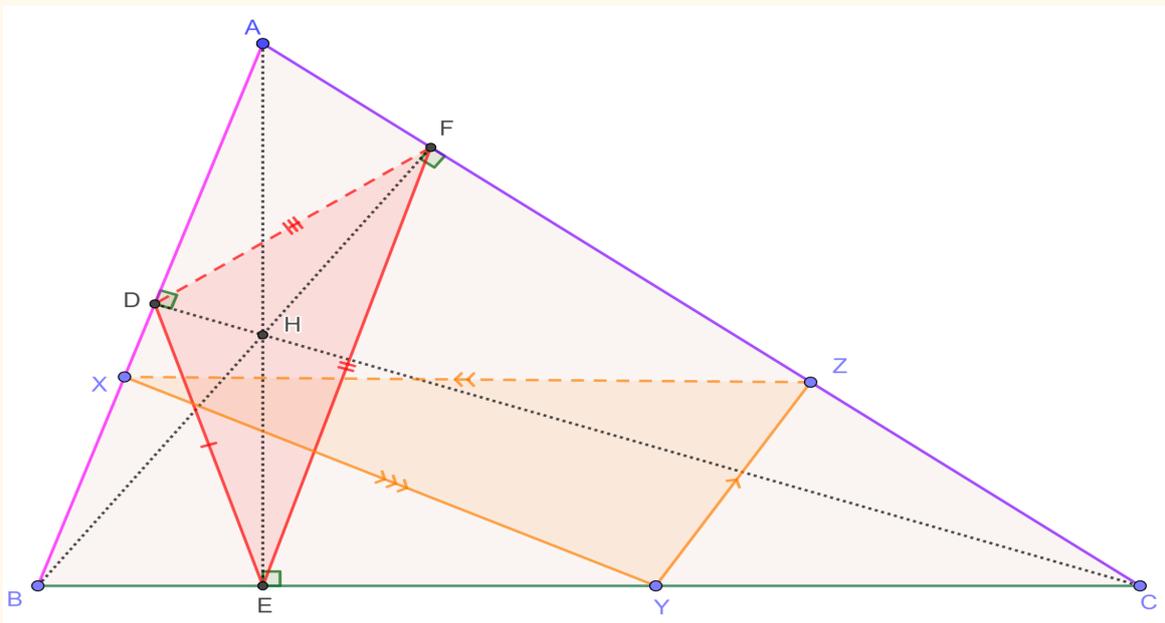


Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e desigualdades



Juan López Linares

JUAN LÓPEZ LINARES

**Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e
desigualdades**

DOI: 10.11606/9786587023281

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2022

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-Reitora: Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

Diretor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Vice-Diretor: Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da
Universidade de São Paulo

L864j	López Linares, Juan Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e desigualdades / Juan López Linares. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2022. 85 p. ISBN 978-65-87023-28-1 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023281 1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino médio. 6. Formação de professores. I. Título.
-------	--

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



Dedico este livro a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores e Estudantes do curso de Geometria Olímpica com GeoGebra que motivaram a escrita deste livro eletrônico.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

AUTOR

Prof. Associado JUAN LÓPEZ LINARES: <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Quando adolescente participava como estudante de um grupo de treinamento para olimpíadas de Física. Embora tivesse sucessos nas competições desta disciplina, nas olimpíadas de Matemática não tinha resultados espetaculares. Sempre sentiu falta de um grupo de treinamento em Matemática. Essa experiência extracurricular determinou seu futuro profissional e motivou sua linha de trabalho hoje.

Professor Associado do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores e estudantes de alto rendimento.

Na área de Ensino de Matemática Olímpica, publicou 15 artigos, 10 livros eletrônicos (e-book), um capítulo de livro, uma dissertação de mestrado e uma tese de livre docência. Textos completos e gratuitos podem ser encontrados [aqui](#). Também disponibilizou mais de 750 vídeo aulas. Adicionalmente, no site do [GeoGebra](#) estão disponíveis mais de 500 construções geométricas interativas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProFMat) pela UFSCar em 2019 e Livre Docente na área de Ensino de Matemática Olímpica na FZEA USP em 2022.

Título

Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e desigualdades

Prefácio

Este material didático é utilizado durante algumas das aulas dos cursos “Geometria Olímpica com GeoGebra I e II” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 53 figuras que facilitam acompanhar as resoluções. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. O conteúdo está dividido em duas partes: um conjunto de dez jogos baseados na desigualdade triangular e um grupo de sete problemas resolvidos de olimpíadas internacionais de Matemática. Nestes últimos também aparecem as desigualdades de Cauchy-Schwarz, das Médias e de Erdős-Mordell. O diferencial na utilização do GeoGebra justifica-se pela disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo desafio. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mãos na massa.

Palavras-chave: Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

Lista de Figuras

2.1	Guia para a demonstração da Proposição 1. Versão interativa aqui	17
2.2	Guia para a demonstração da Proposição 2. Versão interativa aqui	18
2.3	Definição de simetria em relação a um ponto. Versão interativa aqui	19
2.4	$ABA'B'$ é um paralelogramo. Versão interativa aqui	19
2.5	Definição de simetria do ponto A em relação a uma reta f . Versão interativa aqui	20
2.6	Definição de Triângulo Órtico. Versão interativa aqui	21
2.7	O incentro do triângulo órtico DEF coincide com o ortocentro do triângulo original ABC . Versão interativa aqui	21
3.1	Dividir em três (AB , BC e CD) partes diferentes o barbante AD e intentar formar um triângulo. Versão interativa aqui	23
3.2	Escolher um ponto $F \in r$ procurando minimizar o comprimento da poligonal CFD . Versão interativa aqui	24
3.3	Problema do Cavaleiro I. Versão interativa aqui . Movimentar os pontos B e C para encontrar o caminho mais curto.	25
3.4	Problema do cavaleiro II. Versão interativa aqui . Movimentar os pontos B , C e D para encontrar o caminho mais curto.	26
3.5	Removedor de Minas. Versão interativa aqui	27
3.6	Faixa de Pedestres. Versão interativa aqui	28
3.7	Rio traiçoeiro. Versão interativa aqui	29
3.8	Problema do Jardineiro ou construção de uma Elipse. Versão interativa aqui	30
3.9	Jogo sobre o Ponto de Fermat. Versão interativa aqui	31
3.10	Jogo sobre o problema de Fagnano. Versão interativa aqui . Podem movimentar-se os pontos X , Y e Z	32
4.1	Para conseguir NÃO formar um triângulo basta que o lado de maior comprimento seja mais longo que a soma dos outros dois. Versão interativa aqui	33
4.2	O ponto $E \in r$, tal que C , E e D' sejam colineares, minimiza o comprimento da poligonal CFD . Versão interativa aqui	34

4.3	Resolução do Problema do cavaleiro I. Versão interativa aqui . Movimentar os pontos B e C para encontrar o caminho mais curto.	35
4.4	Resolução do Problema do cavaleiro II. Versão interativa aqui . Movimentar os pontos B , C e D para encontrar o caminho mais curto.	37
4.5	Triângulo equilátero ABC . M , N e L são pontos médios dos lados AB , BC e AC , respetivamente. Os arcos de circunferência β e γ tem raios iguais a metade da altura do triângulo ABC e estão centrados em B e C , respetivamente. H é o ponto de interseção da altura LB , a base média MN e o arco de circunferência β . MN é paralela com AC e tangente a β . Versão interativa aqui	38
4.6	A figura anterior adicionam-se os segmentos CE , CD e o ponto J , interseção de γ com CD . Versão interativa aqui	39
4.7	A figura anterior adiciona-se o ponto C' , reflexão do ponto C em relação a semirreta MN . Nota-se que $CC' = LB$. Também são construídos os segmentos AC' e $C'D$. Versão interativa aqui	40
4.8	O ponto $P = CD \cap MN$, $CP = PC'$, pois $P \in MN$. Estudo da Desigualdade Triangular no triângulo DPC' . Versão interativa aqui	41
4.9	Configuração que minimiza $AD + DE$. Além disso, são mostrados dois instantes de tempo, quando o soldado está em $K_1 \in AD = AH$ e em $K_2 \in DE = HJ$, e as áreas de cobertura, círculos de raio $\frac{\sqrt{3}}{4}l$, do detector de minas em cada caso. Versão interativa aqui	42
4.10	Resolução do Problema da Faixa de Pedestres. Versão interativa aqui	43
4.11	Resolução 1 do Problema do Rio traíçoeiro I. Versão interativa aqui	44
4.12	Resolução 1 do Problema do Rio traíçoeiro II. Versão interativa aqui	45
4.13	Resolução 1 do Problema do Rio traíçoeiro III. Versão interativa aqui	45
4.14	Resolução 2 do Problema do Rio traíçoeiro. Versão interativa aqui	46
4.15	Definição de Elipse e Desigualdade Triangular. Versão interativa aqui	48
4.16	Uma reta tangente à elipse em P é bissetriz externa do $\triangle F_1PF_2$. Versão interativa aqui	49
4.17	Construção geométrica para o caso em que todos os ângulos internos do $\triangle ABC$ são menores que 120° . Versão interativa aqui	51
4.18	Construção geométrica para o caso em que $\angle BAC \geq 120^\circ$. Versão interativa aqui	52
4.19	Problema de Fagnano. Versão interativa aqui . Podem movimentar-se os pontos X , Y e Z	53
4.20	Resolução 1 (após cinco conjuntos de reflexões). Problema de Fagnano. Versão interativa aqui . Podem movimentar-se os pontos X , Y e Z	54

