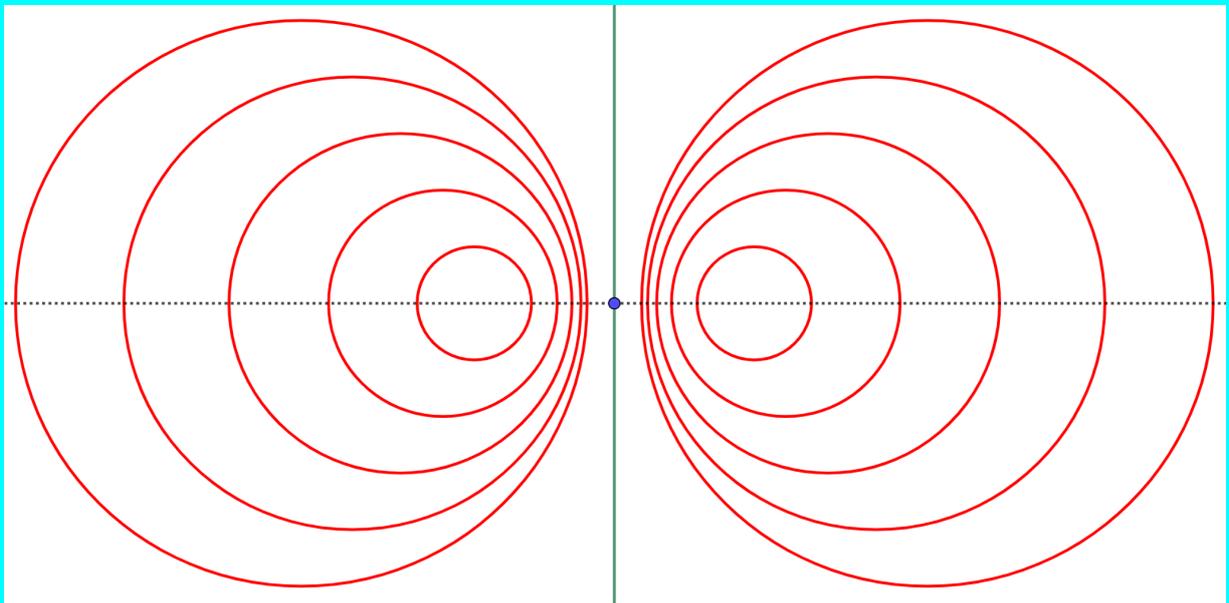


# Potência de ponto relativo a uma circunferência: teoria, construções e problemas



**Juan López Linares**

JUAN LÓPEZ LINARES

**Potência de ponto relativo a uma circunferência: teoria, construções  
e problemas**

DOI: 10.11606/9786587023304

Pirassununga - SP  
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)

2023

# UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**Reitor:** Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

**Vice-Reitora:** Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

## FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

**Diretor:** Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

**Vice-Diretor:** Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da  
Universidade de São Paulo

L864p	López Linares, Juan Potência de ponto relativo a uma circunferência: teoria, construções e problemas / Juan López Linares. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2023. 64 p.  ISBN 978-65-87023-30-4 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023304  1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino médio. 6. Formação de professores. I. Título.
-------	---

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

**Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.**



*Dedico este livro a minha família.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos Professores e Estudantes do curso de Geometria Olímpica com GeoGebra que motivaram a escrita deste livro eletrônico.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

## AUTOR

Prof. Associado JUAN LÓPEZ LINARES: <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Quando adolescente participava como estudante de um grupo de treinamento para olimpíadas de Física. Embora tivesse sucessos nas competições desta disciplina, nas olimpíadas de Matemática não tinha resultados espetaculares. Sempre sentiu falta de um grupo de treinamento em Matemática. Essa experiência extracurricular determinou seu futuro profissional e motivou sua linha de trabalho hoje.

Professor Associado do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores e estudantes de alto rendimento.

Na área de Ensino de Matemática Olímpica, publicou 17 artigos, 12 livros eletrônicos (e-book), um capítulo de livro, uma dissertação de mestrado e uma tese de livre docência. Textos completos e gratuitos podem ser encontrados [aqui](#). Também disponibilizou mais de 750 vídeo aulas. Adicionalmente, no site do [GeoGebra](#) estão disponíveis mais de 1000 construções geométricas interativas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProFMat) pela UFSCar em 2019 e Livre Docente na área de Ensino de Matemática Olímpica na FZEA USP em 2022.

## **Título**

Potência de ponto relativo a uma circunferência: teoria, construções e problemas

## **Prefácio**

A potência de um ponto relativo a uma circunferência é um invariante derivado da semelhança de triângulos e com muitas aplicações. A discussão é organizada em três capítulos: Fundamentos teóricos; Construções, exercícios e desafios; Problemas de olimpíadas internacionais. Este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 37 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mão na massa.

**Palavras-chave:** Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

# Lista de Figuras

2.1	O produto $PE \cdot PF$ não é um invariante quando o ponto $E$ movimenta-se pela elipse. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	13
2.2	O produto $PA \cdot PB$ é um invariante quando o ponto $A$ movimenta-se pela circunferência. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	14
2.3	Verificação da igualdade $PA \cdot PB = PA' \cdot PB' =  d^2 - r^2 $ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	15
2.4	O lado esquerdo ilustra o caso em que $P$ é um ponto exterior a circunferência $c$ , $r = OG$ e $d = PO$ . O lado direito, quando o ponto $J$ é interior a circunferência $e$ , $r = HQ$ e $d = JH$ . O ponto $F \in c$ é de tangência e ilustra o caso particular em que $C$ e $D$ aproximam-se a ele. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	16
2.5	Fórmula do T. de Pitágoras partindo do Teorema 1. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	18
2.6	O Eixo Radical $f$ (verde) das circunferências $c$ (vermelho) e $d$ (azul) é uma reta perpendicular a $O_1O_2$ . Todo ponto $P$ do Eixo Radical é centro de uma circunferência $h$ que intersecta a $c$ e $d$ perpendicularmente. $M$ é o ponto médio de $O_1O_2$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	19
2.7	Exemplos de Eixo Radical (linhas em verde). Parte superior esquerda, quando duas circunferências são tangentes o Eixo Radical das mesma passa pelo ponto de tangência. Parte superior direita, no caso em que as duas circunferências são secantes o Eixo Radical passa pelos pontos de intersectação. Parte inferior, para três circunferências com centros não colineares os Eixos Radicais dos pares concorrem em um ponto $C$ denominado Centro Radical. A Potência de $C$ é a mesma em relação as três circunferências. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	22
2.8	Passo 1 da construção geométrica do Eixo Radical das circunferências disjuntas $k_1$ e $k_2$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	23
2.9	Passo 2 da construção geométrica do Eixo Radical das circunferências disjuntas $k_1$ e $k_2$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	24
2.10	Passo 3 da construção geométrica do Eixo Radical das circunferências disjuntas $k_1$ e $k_2$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	24
2.11	Eixo radical das circunferências $k_1$ e $k_2$ partindo das tangentes comuns externas. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	25

---

2.12	Eixo radical das circunferências $k_1$ e $k_2$ partindo das tangentes comuns internas. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	26
2.13	Ilustração da Proposição 6. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	27
2.14	Círculos coaxiais com $p = 5$ e $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	28
3.1	Ilustração do Exercício 1. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	29
3.2	Todas os elementos da construção do Exercício 1. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	30
3.3	Ponto de partida para o Exercício 2. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	31
3.4	Todas os elementos da construção do Exercício 2. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	32
3.5	Ponto de partida para o Exercício 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	33
3.6	Primeiro passo da construção do Exercício 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	34
3.7	Passos 2 e 3 da construção do Exercício 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	34
3.8	Passos 4 da construção do Exercício 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	35
3.9	Construção do Exercício 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	35
3.10	Ilustração para o Problema 1. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	36
3.11	Ilustração para o Problema 2. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	38
4.1	Uma solução do Problema 3. As circunferências $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ com centros em $O_1$ (azul) e $O_2$ (vermelha) têm raios $r_1$ e $r_2$ , respectivamente. A reta $p$ intercepta as duas circunferências em quatro pontos determinando três segmentos de igual medida. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	41
4.2	Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	46
4.3	Construção geométrica para o Problema 4. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	47
4.4	Construção geométrica para auxiliar na interpretação do Problema 5. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	48
4.5	Construção adicional para auxiliar na interpretação do Problema 5. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	49
4.6	Construção geométrica inicial para o Problema 6. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	51
4.7	Construção geométrica para o Problema 6. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	52
4.8	Uma solução do Problema 7. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	53
4.9	Construção geométrica inicial do Problema 8. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	55
4.10	Guia para a resolução do Problema 8. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	56
4.11	Guia para a resolução da primeira parte do Problema 9. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	57
4.12	Guia para a resolução da segunda parte do Problema 9. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	58

# Sumário

## Lista de Figuras

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentos teóricos</b>	<b>13</b>
2.1	Experimento com um não invariante . . . . .	13
2.2	Experimento com um invariante . . . . .	14
2.3	Experimento com um invariante e dois pontos . . . . .	14
2.4	Potência de um ponto relativo a uma circunferência . . . . .	15
2.5	Pitágoras como caso particular do Teorema das Cordas . . . . .	17
2.6	Eixo Radical . . . . .	18
2.7	Centro Radical . . . . .	21
2.8	Construção geométrica do Eixo Radical de duas circunferências disjuntas . . . . .	22
2.9	Tangentes comuns e eixo radical . . . . .	25
2.10	Diferença de potências de um ponto . . . . .	26
2.11	Círculos coaxiais . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Construções, exercícios e desafios</b>	<b>29</b>
3.1	Três circunferências dois a dois ortogonais . . . . .	29
3.1.1	Uma resolução do Exercício 1 . . . . .	29
3.2	Circunferências tangentes a outra passando por dois pontos . . . . .	30
3.2.1	Uma resolução do Exercício 2 . . . . .	31
3.3	Circunferências tangentes a outras duas e passando por um ponto . . . . .	32
3.3.1	Uma resolução do Exercício 3 . . . . .	33
3.4	Potência de ponto e teorema da bissetriz interna. . . . .	36
3.4.1	Resolução do Problema 1 . . . . .	36
3.5	Potência de ponto, semelhança e teorema de Pitágoras. . . . .	37
3.5.1	Resolução do Problema 2 . . . . .	37

<b>4</b>	<b>Problemas de olimpíadas internacionais</b>	<b>40</b>
4.1	Eixo Radical. Teorema de Tales. Equação quadrática. P4 SL IMO 1971. . . . .	40
4.1.1	Resolução do Problema 3 . . . . .	40
4.2	Eixo e centro radical, quadriláteros cíclicos, ângulos. P5 IMO 1985. . . . .	45
4.2.1	Resolução do Problema 4. . . . .	45
4.3	Eixo Radical. Teorema de Pitágoras. Semelhança de triângulos. P15 SL IMO 1994. . . . .	47
4.3.1	Resolução do Problema 5 . . . . .	47
4.4	Potência de ponto relativo a circunferência, base média, semelhança. P2 IMO 2009. . . . .	50
4.4.1	Resolução do Problema 6. . . . .	50
4.5	Potência de um ponto. Eixo Radical. Quadrilátero Inscritível. Semelhança de triângulos. P5 IMO 2012. . . . .	52
4.5.1	Resolução do Problema 7 . . . . .	53
4.6	Tangência a uma circunferência. Ângulos inscritos e de segmento. Potência de um ponto e Eixo Radical. P8 NA IGO 2014-5. . . . .	54
4.6.1	Resolução do Problema 8 . . . . .	55
4.7	Quadriláteros cíclicos. Potência de um ponto relativo a uma circunferência. Semelhança de triângulos. P7 NA IGO 2014-5. . . . .	56
4.7.1	Resolução do Problema 9 . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>59</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A potência de um ponto relativo a uma circunferência é um invariante derivado da semelhança de triângulos e com muitas aplicações. A discussão é organizada em três capítulos: Fundamentos teóricos; Construções, exercícios e desafios; Problemas de olimpíadas internacionais.

O livro faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O mesmo aconteceu na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma Moodle de Cultura e Extensão da USP.

O texto conta com 37 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, links para os gráficos interativos são disponibilizados em páginas do [GeoGebra](#). Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube.

O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa.

Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contra partida, na versão impressa tradicional o aprendente precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma resolução.

O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movimentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes.

Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendi-

zado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar e buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Bruno Holanda [3], do Prof. Rodrigo Pinheiro [34] e do Prof. Cícero Thiago [38]. Também serviram como referência os livros de Geometria [33], Geometria Analítica [1] e Matemática Discreta [32] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Seis livros eletrônicos gratuitos com as notas de aulas do curso Geometria Olímpica com GeoGebra estão disponíveis em [18], [19], [20], [14] e [12] e [10]. Também foram publicados quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [17], [6], [7] e [8]. Outros trabalhos da área de Matemática são [11], [21], [22], [23], [16], [24], [25], [5], [26], [28], [29], [30], [31], [35], [27], [36], [13], [15], [9] e [37].

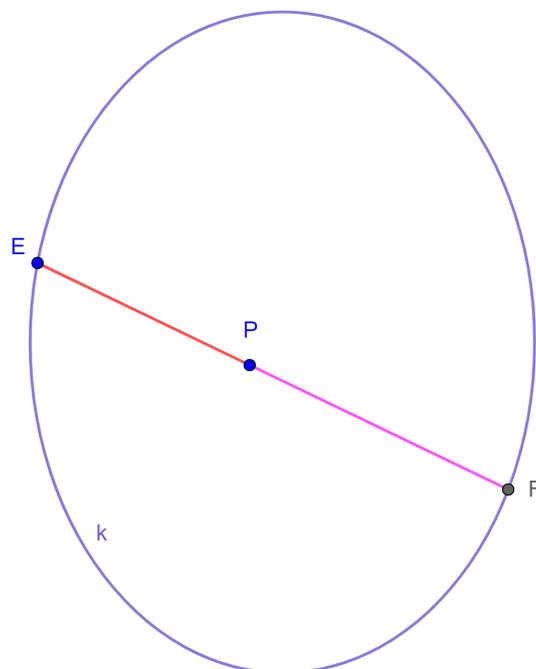
# Capítulo 2

## Fundamentos teóricos

### 2.1 Experimento com um não invariante

Considera-se uma elipse  $k$  (diferente de circunferência), um ponto  $E \in k$  e um ponto  $P \notin k$ . Seja o ponto  $F$  a segunda interseção da reta  $PE$  com  $k$ . A versão interativa da Figura 2.1 mostra que o produto  $PE \cdot PF$  não é um invariante quando o ponto  $E$  movimenta-se pela elipse.

Figura 2.1: O produto  $PE \cdot PF$  não é um invariante quando o ponto  $E$  movimenta-se pela elipse. Versão interativa [aqui](#).

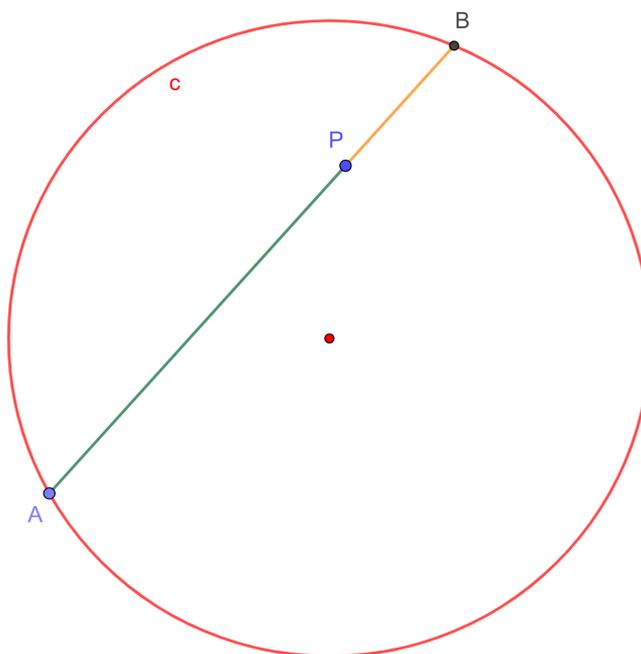


Fonte: O autor.

