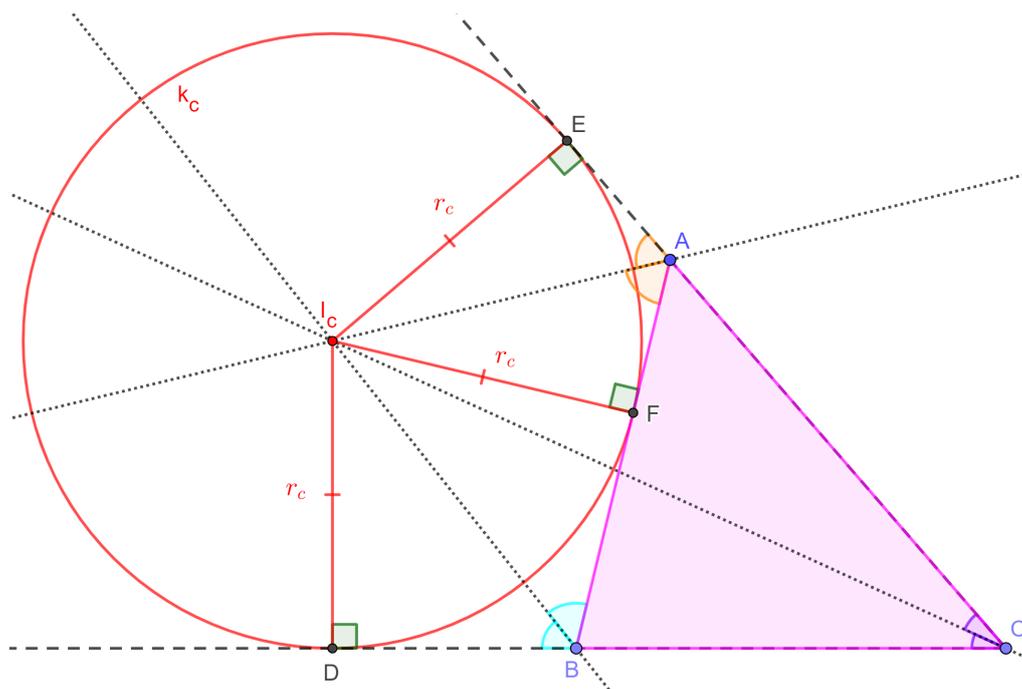


Figura 2.4: As bissetrizes externas de quaisquer dois ângulos de um triângulo são concorrentes com a bissetriz interna do terceiro ângulo. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Traçam-se as bissetrizes externas dos ângulos em A e B , os quais intersectam-se em I_c . Como I_c pertence à bissetriz externa do $\angle A$, então $I_cE = I_cF$. Além disso, I_c pertence à bissetriz externa do $\angle B$, então $I_cF = I_cD$. Segue que $I_cD = I_cE$, do qual conclui-se que I_c pertence à bissetriz do $\angle C$. \square

Definição 2 (Ex-incentro, Ex-incírculo e Ex-inraio). I_c é chamado *ex-incentro relativo ao vértice C*. O raio da circunferência k_c (*ex-inscrita*), com centro em I_c e tangente aos lados do $\triangle ABC$, é denotado por r_c e chamado *ex-inraio*. Analogamente são definidos I_a , k_a e r_a e I_b , k_b e r_b (Figura 2.5).

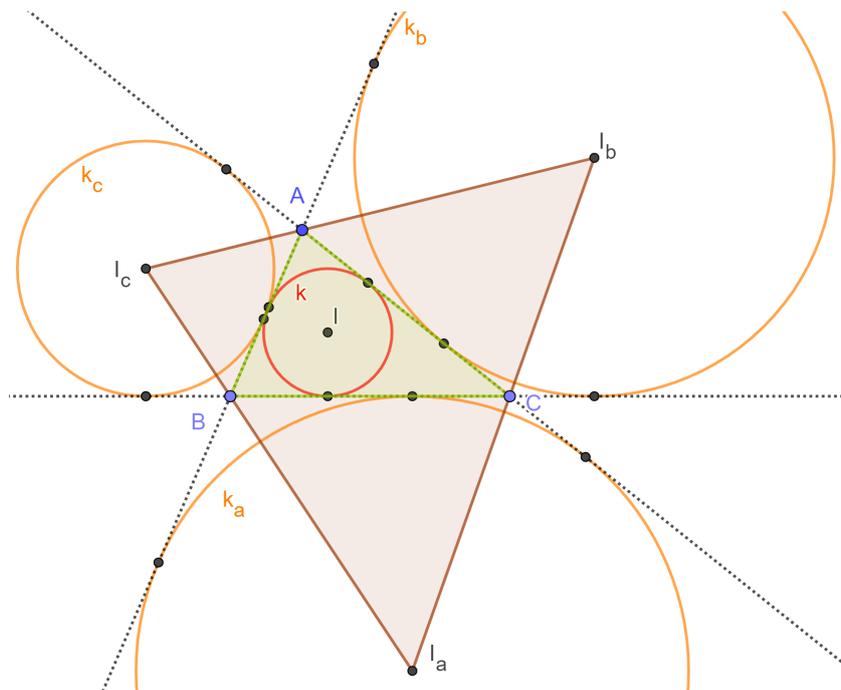


Figura 2.5: Definição de Ex-incentros, Ex-incírculos, Ex-inraios e Triângulo Ex-central. Versão interativa [aqui](#).

As [coordenadas trilineares](#) dos ex-incentros são:

$$I_a = (-1 : 1 : 1),$$

$$I_b = (1 : -1 : 1),$$

$$I_c = (1 : 1 : -1).$$

Definição 3 (Triângulo Ex-central). *O triângulo $I_a I_b I_c$, formado pelos centros das circunferências ex-inscritas do $\triangle ABC$, é denominado Ex-central do $\triangle ABC$ (Figura 2.5).*

2.5 Relações métricas devidas ao Incírculo

Definição 4 (Semiperímetro do $\triangle ABC$). *O semiperímetro do $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ é denotado por p e calculado:*

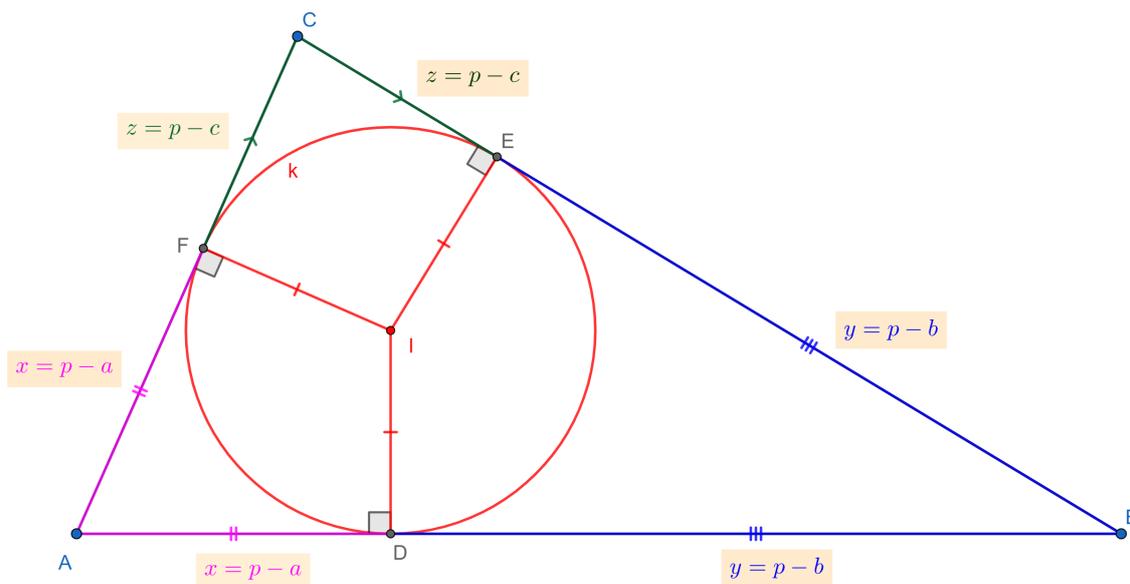
$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Proposição 4 (Relações métricas devidas ao Incírculo). *A Figura 2.6 mostra um triângulo ABC . Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Sejam D , E e F os pontos de interseção da*

circunferência inscrita k com os lados AB , BC e CA , respectivamente. E seja o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$. Então vale que:

$$AD = AF = p - a, \quad BD = BE = p - b, \quad CF = CE = p - c.$$

Figura 2.6: Guia para a demonstração da Proposição 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Como os lados do $\triangle ABC$ são tangentes à circunferência k vale que:

$$AF = AD = x, \quad BD = BE = y, \quad CF = CE = z.$$

Isto permite escrever o sistema de equações:

$$x + y = c,$$

$$y + z = a,$$

$$z + x = b,$$

$$p = x + y + z.$$

Colocando em evidência x , y e z encontram-se as soluções citadas. □

2.6 Relações métricas devidas ao Ex-incírculo

Proposição 5 (Relações métricas devidas ao Ex-incírculo). *A Figura 2.7 mostra um triângulo ABC . Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Sejam J , L e E os pontos de interseção da circunferência ex-inscrita k' com os prolongamentos dos lados AB e BC e com o lado CA , respectivamente. E seja o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$. Então vale que $BL = BJ = p$, $CL = CE = p - a$ e $AJ = AE = p - c$.*

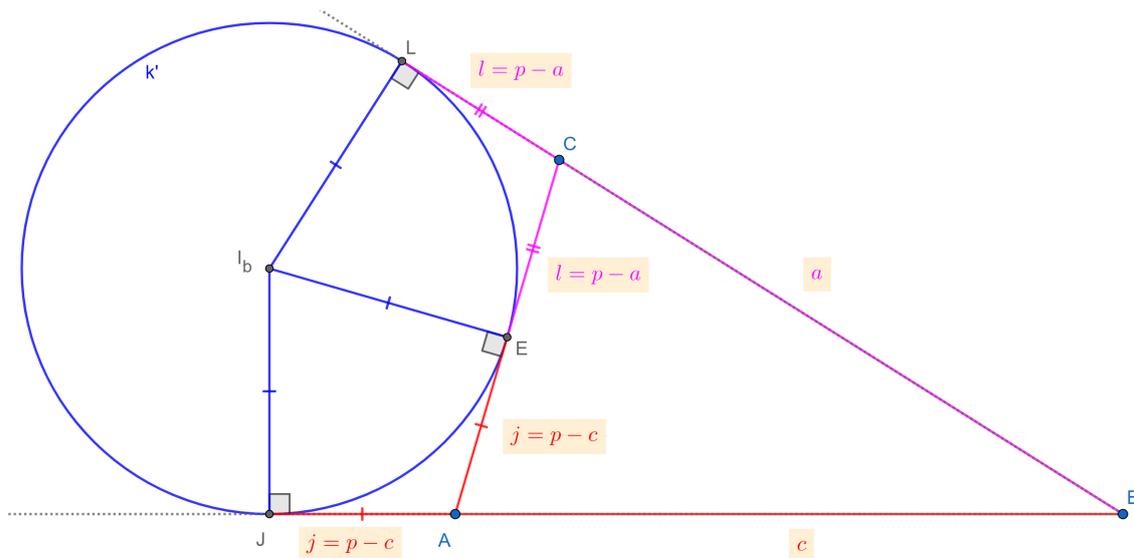


Figura 2.7: Guia para a demonstração da Proposição 5. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Como os lados do $\triangle ABC$ são tangentes à circunferência k vale que $BL = BJ$, $CL = CE = l$ e $AJ = AE = j$. Considera-se a soma:

$$BL + BJ = a + l + j + c = a + b + c = 2p.$$

Do resultado anterior segue que $BL = BJ = p$. Como $AB = c$ e $BC = a$ obtêm-se:

$$AJ = AE = j = p - c,$$

$$CL = CE = l = p - a.$$

□

Corolário 6. *A Figura 2.8 mostra um triângulo ABC . Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Sejam D , E e F os pontos de interseção da circunferência inscrita k com os lados AB , BC e CA , respectivamente. Sejam J , L e N_b os pontos de interseção da circunferência ex-inscrita*

k' com os prolongamentos dos lados AB e BC e com o lado CA , respectivamente. E seja o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$. Então vale que o ponto M , médio de A e C , também é ponto médio de F e N_b . Adicionalmente,

$$FM = MN_b = \frac{|a - c|}{2}.$$

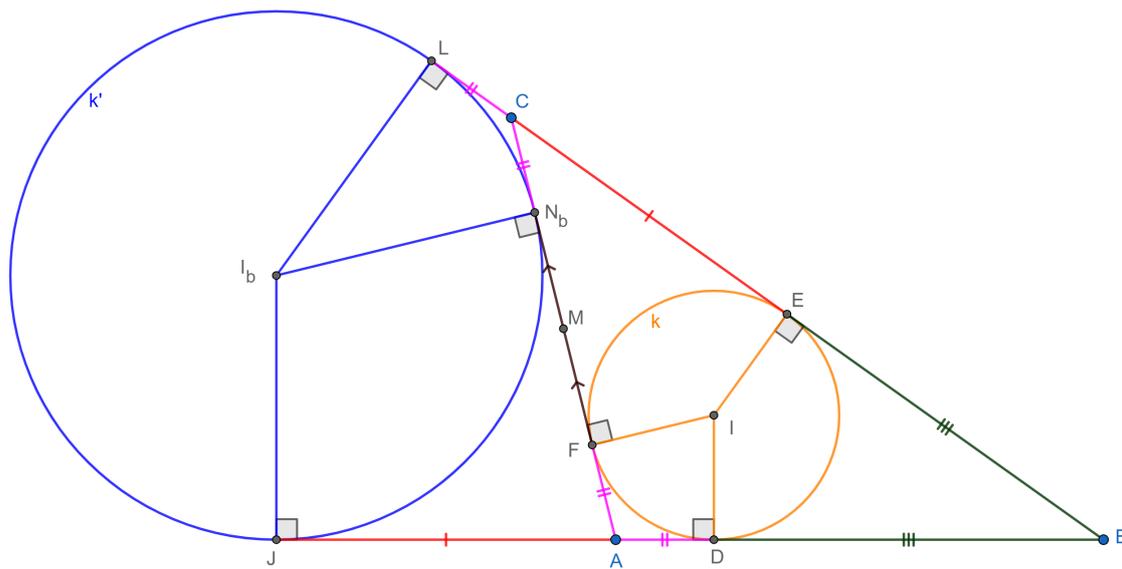


Figura 2.8: Guia para a demonstração do Corolário 6. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Isto é consequência de $AF = CN_b = p - a$, resultados provados nas Proposições 4 e 5. □

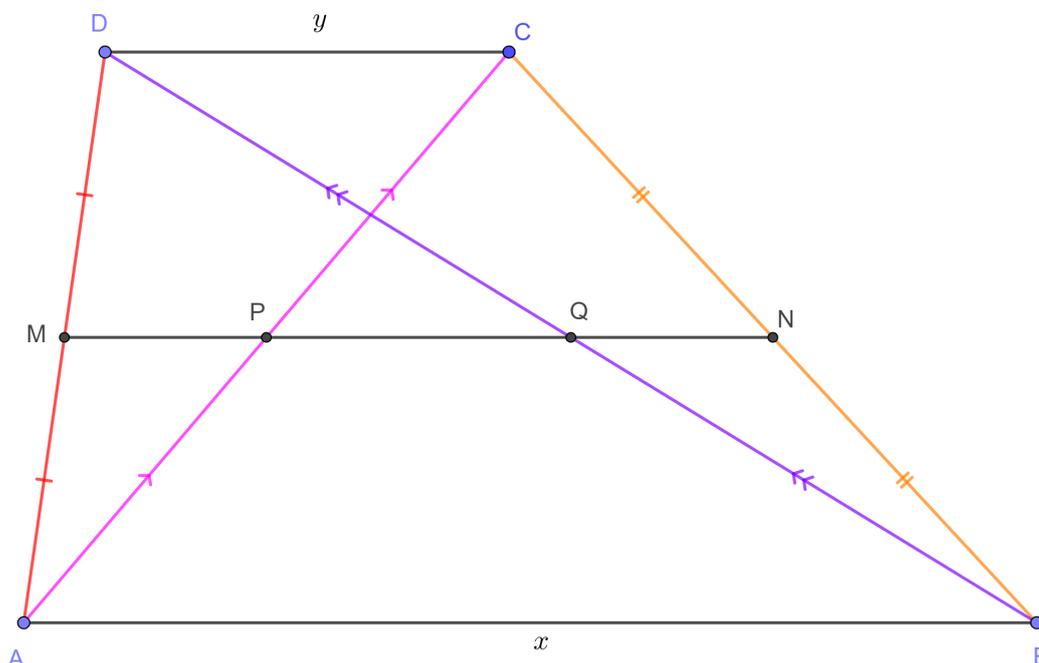
2.7 Base Média de um Trapézio

Proposição 7 (Base média de um Trapézio). *Seja $ABCD$ um trapézio de bases $AB = x$ e $CD = y$. Sejam M, N, P e Q os pontos médios dos segmentos AD, BC, AC e BD , respectivamente (Figura 2.9). Então M, N, P e Q são colineares, $MN \parallel AB, CD$ e*

$$MN = \frac{x + y}{2},$$

$$PQ = \frac{|x - y|}{2}.$$

Figura 2.9: Guia para a demonstração da Proposição 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Como MP e MQ são Bases Médias dos $\triangle ACD$ e $\triangle ABD$, respectivamente, então $MP \parallel CD \parallel AB \parallel MQ$ (M, P e Q colineares), $MP = \frac{y}{2}$ e $MQ = \frac{x}{2}$. Segue que,

$$PQ = \frac{|x - y|}{2}.$$

Analogamente, como NP e NQ são Bases Médias dos $\triangle ABC$ e $\triangle BCD$, respectivamente, então $NP \parallel AB \parallel CD \parallel NQ$ (N, P e Q colineares), $NP = \frac{x}{2}$ e $NQ = \frac{y}{2}$. Logo,

$$MN = \frac{x + y}{2}.$$

□

Definição 5 (Base Média de um Trapézio). *É chamada Base Média de um Trapézio ao segmento que une os pontos médios dois lados não paralelos.*