4.21	Resolução 2. Primeira parte. Problema de Fagnano. Versão interativa aqui . Podem movimentar-se os pontos D e E para verificar o mínimo no comprimento da poligonal $HEDK$	55
4.22	Resolução 2. Segunda parte. Problema de Fagnano. Versão interativa aqui . Pode movimentar-se o ponto Z para verificar o mínimo do segmento HK	56
5.1	Desigualdades envolvendo os comprimentos dos segmentos AB e BC . Versão interativa aqui . Pode ser verificada a desigualdade movimentando o ponto B . . .	59
5.2	Lema para a prova de Erdős-Mordell. Versão interativa aqui	61
5.3	Construção para a prova do Lema 8. Versão interativa aqui	62
5.4	Teorema de Erdős-Mordell. Versão interativa aqui	63
6.1	Construção geométrica inicial para o Problema 11. Versão interativa aqui	66
6.2	Construção geométrica para o Problema 11. Versão interativa aqui . Pode ser movimentado o ponto B para encontrar o perímetro mínimo.	68
6.3	Construção geométrica para o Problema 12. Versão interativa aqui . Movimentando o ponto P pode-se verificar o mínimo.	69
6.4	Construção geométrica para o Problema 13. Versão interativa aqui . Movimentando o ponto A pode-se verificar o mínimo.	70
6.5	Construção geométrica para o Lema 10. Versão interativa aqui	72
6.6	Construção geométrica para o Problema 14. Versão interativa aqui	74
6.7	Construção geométrica para o Problema 15. Versão interativa aqui	75
6.8	Construção geométrica inicial do Problema 16. Versão interativa aqui	77
6.9	Guia para a resolução do Problema 16. Versão interativa aqui	78
6.10	Uma construção geométrica para o Problema 17. Versão interativa aqui	79

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	13
1.1	Brincadeiras e jogos	13
1.2	Sobre o conteúdo e sua organização	13
1.3	Sobre o GeoGebra	14
1.4	Lista de jogos	14
1.5	Lista de problemas olímpicos	15
2	Algumas proposições básicas antes dos jogos	17
2.1	Desigualdade triangular	17
2.2	Simetria em relação a um ponto	19
2.3	Simetria em relação a uma reta	20
2.4	Triângulo Órtico	20
3	Enunciado das brincadeiras ou jogos	23
3.1	Jogo 1: não conseguir formar um triângulo	23
3.2	Jogo 2: lei da reflexão	24
3.3	Jogo 3: problema do cavaleiro I	24
3.4	Jogo 4: problema do cavaleiro II	25
3.5	Jogo 5: removedor de minas	26
3.6	Jogo 6: faixa de pedestres	28
3.7	Jogo 7: rio traiçoeiro	28
3.8	Jogo 8: problema do jardineiro	29
3.9	Jogo 9: ponto de Fermat	30
3.10	Jogo 10: problema de Fagnano	31
4	Fundamentação teórica dos jogos	33
4.1	Não conseguir formar um triângulo (jogo 1)	33
4.1.1	Resolução do Problema 1	33

4.2	Comprimento mínimo passando por uma reta (jogo 2)	34
4.2.1	Resolução do Problema 2	34
4.3	Problema do cavaleiro I (jogo 3)	35
4.3.1	Resolução do Problema 3	35
4.4	Problema do cavaleiro II (jogo 4)	36
4.4.1	Resolução do Problema 4	36
4.5	Removedor de minas (jogo 5)	37
4.5.1	Resolução do Problema 5	37
4.6	Problema da faixa de pedestres (jogo 6)	42
4.6.1	Resolução do Problema 6	43
4.7	Rio traiçoeiro (jogo 7)	44
4.7.1	Resolução 1 do Problema 7	44
4.7.2	Resolução 2 do Problema 7	45
4.8	Problema do jardineiro ou construção de uma Elipse (jogo 8)	47
4.8.1	Resolução do Problema 8	47
4.9	Ponto de Fermat (jogo 9)	49
4.9.1	Resolução do Problema 9	50
4.9.1.1	Todos os ângulos internos do $\triangle ABC$ são menores que 120° .	50
4.9.1.2	Caso do $\triangle ABC$ com $\angle BAC \geq 120^\circ$.	51
4.10	Problema de Fagnano (jogo 10)	52
4.10.1	Resolução 1 do problema de Fagnano	53
4.10.2	Resolução 2 do problema de Fagnano	55
5	Outras desigualdades na Geometria	57
5.1	Desigualdade de Cauchy-Schwarz	57
5.2	Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica	58
5.3	Teorema de Erdős-Mordell	60
6	Problemas resolvidos de olimpíadas internacionais	65
6.1	Desigualdade Triangular. Desigualdade das Médias. Áreas. P1 IMO 1976.	65
6.1.1	Resolução do Problema 11.	65
6.2	Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Incentro. Áreas. P1 IMO 1981.	68
6.2.1	Resolução do Problema 12.	68
6.3	Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Incírculo. Tangentes. P6 IMO 1983.	70
6.3.1	Resolução do Problema 13.	70
6.4	Desigualdade Triangular. Bases Médias. Paralelogramo. P7 SL IMO 1999.	71
6.4.1	Resolução do Problema 14.	72
6.5	Desigualdade Triangular. Lei dos Senos. Trigonometria. P1 IMO 2001.	74

6.5.1	Resolução do Problema 15.	74
6.6	Arcos de circunferências, desigualdade triangular e circuncirculo. P5 NE IGO 2014-5.	77
6.6.1	Resolução	77
6.7	Desigualdade de Erdős-Mordell, trigonometria e demonstração por contradição. P5 IMO 1991.	78
6.7.1	Resolução do Problema 17	78
7	Referências Bibliográficas	80

Capítulo 1

Introdução

1.1 Brincadeiras e jogos

Brincadeiras e jogos são ferramentas eficazes de aprendizagem em determinados contextos. Segundo Kamii e Joseph [5], brincadeiras podem ser utilizados na educação matemática para estimular a habilidade de pensar de forma independente. A pesquisa de Savi e Ribas [38] traz pontos importantes para uso de jogos digitais na educação. Os autores listam três potencialidades da interação com os computadores para o ensino: efeito motivador, aprendizado por descoberta e socialização.

Na dissertação de Demétrius Melo de Souza [39], o autor apresenta com figuras, textos e vídeos um conjunto de problemas (jogos) que são resolvidos pelas transformações geométricas de Translação e Rotação. Outro artigo muito didático sobre o Teorema de Napoleão e o ponto de Fermat pode ser encontrado em Rodrigues [35].

1.2 Sobre o conteúdo e sua organização

O livro faz parte dum projeto de longo prazo para o treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático é utilizado nas aulas dos cursos “Geometria Olímpica com GeoGebra I e II” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. Os mesmos acontecem na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma Moodle de Cultura e Extensão da USP.

O conteúdo está dividido em duas partes: um conjunto de dez jogos baseados na desigualdade triangular e um grupo de sete problemas resolvidos de olimpíadas internacionais de Matemática. Nestes últimos também aparecem as desigualdades de Cauchy-Schwarz, das Médias e de Erdős-Mordell.

O texto conta com 53 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, links para os gráficos interativos são disponibilizados em páginas do [GeoGebra](#).

Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Cícero Thiago [40]. Também serviram como referência os livros de Geometria [31], Geometria Analítica [1] e Matemática Discreta [30] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Cinco livros eletrônicos gratuitos com as notas de aulas do curso Geometria Olímpica com GeoGebra estão disponíveis em [16], [17], [18], [12] e [10]. Também foram publicados quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [15], [6], [7] e [8]. Outros trabalhos da área de Matemática são [9], [19], [20], [21], [14], [22], [23], [4], [24], [26], [27], [28], [29], [36], [25], [37], [11] e [13].

1.3 Sobre o GeoGebra

O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa.

Com uma boa organização e programação adequada, discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contra partida, na versão impressa tradicional o aprendiz precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma resolução.

O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movimentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes.

Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendizado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar e buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

1.4 Lista de jogos

1. Não conseguir formar um triângulo. Desafio, regras, materiais e questionamentos em [3.1](#). Apoio teórico em [4.1](#). Versão interativa [aqui](#).
2. Lei da Reflexão. Desafio, regras, materiais e questionamentos em [3.2](#). Apoio teórico em [4.2](#). Versão interativa [aqui](#).

3. Problema do Cavaleiro I. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 3.3. Apoio teórico em 4.3. Versão interativa [aqui](#).
4. Problema do Cavaleiro II. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 3.4. Apoio teórico em 4.4. Versão interativa [aqui](#).
5. Removedor de Minas. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 3.5. Apoio teórico em 4.5. Versão interativa [aqui](#).
6. Faixa de Pedestres. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 3.6. Apoio teórico em 4.6. Versão interativa [aqui](#).
7. Rio Traíçoero. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 3.7. Apoio teórico em 4.7. Versão interativa [aqui](#) e [aqui](#).
8. Problema do Jardineiro. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 3.8. Apoio teórico em 4.8. Versão interativa [aqui](#).
9. Ponto de Fermat. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 3.9. Apoio teórico em 4.9. Versão interativa [aqui](#) e [aqui](#).
10. Problema de Fagnano. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 3.10. Apoio teórico em 4.10. Versão interativa [aqui](#) e [aqui](#).