## 2.2 Experimento com um invariante

Considera-se uma circunferência  $c$ , um ponto  $A \in c$  e um ponto  $P$ . Seja o ponto  $B$  a segunda interseção da reta  $PA$  com  $c$ . A versão interativa da Figura 2.2 mostra que o produto  $PA \cdot PB$  é um invariante quando o ponto  $A$  movimenta-se pela circunferência.

Figura 2.2: O produto  $PA \cdot PB$  é um invariante quando o ponto  $A$  movimenta-se pela circunferência. Versão interativa [aqui](#).



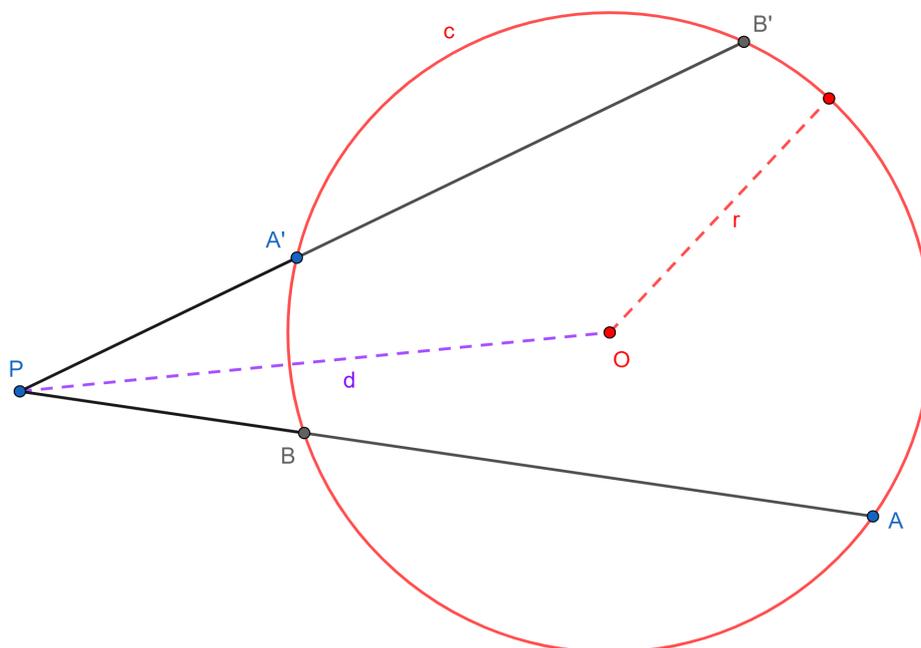
Fonte: O autor.

## 2.3 Experimento com um invariante e dois pontos

Considera-se uma circunferência  $c$  de raio  $r$  e centro  $O$ , dois pontos  $A, A' \in c$  e um ponto  $P$  a uma distância  $d$  de  $O$ . Sejam os pontos  $B, B'$  as segundas interseções das retas  $PA$  e  $PA'$  com  $c$ . A versão interativa da Figura 2.3 mostra que:

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = |d^2 - r^2|.$$

Figura 2.3: Verificação da igualdade  $PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = |d^2 - r^2|$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

## 2.4 Potência de um ponto relativo a uma circunferência

Dado um ponto  $P$ , uma circunferência  $c$  e uma reta que passa por  $P$  e intersecta  $c$  nos pontos  $A$  e  $B$  (corda  $AB$ ) o produto  $PA \cdot PB$  é invariante quando  $A$  e  $B$  variam. Esse resultado é conhecido como Teorema das Cordas e será apresentado formalmente nas próximas linhas. Mas antes define-se a Potência de um ponto relativo a uma circunferência.

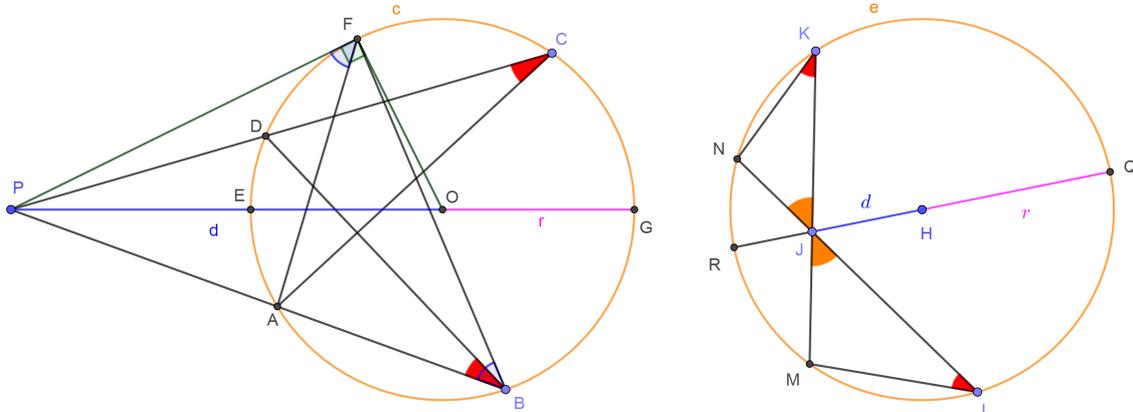
**Definição 1** (Potência de um ponto relativo a uma circunferência). *Seja  $c$  uma circunferência de raio  $r$  e um ponto  $P$  no mesmo plano a uma distância  $d$  do centro de  $c$ . A Potência do ponto  $P$ , relativo a  $c$ , será denotada como  $Pot_c(P)$  e calculada por  $Pot_c(P) = d^2 - r^2$ .*

Segue da Definição 1 que, se  $P$  é um ponto no exterior de  $c$ , então  $Pot_c(P) > 0$ . No caso em que  $P \in c$ , tem-se  $Pot_c(P) = 0$  e quando  $P$  é um ponto interior a  $c$  vale  $-r^2 \leq Pot_c(P) < 0$ .

**Teorema 1** (Teorema das Cordas). *Sejam  $A, B, C, D$  e  $P$  ( $K, L, M, N$  e  $J$ ) pontos do plano tais que  $AB \cap CD = \{P\}$  ( $KM \cap LN = \{J\}$ ). O quadrilátero  $ABCD$  ( $KLMN$ ) é inscrito se, e somente se,  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$  ( $JK \cdot JM = JL \cdot JN$ ).*

A Figura 2.4 ilustra duas construções geométricas possíveis relativas ao Teorema 1. No lado esquerdo, quando o ponto  $P$  é exterior a circunferência  $c$  e o direito, quando o ponto  $J$  é interior a circunferência  $e$ .

Figura 2.4: O lado esquerdo ilustra o caso em que  $P$  é um ponto exterior a circunferência  $c$ ,  $r = OG$  e  $d = PO$ . O lado direito, quando o ponto  $J$  é interior a circunferência  $e$ ,  $r = HQ$  e  $d = JH$ . O ponto  $F \in c$  é de tangência e ilustra o caso particular em que  $C$  e  $D$  aproximam-se a ele. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Suponha-se, inicialmente, que o quadrilátero  $ABCD$  ( $KLMN$ ) é inscritível. Os ângulos  $ACD$  e  $ABD$  ( $MKN$  e  $MLN$ ) são congruentes, pois enxergam o mesmo arco menor  $AD$  ( $MN$ ). No lado esquerdo, tem-se  $\angle CPA = \angle BPD$  (comum) e no lado direito  $\angle KJN = \angle LJM$  (opostos pelo vértice). Consequentemente, por AA, segue  $\triangle PAC \sim \triangle PDB$  ( $\triangle KJN \sim \triangle LJM$ ).

Os lados correspondentes em triângulo semelhantes são proporcionais:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} = \frac{AC}{DB},$$

$$\frac{JK}{JL} = \frac{JN}{JM} = \frac{KN}{LM}.$$

Das equações anteriores encontra-se:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD, \tag{2.4.1}$$

$$JK \cdot JM = JL \cdot JN. \tag{2.4.2}$$

Reciprocamente, suponha-se que valem (2.4.1) e (2.4.2). Segue que:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB},$$

$$\frac{JK}{JL} = \frac{JN}{JM}.$$

Adicionalmente, no lado esquerdo da Figura 2.4 tem-se  $\angle CPA = \angle BPD$  (comum) e no lado direito  $\angle KJN = \angle LJM$  (opostos pelo vértice). Pelo critério de semelhança lado-ângulo-

lado segue que  $\triangle PAC \sim \triangle PDB$  e  $\triangle KJN \sim \triangle LJM$ . Como consequência,  $\angle ACD = \angle ABD$  e  $\angle MKN = \angle MLN$ . Isto é, os quadriláteros  $ABCD$  e  $KLMN$  são inscritíveis.  $\square$

**Observação 1.** *Estuda-se agora um caso particular no lado esquerdo da Figura 2.4. O segmento  $PF$  é tangente a circunferência  $c$ . Os ângulos  $PFA$  e  $PBF$  são congruentes, pois um é de segmento e o segundo inscrito em relação a corda  $AF$ . Consequentemente, por AA, tem-se  $\triangle PFA \sim \triangle PBF$ .*

Da proporcionalidade dos lados encontra-se:

$$\frac{PF}{PB} = \frac{PA}{PF},$$

$$PF^2 = PA \cdot PB. \quad (2.4.3)$$

A equação (2.4.3) pode ser obtida de (2.4.1) simplesmente notando que quando o ponto  $C$  aproxima-se de  $F$  o ponto  $D$  também o faz.

**Observação 2.** *Ainda usando como referência a Figura 2.4 considera-se a reta  $PO$  ( $JH$ ) que determina o diâmetro  $EG$  ( $RQ$ ). Chamando  $PO = d$  e  $EO = GO = r$  ( $JH = d$  e  $RH = QH = r$ ) e utilizando as equações (2.4.1), (2.4.2) e (2.4.3) pode-se escrever:*

$$PF^2 = PA \cdot PB = PE \cdot PG = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2 = Pot_c(P),$$

$$JK \cdot JM = JR \cdot JQ = (r - d)(r + d) = r^2 - d^2 = -Pot_e(J).$$

Resumem-se os resultados anteriores no Corolário a seguir.

**Corolário 2.** *Seja  $c$  uma circunferência,  $P$  um ponto no mesmo plano e a reta que passa por  $P$  intersecta  $c$  nos pontos  $A$  e  $B$ . Vale que:*

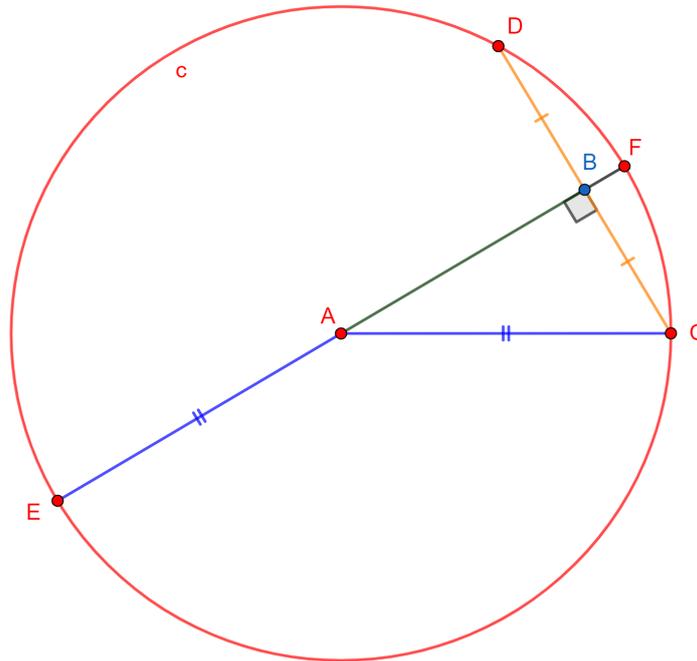
$$PA \cdot PB = |Pot_c(P)|.$$

## 2.5 Pitágoras como caso particular do Teorema das Cordas

**Proposição 3** (Fórmula do T. de Pitágoras). *Considera-se uma circunferência  $c$  de centro  $A$  e raio  $AC$ . Traça-se a corda  $CD$ . A mediatriz de  $CD$  determina a corda  $EF$ . Seja o ponto  $B = CD \cap EF$  (Figura 2.5). Então no  $\triangle ABC$  vale que:*

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Figura 2.5: Fórmula do T. de Pitágoras partindo do Teorema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* A potência do ponto  $B$  relativo a circunferência  $c$  pode ser calculada de duas formas:

$$DB \cdot BC = EB \cdot BF.$$

Mas  $DB = BC$  e  $EA = AC$ . Segue que:

$$BC \cdot BC = (AC + AB) \cdot (AC - AB),$$

$$BC^2 = AC^2 - AB^2.$$

□

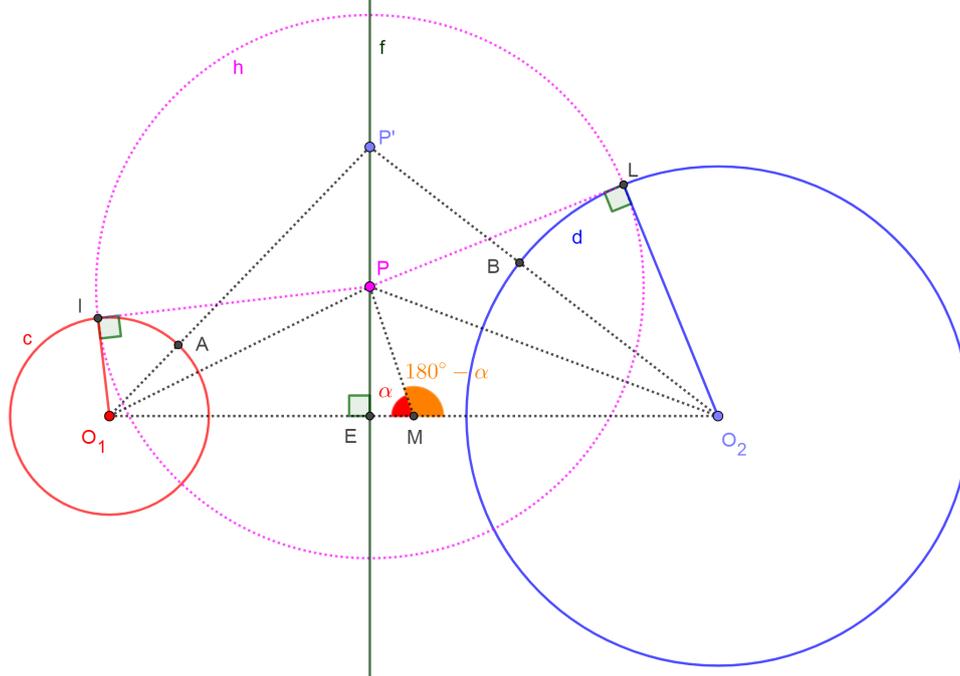
## 2.6 Eixo Radical

**Definição 2** (Eixo Radical). *Eixo Radical é o nome dado ao Lugar Geométrico dos pontos que possuem a mesma Potência com relação a duas circunferências  $c$  e  $d$ . Isto é, o ponto  $P$  pertence ao eixo radical se, e somente se,  $Pot_c(P) = Pot_d(P)$ .*

**Proposição 4.** *O Eixo Radical de duas circunferências é uma reta perpendicular ao segmento que contém os centros das mesmas.*

A Figura 2.6 ilustra uma construção geométrica possível relativa a Proposição 4.

Figura 2.6: O Eixo Radical  $f$  (verde) das circunferências  $c$  (vermelho) e  $d$  (azul) é uma reta perpendicular a  $O_1O_2$ . Todo ponto  $P$  do Eixo Radical é centro de uma circunferência  $h$  que intersesta a  $c$  e  $d$  perpendicularmente.  $M$  é o ponto médio de  $O_1O_2$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Utiliza-se a Figura 2.6 como referência. Suponha-se, inicialmente, que:

$$Pot_c(P) = Pot_d(P).$$

Mostrar-se-á que o ponto  $P$  pertence a uma reta perpendicular à  $O_1O_2$ .