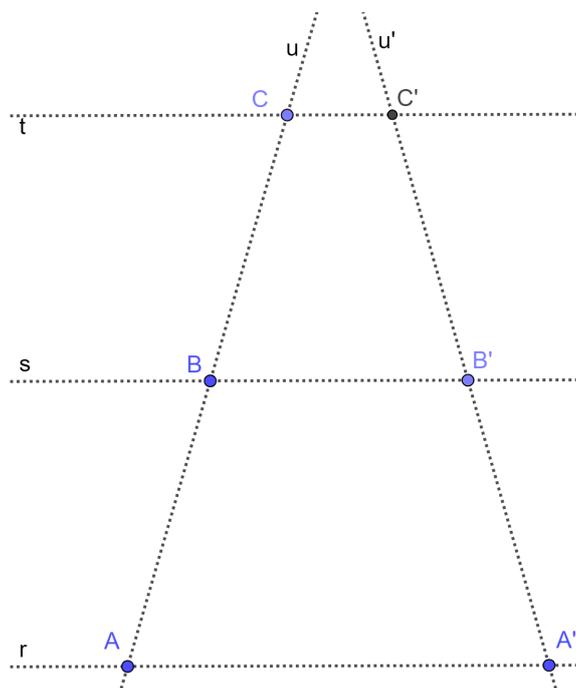
2.8 Teorema de Tales

Tales de Mileto foi o primeiro filósofo, cientista e matemático grego conhecido. Ele é creditado com cinco teoremas de geometria elementar. Acredita-se que nasceu por volta do ano 624 antes de Cristo e morreu por volta do ano 547 antes de Cristo [39].

Teorema 8 (Tales). *Sejam as retas $r \parallel s \parallel t$, e os pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$. Consideram-se ainda as retas u e u' tais que $A, B, C \in u$ e $A', B', C' \in u'$ (Figura 2.10). Então vale que:*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Figura 2.10: Ilustração do Teorema 8. Versões interativas [aqui](#) e [aqui](#).



Fonte: O autor.

No caso em que $AB = BC$ a Proposição 7 (Base Média de um Trapézio) garante que $A'B' = B'C'$.

No caso em que $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, dividem-se os segmentos AB e BC em m e n partes iguais, respectivamente. A repetida aplicação da Proposição 7 (Base Média de um Trapézio) mostra a validade do Teorema 8 (Tales).

No caso em que $\frac{AB}{BC} = r$, com r um número irracional a demonstração é um pouco mais elaborada. Utiliza-se que todo número irracional pode ser delimitado, com precisão arbitrária, por seqüências de racionais.

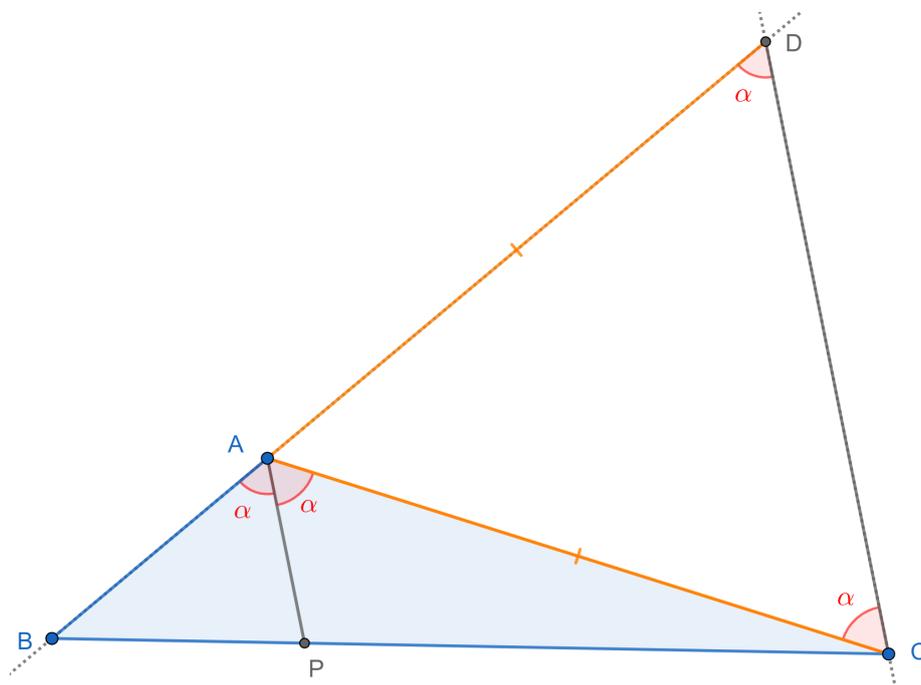
2.9 Teorema da Bissetriz Interna

Teorema 9 (Teorema da Bissetriz Interna). *A Figura 2.11 mostra um triângulo ABC . A bissetriz interna AP do $\angle A$ divide internamente o lado oposto BC na razão:*

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BP}{CP}, \quad (2.9.1)$$

em que P é o ponto de interseção da bissetriz interna com o lado BC .

Figura 2.11: Guia para a demonstração do Teorema 9. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Traça-se a reta AB e uma reta paralela a AP passando por C . Chama-se D o ponto de interseção destas. Como $AP \parallel CD$, por alternos internos, segue que:

$$\angle PAC = \angle ACD = \alpha$$

e, por Correspondentes, tem-se:

$$\angle BAP = \angle ADC = \alpha.$$

De $\angle ACD = \angle ADC$ encontra-se que o $\triangle ACD$ é isósceles de base CD . Logo,

$$CA = DA.$$

Pelo Teorema 8 (Tales) vale que:

$$\frac{BA}{DA} = \frac{BP}{CP}.$$

Mas $AD = AC$, portanto,

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BP}{CP}.$$

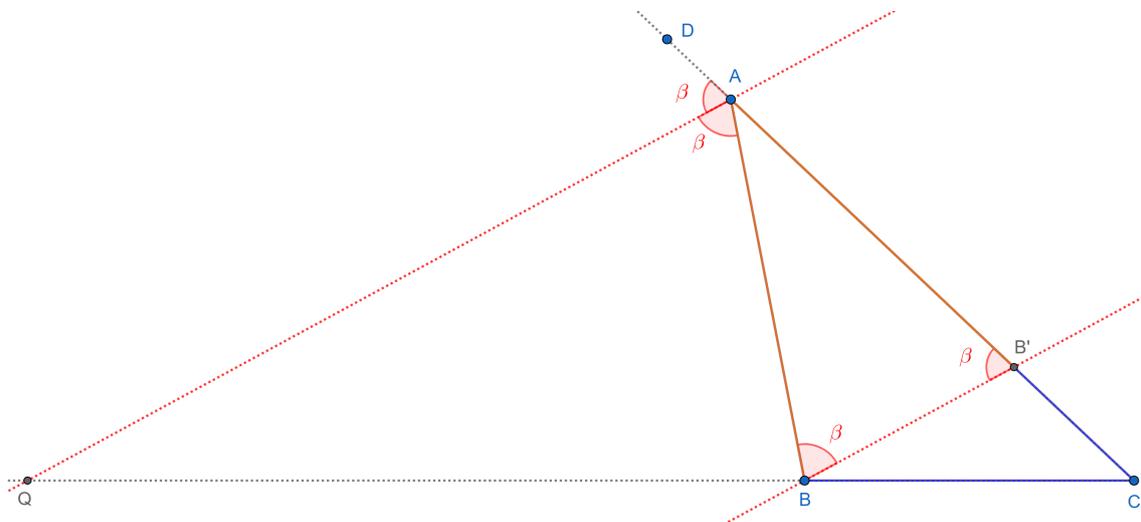
□

2.10 Teorema da Bissetriz Externa

Teorema 10 (Teorema da Bissetriz Externa). *Seja ABC um triângulo não isósceles e AQ , como $Q \in BC$, a bissetriz externa do $\angle A$ (Figura 2.12). Então vale que:*

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BQ}{CQ}. \quad (2.10.1)$$

Figura 2.12: Guia para a demonstração do Teorema 10. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Sem perda de generalidade considera-se o caso em que $AC > AB$. Traça-se uma reta paralela a AQ passando por B . Chama-se B' ao ponto de interseção desta com AC .

Seja o ponto $D \in AC$ e além de A . Como $QA \parallel BB'$ valem as igualdades:

$$\angle QAB = \angle ABB' = \beta \quad (\text{Alternos Internos}),$$

$$\angle DAQ = \angle AB'B = \beta \text{ (Correspondentes).}$$

Como $\angle ABB' = \angle AB'B$ o triângulo ABB' é isósceles de base BB' e $AB = AB'$. Pelo Teorema 8 (Tales) tem-se:

$$\frac{B'A}{CA} = \frac{BQ}{CQ}.$$

Ou seja,

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BQ}{CQ}.$$

□

2.11 Teorema da Bissetriz

Teorema 11 (Teorema da Bissetriz). *Sejam ABC um triângulo não isósceles, P o ponto de interseção da bissetriz interna do $\angle A$ com o lado BC e AQ , como $Q \in BC$, a bissetriz externa do $\angle A$. Então vale que:*

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BP}{CP} = \frac{BQ}{CQ}. \quad (2.11.1)$$

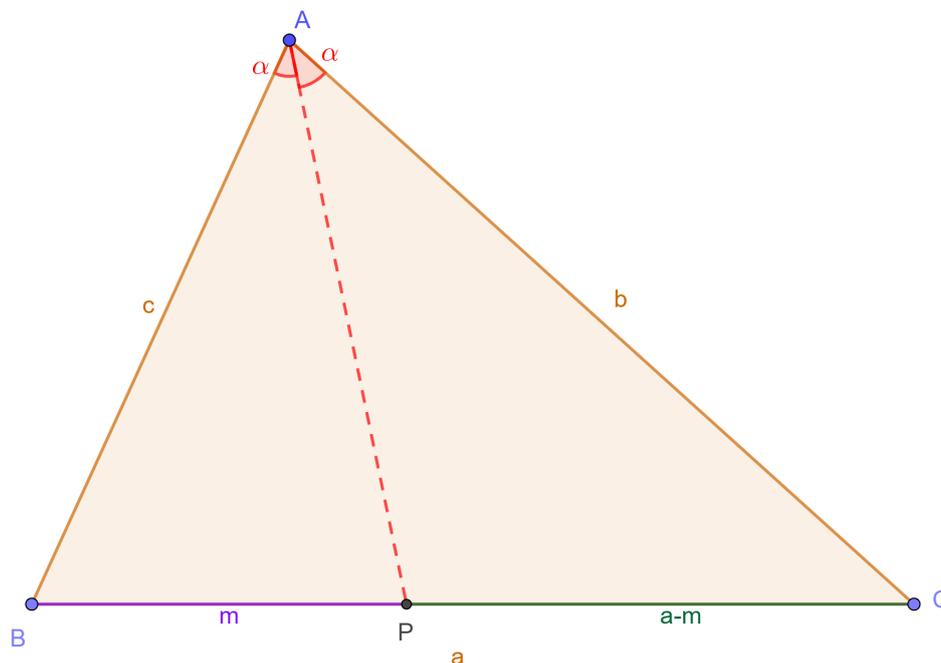
Demonstração. O resultado segue das equações (2.9.1) e (2.10.1). □

2.12 Medida dos segmentos determinados pela bissetriz interna

Proposição 12. *A Figura 2.13 mostra um triângulo ABC . Considera-se que $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Seja AP a bissetriz interna relativa ao $\angle A$, com $P \in BC$. Então,*

$$BP = \frac{ac}{b+c}, \quad PC = \frac{ab}{b+c}.$$

Figura 2.13: Guia para a demonstração da Proposição 12. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja $BP = m$, logo $PC = a - m$. Pelo Teorema 9 (Bissetriz Interna) tem-se:

$$\frac{m}{c} = \frac{a - m}{b}.$$

Da equação anterior basta colocar m em evidência:

$$mb = ac - mc,$$

$$m(b + c) = ac,$$

$$BP = m = \frac{ac}{b + c}.$$

Finalmente,

$$PC = a - m = a - \frac{ac}{b + c} = \frac{ab}{b + c}.$$

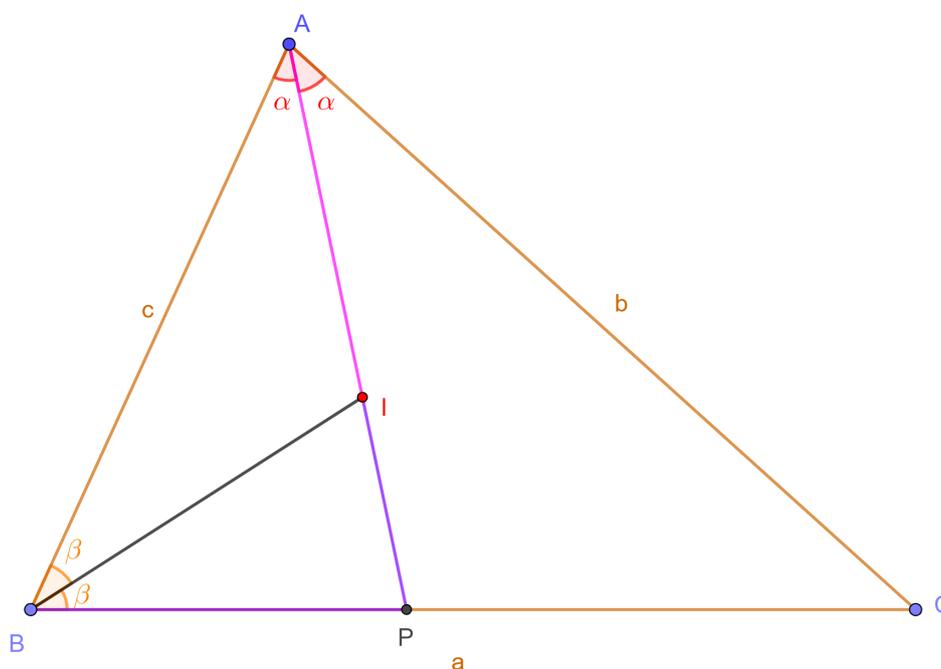
□

2.13 Razão das medidas vértice-incentro e incentro-pé da bissetriz interna

Proposição 13. A Figura 2.14 mostra um $\triangle ABC$ de incentro I . Considera-se que $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Seja AP a bissetriz interna relativa ao $\angle A$, com $P \in BC$. Então,

$$\frac{AI}{IP} = \frac{b+c}{a}.$$

Figura 2.14: Guia para a demonstração da Proposição 13. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. O segmento BI está na bissetriz do $\angle B$. Aplica-se o Teorema 9 (Bissetriz Interna) ao $\triangle BPA$:

$$\frac{AI}{IP} = \frac{c}{BP}.$$

Segue da Proposição 12 que:

$$\frac{AI}{IP} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

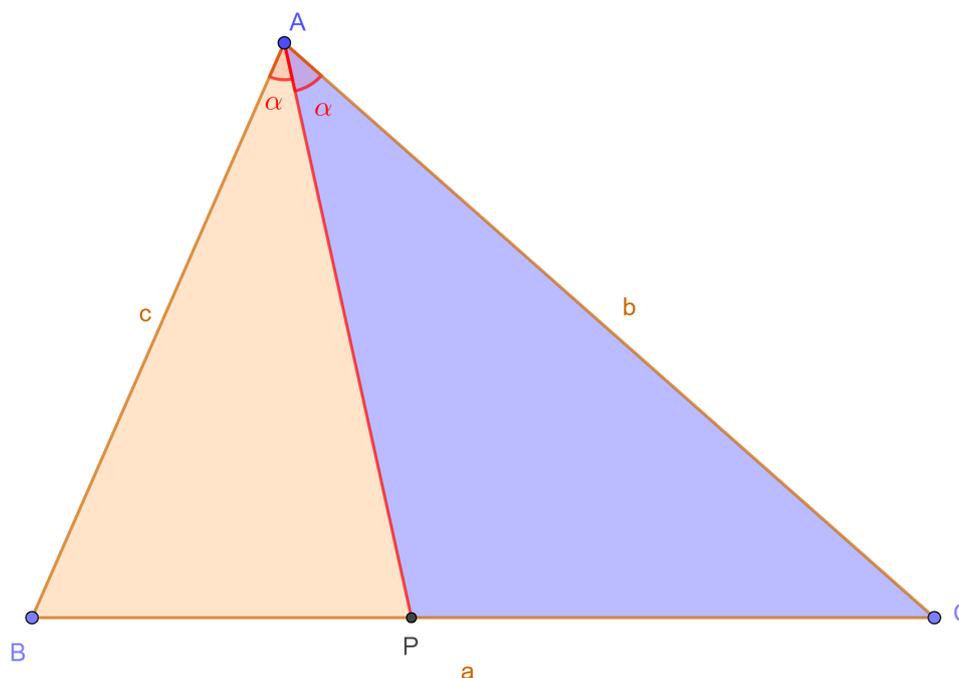
□

2.14 Medida da bissetriz interna

Proposição 14. A Figura 2.15 mostra um $\triangle ABC$. Considera-se que $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Seja AP a bissetriz interna relativa ao $\angle A$, com $P \in BC$, e $\angle BAP = \angle PAC = \alpha$. Então,

$$AP = \frac{2bc \cos(\alpha)}{b + c}.$$

Figura 2.15: Guia para a demonstração da Proposição 14. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. A área do $\triangle ABC$ coincide com a soma das áreas do $\triangle ABP$ e do $\triangle ACP$:

$$[ABC] = [ABP] + [ACP].$$

Pela fórmula de área de triângulo, em função de dois lados e o ângulo determinado por estes, segue:

$$\begin{aligned} \frac{bc \operatorname{sen}(2\alpha)}{2} &= \frac{AP \cdot c \operatorname{sen}(\alpha)}{2} + \frac{AP \cdot b \operatorname{sen}(\alpha)}{2}, \\ 2bc \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) &= AP \cdot c \operatorname{sen}(\alpha) + AP \cdot b \operatorname{sen}(\alpha), \\ 2bc \cos(\alpha) &= AP(c + b), \\ AP &= \frac{2bc \cos(\alpha)}{b + c}. \end{aligned}$$

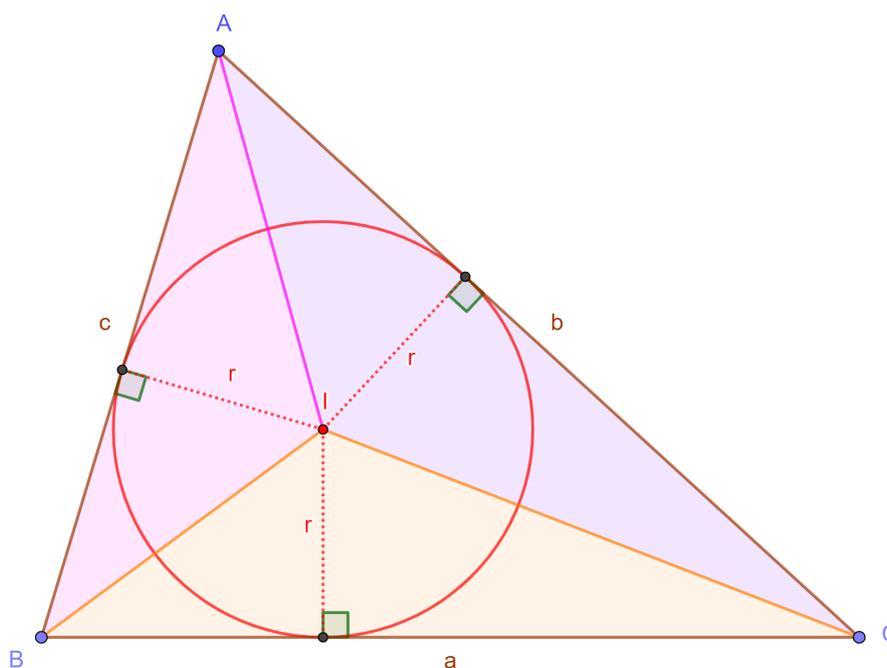
□

2.15 Área de um triângulo utilizando o incírculo

Proposição 15. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e r o raio da circunferência inscrita neste (Figura 2.16). Então vale que:*

$$[\triangle ABC] = p \cdot r.$$

Figura 2.16: Área de um triângulo utilizando o incírculo. Demonstração 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seguem duas demonstrações da Proposição 15.

Demonstração 1. Nota-se na Figura 2.16 que a área do $\triangle ABC$ pode ser calculada como a soma das áreas de outros três triângulos que utilizam, como um dos seus vértices, o incentro I :

$$[\triangle ABC] = [\triangle BCI] + [\triangle CAI] + [\triangle ABI],$$

$$[\triangle ABC] = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2},$$

$$[\triangle ABC] = \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \cdot r,$$

$$[\triangle ABC] = p \cdot r.$$

□

Demonstração 2. Na Figura 2.17 sejam D , E e F as projeções ortogonais do incentro I nos lados AB , BC e CA , respectivamente. Como AI , BI e CI são bissetrizes, pelo critério de congruência ALA, obtêm-se:

$$\triangle ADI \equiv \triangle AFI,$$

$$\triangle BDI \equiv \triangle BEI,$$

$$\triangle CEI \equiv \triangle CFI.$$

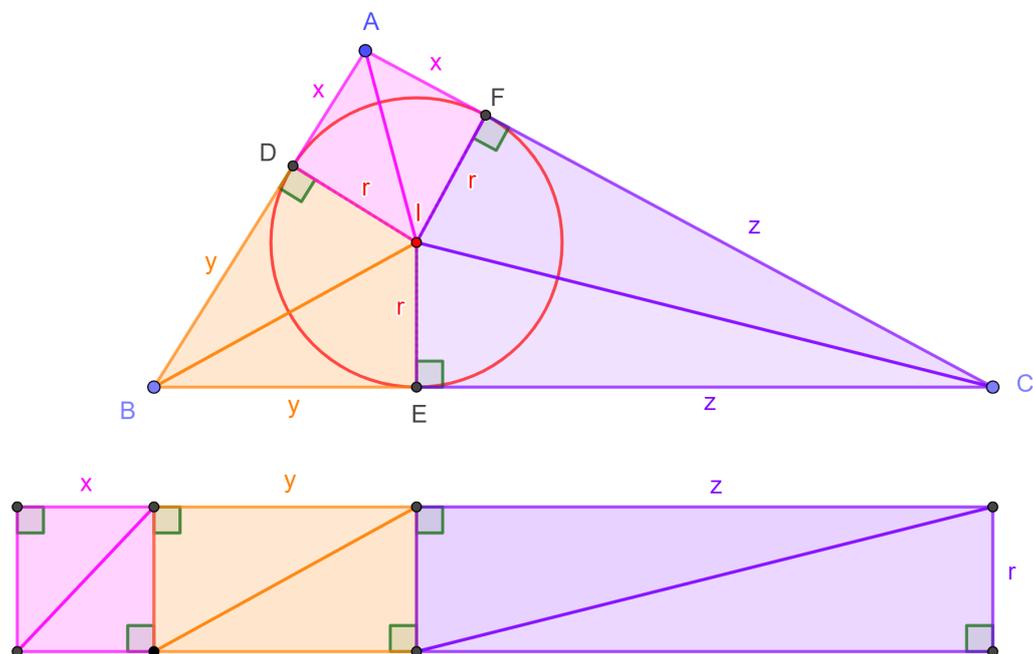
Isto permite definir $AD = AF = x$, $BD = BE = y$ e $CE = CF = z$. Nota-se que $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ e $p = x + y + z$. A área do $\triangle ABC$ pode ser calculada como a soma das áreas de outros três retângulos de altura r e comprimentos x , y e z :

$$[\triangle ABC] = x \cdot r + y \cdot r + z \cdot r = (x + y + z)r,$$

$$[\triangle ABC] = p \cdot r.$$

□

Figura 2.17: Área de um triângulo utilizando o incírculo. Demonstração 2. Versão interativa [aqui](#).



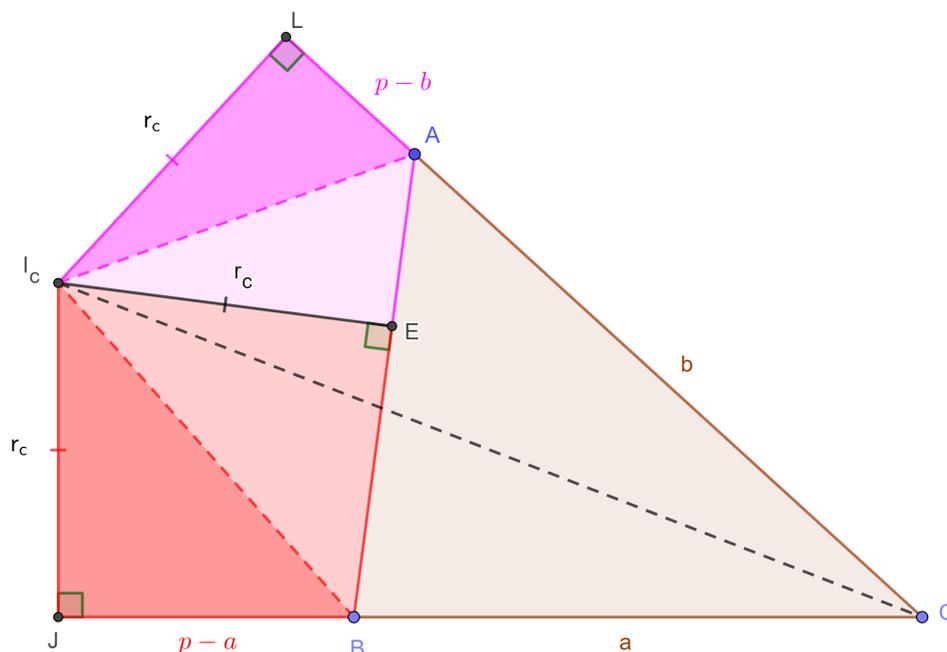
Fonte: O autor.

2.16 Área de um triângulo utilizando o ex-incírculo

Proposição 16. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e r_c o raio da circunferência ex-inscrita relativa ao vértice C (Figura 2.18). Então vale:*

$$[\triangle ABC] = r_c(p - c).$$

Figura 2.18: Área de um triângulo utilizando o ex-incírculo. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Primeiro, nota-se que $[\triangle I_cAL] = [\triangle I_cAE]$ e $[\triangle I_cBE] = [\triangle I_cBJ]$. Segue que:

$$[ALI_cJB] = 2[\triangle AI_cB] = r_c \cdot c.$$

Segundo, a área do $\triangle ABC$ pode ser escrita como:

$$[\triangle ABC] = [\triangle I_cCJ] + [\triangle I_cCL] - [ALI_cJB],$$

$$[\triangle ABC] = 2 \frac{r_c \cdot p}{2} - r_c \cdot c,$$

$$[\triangle ABC] = r_c(p - c).$$

□

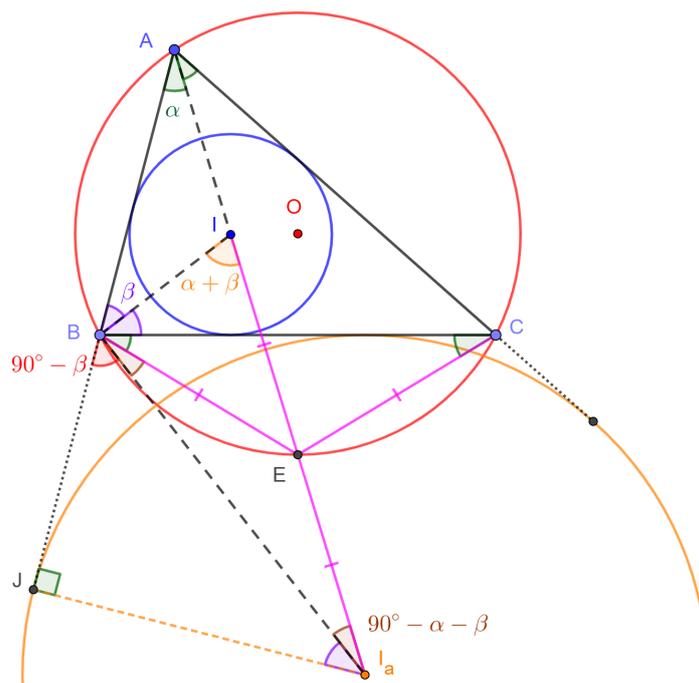
2.17 Ponto equidistante de dois vértices, o incentro e o ex-incentro

Proposição 17. A Figura 2.19 mostra um triângulo ABC . Seja I seu Incentro e I_a o centro da ex-circunferência correspondente ao lado BC . Seja E o ponto de interseção de AI com a

circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Então,

$$EB = EC = EI = EI_a.$$

Figura 2.19: Guia para a demonstração da Proposição 17. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Pela bissetriz em A e o quadrilátero inscritível $ACEB$ tem-se:

$$\angle BAE = \angle CAE = \angle CBE = \angle BCE = \alpha.$$

Portanto, o $\triangle EBC$ é isósceles, de base BC , e $EB = EC$. Além disso, da bissetriz em B , sejam $\angle IBA = \angle IBC = \beta$. Pela propriedade do ângulo externo,

$$\angle BIE = \alpha + \beta.$$

Segue que, $\angle BIE = \angle IBE$, o $\triangle EBI$ é isósceles, de base BI , e $EB = EI$. Pela bissetriz externa em B , sejam

$$\angle JBI_a = \angle CBI_a = \gamma.$$

Como o $\angle JBA = 180^\circ$ tem-se que $\gamma = 90^\circ - \beta$. Do $\triangle BJI_a$, retângulo em J , tem-se

$\angle JI_a B = \beta$. Pela soma dos ângulos internos no $\triangle AJI_a$ e o ângulo raso em B encontra-se:

$$\angle EBI_a = \angle EI_a B = 90^\circ - \alpha - \beta.$$

Isto é, o $\triangle EBI_a$ é isósceles, de base BI_a , e $EB = EI_a$. Conclui-se que:

$$EB = EC = EI = EI_a.$$

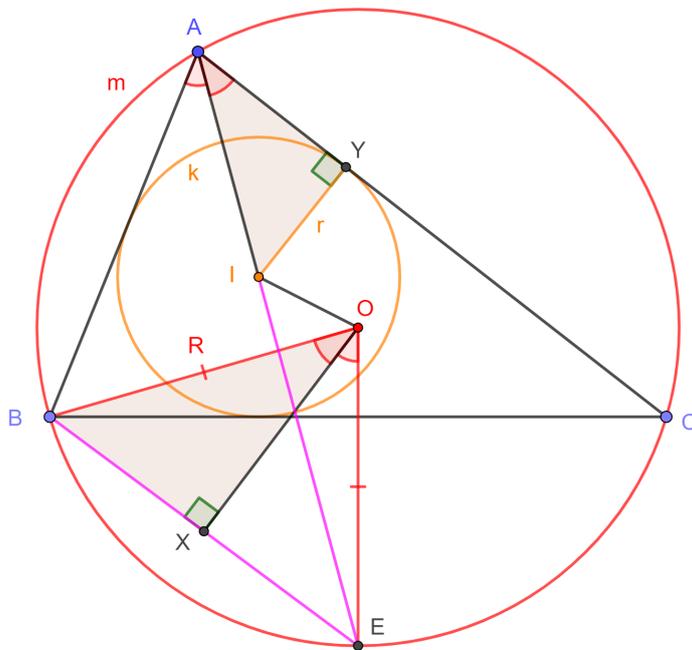
□

2.18 Distância Incentro-Circuncentro ou Fórmula de Euler

Proposição 18 (Distância Incentro-Circuncentro ou Fórmula de Euler). *A Figura 2.20 mostra um triângulo ABC . Seja I seu Incentro, k sua circunferência inscrita de raio r . Adicionalmente, seja m a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$, de centro O e raio R . Então:*

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

Figura 2.20: Guia para a demonstração da Proposição 18. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja E o ponto de interseção da bissetriz AI com m . Pela Potência do ponto I em relação a m tem-se:

$$R^2 - OI^2 = AI \cdot EI. \quad (2.18.1)$$

Sejam X e Y os pés das perpendiculares de O e I até BE e AC , respectivamente. Como o $\triangle OBE$ é isósceles de base BE , e devido a relação entre ângulo central e inscrito, relativo a corda BE , segue que $\angle YAI = \angle XOB$.