1.5 Lista de problemas olímpicos

1. Num quadrângulo convexo com área 32 cm^2 , a soma dos comprimentos de dois lados não adjacentes e uma diagonal é igual a 16 cm . a) Qual é o comprimento da outra diagonal? b) Quais são os comprimentos dos lados do quadrângulo se o perímetro é um mínimo? c) Será possível escolher os lados para que o perímetro seja um máximo? **Para a resolução ver** Problema 11.
2. Encontrar o ponto P no interior de um $\triangle ABC$ para o qual a soma:

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

é mínima, em que PD , PE e PF são as perpendiculares de P a BC , CA e AB , respectivamente. **Para a resolução ver** Problema 12.

3. Se a , b e c são lados de um triângulo, provar que:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Determinar quando vale a igualdade. **Para a resolução ver** Problema 13.

4. Seja ABC um triângulo e M um ponto em seu interior. Provar que:

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + BC + CA.$$

Para a resolução ver Problema 14.

5. Considera-se um triângulo acutângulo ABC , com circuncentro O e altura AP . Seja ainda:

$$\angle C \geq \angle B + 30^\circ.$$

Provar que:

$$\angle A + \angle COP < 90^\circ.$$

Para a resolução ver Problema 15.

6. Os pontos X e Y estão sobre o arco BC da circunferência circunscrita ao triângulo ABC (este arco não contém A), de tal forma que $\angle BAX = \angle CAY$. Seja M o ponto médio da corda AX . Mostrar que $BM + MC \geq AY$. **Para a resolução ver** Problema 16.
7. Sejam ABC um triângulo e M um ponto interior. Mostre que pelo menos um dos ângulos MAB , MBC e MCA é menor ou igual a 30° . **Para a resolução ver** Problema 17.

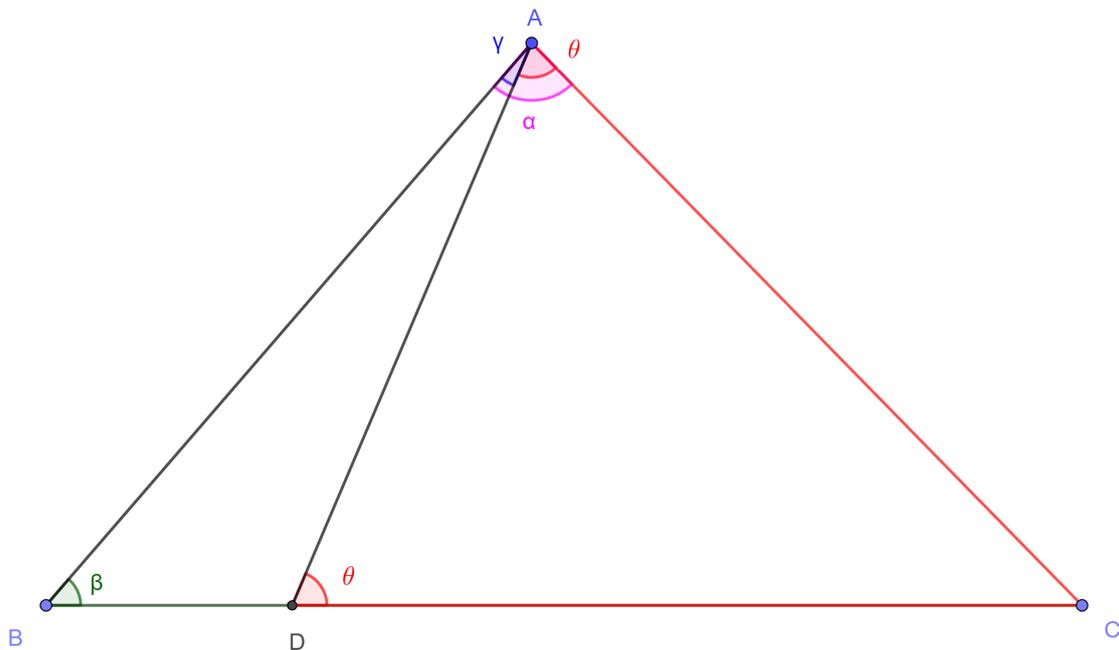
Capítulo 2

Algumas proposições básicas antes dos jogos

2.1 Desigualdade triangular

Proposição 1 (Ao maior lado corresponde o maior ângulo). *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados não são congruentes, e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

Figura 2.1: Guia para a demonstração da Proposição 1. Versão interativa [aqui](#).



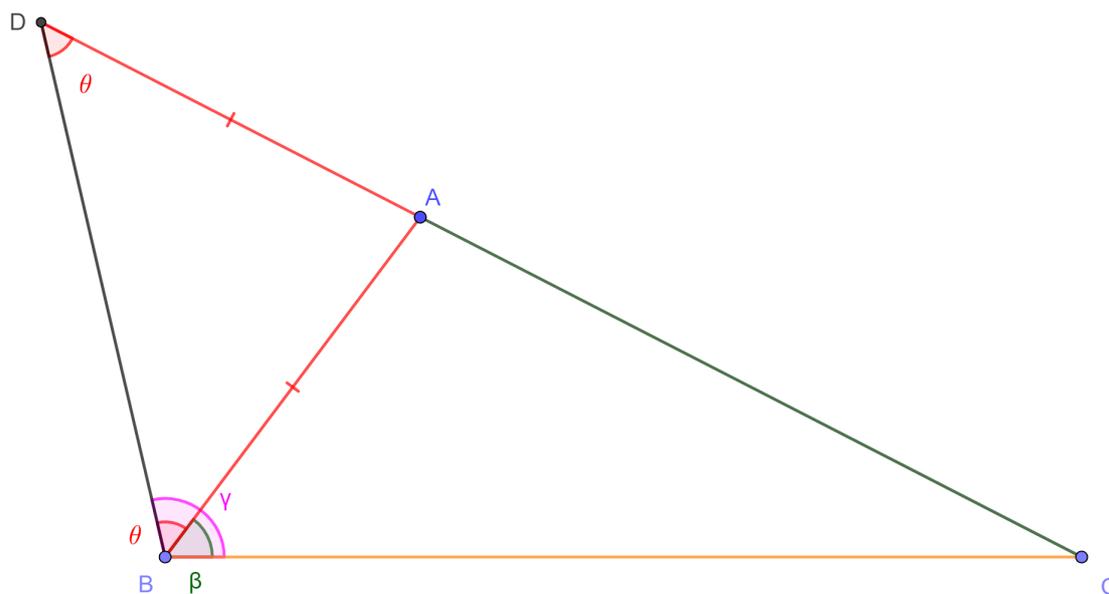
Fonte: O autor.

Demonstração. A Figura 2.1 mostra um triângulo ABC . Pode-se supor, sem perda de generalidade, que $BC > AC$. Marca-se sobre BC o ponto D tal que $AC = CD$. Logo, o $\triangle CAD$ é isósceles de base AD e $\angle CAD = \angle CDA = \theta$. Sejam $\angle CBA = \beta$ e $\angle BAD = \gamma$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, aplicado no vértice D do $\triangle BDA$, tem-se $\theta = \beta + \gamma$. Portanto, $\theta > \beta$. Além disso, como $\angle BAC = \alpha = \theta + \gamma$, então $\alpha > \beta$. Isto é, oposto ao maior lado corresponde o maior ângulo. \square

Ainda na Figura 2.1, por redução ao absurdo e a Proposição 1 prova-se a recíproca. Isto é, se $\alpha > \beta$, então $BC > AC$.

Proposição 2 (Desigualdade triangular). *A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.*

Figura 2.2: Guia para a demonstração da Proposição 2. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Basta mostrar que o maior lado é menor que a soma dos outros dois. A Figura 2.2 mostra um triângulo ABC com $\angle ABC = \beta$. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que $BC \geq CA \geq AB$. Estende-se a semirreta CA e marca-se o ponto $D \in CA$ de tal forma que $AD = AB$. Seja $\angle DBC = \gamma$. Como o $\triangle ABD$ é isósceles de base BD tem-se $\angle ABD = \angle ADB = \theta$. Adicionalmente, de

$$\angle DBC = \gamma = \theta + \beta > \theta = \angle BDA$$

e da Proposição 1, segue que:

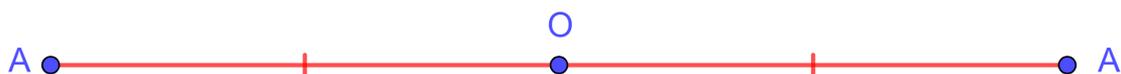
$$CD = CA + AD = CA + AB > BC.$$

□

2.2 Simetria em relação a um ponto

Definição 1 (Simetria em relação a um ponto). *Os pontos A e A' são chamados simétricos com relação a um ponto fixo O se, e somente se, O for o ponto médio do segmento AA' (Figura 2.3).*