Sejam  $I \in c$  e  $L \in d$  tal que  $PI \perp O_1I$  e  $PL \perp O_2L$ . Utilizando a Definição 1 tem-se:

$$Pot_c(P) = PO_1^2 - O_1I^2 = PO_2^2 - O_2L^2 = Pot_d(P), \tag{2.6.1}$$

$$PO_2^2 - PO_1^2 = O_2L^2 - O_1I^2. \tag{2.6.2}$$

Sejam  $E$  e  $M$  a projeção do ponto  $P$  sobre  $O_1O_2$  e o ponto médio de  $O_1O_2$ , respectivamente. Seja  $\angle PMO_1 = \alpha$ , segue que  $\angle PMO_2 = 180^\circ - \alpha$ . Escreve-se agora a Lei dos Cossenos no  $\triangle PMO_2$  e no  $\triangle PMO_1$ :

$$PO_2^2 = PM^2 + MO_2^2 - 2 \cdot PM \cdot MO_2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha),$$

$$PO_2^2 = PM^2 + MO_2^2 + 2 \cdot PM \cdot MO_2 \cdot \cos(\alpha), \tag{2.6.3}$$

$$PO_1^2 = PM^2 + MO_1^2 - 2 \cdot PM \cdot MO_1 \cdot \cos(\alpha). \tag{2.6.4}$$

Como  $MO_2 = MO_1$ , então  $MO_1 + MO_2 = O_1O_2$ . Subtraindo (2.6.4) de (2.6.3) encontra-se:

$$PO_2^2 - PO_1^2 = 2 \cdot PM \cdot O_1O_2 \cdot \cos(\alpha). \quad (2.6.5)$$

Adicionalmente,

$$PM \cdot \cos(\alpha) = EM. \quad (2.6.6)$$

Substituindo (2.6.2) e (2.6.6) em (2.6.5) encontra-se:

$$O_2L^2 - O_1I^2 = 2 \cdot O_1O_2 \cdot EM,$$

$$EM = \frac{O_2L^2 - O_1I^2}{2 \cdot O_1O_2}.$$

Este último resultado indica que  $EM$  depende somente dos raios das duas circunferências e da distância entre elas, mas não de  $P$ . Isto é, os pontos do Eixo Radical pertencem a reta  $f \perp O_1O_2$  e  $E \in f$ .

Reciprocamente, provar-se-á que todo ponto  $P' \in f$  pertence ao conjunto de pontos chamado Eixo Radical. Pelo Teorema de Pitágoras tem-se:

$$P'O_2^2 = P'E^2 + EO_2^2,$$

$$P'O_1^2 = P'E^2 + EO_1^2,$$

$$PO_2^2 = PE^2 + EO_2^2,$$

$$PO_1^2 = PE^2 + EO_1^2.$$

Das equações anteriores subtraem-se as duas primeira e as duas últimas:

$$P'O_2^2 - P'O_1^2 = EO_2^2 - EO_1^2,$$

$$PO_2^2 - PO_1^2 = EO_2^2 - EO_1^2,$$

$$P'O_2^2 - P'O_1^2 = PO_2^2 - PO_1^2. \quad (2.6.7)$$

Sejam  $A$  e  $B$  as interseções dos segmentos  $PO_1$  e  $PO_2$  com  $c$  e  $d$ , respectivamente. De (2.6.2) tem-se:

$$PO_2^2 - PO_1^2 = O_2L^2 - O_1I^2 = O_2B^2 - O_1A^2. \quad (2.6.8)$$

Utilizando (2.6.7) e (2.6.8) encontra-se:

$$P'O_2^2 - P'O_1^2 = O_2B^2 - O_1A^2,$$

$$P'O_2^2 - O_2B^2 = P'O_1^2 - O_1A^2,$$

$$Pot_d(P') = Pot_c(P').$$

Isto é, todo ponto  $P' \in f$  pertence ao Eixo Radical. Logo, a reta  $f$ , perpendicular a  $O_1O_2$ , é o Lugar Geométrico dos pontos que possuem a mesma Potência com relação as circunferências  $c$  e  $d$ .  $\square$

A Figura 2.6 e a equação (2.6.1) também mostram que todo ponto  $P$  do Eixo Radical é centro de uma circunferência  $h$  que intersecta a  $c$  e  $d$  perpendicularmente.

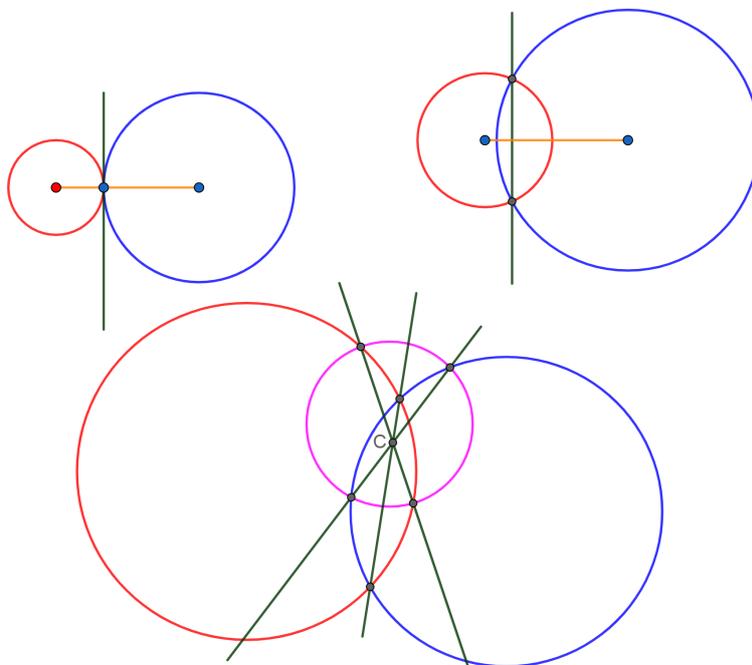
Quando duas circunferências são tangentes o Eixo Radical das mesma passa pelo ponto de tangência, uma vez que a Potência deste ponto é zero respeito as duas (Figura 2.7, parte superior esquerda).

No caso em que as duas circunferências são secantes o Eixo Radical passa pelos pontos de intersecção, pois a Potência destes é zero respeito as duas (Figura 2.7, parte superior direita).

## 2.7 Centro Radical

Pode ser mostrado que para três circunferências com centros não colineares os Eixos Radicais dos pares concorrem em um ponto  $C$ , denominado Centro Radical (Figura 2.7, parte inferior). A Potência de  $C$  é a mesma em relação as três circunferências e  $C$  é o único ponto com esta propriedade. Outros exemplos podem ser encontrados em [33].

Figura 2.7: Exemplos de Eixo Radical (linhas em verde). Parte superior esquerda, quando duas circunferências são tangentes o Eixo Radical das mesma passa pelo ponto de tangência. Parte superior direita, no caso em que as duas circunferências são secantes o Eixo Radical passa pelos pontos de intersecção. Parte inferior, para três circunferências com centros não colineares os Eixos Radicais dos pares concorrem em um ponto  $C$  denominado Centro Radical. A Potência de  $C$  é a mesma em relação as três circunferências. Versão interativa [aqui](#).

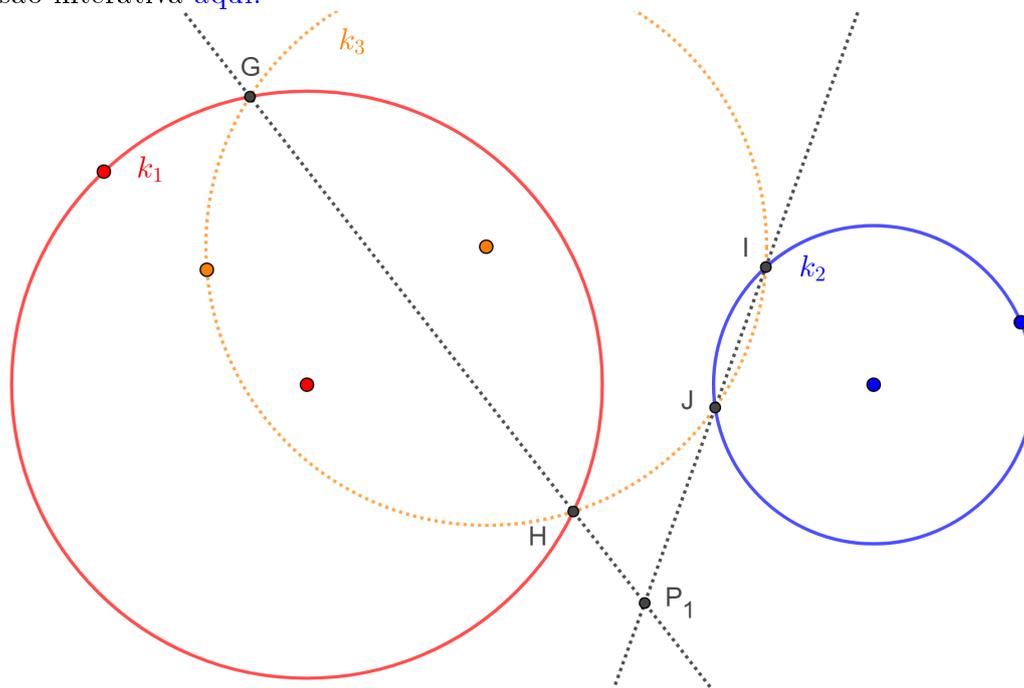


Fonte: O autor.

## 2.8 Construção geométrica do Eixo Radical de duas circunferências disjuntas

A seguir descrevem-se os passos para a construção geométrica do Eixo Radical das circunferências disjuntas  $k_1$  e  $k_2$  (Figura 2.8, Figura 2.9 e Figura 2.10).

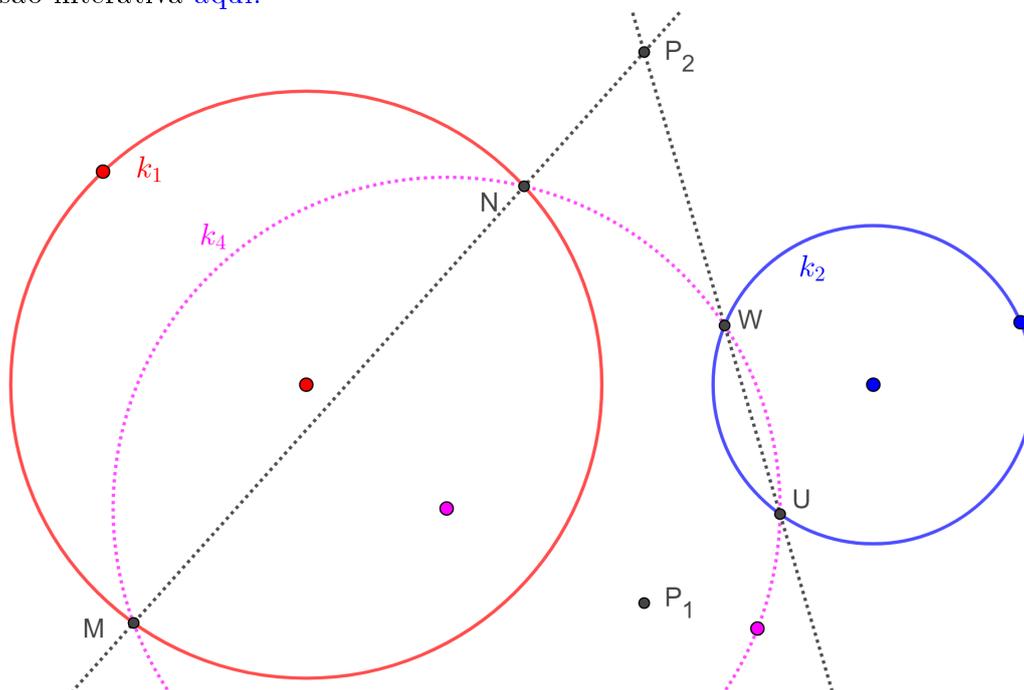
Figura 2.8: Passo 1 da construção geométrica do Eixo Radical das circunferências disjuntas  $k_1$  e  $k_2$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

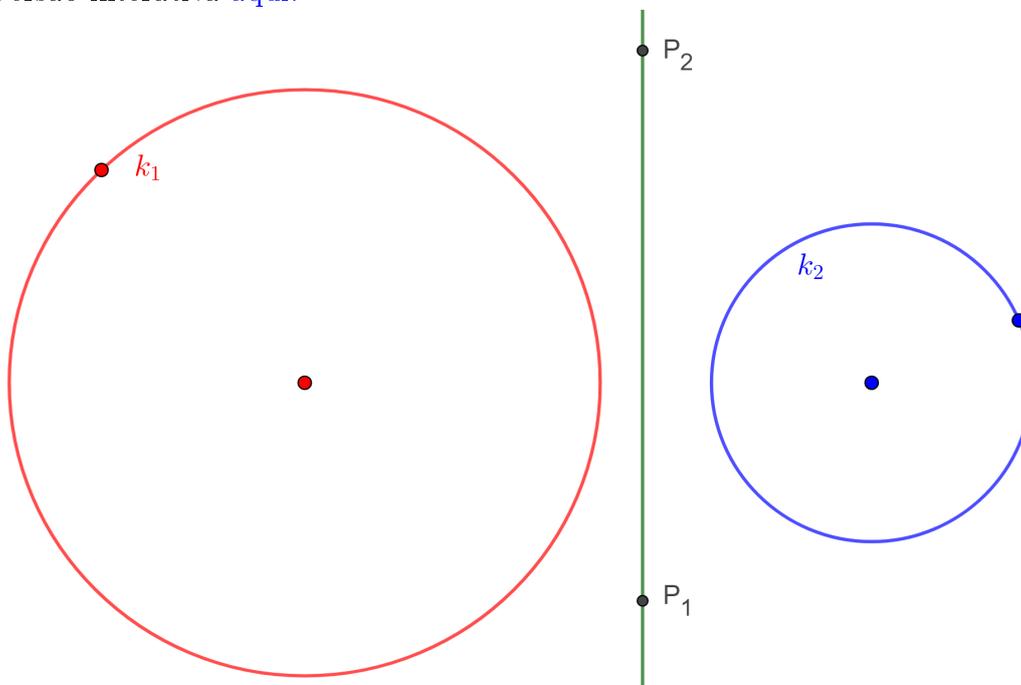
1. Construir uma circunferência auxiliar  $k_3$  que intercepte  $k_1$  e  $k_2$ . Sejam as interseções  $k_3 \cap k_1 \in \{G, H\}$  e  $k_3 \cap k_2 \in \{I, J\}$ . As retas  $GH$  e  $IJ$  são eixos radicais dos pares de circunferências  $k_3$  e  $k_1$  e  $k_3$  e  $k_2$ , respectivamente. O ponto  $P_1 = GH \cap IJ$ , centro radical de  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ , possui a mesma potência relativa a  $k_1$  e  $k_2$  (Figura 2.8).
2. Construir uma circunferência auxiliar  $k_4$  que intercepte  $k_1$  e  $k_2$ . Sejam as interseções  $k_4 \cap k_1 \in \{M, N\}$  e  $k_4 \cap k_2 \in \{U, W\}$ . As retas  $MN$  e  $UW$  são eixos radicais dos pares de circunferências  $k_4$  e  $k_1$  e  $k_4$  e  $k_2$ , respectivamente. O ponto  $P_2 = MN \cap UW$ , centro radical de  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_4$ , possui a mesma potência relativa a  $k_1$  e  $k_2$  (Figura 2.9).
3. Pela Proposição 4 a reta  $P_1P_2$  é o eixo radical das circunferências  $k_1$  e  $k_2$  (Figura 2.10).

Figura 2.9: Passo 2 da construção geométrica do Eixo Radical das circunferências disjuntas  $k_1$  e  $k_2$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Figura 2.10: Passo 3 da construção geométrica do Eixo Radical das circunferências disjuntas  $k_1$  e  $k_2$ . Versão interativa [aqui](#).