Logo, pelo caso de semelhança AA, tem-se $\triangle AIY \sim \triangle OBX$. Portanto,

$$\frac{BX}{IY} = \frac{OB}{AI} \quad \text{ou} \quad AI = \frac{OB \cdot IY}{BX} = \frac{Rr}{\frac{EB}{2}} = \frac{2Rr}{EB}.$$

Viu-se na Proposição 17 que $EB = EI$, segue que:

$$AI = \frac{2Rr}{EI}. \quad (2.18.2)$$

Substituindo (2.18.2) em (2.18.1) encontra-se $R^2 - OI^2 = 2Rr$. Logo,

$$OI^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r).$$

□

Capítulo 3

Construções, exercícios e desafios

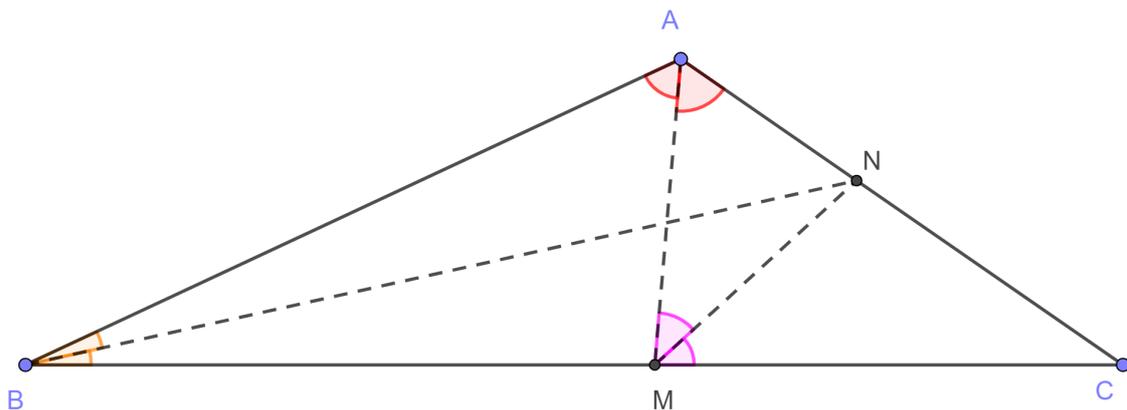
3.1 Bissetrizes internas e externas, ex-incentro

Problema 1. *Sejam ABC um triângulo, M o pé da bissetriz interna do ângulo A e N o pé da bissetriz interna do $\angle B$. Suponha-se que MN seja bissetriz do $\angle AMC$. Calcular a medida do $\angle A$.*

3.1.1 Resolução do Problema 1

A Figura 3.1 ilustra uma construção possível.

Figura 3.1: Ilustração inicial do Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



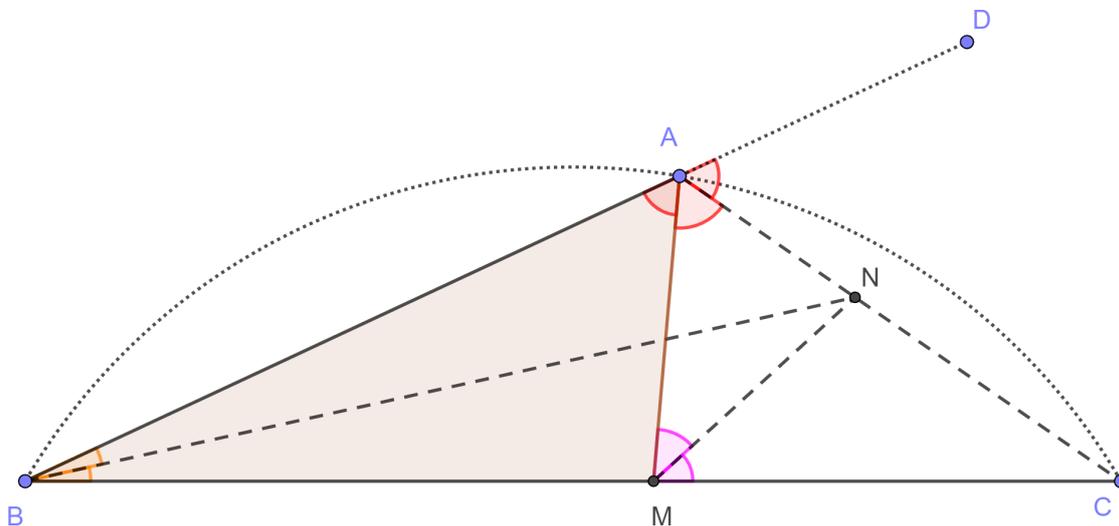
Fonte: O autor.

Como o ponto N é a interseção da bissetriz interna em B e da bissetriz externa em M do $\triangle ABM$ deve-se ter que AN é a bissetriz externa em A . Logo,

$$\angle MAN = \angle NAD = \angle BAM = \alpha.$$

Ou seja N é ex-incentro relativo ao vértice B do $\triangle ABM$. Com isto, $\alpha = 60^\circ$ e $\angle A = 120^\circ$. O ponto A pode ser qualquer um no arco capaz de 120° do segmento BC (Figura 3.2).

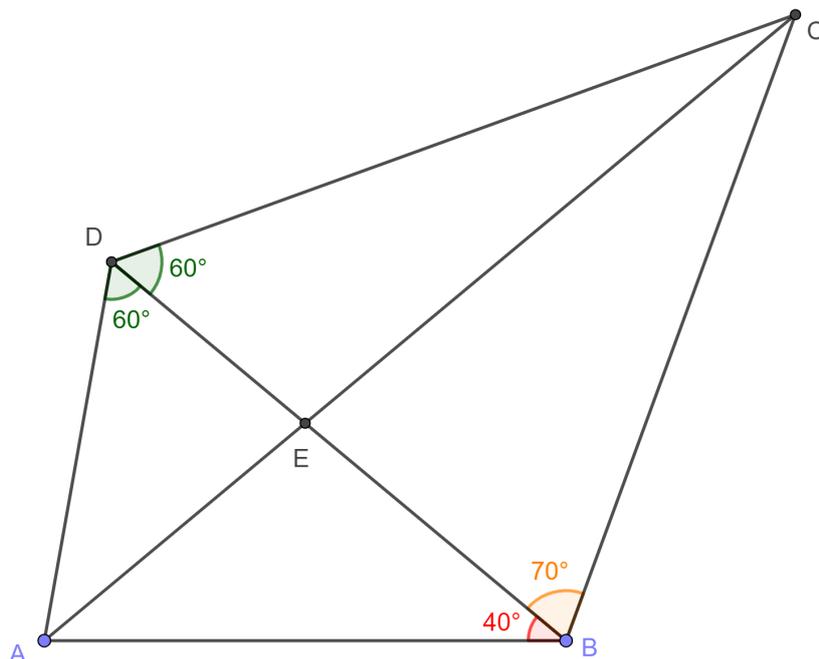
Figura 3.2: Ilustração do Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

3.2 Bissetrizes internas e externas, ex-incentro-II

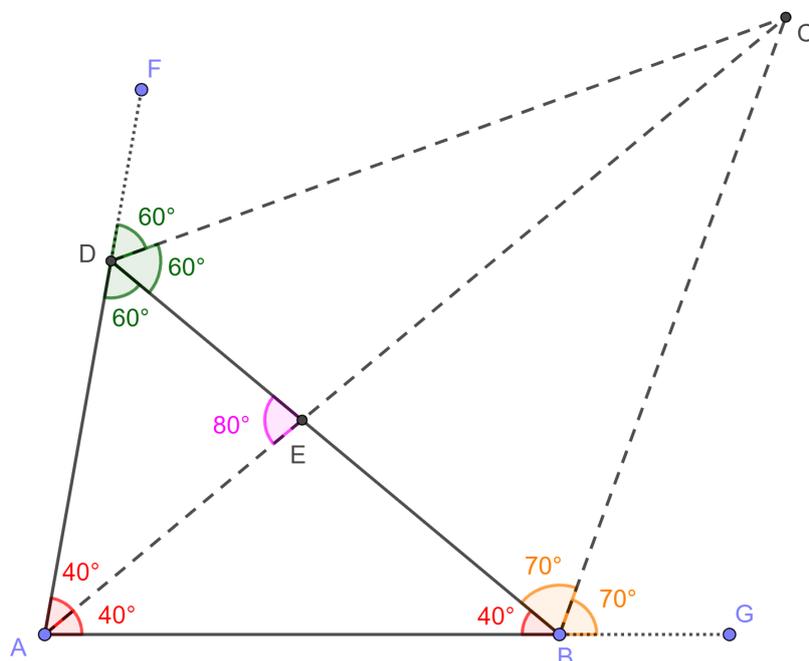
Problema 2. *Seja o quadrilátero $ABCD$ da Figura 3.3 e o ponto $E = AC \cap BD$. Determinar a medida do $\angle AED$.*

Figura 3.3: Ilustração inicial do Problema 2. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

3.2.1 Resolução do Problema 2

Os ângulos externos em B e D do $\triangle ABD$ são $\angle CBG = 70^\circ$ e $\angle FDC = 60^\circ$. Com isso BC e DC são bissetrizes externas. Segue que AC deve ser uma bissetriz interna do $\angle A = 80^\circ$ e $\angle DAE = 40^\circ$. No $\triangle AED$ conclui-se que $\angle AED = 80^\circ$ (Figura 3.4).

Figura 3.4: Ilustração do Problema 2. Versão interativa [aqui](#).

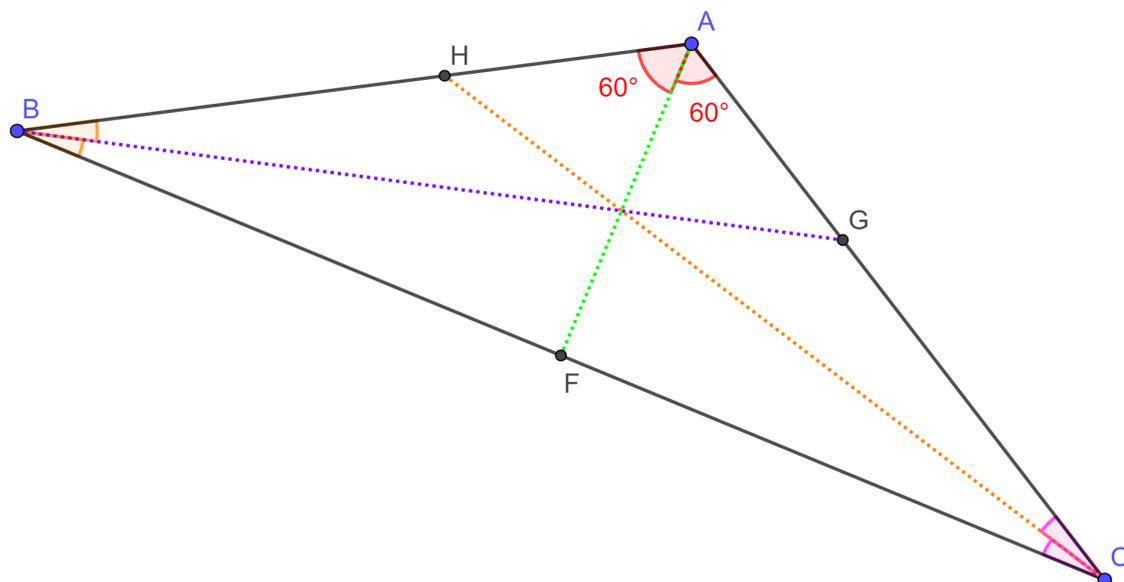
Fonte: O autor.

3.3 Bissetrizes internas e externas, ex-incentro-III

Problema 3. *Sejam AF , BG e CH as bissetrizes de um triângulo ABC que tem $\angle A$ medindo 120° . Provar que o $\angle GFH$ é reto.*

3.3.1 Resolução do Problema 3

A Figura 3.5 apresenta uma construção inicial.

Figura 3.5: Ilustração inicial do Problema 3. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Como AF é bissetriz, então $\angle BAF = \angle FAC = 60^\circ$. Considera-se o prolongamento do segmento AB no sentido de B para A (Figura 3.6). E o ponto J sobre esse prolongamento. Como $\angle BAJ = 180^\circ$, então $\angle CAJ = 60^\circ$. No $\triangle BAF$ tem-se que AG é bissetriz externa relativa ao vértice A e BG é bissetriz interna. Assim, $G = AG \cap BG$ é centro de uma circunferência ex-inscrita. Por isso, FG é bissetriz externa e:

$$\angle AFG = \frac{1}{2}\angle AFC. \quad (3.3.1)$$

Analogamente, considera-se o prolongamento do segmento AC no sentido de C para A . Seja K um ponto sobre esse prolongamento. Segue que $\angle BAK = 60^\circ$. No $\triangle CAF$ tem-se que AH é bissetriz externa relativa ao vértice A e CH é bissetriz interna. Assim, H é centro de uma circunferência ex-inscrita. Por isso, HF é bissetriz externa e:

$$\angle AFH = \frac{1}{2}\angle AFB. \quad (3.3.2)$$

Pelo ângulo raso em F e as equações (3.3.1) e (3.3.2) conclui-se que:

$$\angle GFH = 90^\circ.$$

Capítulo 4

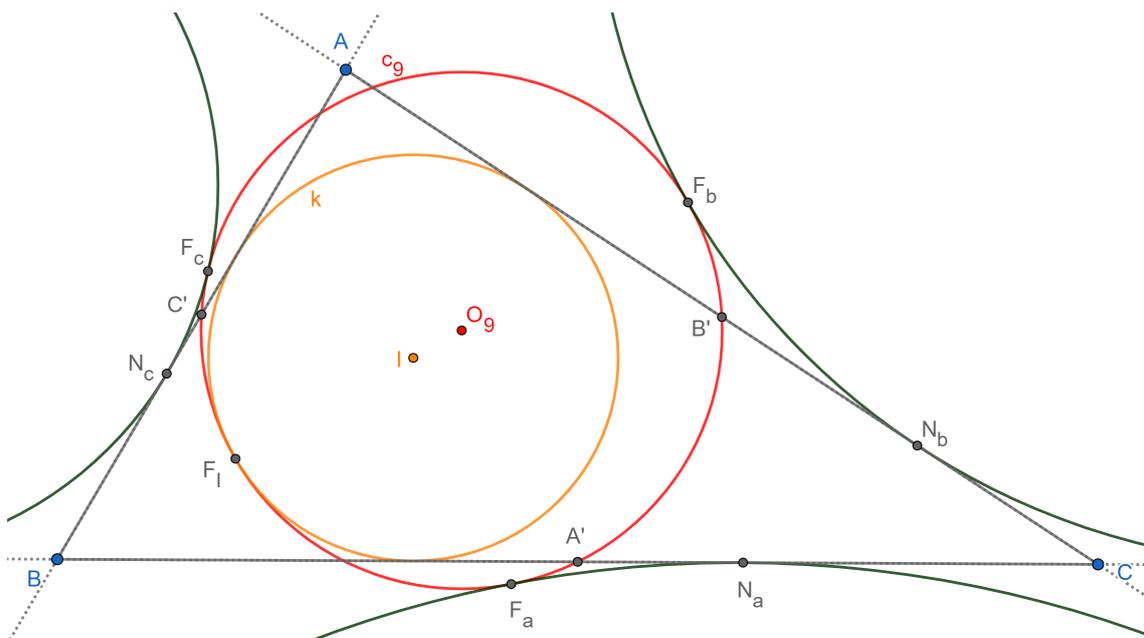
Teorema de Feuerbach

4.1 Teorema de Feuerbach utilizando inversão

Karl Feuerbach foi um geômetra que descobriu o círculo de nove pontos de um triângulo. Nasceu em 1800 e morreu em 1834 [38]. Uma apresentação em vídeo do Teorema de Feuerbach está disponível [aqui](#).

Teorema 19 (Feuerbach). *O círculo de nove pontos c_9 (vermelho) é tangente ao incírculo k (amarelo) e aos três ex-círculos do $\triangle ABC$ (Figura 4.1). Os pontos de tangência F_I , F_a , F_b e F_c são denominados de Feuerbach.*

Figura 4.1: Apresentação do Teorema de Feuerbach. Versão interativa [aqui](#).