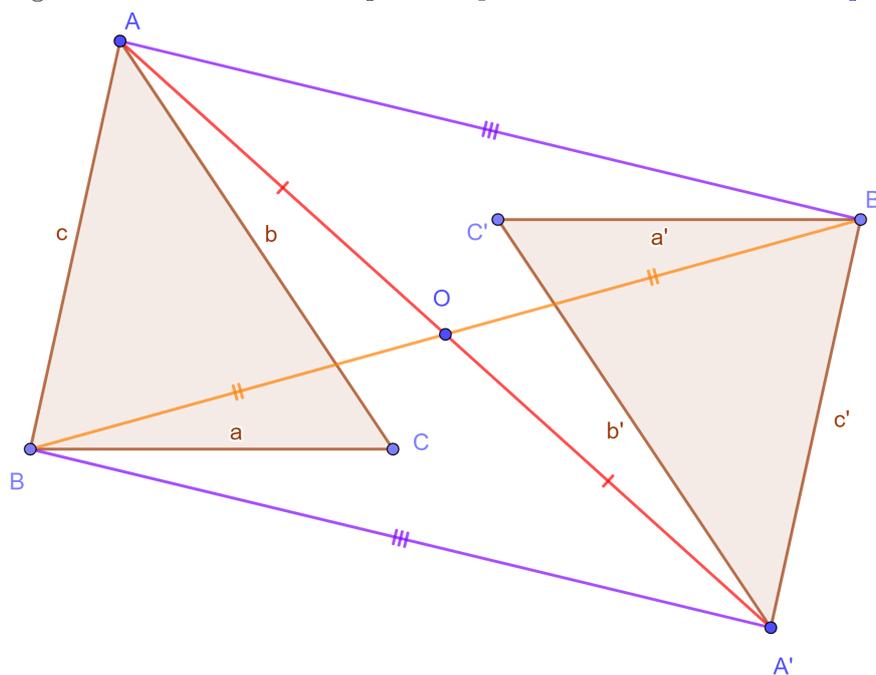
Figura 2.3: Definição de simetria em relação a um ponto. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Proposição 3. *Sejam os $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ duas figuras simétricas com relação ao ponto O e sejam AB e $A'B'$ os segmentos correspondentes nessas duas figuras. Então $ABA'B'$ é um paralelogramo (Figura 2.4).*

Figura 2.4: $ABA'B'$ é um paralelogramo. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

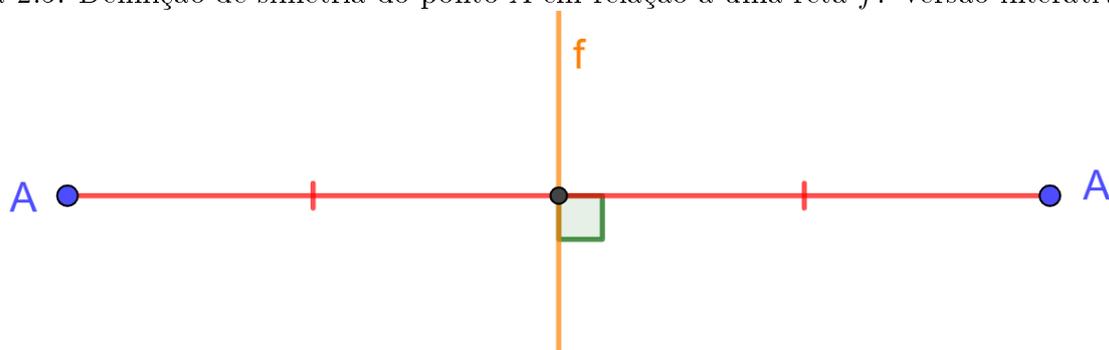
Demonstração. Pela Definição 1 (Simetria em relação a um ponto) $AO = OA'$ e $BO = OB'$. Portanto, as diagonais do quadrilátero $ABA'B'$ cortam-se em seus pontos médios. Isso significa que é um paralelogramo.

Nota-se pelos mesmos argumentos que $ACA'C'$ e $BCB'C'$ também são paralelogramos. \square

2.3 Simetria em relação a uma reta

Definição 2 (Simetria em relação a uma reta). *Os pontos A e A' são chamados simétricos com relação a uma reta f se, e somente se, f for a mediatriz do segmento AA' (Figura 2.5).*

Figura 2.5: Definição de simetria do ponto A em relação a uma reta f . Versão interativa [aqui](#).



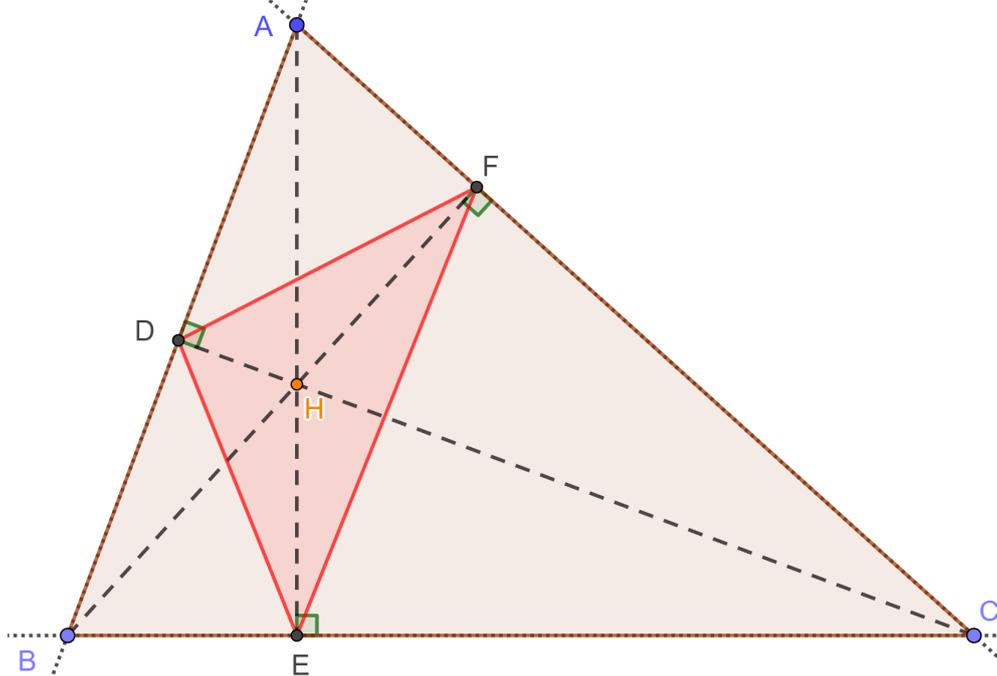
Fonte: O autor.

2.4 Triângulo Órtico

Definição 3 (Triângulo Órtico). *Sejam os pontos D , E e F as projeções ortogonais dos vértices C , A e B sobre os lados AB , BC e CA , respectivamente. O $\triangle DEF$ é o triângulo órtico do $\triangle ABC$ (Figura 2.7).*

O triângulo órtico também pode ser definido como o triângulo pedal do ortocentro H de um $\triangle ABC$.

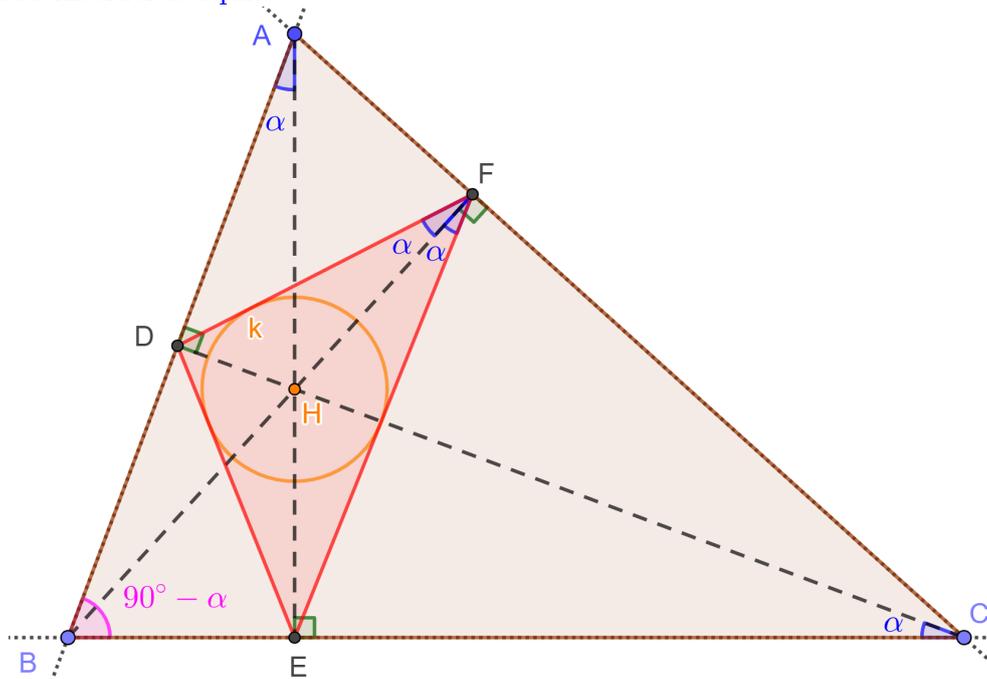
Figura 2.6: Definição de Triângulo Órtico. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Proposição 4. *O incentro do triângulo órtico DEF coincide com o ortocentro do triângulo original ABC (Figura 2.7).*

Figura 2.7: O incentro do triângulo órtico DEF coincide com o ortocentro do triângulo original ABC . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja $\angle BAE = \alpha$. Como $\angle AEB = 90^\circ$, então $\angle EBA = 90^\circ - \alpha$. Do $\triangle BDC$, retângulo em D , segue que $\angle BCD = \alpha$.

Como $\angle HFA = \angle HDA = 90^\circ$ o quadrilátero $AFHD$ é inscritível. Logo, $\angle DFH = \angle DAH = \alpha$. Do mesmo modo, como $\angle HEC = \angle HFC = 90^\circ$ o quadrilátero $CFHE$ é inscritível. Logo, $\angle EFH = \angle ECH = \alpha$.