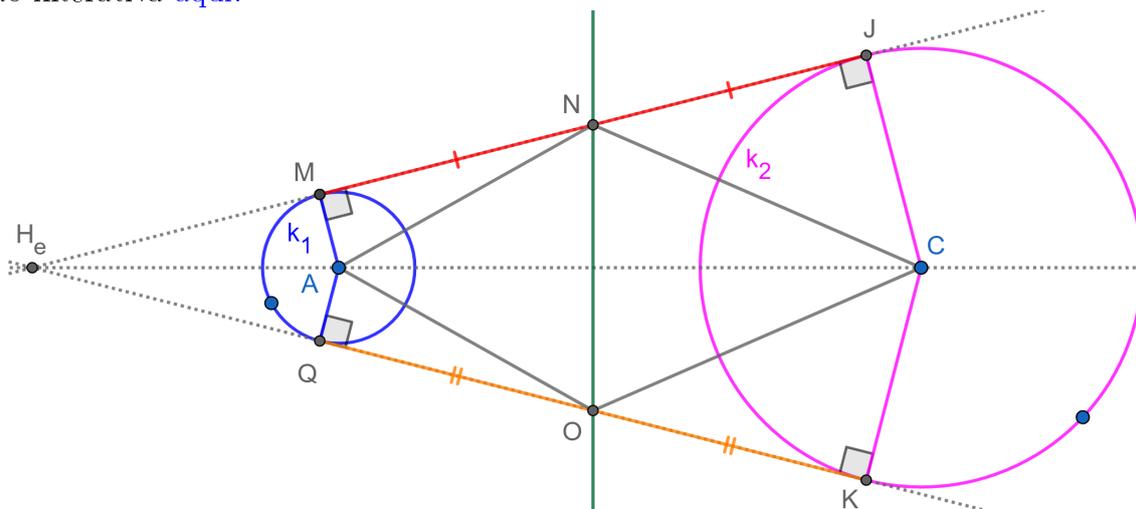


Fonte: O autor.

## 2.9 Tangentes comuns e eixo radical

**Proposição 5.** *Sejam  $k_1$  e  $k_2$  duas circunferências e  $MJ$  e  $QK$  suas retas tangentes comuns externas, com  $M, Q \in k_1$  e  $J, K \in k_2$ . Sejam ainda  $N$  e  $O$  os pontos médios dos segmentos  $MJ$  e  $QK$ , respectivamente. Então a reta  $NO$  é o eixo radical de  $k_1$  e  $k_2$  (Figura 2.11).*

Figura 2.11: Eixo radical das circunferências  $k_1$  e  $k_2$  partindo das tangentes comuns externas. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Segue da Definição 1, Definição 2 e Teorema 1 que:

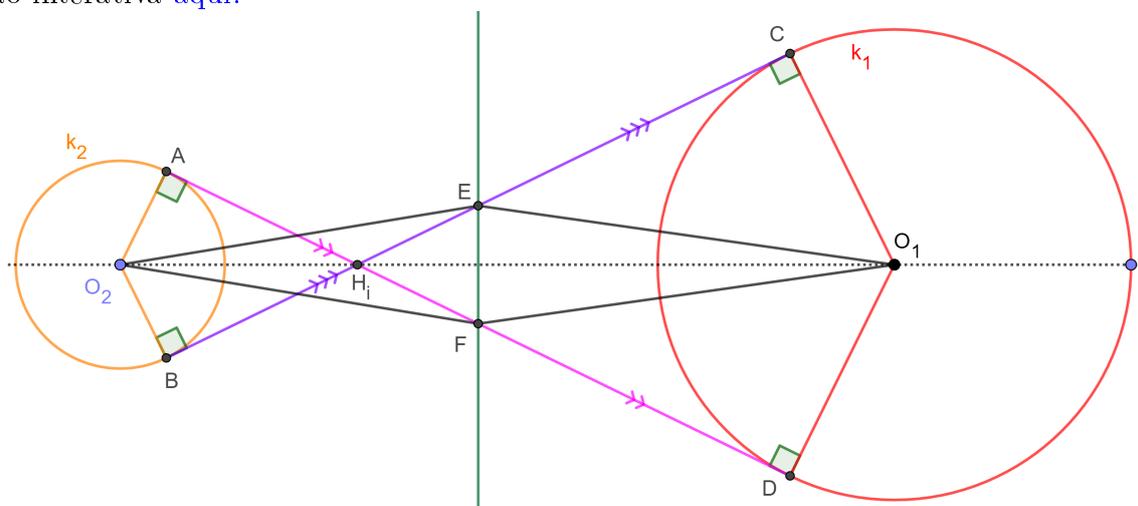
$$Pot_{k_1}(N) = NA^2 - MA^2 = MN^2 = NJ^2 = NC^2 - CJ^2 = Pot_{k_2}(N),$$

$$Pot_{k_1}(O) = OA^2 - QA^2 = QO^2 = OK^2 = OC^2 - CK^2 = Pot_{k_2}(O).$$

□

Uma proposição análoga pode ser provada utilizando as tangentes comuns internas, conforme mostra a Figura 2.12.

Figura 2.12: Eixo radical das circunferências  $k_1$  e  $k_2$  partindo das tangentes comuns internas. Versão interativa [aqui](#).



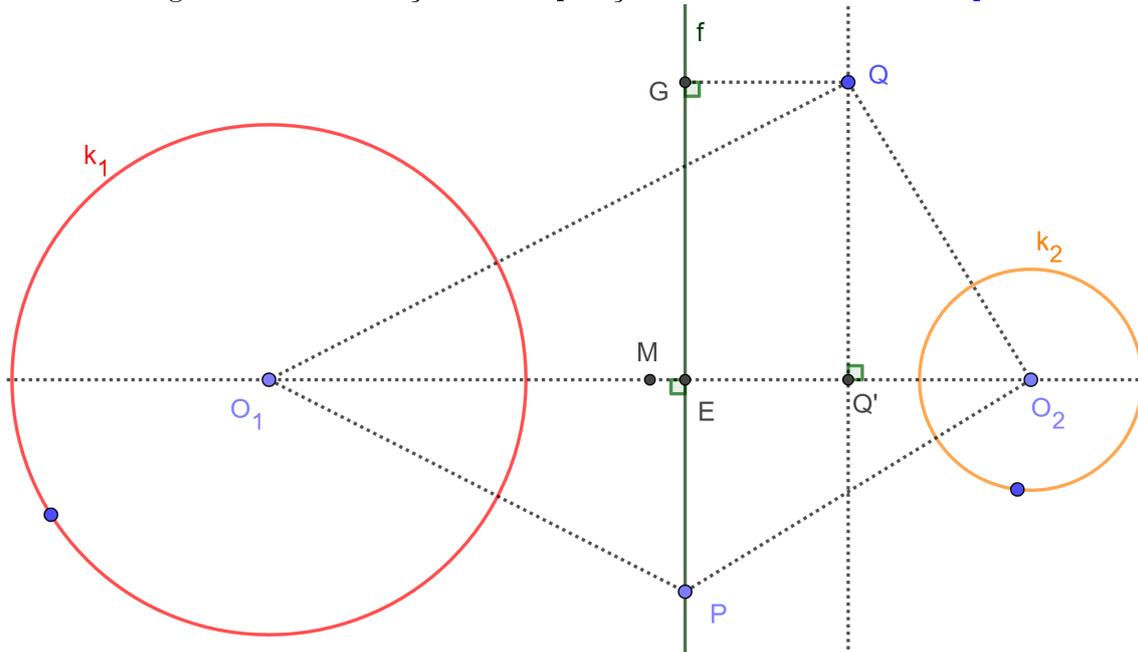
Fonte: O autor.

## 2.10 Diferença de potências de um ponto

**Proposição 6.** *Seja a reta  $f$  o eixo radical das circunferências  $k_1$  e  $k_2$ , de centros  $O_1$  e  $O_2$ , respectivamente. Seja  $Q$  um ponto do plano e  $G$  a projeção ortogonal de  $Q$  em  $f$  (Figura 2.13). Então vale:*

$$|Pot_{k_1}(Q) - Pot_{k_2}(Q)| = 2 \cdot O_1O_2 \cdot GQ.$$

Nota-se que o resultado não depende da distância  $QQ'$ . Isto sugere utilizar o eixo radical como uma das retas de referência dum sistema de coordenadas. A versão interativa da Figura 2.13 permite verificar o resultado anterior.

Figura 2.13: Ilustração da Proposição 6. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

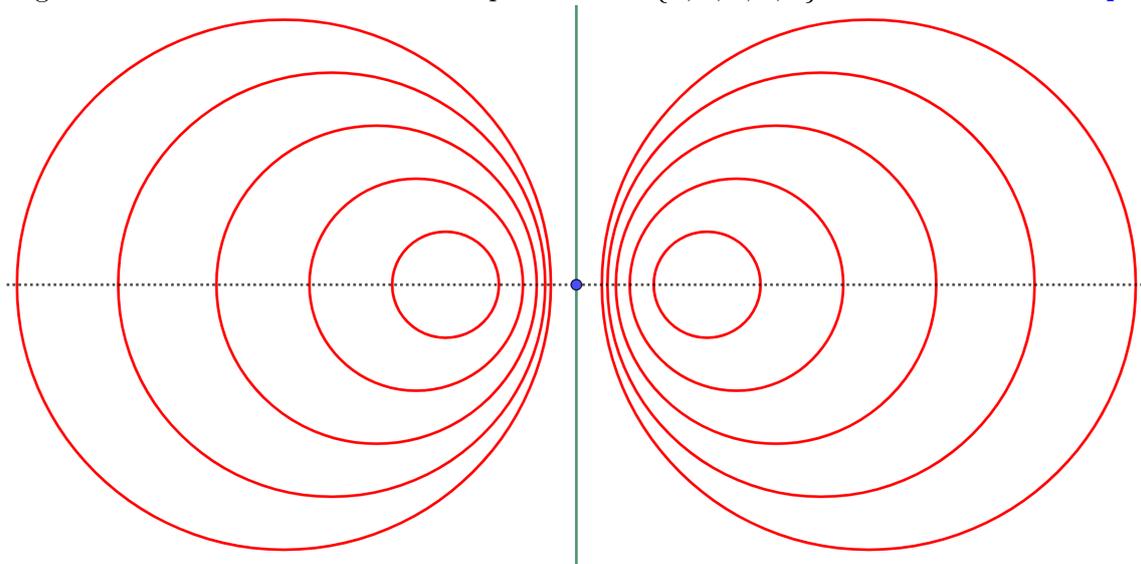
## 2.11 Círculos coaxiais

O eixo radical de um conjunto de circunferências pode ser fixado inicialmente como sendo o eixo  $y$  de um sistema de coordenadas cartesianas. Dado um valor  $p$  de potência de ponto calculado em relação a origem, para uma circunferência de raio  $r$  a coordenada  $x$  do seu centro  $O_r$  pode ser calculada como:

$$x[O_r] = \pm \sqrt{p + r^2}.$$

A Figura 2.14 mostra um conjunto de circunferências coaxiais com  $p = 5$  e  $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . A versão interativa permite variar o valor de  $p$ .

Figura 2.14: Círculos coaxiais com  $p = 5$  e  $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

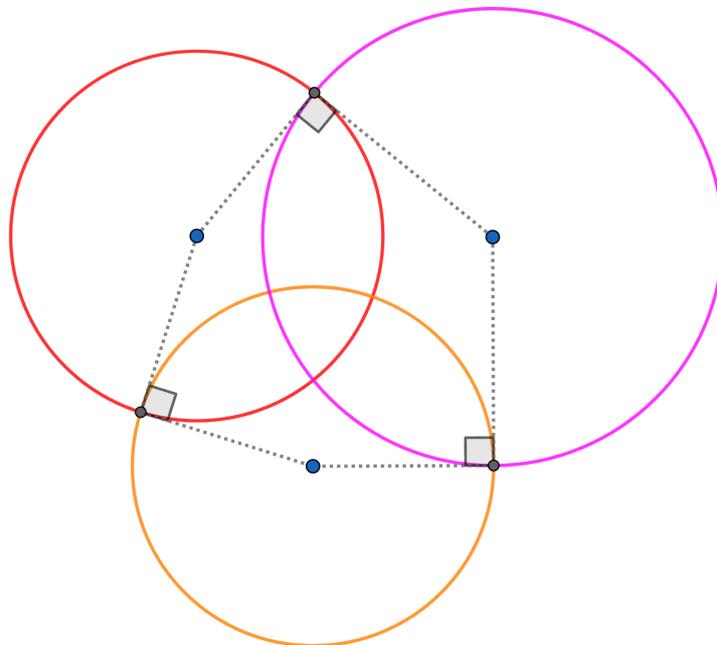
## Capítulo 3

### Construções, exercícios e desafios

#### 3.1 Três circunferências dois a dois ortogonais

**Exercício 1.** Reproduzir a construção da Figura 3.1. Notar que as circunferências intersectam-se formando ângulos retos e isso não pode mudar quando movimentam-se os centros das mesmas.

Figura 3.1: Ilustração do Exercício 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

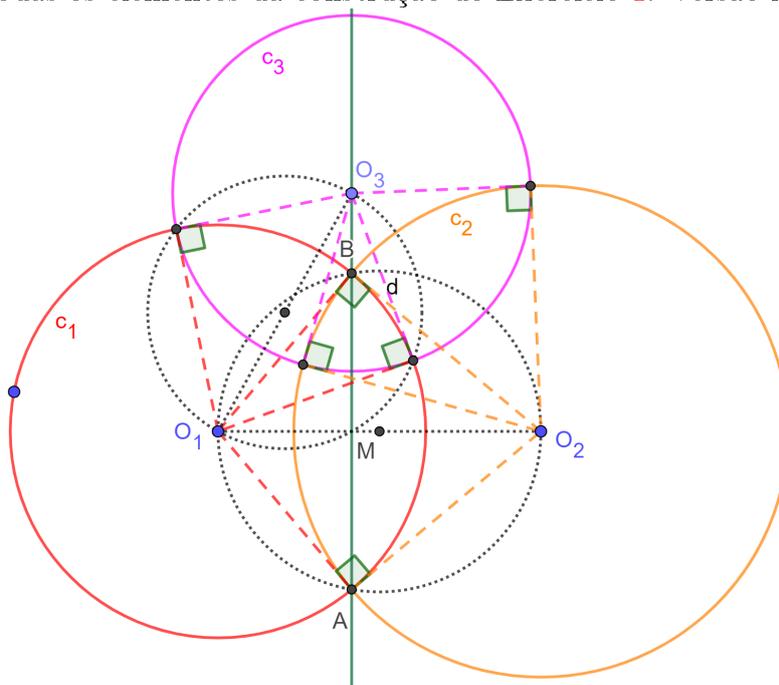
##### 3.1.1 Uma resolução do Exercício 1

1. Construir a circunferência  $c_1$  de centro  $O_1$ . Colocar um ponto  $O_2$  externo a  $c_1$  (Figura 3.2).

2. Marcar o ponto médio  $M$  entre  $O_1$  e  $O_2$ .
3. Traçar a circunferência auxiliar  $d$  com centro em  $M$  e raio  $MO_1$  e marcar os pontos  $A$  e  $B$ , interseção entre  $c_1$  e  $d$ .
4. Traçar a circunferência  $c_2$  com centro em  $O_2$  e raio  $AO_2$ . A circunferência  $c_2$  é ortogonal a  $c_1$ .
5. Traçar a reta  $AB$ , eixo radical das duas circunferências anteriores. Colocar um ponto  $O_3$  sobre reta  $AB$  e fora da região em que os círculos determinados por  $c_1$  e  $c_2$  intersectam-se.
6. Repetir os passos do 2 ao 4 utilizando como ponto externo  $O_3$  e qualquer uma das duas circunferências  $c_1$  ou  $c_2$ .

A Figura 3.2 mostra todos os passos da construção.

Figura 3.2: Todas os elementos da construção do Exercício 1. Versão interativa [aqui](#).