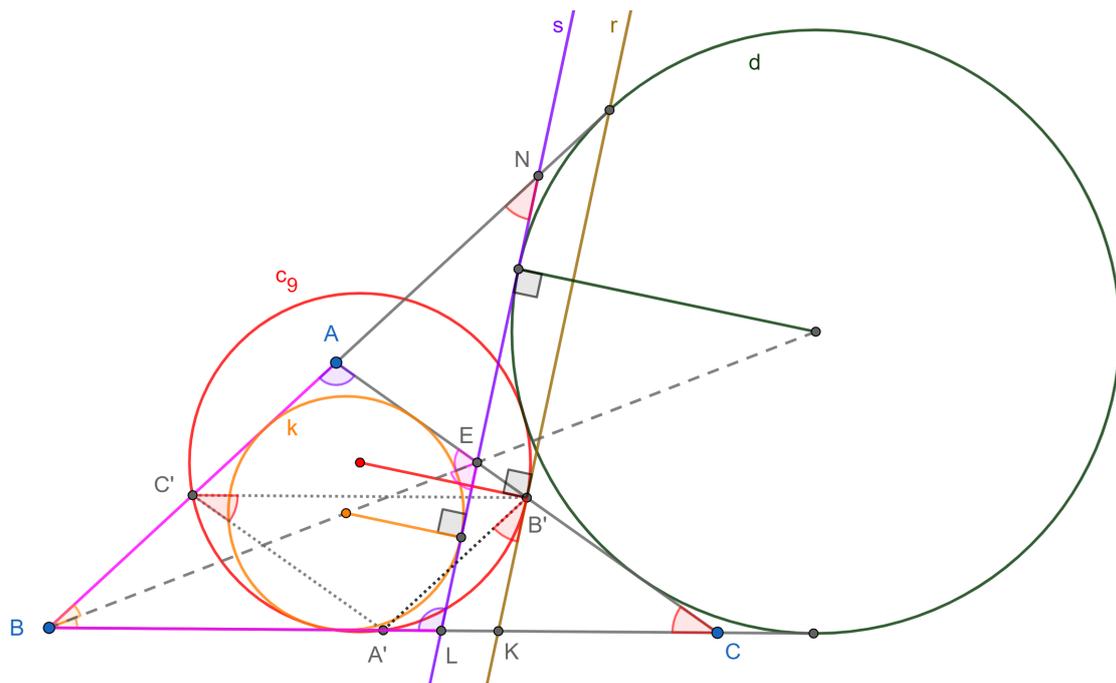


Fonte: O autor.

Antes de demonstrar o teorema anterior precisa-se estudar três lemas [3].

Lema 20. *Sejam A' , B' e C' os pontos médios dos lados de um triângulo ABC , c_9 a sua circunferência dos nove pontos, s a segunda (diferente de AC) reta tangente interna as circunferências inscrita k e ex-inscrita d (correspondente ao vértice B). Seja ainda r uma reta tangente a c_9 por B' . Então r é paralela a s (Figura 4.2).*

Figura 4.2: Lema 20. Teorema de Feuerbach. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja o ponto $K = r \cap BC$. Por serem ângulos de segmentos e inscritos referentes a mesma corda $A'B'$ de c_9 vale que $\angle KB'A' = \angle B'C'A'$. Como $C'B'$ é base média relativa a BC , então $A'CB'C'$ é um paralelogramo e

$$\angle B'C'A' = \angle A'CB'.$$

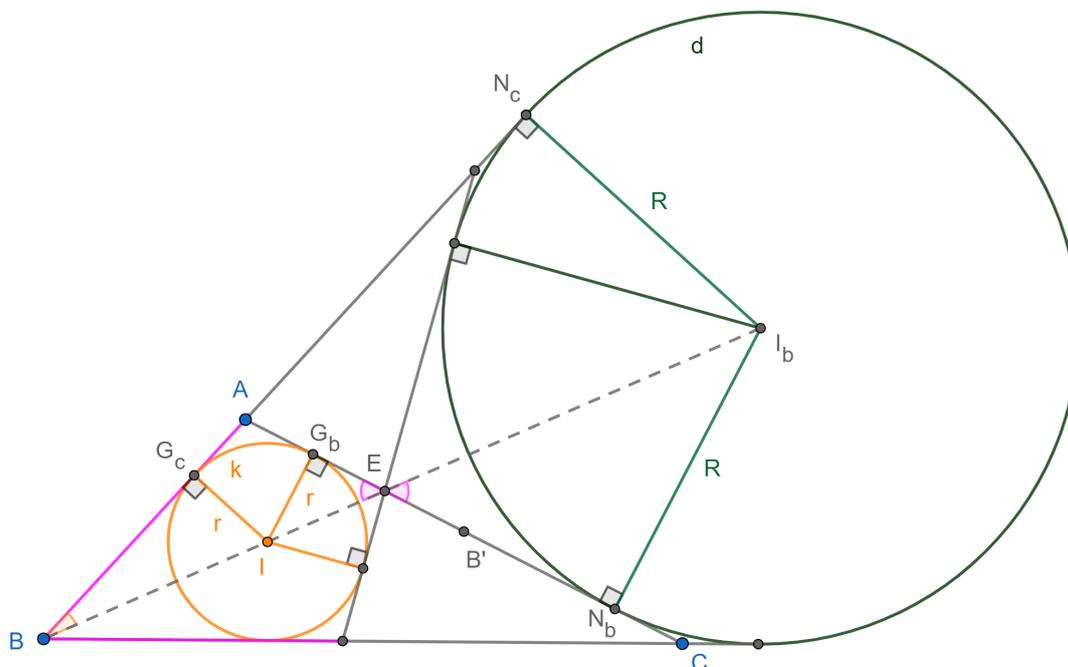
Sejam o ponto $E = s \cap AC$ e $L = s \cap BC$. Como a reta BE é bissetriz por construção obtêm-se que $\angle EBA = \angle EBL$ e $\angle BEL = \angle BEA$. Pelo critério de congruência ALA segue que $\triangle BEL \equiv \triangle BEA$. Consequentemente, $\angle BAE = \angle BLE$ e $BA = BL$.

Seja o ponto $N = s \cap BA$. Pelo critério de congruência ALA vale que $\triangle BLN \equiv \triangle BAC$. Com isto, $\angle BNL = \angle BCA$. Como $\angle BNL = \angle A'B'K$ as retas r e s são paralelas. \square

Lema 21. *Sejam G_b e N_b os pontos de interseção da circunferência inscrita $k(I)$ e ex-inscrita $d(I_b)$ do triângulo ABC com o segmento AC , respectivamente. Então: a) O ponto médio do*

segmento AC , isto é B' , também é ponto médio do segmento G_bN_b . b) Os pontos I e I_b dividem harmonicamente o segmento BE (Figura 4.3).

Figura 4.3: Lema 21. Teorema de Feuerbach. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. A prova do item a) encontra-se no Corolário 2.1 em [30].

Item b). Sejam G_c e N_c os pontos de interseção da circunferência inscrita $k(I)$ e ex-inscrita $d(I_b)$ do triângulo ABC com a reta AB , respectivamente (Figura 4.3). Por AA vale a semelhança:

$$\triangle BG_cI \sim \triangle BN_cI_b.$$

Segue que:

$$\frac{IB}{I_bB} = \frac{IG_c}{I_bN_c} = \frac{r}{R}. \tag{4.1.1}$$

Por AA também vale a semelhança:

$$\triangle IG_bE \sim \triangle I_bN_bE.$$

Segue que:

$$\frac{IE}{I_bE} = \frac{IG_b}{I_bN_b} = \frac{r}{R}. \tag{4.1.2}$$

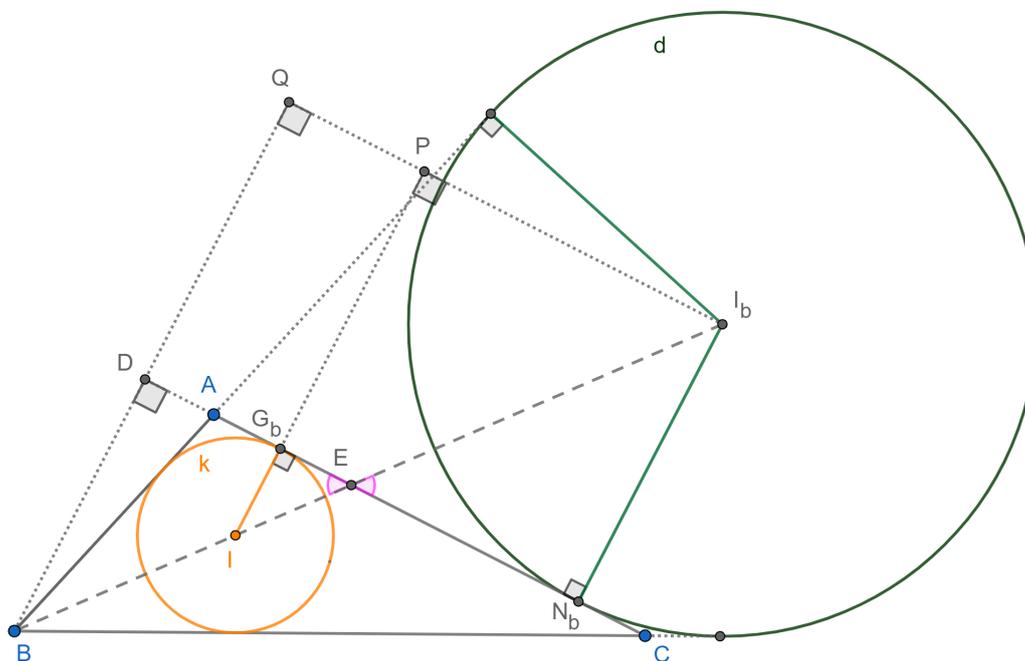
De (4.1.1) e (4.1.2) encontra-se:

$$\frac{IB}{I_bB} = \frac{IE}{I_bE}.$$

A equação anterior significa que os pontos I e I_b dividem harmonicamente o segmento BE e vice-versa. Isto é, os pontos B e E dividem harmonicamente o segmento II_b . \square

Lema 22. *Seja D o pé da altura do vértice B sobre a reta AC . Os pontos D e E são conjugados harmônicos em relação ao segmento G_bN_b (Figura 4.4).*

Figura 4.4: Lema 22. Teorema de Feuerbach. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Pela semelhança $\triangle IG_bE \sim \triangle I_bN_bE$ sabe-se que:

$$\frac{G_bE}{N_bE} = \frac{IE}{I_bE}.$$

Como I e I_b dividem harmonicamente o segmento BE (Lema 21) encontra-se:

$$\frac{G_bE}{N_bE} = \frac{IB}{I_bB}. \tag{4.1.3}$$

Traça-se por I_b uma paralela a reta AC e marca-se sobre esta as projeções ortogonais Q

e P dos pontos B e I , respectivamente. Pelo Teorema de Tales tem-se:

$$\frac{IB}{I_bB} = \frac{QP}{QI_b} = \frac{G_bD}{N_bD}. \tag{4.1.4}$$

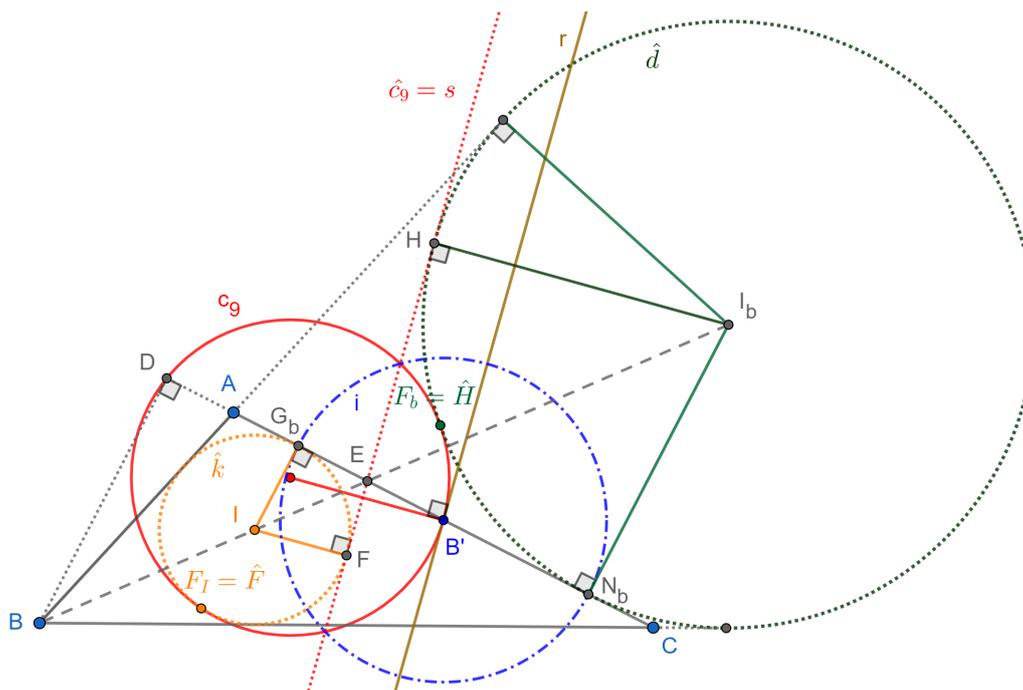
De (4.1.3) e (4.1.4) encontra-se:

$$\frac{G_bE}{N_bE} = \frac{G_bD}{N_bD}.$$

A equação anterior significa que os pontos D e E dividem harmonicamente o segmento G_bN_b e vice-versa. Isto é, os pontos G_b e N_b dividem harmonicamente o segmento DE . \square

Teorema 23 (Feuerbach). *O círculo de nove pontos c_9 (vermelho) é tangente ao incírculo k (amarelo) e ao ex-círculo d do $\triangle ABC$ (Figura 4.5).*

Figura 4.5: Demonstração do Teorema de Feuerbach. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Considera-se uma circunferência de inversão i , com centro em B' e diâmetro G_bN_b (Figura 4.5). Isto é possível pois viu-se no Lema 21 que $G_bB' = B'N_b$.

Por construção, as circunferências k e d são ortogonais a i . Pela Proposição 9, página 30, em [18], elas são invariantes após a inversão em relação a i . Ou seja, $\hat{k} = Inv(k, i) = k$ e $\hat{d} = Inv(d, i) = d$. A reta AC também é invariante, pois passa pelo centro de inversão.

A circunferência de nove pontos do $\triangle ABC$, ou seja c_9 , passa pelo centro de inversão B' . Consequentemente, sua inversa \hat{c}_9 é uma reta. Como os pontos D e E são pares harmônicos relativos ao segmento $G_b N_b$ (Lema 22), então, pela Proposição 10, página 31, em [18], $\hat{D} = \text{Inv}(D, i) = E$ e \hat{c}_9 passa pelo ponto E .

Adicionalmente, pela Proposição 4, página 25, em [18], \hat{c}_9 é paralela a reta r (tangente a c_9 por B'). Também viu-se no Lema 20 que r é paralela com a reta s , segunda tangente interna comum de k e d e que passa por E . Ou seja, $\hat{c}_9 = s$.