Segue que a reta HF é bissetriz do $\angle DFE$. Analogamente, mostra-se que as retas HD e HE são bissetrizes do $\angle FDE$ e $\angle DEF$, respectivamente. Ou seja, o ponto H é o incentro do $\triangle DEF$ e com centro nele pode ser esboçado o incírculo k . \square

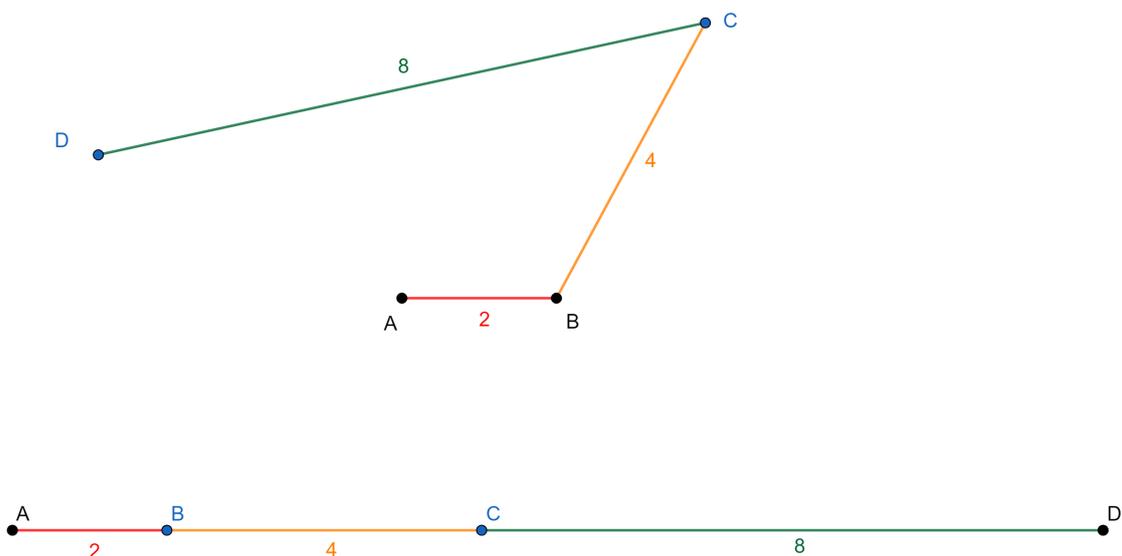
Capítulo 3

Enunciado das brincadeiras ou jogos

3.1 Jogo 1: não conseguir formar um triângulo

Formar grupos de 3 ou 4 jogadores. Com um barbante (segmento AD na Figura 3.1) pedir a um estudante (ou grupo) para dividir em três partes de comprimentos diferentes (AB , BC e CD). A seguir solicitar que tente formar um triângulo, de tal forma que o pedaço de barbante AB fica fixo (e esticado) na horizontal. Os estudantes nos vértices C e D podem movimentar-se livremente, mas mantendo a corda esticada.

Figura 3.1: Dividir em três (AB , BC e CD) partes diferentes o barbante AD e intentar formar um triângulo. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

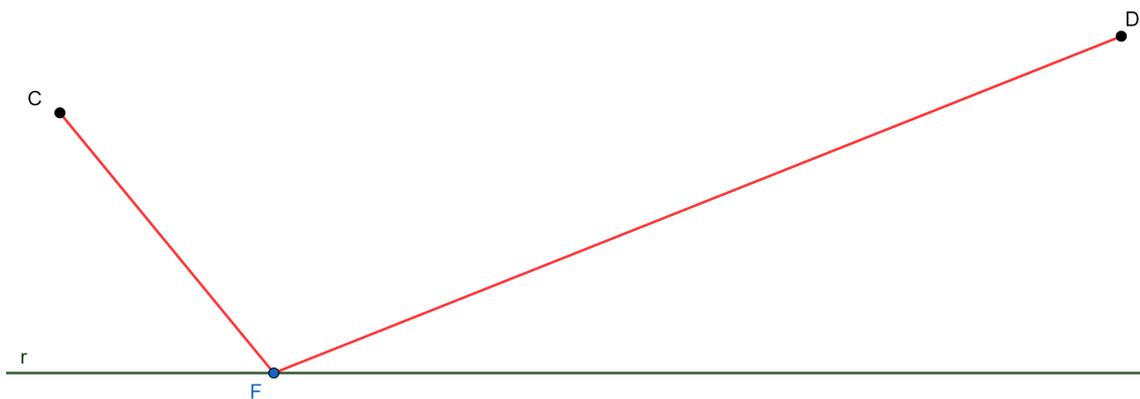
Conseguiram formar um triângulo? Como explica-se o resultado pela desigualdade tri-

angular? Como a maior parte das pessoas tende a dividir em partes aproximadamente iguais é mais difícil não conseguir. Ganha o grupo que lograr NÃO formar um triângulo e explicar corretamente o porquê.

3.2 Jogo 2: lei da reflexão

Formar grupos de 3 jogadores. Desenhar uma reta r e dois pontos C e D no mesmo semiplano em relação a r (Figura 3.2). Um jogador fica no ponto C , o segundo no ponto D e o terceiro escolhe um ponto $F \in r$ procurando minimizar o comprimento da poligonal CFD . As medidas podem ser feitas com um barbante esticado. Ganha o grupo que tiver escolhido a poligonal CFD de menor comprimento. Como poderia ser utilizada a desigualdade triangular?

Figura 3.2: Escolher um ponto $F \in r$ procurando minimizar o comprimento da poligonal CFD . Versão interativa [aqui](#).

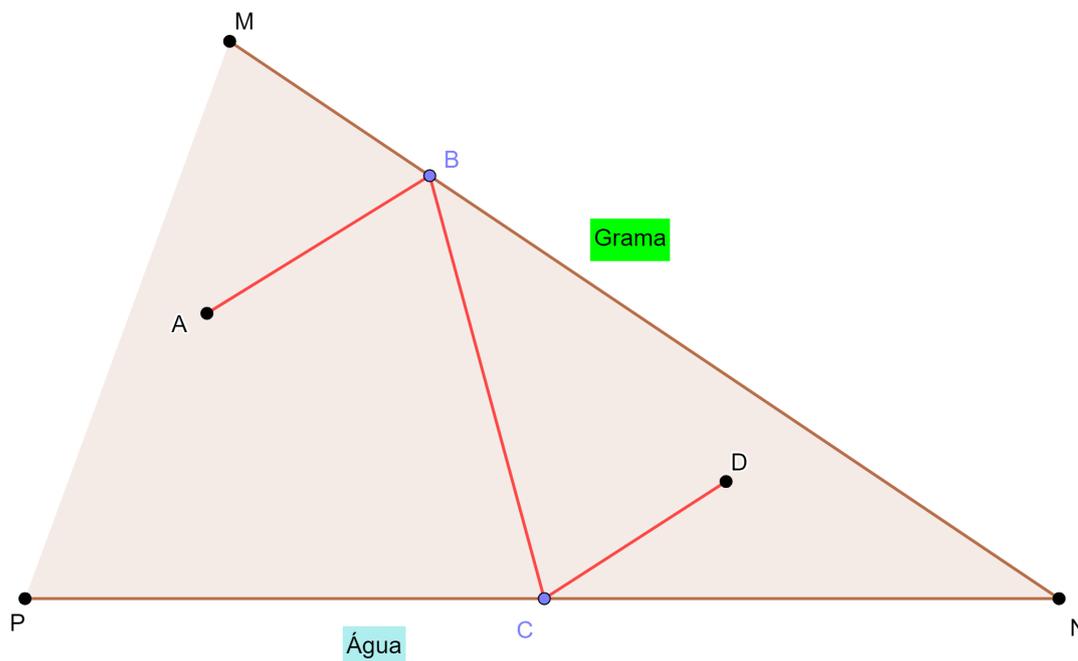


Fonte: O autor.

3.3 Jogo 3: problema do cavaleiro I

Um cavaleiro está com seu cavalo no ponto A (Figura 3.3). Ele deve primeiro levar o cavalo a comer grama em algum ponto $B \in MN$. A seguir tomar água em algum ponto $C \in PN$ e finalmente continuar para o Estábulo no ponto D . Qual deve ser a posição dos pontos B e C para que o comprimento da poligonal $ABCD$ seja mínima?

Figura 3.3: Problema do Cavaleiro I. Versão interativa [aqui](#). Movimentar os pontos B e C para encontrar o caminho mais curto.



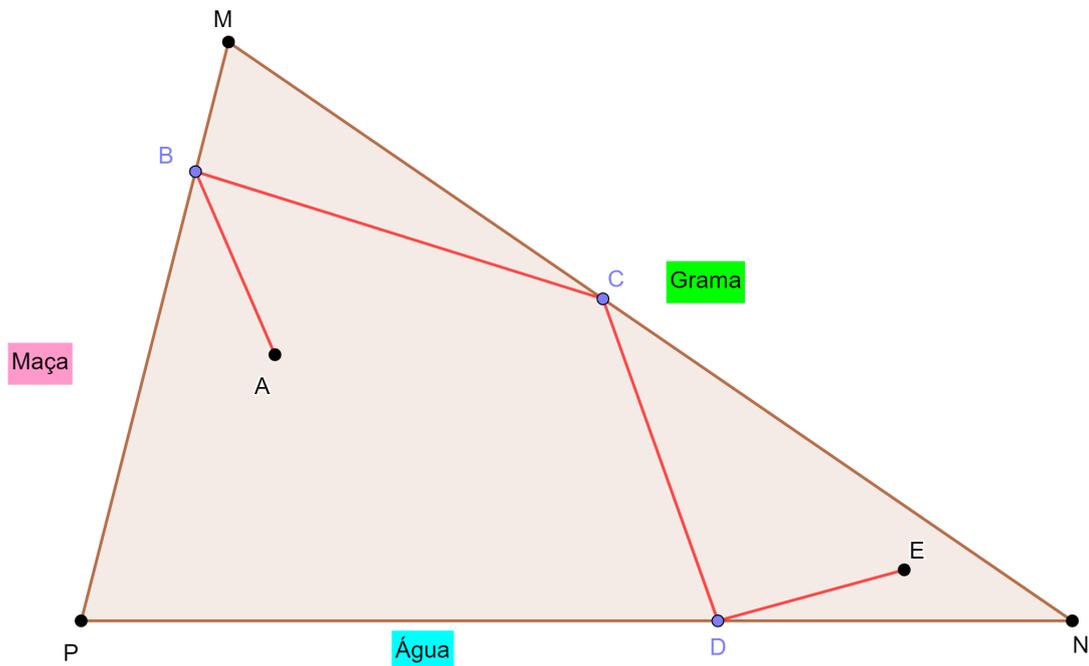
Fonte: O autor.