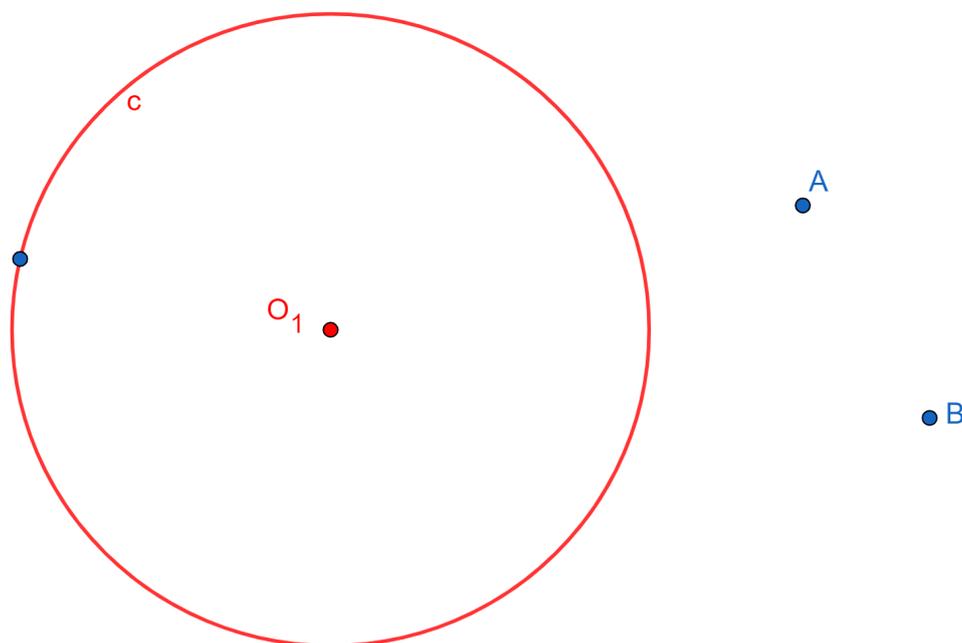


Fonte: O autor.

## 3.2 Circunferências tangentes a outra passando por dois pontos

**Exercício 2.** Construir as circunferências que sejam tangentes a circunferência  $c$  da Figura 3.3 e que passem pelos pontos  $A$  e  $B$  (exteriores a  $c$ ).

Figura 3.3: Ponto de partida para o Exercício 2. Versão interativa [aqui](#).



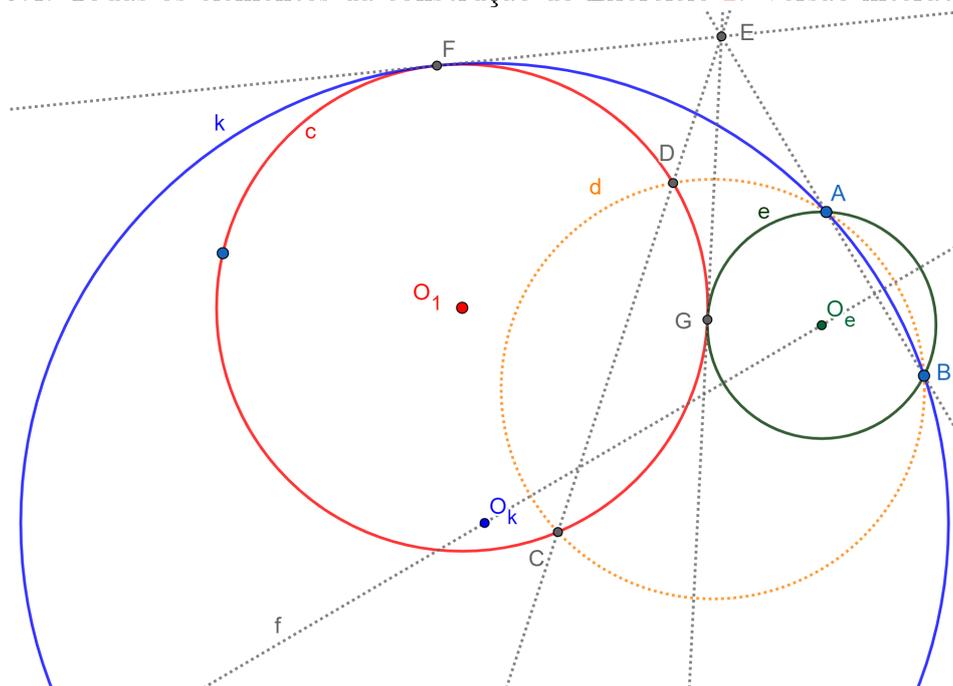
Fonte: O autor.

### 3.2.1 Uma resolução do Exercício 2

1. Construir a reta  $f$ , mediatriz de  $A$  e  $B$ . Posicionar o ponto  $O_2$  sobre  $f$  e traçar uma circunferência auxiliar  $d$  de raio  $O_2A$ . As duas circunferências devem ser secantes nos pontos  $C$  e  $D$  (Figura 3.4).
2. Construir a reta  $CD$ , eixo radical das circunferências  $c$  e  $d$ , e a reta  $AB$ . Esta última é o eixo radical de  $d$  e cada uma das circunferências procuradas. Marcar a interseção, ponto  $E$ . Ou seja, o centro radical de  $c$ ,  $d$  e cada uma das circunferências procuradas.
3. Construir as retas tangentes a  $c$  que passam por  $E$ . Chamar os pontos de tangência de  $F$  e  $G$ .
4. Construir a circunferência  $e$  passando pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $G$  e a circunferência  $k$  pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $F$ . As retas  $GE$  e  $FE$  são eixos radicais de  $c$  e  $e$  e  $c$  e  $k$ , respectivamente. O ponto  $E$  é centro radical de  $c$ ,  $d$  e  $e$  e  $c$ ,  $d$  e  $k$ .

A Figura 3.4 mostra todos os passos da construção.

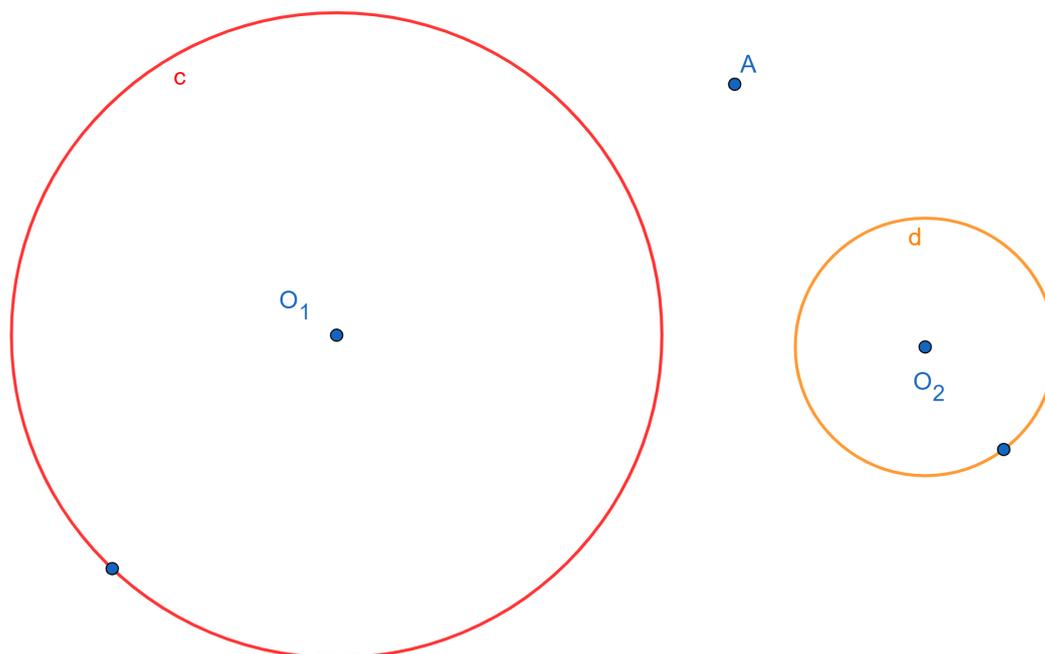
Figura 3.4: Todas os elementos da construção do Exercício 2. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

### 3.3 Circunferências tangentes a outras duas e passando por um ponto

**Exercício 3.** *Construir as circunferências tangentes a  $c$  e  $d$  e que passem pelo ponto  $A$  (Figura 3.5).*

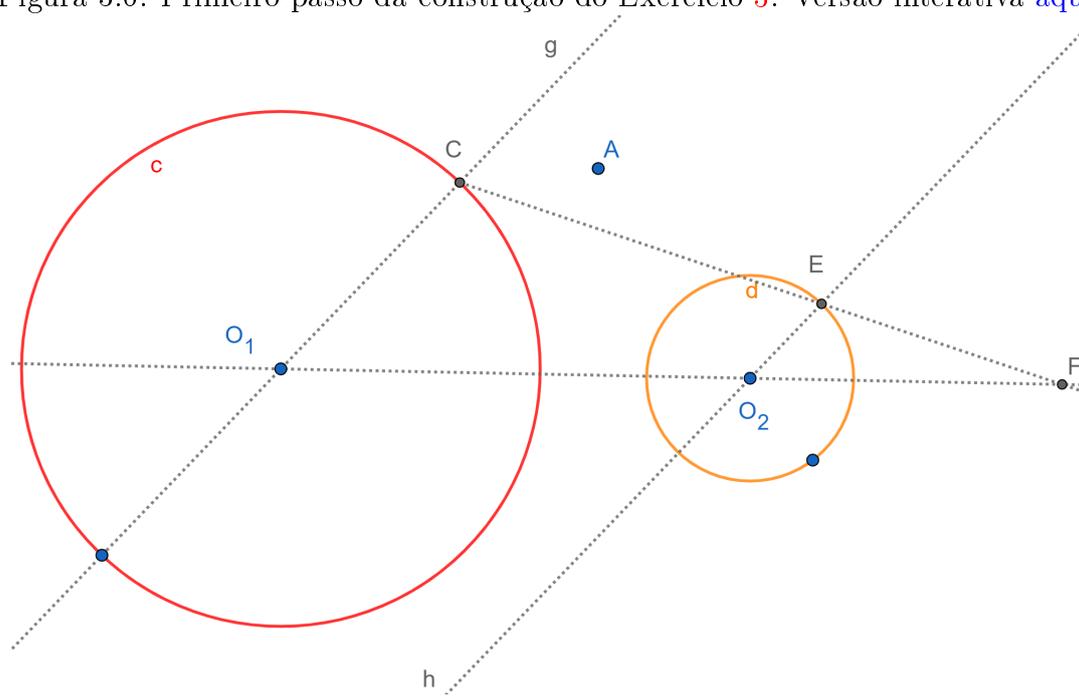
Figura 3.5: Ponto de partida para o Exercício 3. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

### 3.3.1 Uma resolução do Exercício 3

Construir as retas paralelas  $g$  e  $h$  passando por  $O_1$  e  $O_2$ , respectivamente. Marcar, no mesmo semiplano em relação à  $O_1O_2$ , os pontos de interseção  $C$  e  $E$  com  $c$  e  $d$ , respectivamente. Traçar a reta  $CE$  e marcar o ponto  $F$ , interseção com a reta  $O_1O_2$  (Figura 3.6). O ponto  $F$  é o centro de homotetia externo de  $c$  e  $d$ .

Figura 3.6: Primeiro passo da construção do Exercício 3. Versão interativa [aqui](#).

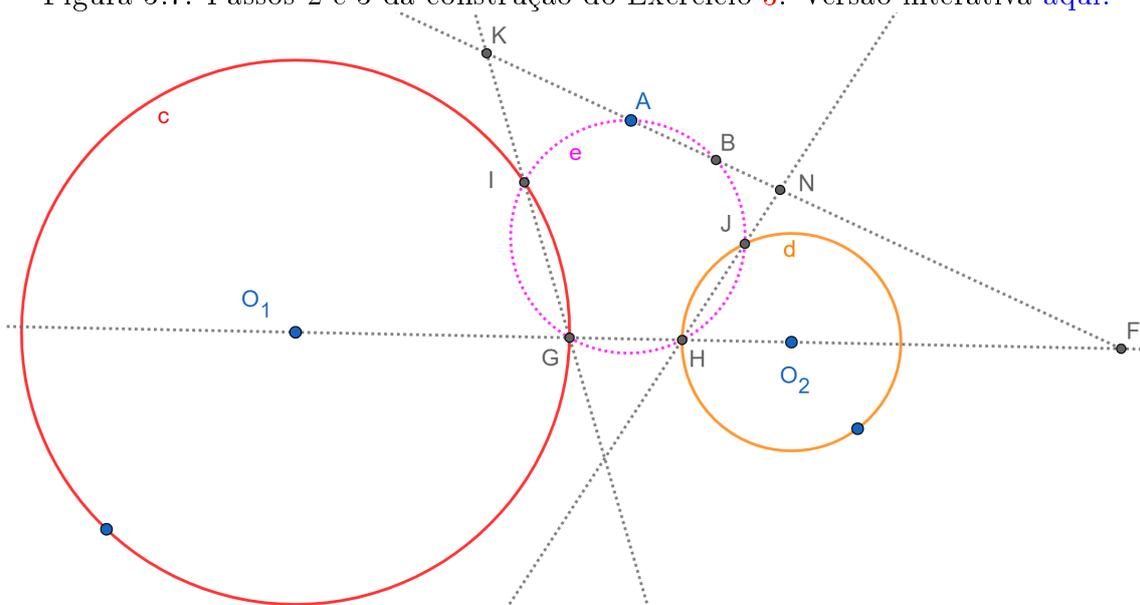


Fonte: O autor.

Marcar os pontos  $G$  e  $H$  nas interseções interiores de  $O_1O_2$  com  $c$  e  $d$ . Marcar o ponto  $B$  na interseção da semirreta  $FA$  com a circunferência  $e$  circunscrita ao  $\triangle AGH$ . Denotar por  $I$  e  $J$  os outros pontos de interseção de  $e$  com  $c$  e  $d$  (Figura 3.7).

Construir as retas  $GI$  e  $HJ$  e marcar as interseções  $K$  e  $N$  com a semirreta  $FA$ .

Figura 3.7: Passos 2 e 3 da construção do Exercício 3. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.



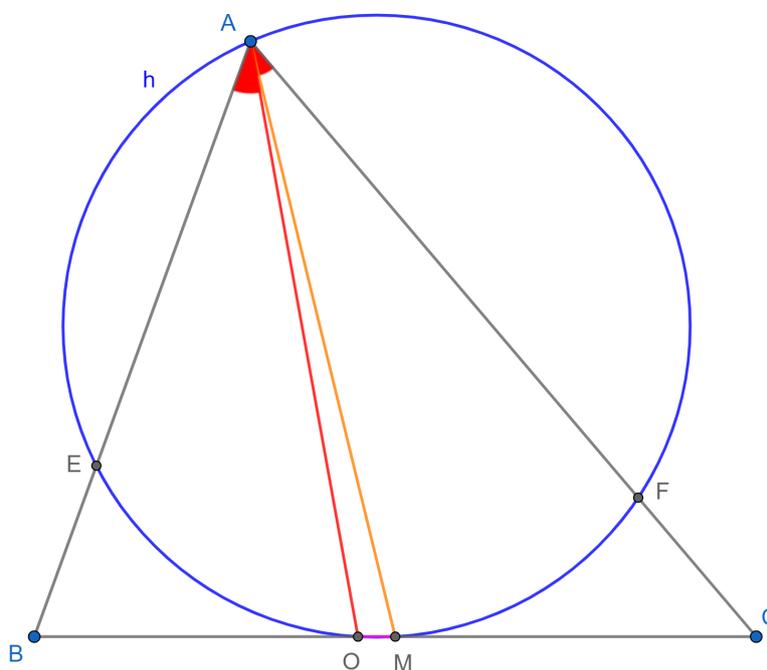
### 3.4 Potência de ponto e teorema da bissetriz interna.

**Problema 1.** Num triângulo  $ABC$ , a bissetriz do ângulo  $A$  e a mediana relativa a  $BC$  intersectam este lado em pontos distintos  $O$  e  $M$ , respectivamente. O círculo circunscrito ao triângulo  $AOM$  intersecta os lados  $AB$  e  $AC$  em  $E$  e  $F$ , respectivamente. Provar que  $BE = CF$ .