Como \hat{c}_9 é tangente as circunferências \hat{k} e \hat{d} , pelo Corolário 7, página 28, em [18], segue que c_9 é tangente com k e d . De fato, os pontos de Feuerbach são $F_I = \text{Inv}(F, i) = \hat{F}$ e $F_b = \text{Inv}(H, i) = \hat{H}$. A demonstração da tangência entre c_9 e os outros dois ex-incírculos é feita de forma análoga. \square

4.2 Teorema de Ptolomeu

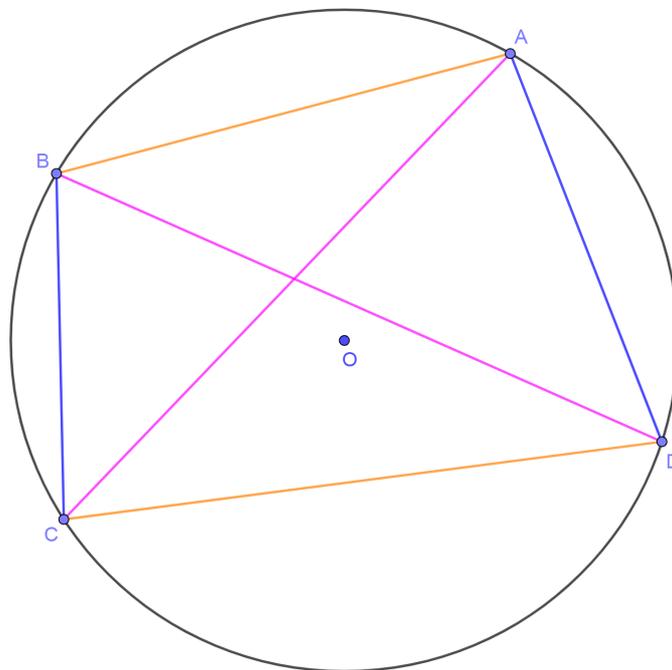
Definição 6. *Um quadrilátero é dito inscritível ou cíclico quando seus quatro vértices pertencem a uma mesma circunferência.*

Teorema 24 (Teorema de Ptolomeu). *Em um quadrilátero inscritível $ABCD$ o produto dos comprimentos das diagonais é igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos (Figura 4.6). Isto é, vale*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \quad (4.2.1)$$

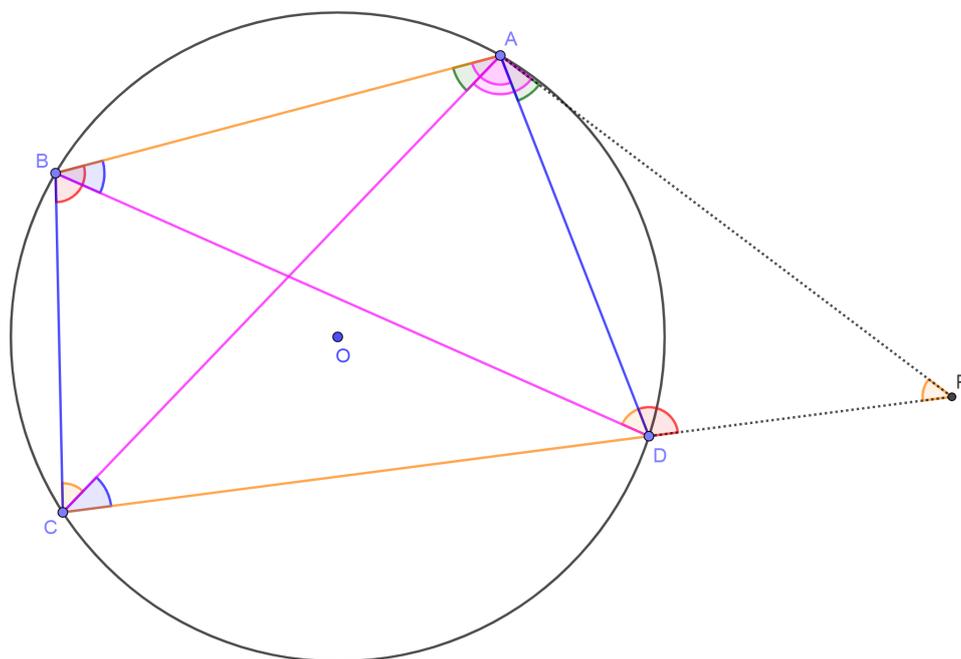
A forma recíproca também é verdadeira. Se (4.2.1) for verdade para o quadrilátero convexo $ABCD$, então ele é inscritível.

Figura 4.6: Enunciado do Teorema de Ptolomeu. Para um quadrilátero ser inscritível o produto dos comprimentos das diagonais deve ser igual à soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos e vice-versa. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. i) Forma direta do Teorema de Ptolomeu. Suponha-se que $ABCD$ seja um quadrilátero inscritível. Tem-se que $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. Estende-se a reta CD e coloca-se o ponto $P \in CD$, tal que $\angle BAC = \angle PAD$ (Figura 4.7).

Figura 4.7: Demonstração da forma direta do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Como $\angle ADP + \angle ADC = 180^\circ$ segue que $\angle ABC = \angle ADP$. Logo,

$$\triangle ABC \sim \triangle ADP,$$

pelo critério de semelhança ângulo-ângulo. Consequentemente:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DP} = \frac{AC}{AP} \Rightarrow DP = \frac{AD \cdot BC}{AB}. \quad (4.2.2)$$

Adicionalmente, $\angle BAD = \angle PAC$, pois $\angle DAC$ é comum aos dois anteriores, e $\angle ABD = \angle ACD$, devido a "enxergarem", a mesma corda AD . Com isto

$$\triangle ABD \sim \triangle ACP,$$

pelo critério de semelhança ângulo-ângulo. Segue que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AP} = \frac{BD}{CP} \Rightarrow CP = \frac{AC \cdot BD}{AB}. \quad (4.2.3)$$

De (4.2.2) e (4.2.3) tem-se

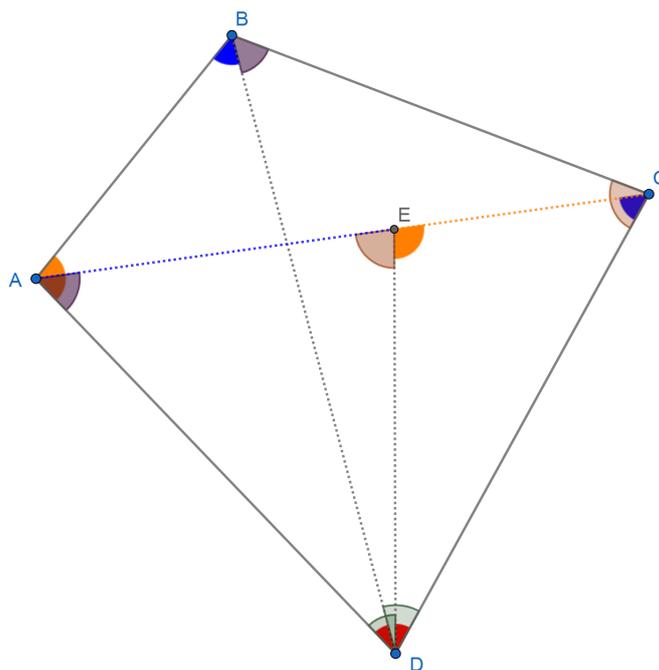
$$CP = CD + DP = CD + \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{AC \cdot BD}{AB}.$$

Multiplicando a última igualdade por AB encontra-se (4.2.1).

ii) Recíproca do Teorema de Ptolomeu. A Figura 4.8 ilustra a construção. Suponha-se que $ABCD$ seja um quadrilátero convexo e vale (4.2.1). Esboça-se um ponto E , no interior de $ABCD$, tal que $\angle EDC = \angle ADB$ e

$$\frac{ED}{DC} = \frac{AD}{DB}. \quad (4.2.4)$$

Figura 4.8: Demonstração da recíproca do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Como $\angle EDC = \angle ADB$ e, por (4.2.4), os lados correspondentes são proporcionais, pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado, tem-se:

$$\triangle EDC \sim \triangle ADB.$$

Logo, $\angle DAB = \angle DEC$, $\angle ABD = \angle ECD$ e

$$\frac{ED}{AD} = \frac{DC}{DB} = \frac{EC}{AB}. \quad (4.2.5)$$

Nota-se que $\angle BDC = \angle ADE$, pois $\angle EDB$ é comum. Logo, por um par de ângulos congruentes e lados correspondentes proporcionais, (4.2.5), tem-se:

$$\triangle BDC \sim \triangle ADE.$$

Segue que $\angle DAE = \angle DBC$, $\angle AED = \angle BCD$ e

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DC}{DE} = \frac{BC}{AE}. \quad (4.2.6)$$

Partindo de (4.2.1) escreve-se:

$$AC = \frac{AD \cdot BC}{BD} + \frac{AB \cdot CD}{BD}.$$

Comparando o lado direito da equação anterior com (4.2.5) e (4.2.6) segue que:

$$AC = AE + EC.$$

Isto é, A, E e C são colineares. Como $\angle ABD = \angle ACD$, conclui-se que o quadrilátero $ABCD$ é cíclico. \square

4.3 Teorema de Casey

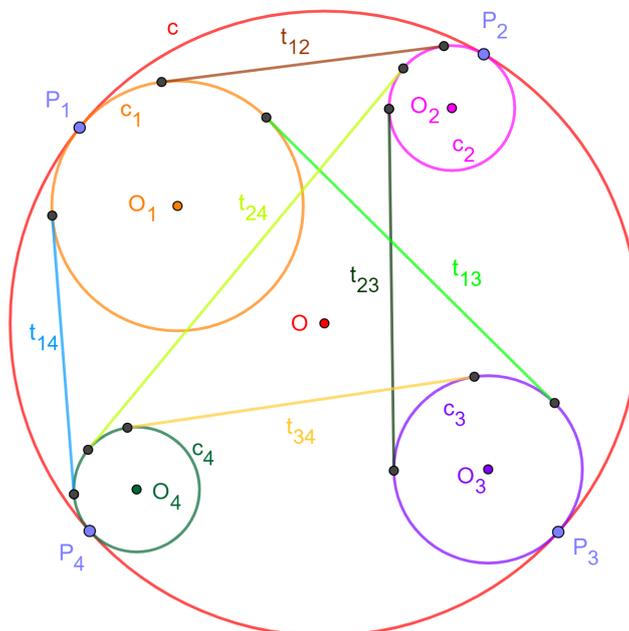
John Casey foi um geômetra irlandês, mundialmente reconhecido por seus trabalhos sobre a geometria de triângulos e circunferências. Nasceu em 1820 e morreu em 1891 [4].

Teorema 25 (Teorema de Casey). *Sejam $c_i(O_i, r_i)$, com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, quatro circunferências que tangenciam um determinado círculo $c(O, r)$ nos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 , respectivamente. Os pontos são tomados nessa ordem em sentido horário. Seja t_{ij} o comprimento de um segmento determinado por uma tangente comum dos círculos c_i e c_j . Se c_i e c_j tocam c ambos internamente, ou ambos externamente, a tangente comum é externa. Caso contrário, t_{ij} é definido como a tangente comum interna. Então:*

$$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}.$$

Algumas das circunferências c_1, c_2, c_3, c_4 podem ser degeneradas (Figura 4.9). No caso em que todas são degeneradas o Teorema de Casey coincide com o Teorema de Ptolomeu. O enunciado também vale quando c é uma reta, pois uma reta é um caso especial de circunferência com $r \rightarrow \infty$.

Figura 4.9: Teorema de Casey. A versão interativa [aqui](#) permite verificar diferentes configurações.



Fonte: O autor.

Demonstração. Caso em que as quatro circunferências são internas a c . A Figura 4.10 permite acompanhar a explicação. Seja AB uma corda de c e tangente comum externa de c_1 e c_2 em Q_1 e Q_2 , respectivamente.

Esboça-se a reta P_1Q_1 que intersecta c no ponto S . Como os $\triangle P_1O_1Q_1$ e $\triangle P_1OS$ são isósceles, com um ângulo das bases coincidentes, por ângulo-ângulo, são semelhantes. Segue que $O_1Q_1 \parallel OS$ e, como $\angle O_1Q_1B = 90^\circ$, $OS \perp AB$. Logo, S é o ponto médio do arco AB . Analogamente mostra-se que a reta P_2Q_2 intercepta c em S .

Por opostos pelo vértice, ângulos centrais e de segmento e a semelhança vista vale:

$$\angle SQ_1Q_2 = \angle P_1Q_1A = \frac{1}{2}\angle P_1O_1Q_1 = \frac{1}{2}\angle P_1OS = \angle SP_2P_1.$$

Analogamente, $\angle SQ_2Q_1 = \angle SP_1P_2$.

Logo, por ângulo-ângulo, $\triangle SQ_1Q_2 \sim \triangle SP_2P_1$. Com isso pode-se escrever a proporcionalidade dos lados:

$$\frac{Q_1Q_2}{P_2P_1} = \frac{SQ_1}{SP_2} = \frac{SQ_2}{SP_1}.$$

A igualdade anterior é equivalente a:

$$\frac{Q_1Q_2}{P_2P_1} = \sqrt{\frac{SQ_1 \cdot SQ_2}{SP_2 \cdot SP_1}} = \sqrt{\frac{OO_1 \cdot OO_2}{OP_2 \cdot OP_1}}.$$

A última igualdade é resultado das semelhanças dos $\triangle P_1O_1Q_1$ e $\triangle P_1OS$ e $\triangle P_2O_2Q_2$ e $\triangle P_2OS$. Segue que

$$t_{12} = Q_1Q_2 = P_2P_1 \sqrt{\frac{(r-r_1)(r-r_2)}{r^2}}.$$

Analogamente, para os pares de subíndices ij , com $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, pode ser escrito:

$$t_{ij} = P_jP_i \sqrt{\frac{(r-r_i)(r-r_j)}{r}}. \quad (4.3.1)$$

Pelo Teorema 24 (Ptolomeu), no quadrilátero inscrito $P_1P_2P_3P_4$, vale que:

$$P_1P_2 \cdot P_3P_4 + P_2P_3 \cdot P_1P_4 = P_1P_3 \cdot P_2P_4. \quad (4.3.2)$$

Em cada um dos somandos de (4.3.2) aparecem todos os subíndices. Portanto, multiplicando (4.3.2) por

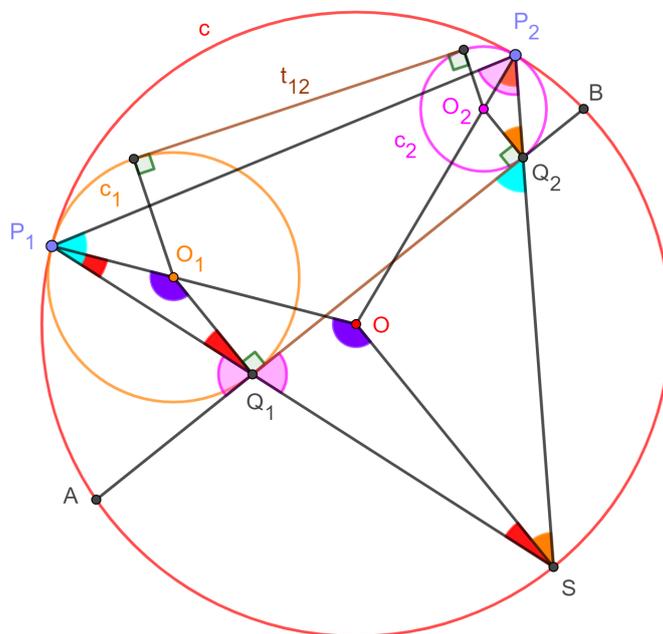
$$\frac{\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)}}{r},$$

e utilizando (4.3.1) encontra-se:

$$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}.$$

□

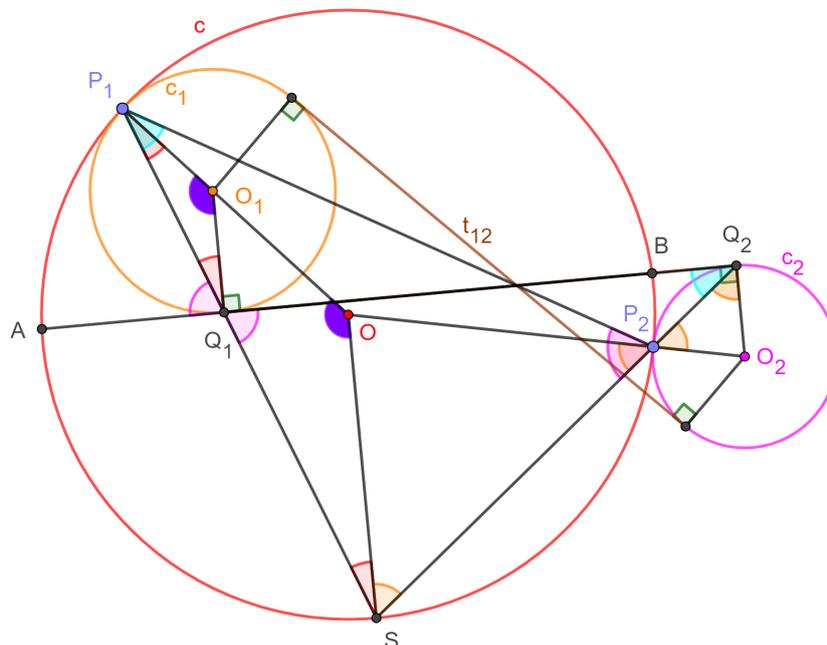
Figura 4.10: Demonstração do Teorema de Casey no caso em que as quatro circunferências são internas a c . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

A Figura 4.11 ilustra o caso em que a circunferência c_1 é interna e c_2 externa a c . A demonstração é análoga, mas deve-se trocar $(r - r_k)$ por $(r + r_k)$ quando c_k tangencia c externamente.

Figura 4.11: Caso em que a circunferência c_1 é interna e c_2 externa a c . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

A recíproca do Teorema 25 (Casey) também é válida.