Formar grupos de 4 jogadores, um para cada uma das letras A , B , C e D . As medidas podem ser feitas com um barbante esticado. Ganha o grupo que tiver escolhido a poligonal $ABCD$ de menor comprimento. Existe alguma relação entre este jogo e o anterior? Como poderia ser utilizada a desigualdade triangular?

3.4 Jogo 4: problema do cavaleiro II

Um cavaleiro está com seu cavalo no ponto A (Figura 3.4). Ele deve primeiro levar o cavalo a comer maçã em algum ponto $B \in PM$. Segundo, levar o cavalo a comer grama em algum ponto $C \in MN$. Terceiro, tomar água em algum ponto $D \in PN$ e finalmente continuar para o Estábulo no ponto E . Qual deve ser a posição dos pontos B , C e D para que o comprimento da poligonal $ABCDE$ seja mínima?

Figura 3.4: Problema do cavaleiro II. Versão interativa [aqui](#). Movimentar os pontos B , C e D para encontrar o caminho mais curto.

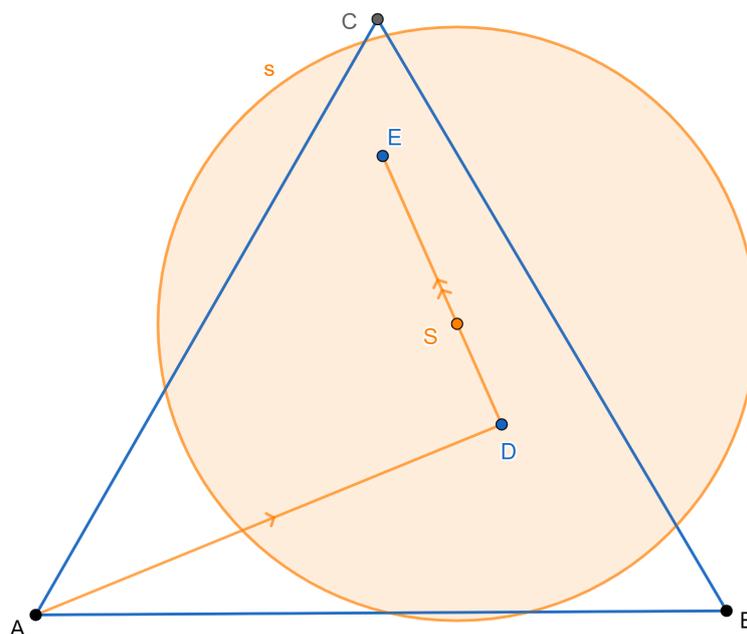


Fonte: O autor.

Formar grupos de 5 jogadores, um para cada uma das letras A , B , C , D e E . As medidas podem ser feitas com um barbante esticado. Ganha o grupo que tiver escolhido a poligonal $ABCDE$ de menor comprimento. Como poderia ser utilizada a Desigualdade Triangular?

3.5 Jogo 5: removedor de minas

Um soldado tem que detectar minas em um área com a forma de um triângulo equilátero ABC de lado l (Figura 3.5). O raio R do seu detector é igual a metade da altura h do $\triangle ABC$. O soldado começa no vértice A . Determinar o caminho mais curto que o soldado deve seguir para garantir que toda a região seja checada. O soldado é representado pela letra S e a circunferência s delimita a área verificada.

Figura 3.5: Removedor de Minas. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Escolher uma vareta de comprimento r como detector (pode ser um cabo de vassoura). O jogador com a vareta representa o soldado e pode verificar a área atingida simplesmente girando a vareta sobre sua posição. Caso gire com o braço esticado, este também deve ser considerado. Ou seja, o raio da circunferência s é $R = r + b$, onde b representa a medida do braço.

Lembra-se que a altura h num triângulo equilátero em função do lado l calcula-se como:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}l.$$

Para satisfazer a restrição $R = \frac{h}{2}$ o $\triangle ABC$ deve ter um comprimento dos lados:

$$l = \frac{4}{\sqrt{3}}R = \frac{4\sqrt{3}}{3}R \approx 2,3R.$$

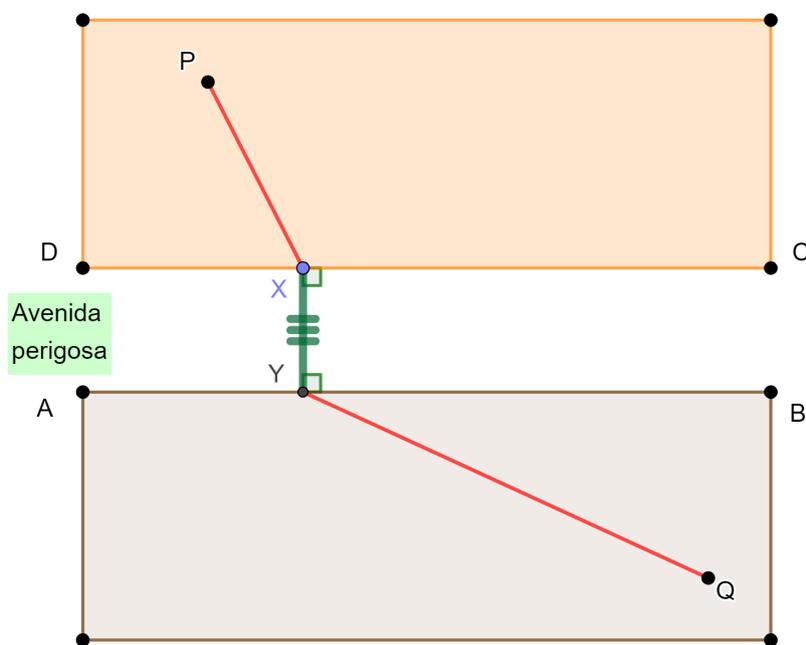
O $\triangle ABC$ pode ser construído com um barbante seguindo o critério lado-lado-lado. A poligonal ADE pode ser representada com barbante. Formar grupos de 3 ou 4 jogadores. Ganha o grupo que tiver escolhido a poligonal ADE de menor comprimento. A simetria do triângulo equilátero pode ser explorada de alguma forma? Como poderia ser utilizada a desigualdade triangular?

3.6 Jogo 6: faixa de pedestres

Uma pessoa deve deslocar-se do ponto P até o ponto Q pela poligonal $PXYQ$ (Figura 3.6). O segmento XY representa uma faixa de pedestres colocada perpendicularmente aos segmentos AB e CD e que atravessa uma avenida perigosa. Como escolher o ponto $X \in CD$ de tal forma que a poligonal $PXYQ$ tenha comprimento mínimo?

Formar grupos de 4 jogadores, um para cada uma das letras P , X , Y e Q . As medidas podem ser feitas com um barbante esticado. Ganha o grupo que tiver escolhido a poligonal $PXYQ$ de menor comprimento. Existe uma estratégia eficiente para este jogo? Pode ser relacionada com a desigualdade triangular? Alguma semelhança com o jogo 2?

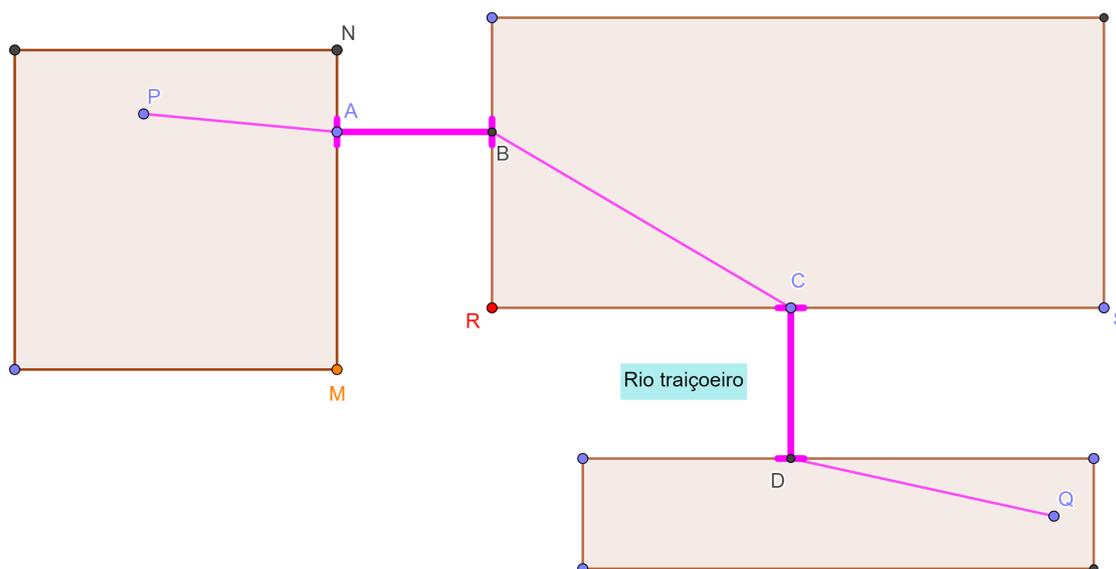
Figura 3.6: Faixa de Pedestres. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

3.7 Jogo 7: rio traiçoeiro

Uma pessoa deve deslocar-se do ponto P até o ponto Q pela poligonal $PABCDQ$ (Figura 3.7). Os segmentos AB e CD representam pontes construídas perpendicularmente aos lados dos retângulos e que atravessam um rio traiçoeiro. Como escolher os pontos $A \in MN$ e $C \in RS$ de tal forma que a poligonal $PABCDQ$ tenha comprimento mínimo?