#### 3.4.1 Resolução do Problema 1

A Figura 3.10 ajuda acompanhar o raciocínio.

Figura 3.10: Ilustração para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja  $h$  a circunferência circunscrita ao triângulo  $AOM$ . Calcula-se de duas formas diferentes a potência do ponto  $B$  relativo a  $h$ :

$$Pot_h(B) = BE \cdot AB = BO \cdot BM,$$

$$BE = \frac{BO}{AB} \cdot BM.$$

Como  $M$  é ponto médio de  $BC$  vale que  $BM = CM$  e:

$$BE = \frac{BO}{AB} \cdot CM. \quad (3.4.1)$$

Pelo Teorema da Bissetriz Interna tem-se:

$$\frac{BO}{AB} = \frac{CO}{AC}.$$

Substituindo o resultado anterior em (3.4.1) encontra-se:

$$BE = \frac{CO}{AC} \cdot CM. \quad (3.4.2)$$

A seguir calcula-se de duas formas diferentes a potência do ponto  $C$  relativo a  $h$  :

$$Pot_h(C) = CF \cdot AC = CO \cdot CM,$$

$$\frac{CO}{AC} = \frac{CF}{CM}. \quad (3.4.3)$$

De (3.4.2) e (3.4.3) conclui-se:

$$BE = \frac{CF}{CM} \cdot CM = CF.$$

### 3.5 Potência de ponto, semelhança e teorema de Pitágoras.

**Problema 2.** *Sejam  $c$  uma semicircunferência de centro  $O$  e diâmetro  $AB$  e  $D$  o ponto médio do arco  $AB$ . Sobre a reta  $OD$  toma-se o ponto  $E$ , do mesmo lado de  $D$  com relação a  $AB$ , tal que  $OE = BD$ . Suponha-se que  $BE$  corta a  $c$  em  $F$  e  $P \in AB$  tal que  $FP \perp AB$ . Provar que:*

$$BP = \frac{AB}{3}.$$

#### 3.5.1 Resolução do Problema 2

A Figura 3.11 ajuda acompanhar o raciocínio.



$$\frac{BP}{R} = \frac{EB - EF}{EB} = \frac{PF}{\sqrt{2}R}. \quad (3.5.3)$$

Substituindo (3.5.1) e (3.5.2) em (3.5.3) encontram-se:

$$BP = \frac{2}{3}R,$$

$$PF = \frac{2\sqrt{2}}{3}R.$$

## Capítulo 4

# Problemas de olimpíadas internacionais

### 4.1 Eixo Radical. Teorema de Tales. Equação quadrática. P4 SL IMO 1971.

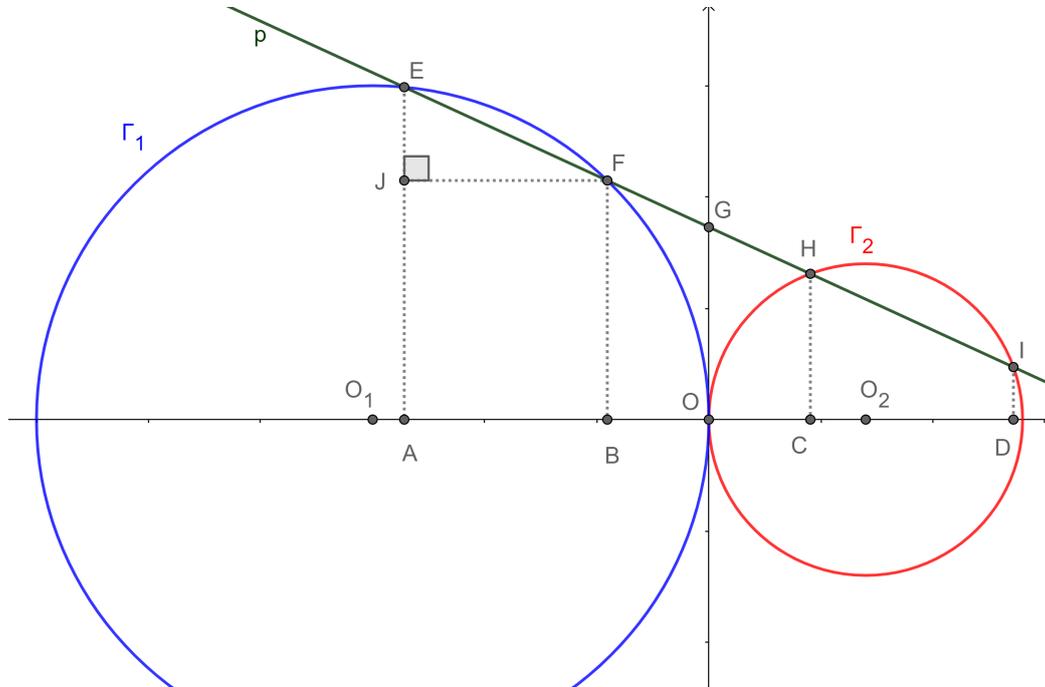
**Problema 3.** *Duas circunferências tangentes em um plano, com raios  $r_1$  e  $r_2$ , são dadas. Uma reta intercepta as duas circunferências em quatro pontos determinando três segmentos de igual medida. Encontrar o comprimento dos segmentos em função de  $r_1$  e  $r_2$  e as condições sobre as quais o problema tem solução.*

A IMO 1971 foi realizada nas cidade de Bratislava e Zilina, na Eslováquia. Problema 4 da SL, proposto pela delegação do Reino Unido [2].

#### 4.1.1 Resolução do Problema 3

A Figura 4.1 ajuda entender a descrição que segue. Resolve-se o problema em um sistema cartesiano de coordenadas. Para tal coloca-se o eixo  $x$  passando pelo centro das duas circunferências e o eixo  $y$  pelo ponto de tangencia  $O$ . Considera-se que as circunferências  $\Gamma_1$  (azul) e  $\Gamma_2$  (vermelha), com centros em  $O_1$  e  $O_2$ , têm raios  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente.

Figura 4.1: Uma solução do Problema 3. As circunferências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  com centros em  $O_1$  (azul) e  $O_2$  (vermelha) têm raios  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente. A reta  $p$  intercepta as duas circunferências em quatro pontos determinando três segmentos de igual medida. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja  $p$  a reta (em verde) de equação

$$y = ax + b, \tag{4.1.1}$$

com  $a$  e  $b$  números reais a serem determinados, que intercepta a  $\Gamma_1$  em  $E$  e  $F$  e a  $\Gamma_2$  em  $H$  e  $I$ , respectivamente.  $G$  é o ponto de interseção de  $p$  com o eixo  $y$ .

Por hipótese tem-se  $EF = FH = HI = d$ . Os pontos  $A = (x_A, 0)$ ,  $B = (x_B, 0)$ ,  $C = (x_C, 0)$  e  $D = (x_D, 0)$  são as projeções ortogonais dos pontos  $E$ ,  $F$ ,  $H$  e  $I$  sobre o eixo  $x$ , respectivamente. Segue pelo Teorema de Tales que:

$$AB = BC = CD = x_B - x_A = x_C - x_B = x_D - x_A = d_x.$$

Como viu-se anteriormente, o Eixo Radical de duas circunferências tangentes passa pelo ponto de tangência e é perpendicular a linha que une os centros das mesmas. Isto é, o eixo  $y$  na figura acima é o conjunto de pontos com a mesma Potência em relação a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Em particular, para o ponto  $G$  pode-se escrever:

$$GE \cdot GF = GI \cdot GH.$$

Sejam  $u = GF$  e  $v = GH$ , segue que:

$$(d + u) \cdot u = (d + v) \cdot v,$$

$$u + v = d.$$

Resolvendo o sistema formado pelas duas equações anteriores encontra-se que:

$$u = v = \frac{d}{2}.$$

O resultado anterior implica que  $GE = 3GF$  e  $GI = 3GH$ . Utilizando novamente o Teorema de Tales obtêm-se que  $OA = 3OB$  e  $OD = 3OC$  ou

$$x_A = 3x_B, \quad (4.1.2)$$

$$x_D = 3x_C. \quad (4.1.3)$$

Por outro lado, a equação em cartesianas da circunferência  $\Gamma_1$  é:

$$(x + r_1)^2 + y^2 = r_1^2,$$

$$x^2 + y^2 + 2xr_1 = 0. \quad (4.1.4)$$

A equação em cartesianas da circunferência  $\Gamma_2$  é:

$$(x - r_2)^2 + y^2 = r_2^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2xr_2 = 0. \quad (4.1.5)$$

Substituindo (4.1.1) em (4.1.4) encontra-se que  $x_A$  e  $x_B$  satisfazem:

$$x^2 + (ax + b)^2 + 2xr_1 = 0,$$

$$(1 + a^2)x^2 + 2(ab + r_1)x + b^2 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática anterior encontra-se:

$$x_A = \frac{-(ab + r_1) - \sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}, \quad (4.1.6)$$

$$x_B = \frac{-(ab + r_1) + \sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \quad (4.1.7)$$

Segue que:

$$d_x = x_B - x_A = \frac{2\sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \quad (4.1.8)$$

Utilizando as equações (4.1.2), (4.1.6) e (4.1.7) encontra-se:

$$ab + r_1 = 2\sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}. \quad (4.1.9)$$

Logo, substituindo (4.1.9) em (4.1.8) tem-se:

$$d_x = x_B - x_A = \frac{ab + r_1}{1 + a^2}. \quad (4.1.10)$$

De forma análoga, substituindo (4.1.1) em (4.1.5) encontra-se que  $x_C$  e  $x_D$  satisfazem:

$$x^2 + (ax + b)^2 - 2xr_2 = 0,$$

$$(1 + a^2)x^2 + 2(ab - r_2)x + b^2 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática anterior encontra-se:

$$x_C = \frac{r_2 - ab - \sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}, \quad (4.1.11)$$

$$x_D = \frac{r_2 - ab + \sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \quad (4.1.12)$$

Segue que:

$$d_x = x_D - x_C = \frac{2\sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \quad (4.1.13)$$

Utilizando as equações (4.1.3), (4.1.11) e (4.1.12) encontra-se:

$$r_2 - ab = 2\sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2}. \quad (4.1.14)$$

Logo, substituindo (4.1.14) em (4.1.13) tem-se:

$$d_x = x_D - x_C = \frac{r_2 - ab}{1 + a^2}. \quad (4.1.15)$$

De (4.1.10) e (4.1.15) segue que:

$$ab = \frac{r_2 - r_1}{2}. \quad (4.1.16)$$

Como também vale que  $d_x = x_C - x_B$  e de (4.1.11) e (4.1.7), então:

$$d_x = \frac{r_2 + r_1 - \sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2} - \sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \quad (4.1.17)$$

Da igualdade de (4.1.15) e (4.1.17) e substituindo (4.1.16) encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{r_1 - r_2}{2} &= r_1 - 2\sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - b^2 - \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2}, \\ b^2 &= \frac{14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2}{16}. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Elevando ao quadrado (4.1.16) e utilizando (4.1.18) encontra-se:

$$a^2 = \frac{4(r_2 - r_1)^2}{14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2}. \quad (4.1.19)$$

De (4.1.15), (4.1.16) e (4.1.19) segue que:

$$d_x = \frac{14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2}{6(r_1 + r_2)}.$$

Adicionalmente, aplicando o Teorema de Pitágoras, por exemplo, no triângulo  $EFJ$ , tem-se:

$$d = \sqrt{1 + a^2}d_x.$$

Segue que:

$$d = \sqrt{\frac{14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2}{12}}.$$

Como  $r_1$  e  $r_2$  são números positivos deve-se ter:

$$14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2 > 0.$$

Isto é,

$$r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 < 12r_1r_2.$$

Logo, somente existe solução quando:

$$\frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1r_2} < 12.$$

Chamando  $\lambda = \frac{r_1}{r_2}$  a desigualdade anterior pode ser reescrita como:

$$\lambda^2 - 14\lambda + 1 < 0.$$

A mesma se verifica quando:

$$7 - 4\sqrt{3} < \lambda < 7 + 4\sqrt{3},$$

$$7 - 4\sqrt{3} < \frac{r_1}{r_2} < 7 + 4\sqrt{3}.$$

## 4.2 Eixo e centro radical, quadriláteros cíclicos, ângulos. P5 IMO 1985.

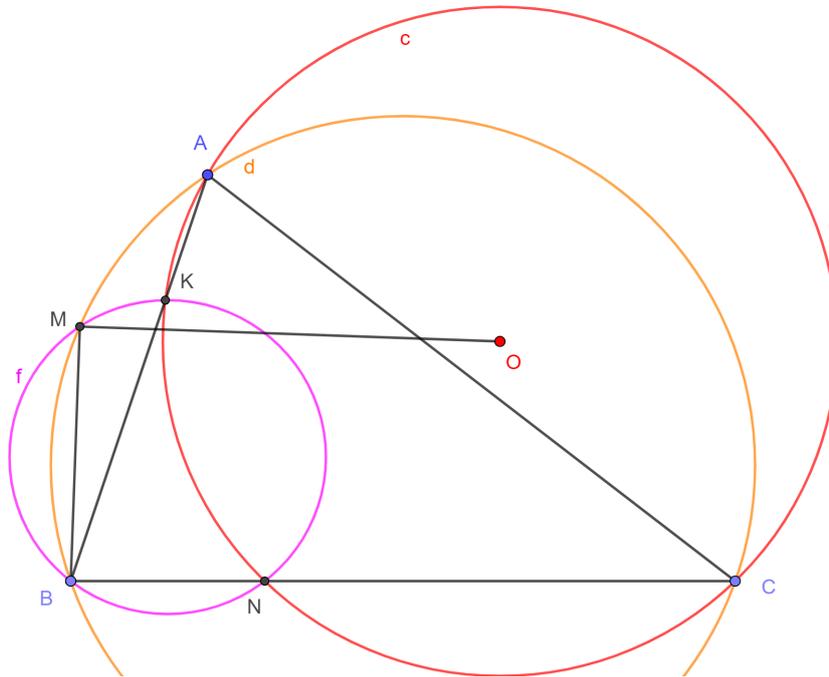
**Problema 4.** *Um círculo de centro  $O$  passa pelos vértices  $A$  e  $C$  de um triângulo  $ABC$  e intersecta os segmentos  $AB$  e  $BC$  novamente em pontos distintos  $K$  e  $N$ , respectivamente. Os círculos circunscritos aos triângulos  $ABC$  e  $KBN$  intersectam-se em exatamente 2 pontos distintos  $B$  e  $M$ . Provar que  $\angle OMB = 90^\circ$ .*

A IMO 1985 foi realizada na cidade de Joutsa, Finlândia. Problema 22 da lista curta e escolhido como quinto da competição, proposto pela delegação da Rússia [2].

### 4.2.1 Resolução do Problema 4.

A Figura 4.2 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.2: Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam  $c$ ,  $d$  e  $f$  as circunferências de centro  $O$ , a circunscrita ao  $\triangle ABC$  e ao  $\triangle KBN$ , respectivamente. As retas  $AC$ ,  $KN$ , e  $MB$  são eixos radicais das circunferências  $c$ , e  $d$ ,  $c$  e  $f$  e  $d$  e  $f$ , respectivamente. Seja  $P$  o centro radical das três circunferências anteriores. Isto é,  $P = AC \cap KN \cap MB$ .

Como os quadriláteros  $BNKM$  e  $NCAK$  são cíclicos tem-se:

$$180^\circ = \angle PMK + \angle BMK = \angle BNK + \angle CNK = \angle CAK + \angle PAK.$$

Logo, o quadrilátero  $PMKA$  é cíclico. Seja  $E$  a segunda interseção da linha  $MA$  com a circunferência  $c$ . Como o quadrilátero  $KNEA$  é cíclico:

$$\angle MEN = \angle AEN = \angle AKP = \angle AMP.$$

Segue que  $BP \parallel MP \parallel NE$  e bastará mostrar que  $OM \perp EN$ .