Teorema 26 (Recíproca do Teorema de Casey). *Dadas quatro circunferências c_1, c_2, c_3, c_4 , caso exista uma escolha de sinais e tangentes comuns interna (ou externas) t_{ij} que satisfazem a equação*

$$\pm t_{12}t_{34} \pm t_{23}t_{14} \pm t_{13}t_{24} = 0,$$

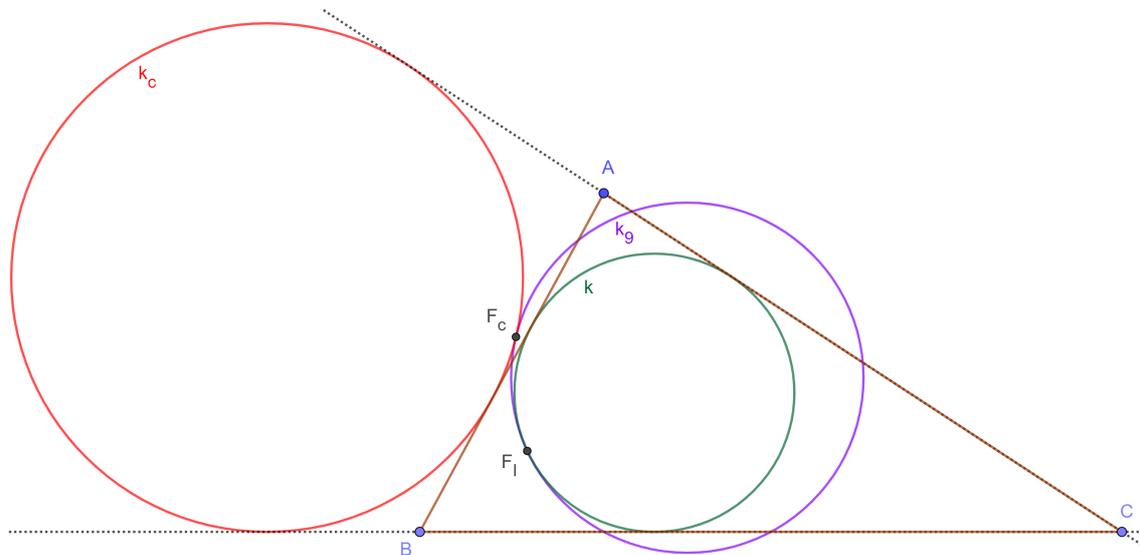
então existe uma circunferência c que tangencia as quatro anteriores.

A demonstração utiliza o conceito de inversão relativa a uma circunferência e não será apresentada aqui.

4.4 Teorema de Feuerbach utilizando Casey

Teorema 27 (Feuerbach). *Num $\triangle ABC$ seu círculo de nove pontos k_9 é tangente ao incírculo k e aos três ex-incírculos k_a, k_b e k_c (Figura 4.12).*

Figura 4.12: Teorema de Feuerbach. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Sejam R, S e T e A', B' e C' os pontos médios e interseções de k com os lados $BC = a, CA = b$ e $AB = c$, respectivamente (Figura 4.13). Considera-se, sem perda de generalidade, que $a > b > c$.

Imaginam-se os pontos $R, S, T \in k_9$ como circunferências de raio zero. Será utilizada a recíproca do teorema de Casey. Para tal deve-se mostrar que:

$$t_{TSt_{kR}} + t_{RS t_{Tk}} = t_{TR t_{Sk}}. \tag{4.4.1}$$

Os segmentos TS, RS e TR são bases médias. Logo,

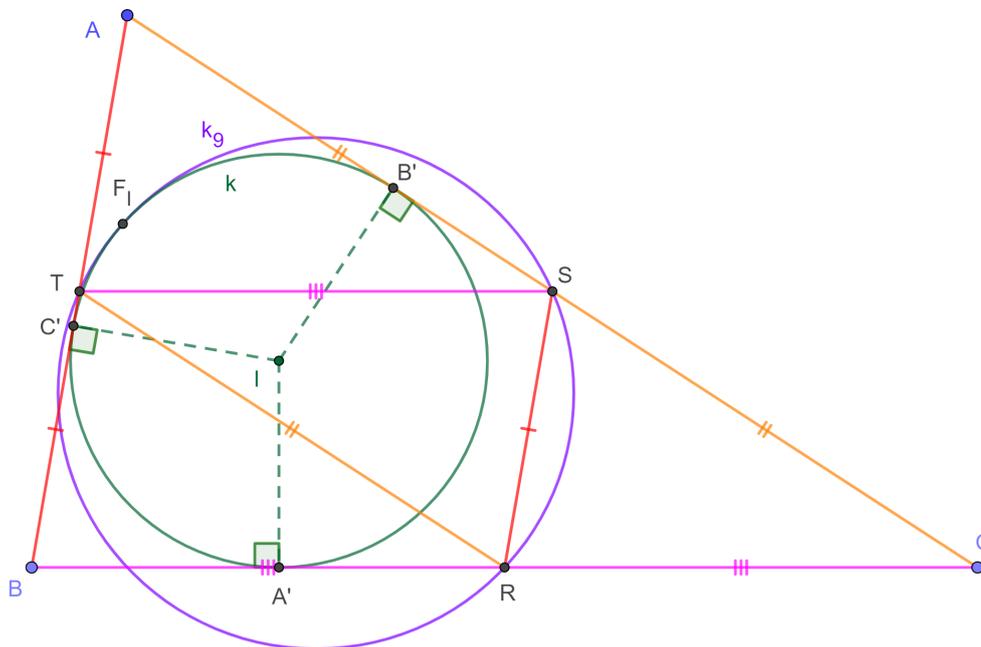
$$t_{TS} = \frac{a}{2}, t_{RS} = \frac{c}{2}, t_{TR} = \frac{b}{2}. \tag{4.4.2}$$

Pelas relações métricas do triângulo devido ao incírculo [30] têm-se:

$$t_{kR} = A'R = \frac{b-c}{2}, t_{Tk} = TC' = \frac{a-b}{2}, t_{Sk} = SB' = \frac{a-c}{2}. \tag{4.4.3}$$

Substituindo (4.4.2) e (4.4.3) em (4.4.1) verifica-se a validade de (4.4.1). Pela recíproca do Teorema de Casey as circunferências k_9 e k são tangentes. O ponto de tangência anterior é denotado por F_I .

Figura 4.13: Teorema de Feuerbach, incírculo. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam A'', B'' e C'' os pontos de interseções da circunferência ex-inscrita k_c com as retas BC, CA e AB , respectivamente (Figura 4.14). Novamente, imaginam-se os pontos $R, S, T \in k_g$ como circunferências de raio zero. Será utilizada a recíproca do teorema de Casey. Para tal deve-se mostrar que:

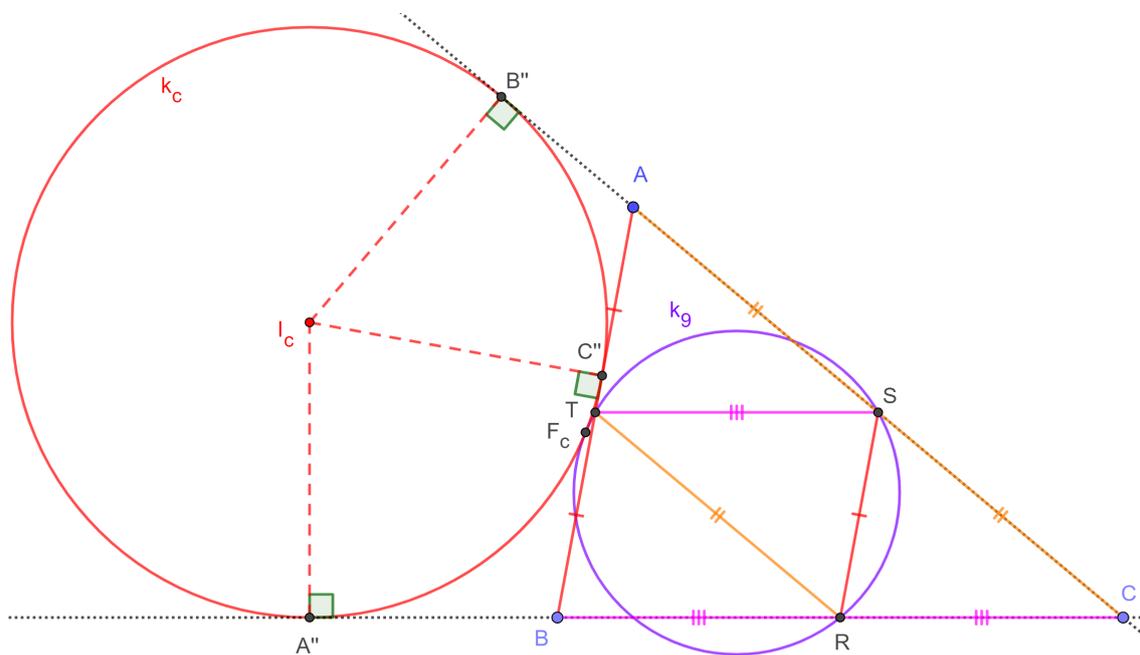
$$t_{TRt_{k_c}S} + t_{RSt_{Tk_c}} = t_{TSt_{Rk_c}}. \tag{4.4.4}$$

Seja p o semiperímetro do $\triangle ABC$. Pelas relações métricas do triângulo devido ao ex-incírculo [30] têm-se:

$$t_{k_cS} = B''S = p - \frac{b}{2}, t_{Tk_c} = TC'' = \frac{a-b}{2}, t_{Rk_c} = RA'' = p - \frac{a}{2}. \tag{4.4.5}$$

Substituindo (4.4.2) e (4.4.5) em (4.4.4) verifica-se a validade de (4.4.4). Pela recíproca do Teorema de Casey as circunferências k_g e k_c são tangentes. O ponto de tangência anterior é denotado por F_c .

Figura 4.14: Teorema de Feuerbach, ex-incírculo. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

□

Capítulo 5

Problemas de olimpíadas internacionais

5.1 Ex-incírculos. Incentro. Relação de Stewart. P1 IMO 1970.

Problema 4. *Dado um ponto M no lado AB do triângulo ABC , sejam r_1 e r_2 raios das círculos inscritos nos triângulos ACM e BCM , respectivamente e sejam ρ_1 e ρ_2 os raios dos Ex-incírculos dos triângulos ACM e BCM nos lados AM e BM , respectivamente. Sejam r e ρ os raios do círculo inscrito e do Ex-incírculo no lado AB do $\triangle ABC$, respectivamente. Provar que:*

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r}{\rho}.$$

A IMO 1970 foi realizada na cidade de Keszthely, Hungria. Problema 8 da SL, proposto pela delegação da Polônia e escolhido como primeiro da competição [2].

5.1.1 Resolução do Problema 4.

A Figura 5.1 mostra uma construção geométrica para o Problema 4.

$$\frac{r_2}{\rho_2} = \frac{CP_2}{CQ_2}.$$

Seja p_2 o semiperímetro do $\triangle BCM$. Sabe-se das Proposições 4 e 5 que:

$$CP_2 = p_2 - y = \frac{a + l - y}{2},$$

$$CQ_2 = p_2 = \frac{a + l + y}{2}.$$

Logo,

$$\frac{r_2}{\rho_2} = \frac{a + l - y}{a + l + y}. \quad (5.1.2)$$

Do mesmo modo, denota-se com I o Incentro e com S o centro do Ex-incírculo do $\triangle ABC$. Sejam P e Q os pés das perpendiculares de I e S , respectivamente, à reta BC . Então:

$$\triangle ICP \sim \triangle SCQ,$$

$$\frac{r}{\rho} = \frac{CP}{CQ}.$$

Seja p o semiperímetro do $\triangle ABC$. Sabe-se das Proposições 4 e 5 que:

$$CP = p - c = \frac{a + b - c}{2},$$

$$CQ = p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Logo,

$$\frac{r}{\rho} = \frac{a + b - c}{a + b + c}. \quad (5.1.3)$$

Do enunciado do Problema 4 e as equações (5.1.1), (5.1.2) e (5.1.3) resta provar que:

$$\left(\frac{b + l - x}{b + l + x}\right) \cdot \left(\frac{a + l - y}{a + l + y}\right) = \frac{a + b - c}{a + b + c}.$$

Após multiplicar pelos denominadores na equação anterior, lembrando que $c = x + y$ e várias simplificações, encontra-se a Relação de Stewart para a ceviana $CM = l$ do $\triangle ABC$:

$$\frac{b^2}{x} + \frac{a^2}{y} = c + l^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

5.2 Ex-incírculo. Incírculo. Semelhança de triângulos. P4 IMO 1992.

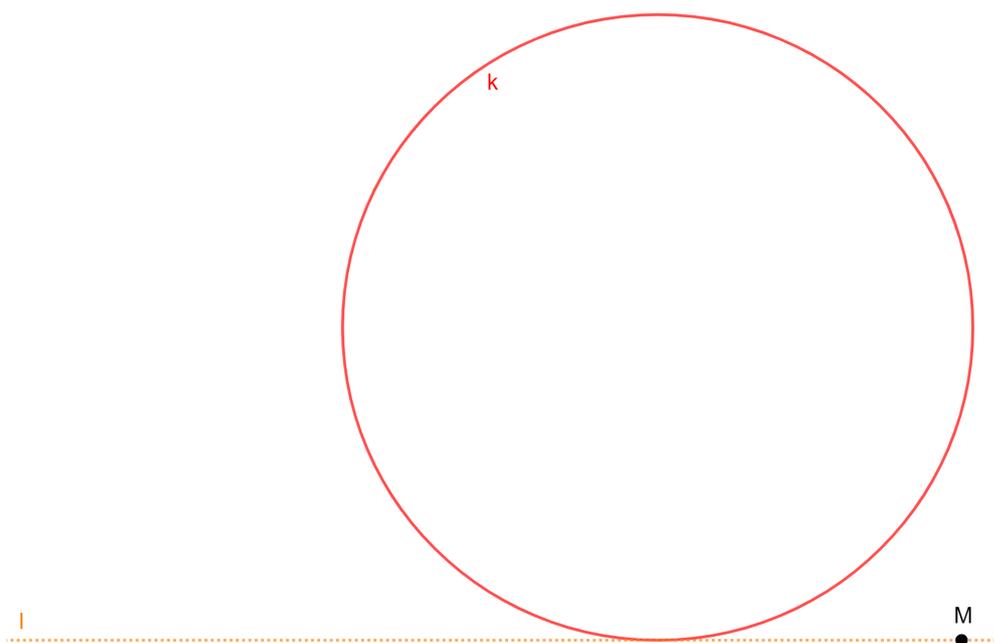
Problema 5. *No plano, sejam dadas uma circunferência k , uma reta l tangente a k , e um ponto M sobre l . Encontrar o Lugar Geométrico dos pontos P que têm a seguinte propriedade: Existem dois pontos Q e R sobre l tais que M é o ponto médio de QR e k é o Incírculo de PQR .*

A IMO 1992 foi realizada na cidade de Moscou, Rússia. Problema 20 da SL, proposto pela delegação da França e escolhido como o P4 da competição [2].

5.2.1 Resolução do Problema 5.

A Figura 5.2 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 5.2: Construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Denota-se por U o ponto de tangência da circunferência k , de centro S , e a reta l . Sejam X e U' os pontos simétricos de U com relação a S e M , respectivamente. X e U' não dependem da escolha de P . Será provado que o Lugar Geométrico dos pontos P é a parte da semi-reta orientada $U'X$ além do ponto X .

Coloca-se um ponto variável $Q \in l$. A posição do ponto $R \in l$ fica determinada pela equação $QM = MR$. Constroem-se as retas tangentes a k , diferentes de l , partindo de Q e R . Marca-se P na interseção destas tangentes. Adicionalmente, seja k' o Ex-incírculo do $\triangle PQR$, S' o centro de k' , e W e W' os pontos de tangência de k e k' com a reta PQ , respectivamente. A reta PS' é a bissetriz do $\angle QPR$. Nota-se que, pelo Corolário 6, o ponto U' é o ponto de tangência de k' com a reta QR .