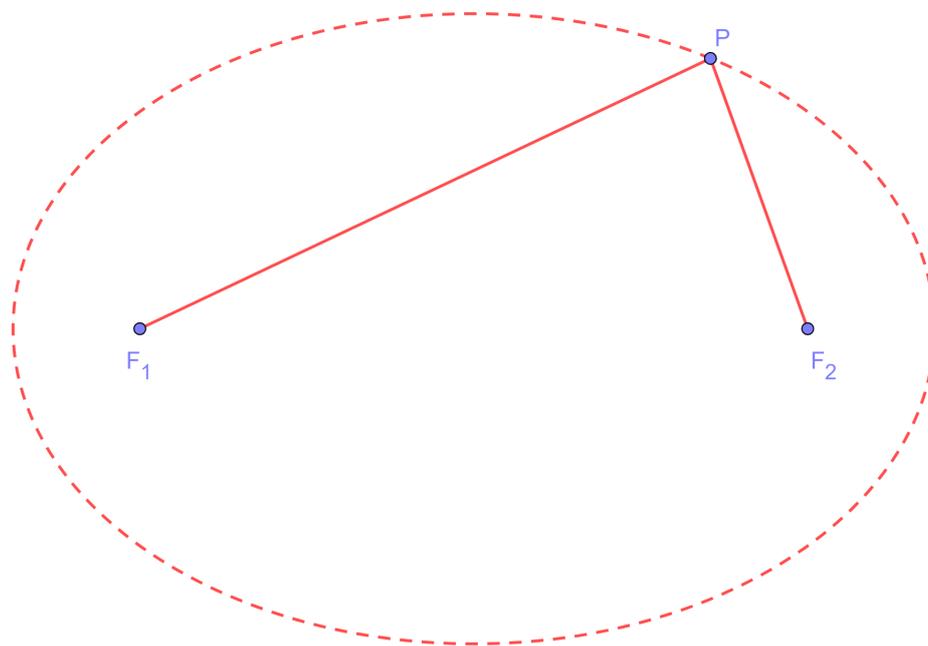
Figura 3.7: Rio traiçoeiro. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Formar grupos de 6 jogadores, um para cada uma das letras P , A , B , C , D e Q . As medidas podem ser feitas com um barbante esticado. Ganha o grupo que tiver escolhido a poligonal $PABCDQ$ de menor comprimento. Existe alguma estratégia eficiente para este jogo? Como relaciona-se com o anterior? Qual a correlação com a desigualdade triangular?

3.8 Jogo 8: problema do jardineiro

Formar grupos de 3 jogadores, um para cada uma das letras F_1 , F_2 e P (Figura 3.8). Com F_1 e F_2 fixos e segurando as pontas do barbante, o jogador em P desloca-se com um giz e deixando um desenho no chão. É utilizado um único barbante esticado o tempo todo. Uma demonstração da construção pode ser vista em [vídeo](#).

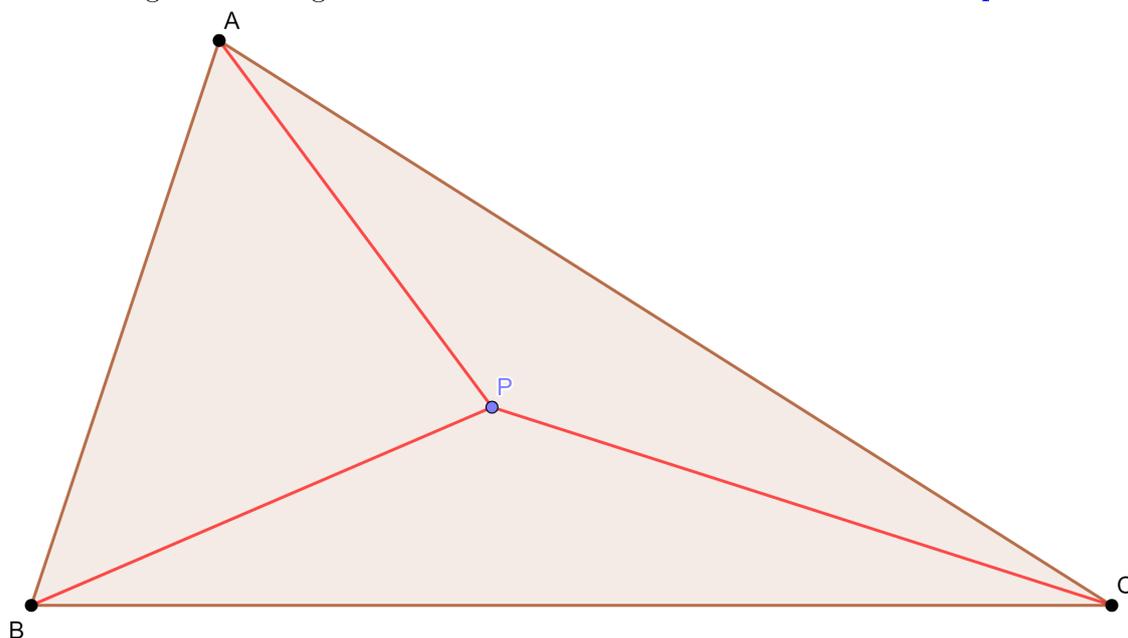
Figura 3.8: Problema do Jardineiro ou construção de uma Elipse. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Qual a relação desta curva com a Desigualdade Triangular? E com a trajetória dos planetas em torno do Sol? Como obter uma Elipse partindo de um cone?

3.9 Jogo 9: ponto de Fermat

Dado um $\triangle ABC$, encontrar o ponto P que minimiza a soma $AP + BP + CP$ (Figura 3.9). Formar grupos de 4 jogadores, um para cada uma das letras A , B , C e P . As medidas podem ser feitas com um barbante esticado. O triângulo ABC pode ser desenhado no chão com giz. Ganha o grupo com menor $AP + BP + CP$. Para comparar o resultado da soma entre diferentes grupos solicitar que os jogadores alinhem-se num único segmento de reta $APBPC$, mantendo os barbantes esticados. Isto é, os jogadores em P e B devem segurar simultaneamente dois barbantes. Existe alguma estratégia eficiente para este jogo? O resultado depende do tipo de $\triangle ABC$? O mínimo deve acontecer dentro ou fora do triângulo? Como relaciona-se com a desigualdade triangular?

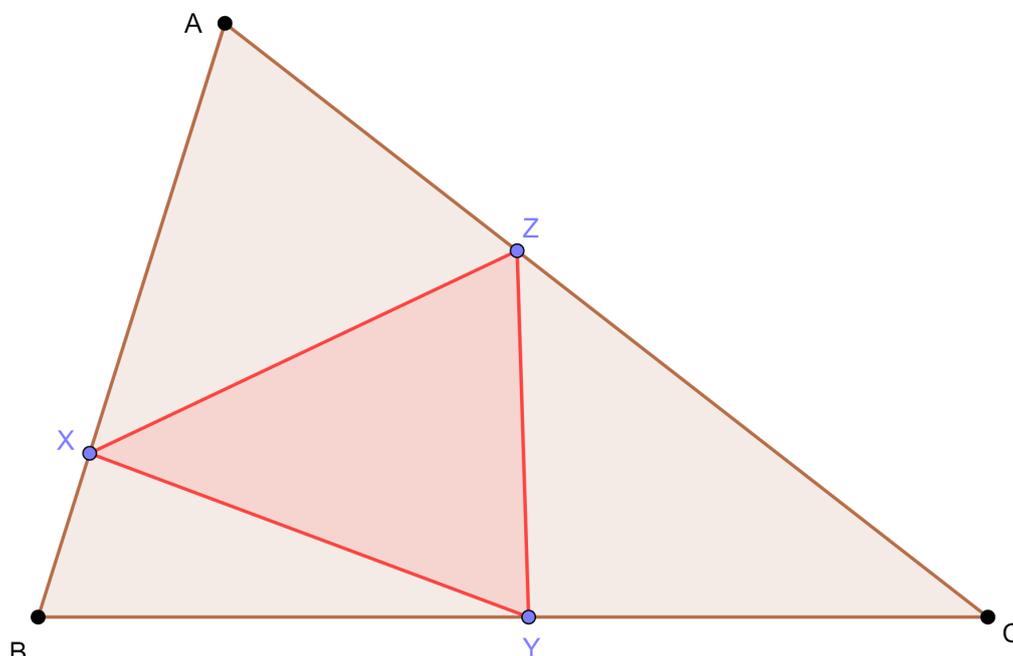
Figura 3.9: Jogo sobre o Ponto de Fermat. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

3.10 Jogo 10: problema de Fagnano

Dado um triângulo acutângulo ABC encontrar o $\triangle XYZ$ de perímetro mínimo, inscrito no $\triangle ABC$ (Figura 3.10). Ou seja, $X \in AB$, $Y \in BC$ e $Z \in CA$.