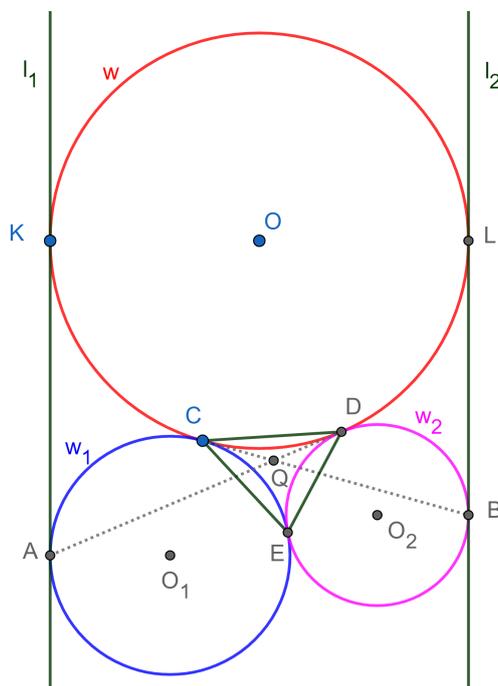
Mas também sabe-se que:

$$\angle MNE = \angle BMN = \angle BKN = \angle MEN.$$

Os triângulos  $MEN$  e  $OEN$  são isósceles com a mesma base  $EN$ , segue que  $ME = MN$  e  $OE = ON$ . Os pontos  $O$  e  $M$  pertencem a mediatriz do segmento  $EN$ , disto é concluído que



Figura 4.4: Construção geométrica para auxiliar na interpretação do Problema 5. Versão interativa [aqui](#).



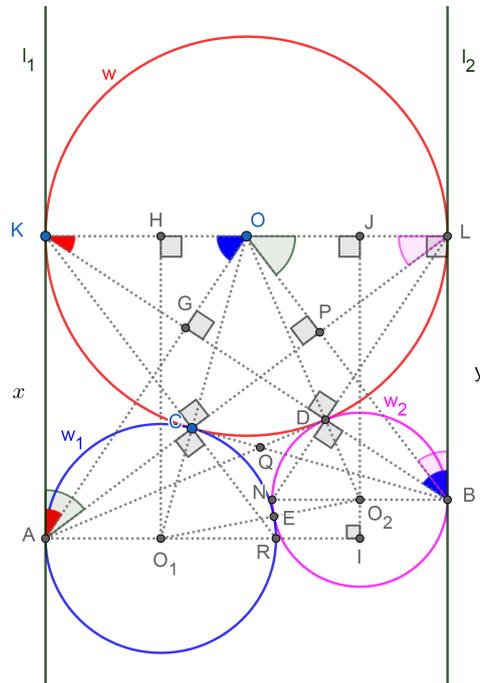
Fonte: O autor.

Sejam as circunferências  $w$ ,  $w_1$  e  $w_2$  de centros  $O$ ,  $O_1$  e  $O_2$  e raios  $r$ ,  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente. Sejam os pontos  $K$  e  $L$  de tangência de  $w$  com  $l_1$  e  $l_2$ , respectivamente.

A ideia da prova será mostrar que a reta  $AD$  é uma tangente comum as circunferências  $w$  e  $w_2$ . Com isto, a reta  $AD$  é o eixo radical de  $w$  e  $w_2$ . Analogamente, mostrando que a reta  $BC$  é uma tangente comum as circunferências  $w$  e  $w_1$ , segue que a reta  $BC$  é o Eixo Radical de  $w$  e  $w_1$ . Consequentemente,  $Q$  é o Centro Radical das três circunferências:  $w$ ,  $w_1$  e  $w_2$ . O Centro Radical tem a mesma Potência em relação as três circunferências, logo equidista dos pontos de tangência  $C$ ,  $D$  e  $E$ .

Inicia-se conetando os centros das circunferências e traçando o diâmetro  $KL$ . Como  $K$  e  $L$  são pontos de tangência o diâmetro  $KL$  é perpendicular a  $l_1$  e  $l_2$ . Determinam-se os pontos  $H$  e  $J$  como os pés das perpendiculares a  $KL$  que passam por  $O_1$  e  $O_2$ , respectivamente. O ponto  $I$  é encontrado na interseção da reta  $JO_2$  com uma reta paralela a  $KL$  passando por  $O_1$  (Figura 4.5).

Figura 4.5: Construção adicional para auxiliar na interpretação do Problema 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam  $KA = HO_1 = x$  e  $LB = JO_2 = y$ . Tem-se que  $OO_1 = r + r_1$ ,  $OO_2 = r + r_2$ ,  $O_1O_2 = r_1 + r_2$ ,  $HO = r - r_1$ ,  $OJ = r - r_2$ ,  $O_1I = 2r - r_1 - r_2$  e  $O_2I = x - y$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $O_1HO$ , retângulo em  $H$ , tem-se:

$$x^2 = (r + r_1)^2 - (r - r_1)^2,$$

$$x^2 = 4rr_1. \tag{4.3.1}$$

Analogamente, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $O_2JO$ , retângulo em  $J$ , obtêm-se:

$$y^2 = (r + r_2)^2 - (r - r_2)^2,$$

$$y^2 = 4rr_2. \tag{4.3.2}$$

E aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $O_1IO_2$ , retângulo em  $I$ , obtêm-se:

$$(x - y)^2 = (r_1 + r_2)^2 - (2r - r_1 - r_2)^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 4rr_1 + 4rr_2 - 4r^2. \tag{4.3.3}$$

Substituindo (4.3.1) e (4.3.2) em (4.3.3) encontra-se:

$$xy = 2r^2,$$

$$\frac{x}{r} = \frac{2r}{y}. \quad (4.3.4)$$

A equação (4.3.4) implica que os triângulos  $AKO$  e  $KLB$  são semelhantes pelo critério LAL, um par de lados proporcionais e o ângulo compreendido entre os mesmos congruente ( $\angle AKO = \angle BLK = 90^\circ$ ). Segue que  $KB$  é perpendicular a  $AO$ , pois  $AK \parallel BL$  e  $KO \parallel KL$ . Seja  $G = KB \cap AO$ , tem-se  $\angle OGD = 90^\circ$ .

Seja  $N \in w_2$  tal que  $NB$  é diâmetro. Tem-se que  $\angle NDB = \angle KDL = 90^\circ$ , logo  $D = BK \cap NL$ . Como o triângulo  $OKD$  é isósceles de base  $KD$  ( $OK = OD$ ) e  $OG$  é altura segue que  $OG$  também é bissetriz do ângulo  $KOD$  e  $\angle KOG = \angle DOG$ . Os triângulos  $AKO$  e  $ADO$  são congruentes por LAL ( $AO$  é comum e  $KO$  e  $DO$  são raios de  $w$ ). Portanto,  $\angle AKO = \angle ADO = 90^\circ$  e a reta  $AD$  é tangente a  $w$  e  $w_2$ .

Analogamente, a equação (4.3.4) também implica que os triângulos  $AKL$  e  $BLO$  são semelhantes pelo critério LAL, um par de lados proporcionais e o ângulo compreendido entre os mesmos congruente ( $\angle AKL = \angle BLO = 90^\circ$ ). Segue  $AL$  é perpendicular a  $BO$ , pois  $AK \parallel BL$  e  $LK \parallel LO$ . Seja  $P = AL \cap BO$ , tem-se  $\angle OPC = 90^\circ$ .

Seja  $R \in w_1$  tal que  $AR$  é diâmetro. Tem-se que  $\angle ACR = \angle KCL = 90^\circ$ , logo  $C = AL \cap KR$ . Como o triângulo  $OCL$  é isósceles de base  $CL$  ( $OL = OC$ ) e  $OP$  é altura segue que  $OP$  também é bissetriz do ângulo  $COL$  e  $\angle COP = \angle LOP$ .

Os triângulos  $COB$  e  $LOB$  são congruentes por LAL ( $OB$  é comum e  $CO$  e  $LO$  são raios de  $w$ ). Conclui-se que  $\angle OLB = \angle OCB = 90^\circ$  e a reta  $BC$  é tangente a  $w$  e  $w_1$ .

## 4.4 Potência de ponto relativo a circunferência, base média, semelhança. P2 IMO 2009.

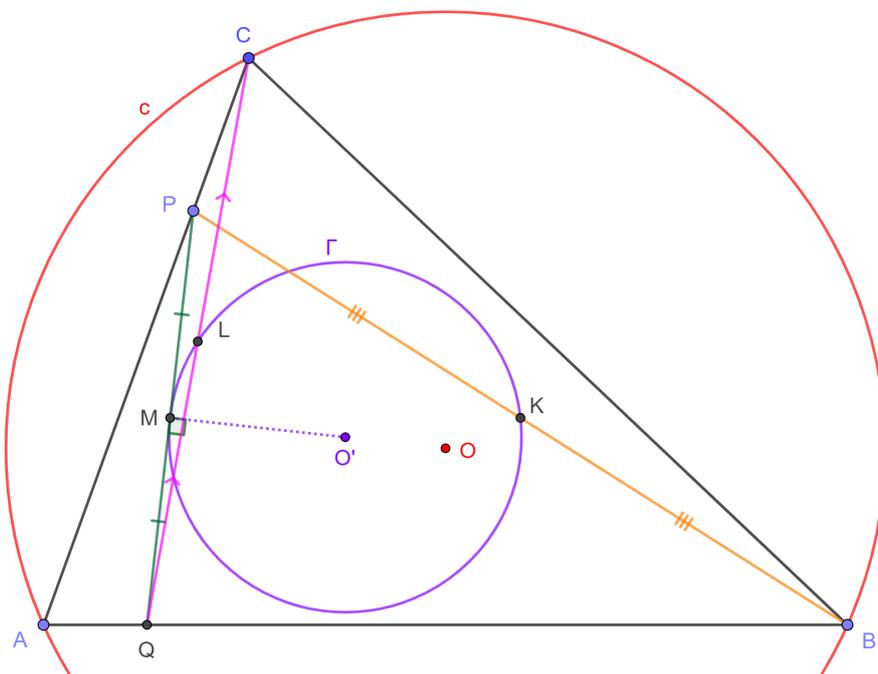
**Problema 6.** *Seja  $ABC$  um triângulo com circuncentro  $O$ . Sejam  $P$  e  $Q$  pontos no interior dos lados  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Sejam  $K$ ,  $L$  e  $M$  os pontos médios dos segmentos  $BP$ ,  $CQ$  e  $PQ$ , respectivamente, e seja  $\Gamma$  o círculo que passa por  $K$ ,  $L$  e  $M$ . Se  $PQ$  é tangente a  $\Gamma$ , provar que  $OP = OQ$ .*

A IMO 2009 foi realizada na cidade de Brémen, Alemanha. Problema 17 da lista curta e escolhido como segundo da competição, proposto pela delegação da Rússia [2].

### 4.4.1 Resolução do Problema 6.

A Figura 4.6 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.6: Construção geométrica inicial para o Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja  $c$  a circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$  e  $O'$  o centro de  $\Gamma$ . No  $\triangle PQB$  tem-se que  $M$  e  $K$  são pontos médios. Logo,

$$MK \parallel QB \parallel AB,$$

$$\frac{MK}{QB} = \frac{1}{2}.$$

Analogamente, no  $\triangle PQC$  encontra-se que  $M$  e  $L$  são pontos médios. Segue que:

$$ML \parallel PC \parallel AC,$$

$$\frac{ML}{PC} = \frac{1}{2}.$$

Por serem ângulos formados de segmentos mutuamente paralelos obtêm-se que  $\angle KML = \angle BAC$ . Adicionalmente, vale que:

$$\frac{ML}{MK} = \frac{PC}{QB}. \tag{4.4.1}$$

Por alternô entre paralelas  $\angle AQP = \angle KMQ$ . Como  $PQ$  é tangente a  $\Gamma$ , referente a corda  $KM$ , tem-se a igualdade de um ângulo de segmento com um inscrito  $\angle KMQ = \angle MLK$ .

Segue que  $\triangle AQP \sim \triangle MLK$ ,

$$\frac{AQ}{ML} = \frac{AP}{MK} = \frac{QP}{LK}. \tag{4.4.2}$$

De (4.4.1) e (4.4.2) tem-se:

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{ML}{MK} = \frac{PC}{QB}.$$

Logo,

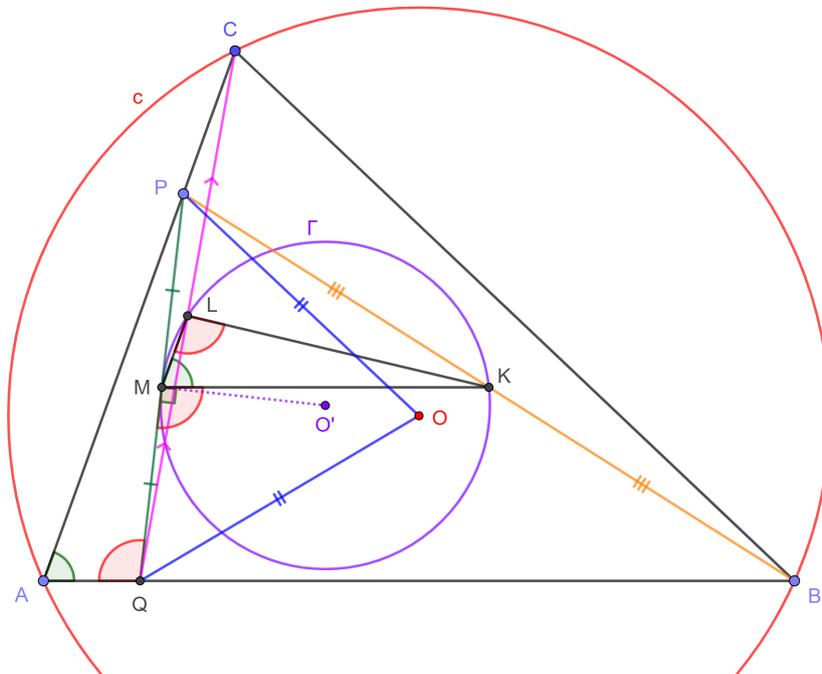
$$AQ \cdot QB = AP \cdot PC. \tag{4.4.3}$$

A equação (4.4.3) indica que a potência de  $Q$  e  $P$  em relação a circunferência  $c$  é a mesma:

$$Pot_c(Q) = OA^2 - OQ^2 = OA^2 - OP^2 = Pot_c(P).$$

Isto é,  $OQ = OP$ . A Figura 4.7 mostra uma construção geométrica.

Figura 4.7: Construção geométrica para o Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

## 4.5 Potência de um ponto. Eixo Radical. Quadrilátero Inscritível. Semelhança de triângulos. P5 IMO 2012.

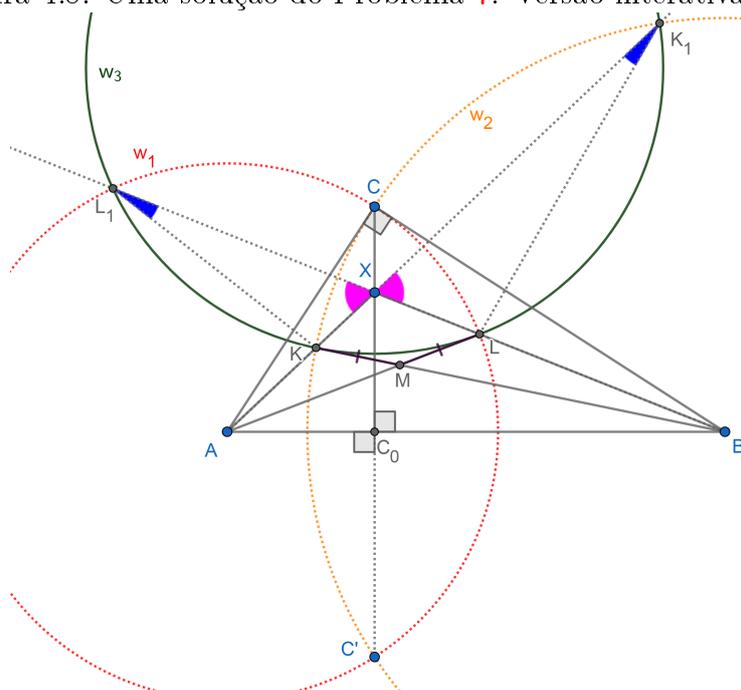
**Problema 7.** *Seja  $ABC$  um triângulo tal que  $\angle BCA = 90^\circ$ , e seja  $C_0$  o pé da altura relativa a  $C$ . Seja  $X$  um ponto no interior do segmento  $CC_0$ . Seja  $K$  o ponto do segmento  $AX$  tal que  $BK = BC$ . Analogamente, seja  $L$  o ponto do segmento  $BX$  tal que  $AL = AC$ . Seja  $M$  o ponto de interseção de  $AL$  com  $BK$ . Provar que  $MK = ML$ .*

A IMO 2012 foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina. Problema 5 da competição [2].