Como $WS \parallel W'S'$ e $\angle WPS = \angle W'PS'$ tem-se que $\triangle WSP \sim \triangle W'S'P$. Logo,

$$\frac{WS}{W'S'} = \frac{SP}{S'P} = \frac{WP}{W'P}.$$

Mas $WS = SX$ e $W'S' = S'U'$. Segue que:

$$\frac{SX}{S'U'} = \frac{SP}{S'P}.$$

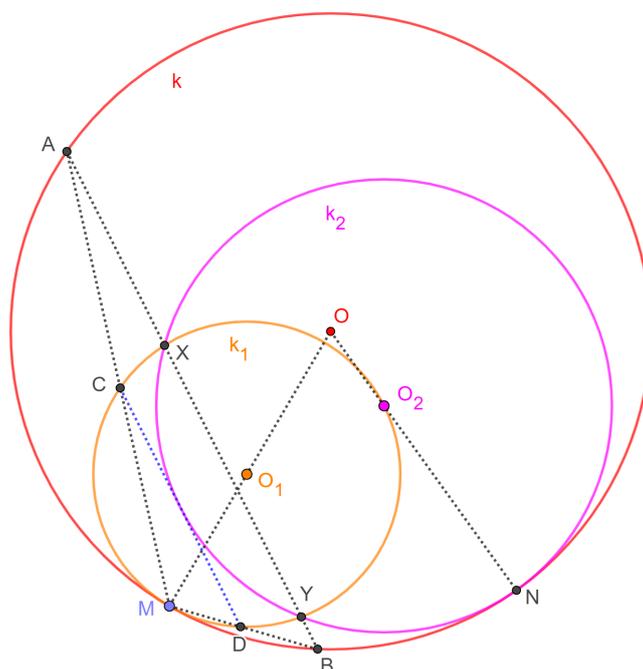
Adicionalmente, de $SX \parallel S'U'$, então $\angle PSX = \angle PS'U'$. Pelo critério de semelhança LAL tem-se que $\triangle PSX \sim \triangle PS'U'$ e o ponto X é colinear com P e U' . Isto é, P é o centro de Homotetia externo das circunferências k e k' , e o ponto X é levado em U' por esta Homotetia.

Dada a configuração inicial do problema basta construir os pontos X e U' para localizar o ponto P na semirreta $U'X$, além de X . A Figura 5.3 mostra uma construção geométrica. No link interativo indicado é possível deslocar o ponto Q para observar o rastro deixado pelo ponto P .

5.3.1 Resolução do Problema 6.

A Figura 5.4 mostra uma construção geométrica inicial do Problema 6. Esboça-se primeiro a circunferência k , de centro O , e coloca-se o ponto $M \in k$. Segundo, o centro O_1 , da circunferência k_1 , deve ser posicionado sobre o segmento OM , para garantir a tangência interna, em M , de k e k_1 . Terceiro, coloca-se o centro $O_2 \in k_1$, e encontra-se $N = OO_2 \cap k$, assegurando a tangência interna de k e k_2 .

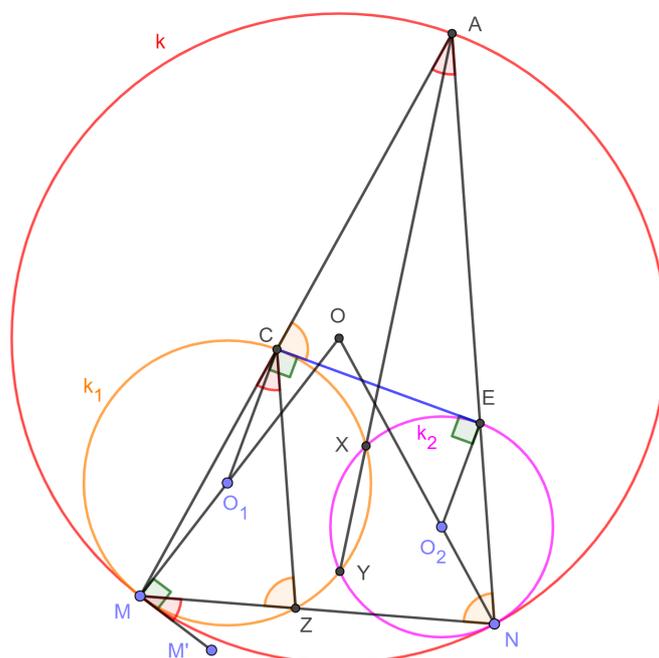
Figura 5.4: Construção geométrica inicial para o Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Lema 28. *Sejam duas circunferências k_1 e k_2 que intersectam-se nos pontos X e Y e são tangentes internamente a circunferência k nos pontos M e N , respectivamente. Seja A um dos pontos de interseção da reta XY com k . As retas AM e AN intersectam k_1 e k_2 em C e E , respectivamente. Então CE é uma tangente comum de k_1 e k_2 (Figura 5.5).*

Figura 5.5: Guia para a demonstração do Lema 28. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Para a construção da Figura 5.5 primeiro esboça-se a circunferência k , de centro O . Segundo, colocam-se os pontos $M \in k$ e $N \in k$ e traçam-se os segmentos OM e ON . Os centros das circunferências k_1 e k_2 são $O_1 \in OM$ e $O_2 \in ON$. Para o Lema 28 N é um ponto semi-livre. Isto é, pode variar sobre a circunferência k . No problema principal $N \in k$, mas sua posição é fixa pela construção.

Demonstração. O ponto A está no Eixo Radical das circunferências k_1 e k_2 . Logo,

$$AC \cdot AM = AX \cdot AY = AE \cdot AN.$$

A equação anterior significa que o quadrilátero $MNEC$ é inscrito.

Seja Z a segunda interseção de MN com k_1 . E seja M' um ponto na tangente comum a k e k_1 em M . Então, pela igualdade entre ângulo inscrito e de segmento, tem-se (como ângulos orientados):

$$\angle MCZ = \angle M'MZ = \angle M'MN = \angle MAN.$$

Isto significa que $CZ \parallel AN$.

Por correspondentes entre paralelas $\angle ANM = \angle CZM$. Como $MNEC$ é cíclico também tem-se que $\angle ACE = \angle ANM$. Como $\angle MO_1C = 2\angle CZM$, e o $\triangle CO_1M$ é isósceles, a igualdade $\angle CZM = \angle ACE$ significa que CE é tangente a k_1 . Analogamente prova-se que k_2 é tangente

5.4 Bissetrizes. Paralelogramo. Semelhança de triângulos. P16 SL IMO 2005.

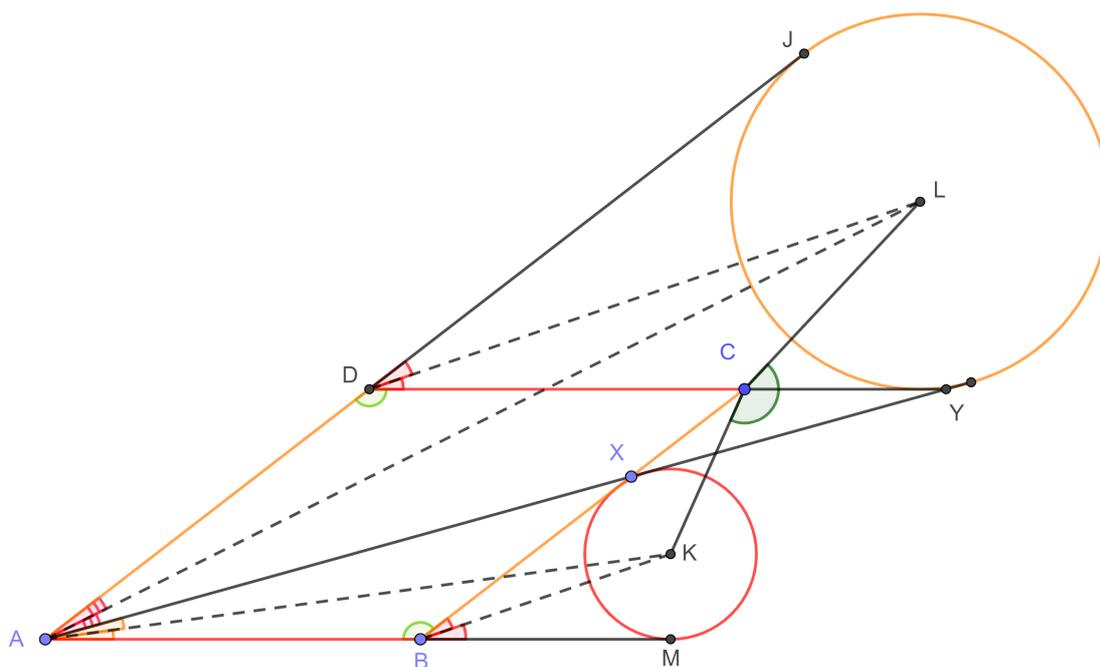
Problema 7. *Seja $ABCD$ um paralelogramo e X um ponto do segmento BC , com $X \neq B$. A semi-reta orientada \overrightarrow{AX} intersecta a semi-reta orientada \overrightarrow{DC} no ponto Y . Sejam K e L os centros dos *Ex-incírculos* dos triângulos ABX e ADY , que tocam os lados BX e DY , respectivamente. Provar que a medida do ângulo KCL não depende da posição do ponto X .*

A IMO 2005 foi realizada na cidade de Mérida, México. Problema 16 da SL, proposto pela delegação da Ucrânia [2]. Adaptado pelo autor.

5.4.1 Resolução do Problema 7.

A Figura 5.7 mostra uma construção geométrica inicial para o Problema 7.

Figura 5.7: Construção geométrica inicial para o Problema 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Primeiro, nota-se que por $ABCD$ ser um paralelogramo obtêm-se:

$$AB = CD, \quad BC = DA,$$

$$\angle ABC = \angle CDA, \quad \angle DAB = \angle BCD = \angle CBM = \angle YDJ.$$

Adicionalmente, como DL , BK , AL e AK são bissetrizes vale que:

$$\angle YDL = \angle LDJ = \angle XBK = \angle KBM,$$

$$\angle YAL = \angle LAJ, \angle BAK = \angle KAX.$$

Como $\angle ABC = \angle CDA$ e $\angle XBK = \angle CDL$ segue que $\angle ABK = \angle LDA$. Adicionalmente, pela análise dos ângulos dos triângulos ADY e ADL encontra-se que:

$$\angle ALD = \frac{1}{2}\angle AYD.$$

Por alternos entre paralelas $\angle AYD = \angle BAY$ e devido a bissetriz AK tem-se:

$$\angle ALD = \angle KAB.$$

Logo, pelo critério de semelhança AA,

$$\triangle ABK \sim \triangle LDA, \frac{AB}{LD} = \frac{BK}{DA} = \frac{AK}{LA}.$$

De $CB = DA$ e $DC = AB$ e da primeira parte da igualdade de frações anterior segue:

$$\frac{DC}{LD} = \frac{BK}{CB}.$$

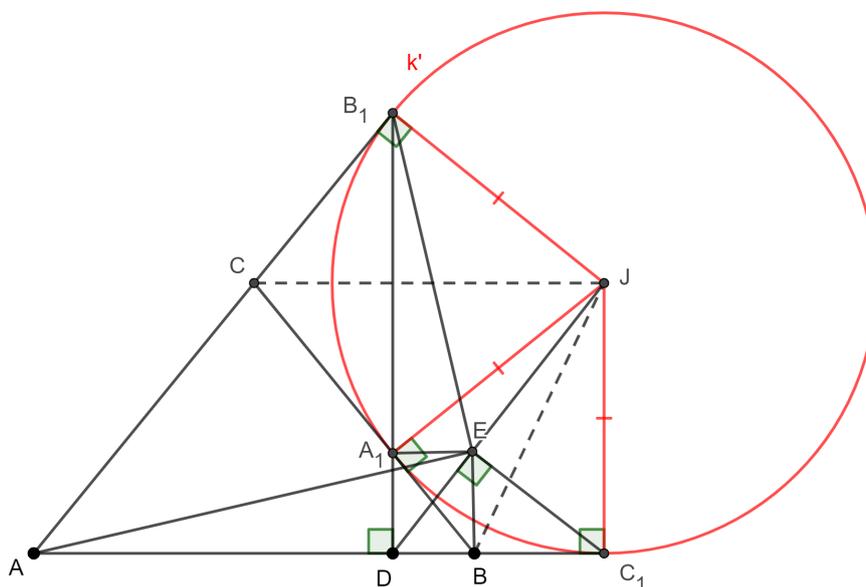
Adicionalmente, $\angle LDC = \angle CBK$. Pelo caso de semelhança LAL,

$$\triangle LDC \sim \triangle CBK.$$

Logo, $\angle DCL = \angle BKC$ e $\angle CLD = \angle KCB$. Portanto,

$$\begin{aligned} \angle KCL &= 360^\circ - \angle BCD - (\angle DCL + \angle KCB) = \\ &= 360^\circ - \angle BCD - (\angle BKC + \angle KCB) = \\ &= 360^\circ - \angle BCD - (180^\circ - \angle CBK) = \\ &= 180^\circ - \angle BCD + \angle CBK = \angle CBA + \angle CBK, \end{aligned}$$

que é constante. Isto é, o $\angle KCL$ somente depende da construção do paralelogramo $ABCD$ e não da posição do ponto X . A Figura 5.8 mostra uma construção geométrica.

Figura 5.9: Construção geométrica inicial para o Problema 8. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Consideram-se as circunferências ω_1 , ω_2 e ω_3 de diâmetros C_1D , A_1B e AB_1 , respectivamente. Por construção, os segmentos JC_1 , JA_1 e JB_1 são tangentes a ω_1 , ω_2 e ω_3 , respectivamente. Devido ao ângulo reto em D , ω_2 e ω_3 passam por D .

Como $\angle C_1ED = 90^\circ$ tem-se $E \in \omega_1$. Pela Potência do ponto J em relação a ω_1 [28] pode-se escrever:

$$JC_1^2 = JD \cdot JE.$$

Adicionalmente, de $JA_1 = JB_1 = JC_1$, raios do Ex-incírculo k' , também vale que:

$$JA_1^2 = JD \cdot JE,$$

$$JB_1^2 = JD \cdot JE.$$

Mas pela inversa do Teorema das Cordas [28] as igualdades anteriores significam que $E \in \omega_2$ e $E \in \omega_3$ e $\angle BEA_1 = \angle AEB_1 = 90^\circ$. O ponto E é Centro Radical de ω_1 , ω_2 e ω_3 . A Figura 5.10 mostra uma construção geométrica.

Capítulo 6

Referências Bibliográficas

- [1] DELGADO, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Página 12)
- [2] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009**. New York: Springer, 2011. (Página 60, 63, 65, 69, 71)
- [3] FREITAS, V. P. **Alguns Teoremas Clássicos da Geometria Sintética e Aplicações**. 2013. 79 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013. (Página 44)
- [4] GOW, R. **John Casey**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2007. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Casey/>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 52)
- [5] HOLANDA, B. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2011. (Página 12)
- [6] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: [10.22533/at.ed.24221310814](https://doi.org/10.22533/at.ed.24221310814). Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [7] KIMBERLING, C. **Encyclopedia of Triangle Centers**, 1998. Disponível em: <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 16)

- [8] LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023311>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [9] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [10] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [11] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [12] LÓPEZ LINARES, J. Jogos com a desigualdade triangular. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 3, p. 73-94, dez. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n32022073094. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [13] LÓPEZ LINARES, J. **Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e desigualdades**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 85 p. ISBN 978-65-87023-28-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023281>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [14] LÓPEZ LINARES, J. **Potência de ponto relativo a uma circunferência: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 64 p. ISBN 978-65-87023-30-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023304>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)

- [15] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática.** 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [16] LÓPEZ LINARES, J. **Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 57 p. ISBN 978-65-87023-26-7 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023267>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [17] LÓPEZ LINARES, J. Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 1, p. 27-47, jul. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n12022027047. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [18] LÓPEZ LINARES, J. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023250>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12, 47, 48)
- [19] LÓPEZ LINARES, J. **Treinamento de Professores e Estudantes do Ensino Fundamental e Médio com Problemas de Olimpíadas de Matemática.** 155 f. Tese (Livre-docência) Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, 2022. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/livredocencia/74/tde-28112022-091705/pt-br.php>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [20] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdv19202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [21] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga:

- Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [22] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023212>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [23] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [24] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra - v. 3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 91 p. ISBN 978-65-87023-24-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [25] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [26] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvoll7ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [27] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdvoll8202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)

- [28] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22–40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdv20202123169664jlljpm safj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12, 72)
- [29] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [30] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12, 45, 57, 58)
- [31] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [32] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [33] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [34] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN:

LÓPEZ LINARES, J. **Ex-incentros: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 80 p. ISBN 978-65-87023-32-8 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023328>.

2318-0552. Disponível em:

<https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)

- [35] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdvol21202123169664jlljpsafj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [36] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção ProfMat). (Página 12)
- [37] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Página 12)
- [38] O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Karl Wilhelm Feuerbach**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2010. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Feuerbach/>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 43)
- [39] O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Thales of Miletus**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Thales/>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 22)
- [40] PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Página 12)
- [41] SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [42] SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J.; RAMALHO DE FREITAS, M.P.O. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol.3, N.1, Jan-Jun 2022, pp. 70-87.

Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)

- [43] SANTOS, J. P. M.; Marcus Vinícius de Araújo Lima; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J. Minimização da soma de quadrados de distâncias aos vértices em polígonos convexos, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol. 3, N. 2, Jul - Dez 2022, pp. 66 – 82. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i2.11309>. Acesso em: 26 abr. 2023. (Página 12)
- [44] THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria-Nível 2, 2006. (Página 12)