### 4.5.1 Resolução do Problema 7

A Figura 4.8 ajuda entender a descrição que segue.

Figura 4.8: Uma solução do Problema 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja  $C'$  a reflexão do ponto  $C$  na linha  $AB$ , e  $w_1$  e  $w_2$  circunferências com centros  $A$  e  $B$ , que passam por  $L$  e  $K$ , respectivamente. Devido a  $AC' = AC = AL$  e  $BC' = BC = BK$ , tanto  $w_1$  como  $w_2$  passam por  $C$  e  $C'$ . De  $\angle BCA = 90^\circ$  tem-se que  $AC$  é tangente a  $w_2$  em  $C$ , e  $BC$  é tangente a  $w_1$  em  $C$ . Seja  $K_1 \neq K$  a segunda interseção de  $AX$  e  $w_2$ , e  $L_1 \neq L$  a segunda interseção de  $BX$  e  $w_1$ .

Nota-se que  $X$  é um ponto do Eixo Radical das circunferências  $w_1$  e  $w_2$ , pois  $X \in CC'$ . Pelo Teorema das Cordas, a Potência do ponto  $X$  com relação a  $w_2$  e  $w_1$  pode ser escrita como:

$$Pot_{w_2}(X) = XK \cdot XK_1 = XC \cdot XC' = XL \cdot XL_1 = Pot_{w_1}(X). \tag{4.5.1}$$

Da equação (4.5.1) segue que:

$$\frac{XK}{XL} = \frac{XL_1}{XK_1}.$$

O resultado anterior e o fato que  $\angle L_1XK = \angle K_1XL$  (opostos pelo vértice) indicam que  $\triangle L_1XK \sim \triangle K_1XL$ . Como consequência tem-se que  $\angle KL_1X = \angle LK_1X$ , o qual leva a que o

quadrilátero  $K_1LKL_1$  é inscrito (circunferência  $w_3$ ).

Nota-se que  $X$  também é um ponto do Eixo Radical das circunferências  $w_1$  e  $w_3$ , pois  $X \in LL_1$  e das circunferências  $w_2$  e  $w_3$ , pois  $X \in KK_1$ . Isto é,  $X$  é o Centro Radical de  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$ .

A Potência de  $A$  com relação a  $w_2$  pode ser calculada de duas formas:

$$AC^2 = Pot_{w_2}(A) = AK \cdot AK_1.$$

Como, por hipótese,  $AC = AL$  tem-se:

$$AL^2 = AK \cdot AK_1 = Pot_{w_3}(A).$$

Isto é,  $AL$  é tangente a  $w_3$ .

Analogamente, a Potência de  $B$  com relação a  $w_1$  pode ser calculada de duas formas:

$$BC^2 = Pot_{w_1}(B) = BL \cdot BL_1.$$

Por hipótese  $BC = BK$ , logo:

$$BK^2 = BL \cdot BL_1 = Pot_{w_3}(B).$$

Isto é,  $BK$  é tangente a  $w_3$ . Segue que  $MK$  e  $ML$  são duas tangentes de  $M$  a  $w_3$  e  $MK = ML$ .

## 4.6 Tangência a uma circunferência. Ângulos inscritos e de segmento. Potência de um ponto e Eixo Radical. P8 NA IGO 2014-5.

**Problema 8.** *O triângulo  $ABC$  é acutângulo com  $AC > AB$ , de circunferência circunscrita  $c$  e Circuncentro  $O$ . A linha tangente a  $c$  em  $A$  intersecta a continuação de  $BC$  em  $P$ .  $X$  é o ponto de  $OP$  tal que  $\angle AXP = 90^\circ$ . Os pontos  $E \in AB$  e  $F \in AC$  são escolhidos no mesmo lado de  $OP$  e satisfazem que  $\angle EXP = \angle ACX$  e  $\angle FXO = \angle ABX$ . Se  $K, L$  são os pontos de interseção de  $EF$  com  $c$ , mostrar que  $OP$  é tangente ao circuncirculo  $d$  do  $\triangle KXL$ .*

Problema 8 NA (Nível Avançado) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Mahdi Etesami Fard [4].

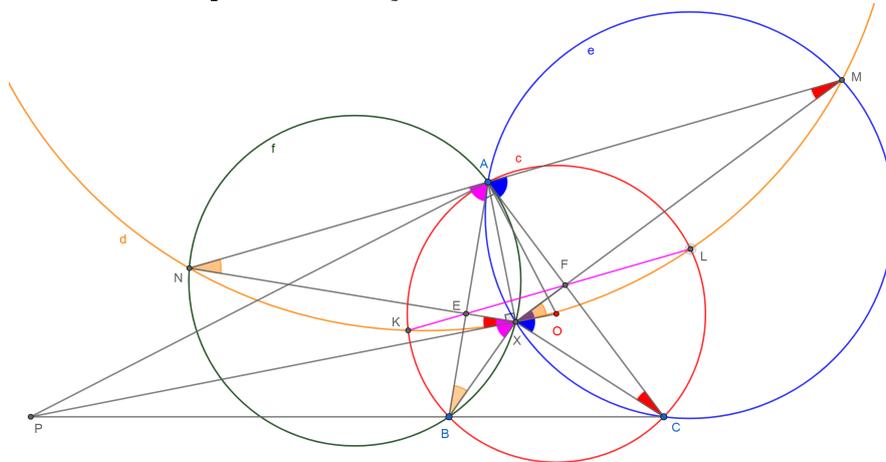


do ponto  $X$  é  $360^\circ$ ,  $\angle AXE = 90^\circ - \angle EXP = 90^\circ - \angle ACX$  e  $\angle AXF = 90^\circ - \angle FXO = 90^\circ - \angle ABX$ :

$$\begin{aligned} \angle NAM &= \angle A + 180^\circ - \angle BXC + \angle ABX + \angle ACX = \\ &= \angle A + 180^\circ - \angle BXC + \angle BXC - \angle A = 180^\circ. \end{aligned}$$

Conclui-se que  $\angle AMX = \angle NMX$ . Sendo válido que  $\angle NMX = \angle NXP$  está demonstrada a tangência de  $PO$  com  $d$ . Em referência a corda  $NX$  de  $d$  o  $\angle NMX$  é inscrito e o  $\angle NXP$  é de segmento. A Figura 4.10 permite acompanhar a resolução do Problema 8.

Figura 4.10: Guia para a resolução do Problema 8. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

## 4.7 Quadriláteros cíclicos. Potência de um ponto relativo a uma circunferência. Semelhança de triângulos. P7 NA IGO 2014-5.

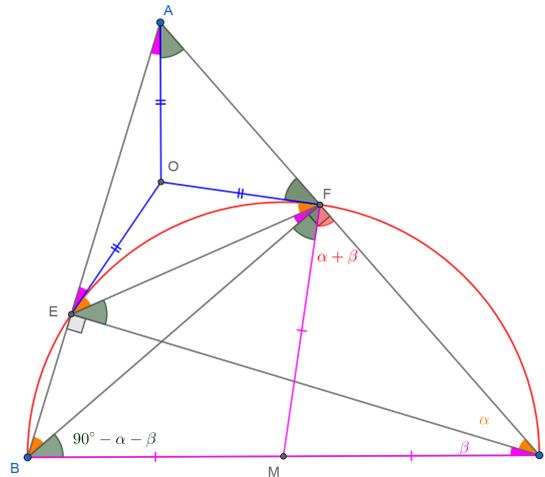
**Problema 9.** *Um triângulo acutângulo  $ABC$  é dado. Uma circunferência de diâmetro  $BC$  intersecta  $AB, AC$  em  $E, F$ , respectivamente. Seja  $M$  o ponto médio de  $BC$  e  $P$  o ponto de interseção de  $AM$  e  $EF$ .  $X$  é um ponto no arco menor de  $EF$  e  $Y$  o segundo ponto de interseção de  $XP$  com a circunferência mencionada anteriormente. Mostrar que  $\angle XAY = \angle XYM$ .*

Problema 7 NA (Nível Avançado) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Ali Zooelm [4].

### 4.7.1 Resolução do Problema 9

A Figura 4.11 permite acompanhar a resolução da primeira parte do Problema 9.

Figura 4.11: Guia para a resolução da primeira parte do Problema 9. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Tem-se  $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$ . Sejam  $\angle FCE = \alpha$  e  $\angle ECB = \beta$ . Como  $BEFC$  é um quadrilátero inscritível segue que  $\angle FBE = \angle FCE = \alpha$  e  $\angle EFB = \angle ECB = \beta$ .

Como  $MF = MB = MC$  obtêm-se:

$$\angle MFC = \angle MCF = \alpha + \beta,$$

$$\angle FBC = \angle CEF = \angle MFB = 90^\circ - \alpha - \beta.$$

Também encontram-se os ângulos suplementares em  $E$  e  $F$ . Isto é,  $\angle AEF = \alpha + \beta$  e  $\angle AFE = 90^\circ - \beta$ . Pela soma dos ângulos internos no  $\triangle AEF$  segue que  $\angle EAF = 90^\circ - \beta$ .

Chama-se com a letra  $O$  ao Circuncentro do  $\triangle AEF$ . Isto define os triângulos isósceles  $OEF$ ,  $OFA$  e  $OAE$  de bases  $EF$ ,  $FA$  e  $AE$ , respetivamente.

Sejam  $\angle OEF = \angle OFE = x$ ,  $\angle OEA = \angle OAE = y$  e  $\angle OAF = \angle OFA = z$ . Como  $x + y = \alpha + \beta$ ,  $x + z = 90^\circ - \beta$  e  $y + z = 90^\circ - \alpha$ , resolvendo o sistema encontra-se:

$$\angle OEF = \angle OFE = x = \alpha,$$

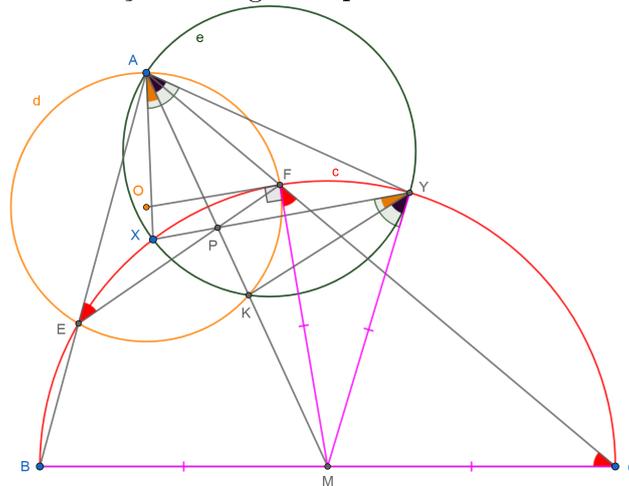
$$\angle OEA = \angle OAE = y = \beta,$$

$$\angle OAF = \angle OFA = z = 90^\circ - \alpha - \beta.$$

Logo,  $\angle MFO = 90^\circ$ .

A Figura 4.12 permite acompanhar a resolução da segunda parte do Problema 9.

Figura 4.12: Guia para a resolução da segunda parte do Problema 9. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Suponha-se que o ponto  $K$  é a interseção de  $AM$  com o círculo circunscrito (circunferência  $d$ , em amarelo) ao  $\triangle AEF$ . Viu-se que  $\angle MFO = 90^\circ$ , então  $MF$  é tangente a  $d$  em  $F$ .

A Potência do ponto  $M$  relativa a circunferência  $d$  pode ser escrita utilizando a tangente  $MF$  ou a corda  $KA$ :  $MF^2 = MK \cdot MA$ . Por outro lado,  $MY = MF$ . Logo,  $MY^2 = MK \cdot MA$ . Como  $\angle AMY = \angle YMK$  (comum) e  $\frac{MY}{MA} = \frac{MK}{MY}$ , então pelo critério de semelhança LAL obtêm-se:

$$\begin{aligned} \triangle MYA &\sim \triangle MKY, \\ \angle YAM &= \angle KYM. \end{aligned}$$

Adicionalmente, como  $P$  está no Eixo Radical de  $c$  e  $d$  calcula-se a Potência do ponto  $P$  de três formas:  $AP \cdot PK = PE \cdot PF = PX \cdot PY$ . Logo,  $AXKY$  é cíclico (circunferência  $e$ , em verde). Isto é,  $P$  é Centro Radical de  $c$ ,  $d$  e  $e$ . Com isto,  $\angle XAK = \angle XYK$ . Conclui-se que  $\angle XAY = \angle XYM$ .

# Capítulo 5

## Referências Bibliográficas

- [1] DELGADO, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Página 12)
- [2] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium**: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009. New York: Springer, 2011. (Página 40, 45, 47, 50, 53)
- [3] HOLANDA, B. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2011. (Página 12)
- [4] Iranian Geometry Olympiad (IGO). **Problems and Solutions of 1st IGO**. 2014. (Página 54, 56)
- [5] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: [10.22533/at.ed.24221310814](https://doi.org/10.22533/at.ed.24221310814). Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [6] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [7] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN

- 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [8] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [9] LÓPEZ LINARES, J. Jogos com a desigualdade triangular. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 3, p. 73-94, dez. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n32022073094. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [10] LÓPEZ LINARES, J. **Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e desigualdades**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 85 p. ISBN 978-65-87023-28-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023281>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [11] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática**. 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [12] LÓPEZ LINARES, J. **Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 57 p. ISBN 978-65-87023-26-7 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023267>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [13] LÓPEZ LINARES, J. Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 1, p. 27-47, jul. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n12022027047. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)

- [14] LÓPEZ LINARES, J. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023250>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [15] LÓPEZ LINARES, J. **Treinamento de Professores e Estudantes do Ensino Fundamental e Médio com Problemas de Olimpíadas de Matemática**. 155 f. Tese (Livre-docência) Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, 2022. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/livredocencia/74/tde-28112022-091705/pt-br.php>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [16] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdv19202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [17] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [18] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023212>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [19] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [20] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra - v. 3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 91 p. ISBN 978-65-87023-24-3 (e-book).

Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 17 mar. 2023.  
(Página 12)

- [21] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [22] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdv17ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [23] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdv18202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [24] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22-40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdv20202123169664jlljpmsafj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [25] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso em: 17 mar. 2023.  
(Página 12)
- [26] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)

- [27] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [28] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [29] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [30] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [31] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdv21202123169664jlljpmsafj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [32] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção ProfMat). (Página 12)
- [33] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Página 12, 21)
- [34] PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Página 12)
- [35] SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra**

---

LÓPEZ LINARES, J. **Potência de ponto relativo a uma circunferência: teoria, construções e problemas** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 64 p. ISBN 978-65-87023-30-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023304>.

- internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [36] SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J.; RAMALHO DE FREITAS, M.P.O. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol.3, N.1, Jan-Jun 2022, pp. 70-87. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [37] SANTOS, J. P. M.; Marcus Vinícius de Araújo Lima; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J. Minimização da soma de quadrados de distâncias aos vértices em polígonos convexos, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol. 3, N. 2, Jul - Dez 2022, pp. 66 – 82. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i2.11309>. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 12)
- [38] THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria-Nível 2, 2006. (Página 12)