Figura 3.10: Jogo sobre o problema de Fagnano. Versão interativa [aqui](#). Podem movimentar-se os pontos X , Y e Z .



Fonte: O autor.

Formar grupos de 3 jogadores, um para cada uma das letras X , Y , e Z . As medidas podem ser feitas com um barbante esticado. O triângulo acutângulo ABC pode ser desenhado no chão com giz. Ganha o grupo com menor comprimento de $XY + YZ + ZX$. Para comparar o resultado da soma entre diferentes grupos solicitar que os jogadores alinhem-se num único segmento de reta $XYZX$, mantendo os barbantes esticados. Isto é, os jogadores em Y e Z devem segurar simultaneamente dois barbantes. Existe alguma estratégia eficiente para este jogo? Como relaciona-se com a desigualdade triangular? Qual a menor distância entre um ponto fora de uma reta e esta?

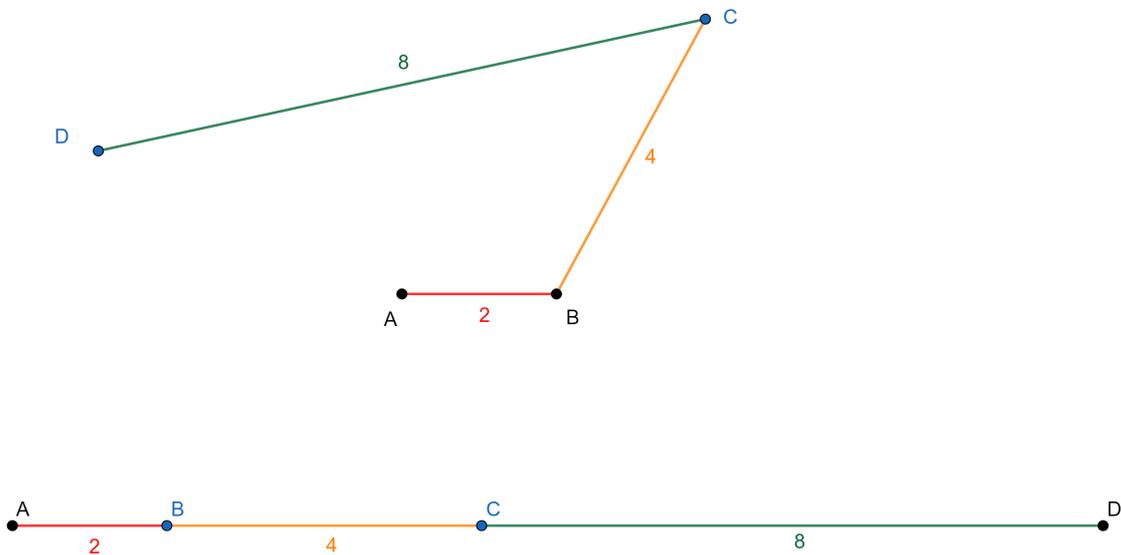
Capítulo 4

Fundamentação teórica dos jogos

4.1 Não conseguir formar um triângulo (jogo 1)

Problema 1. *Como cortar um barbante em três partes e conseguir NÃO formar um triângulo?*

Figura 4.1: Para conseguir NÃO formar um triângulo basta que o lado de maior comprimento seja mais longo que a soma dos outros dois. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.1.1 Resolução do Problema 1

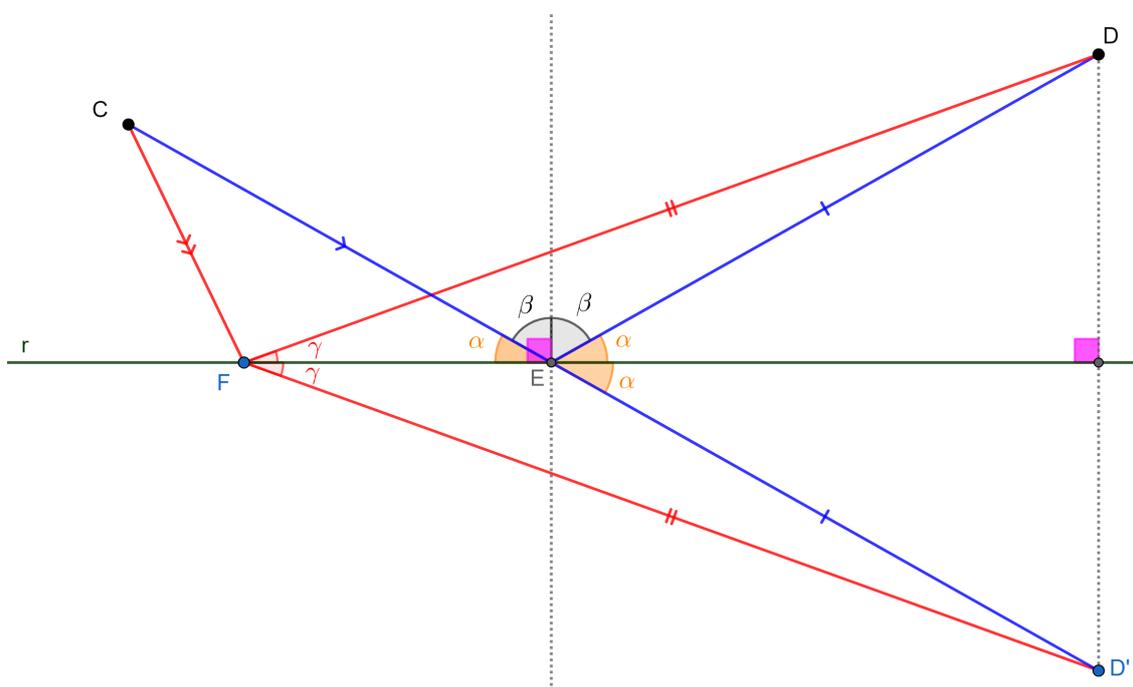
Pela Proposição 2 (Desigualdade Triangular), no jogo 1, para conseguir NÃO formar um triângulo basta que o lado de maior comprimento seja mais longo que a soma dos outros dois

(Figura 4.1).

4.2 Comprimento mínimo passando por uma reta (jogo 2)

Problema 2. Qual é a posição do ponto $F \in r$ que minimiza o comprimento da poligonal CFD (Figura 4.2)?

Figura 4.2: O ponto $E \in r$, tal que C, E e D' sejam colineares, minimiza o comprimento da poligonal CFD . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.2.1 Resolução do Problema 2

Seja o ponto D' a reflexão de D relativo a reta r (Figura 4.2). Considera-se o ponto $E \in r$ tal que C, E e D' sejam colineares. Tem-se que $FD = FD'$ e $ED = ED'$. Pela desigualdade triangular no $\triangle CD'F$ o caminho CED' , igual a CED , é mais curto que CFD' , igual a CFD . Ou seja,

$$CE + ED = CE + ED' \leq CF + FD' = CF + FD.$$

Isto é, no jogo 2, a posição do ponto F deve coincidir com o ponto E para minimizar o comprimento da poligonal CFD .

Este conteúdo pode ser correlacionado com a lei da reflexão de ondas eletromagnéticas estudada nos cursos de Física. Os ângulos de incidência e reflexão, respeito a uma perpendicular a r passando por E , são iguais (β). Num médio homogêneo a luz segue o caminho mais curto.

4.3 Problema do cavaleiro I (jogo 3)

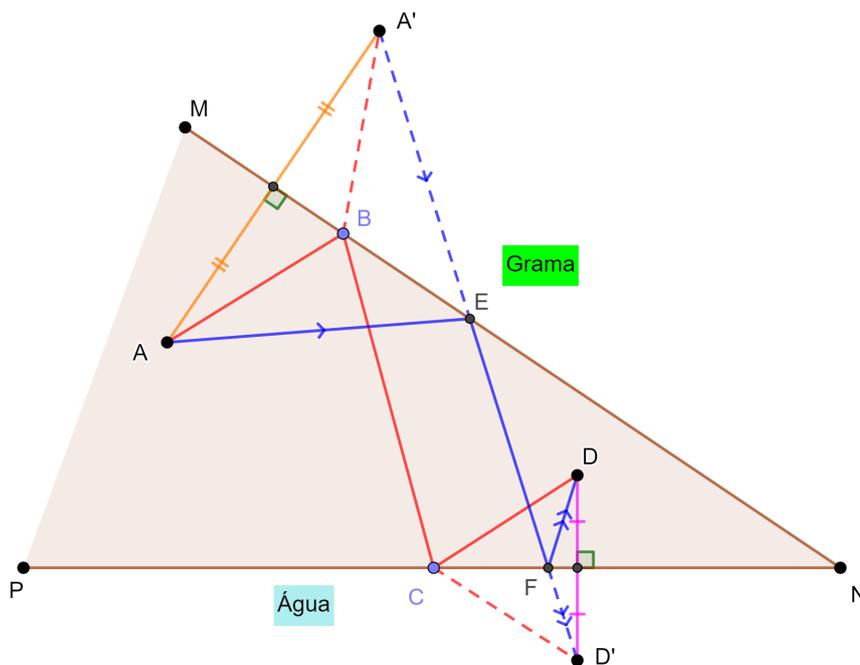
Inicia-se com a discussão de dois problemas propostos em [3].

Problema 3. *Um cavaleiro está com seu cavalo no ponto A (Figura 4.3). Ele deve primeiro levar o cavalo a comer grama em algum ponto $B \in MN$. A seguir tomar água em algum ponto $C \in PN$ e finalmente continuar para o Estábulo no ponto D . Qual deve ser a posição dos pontos B e C para que o comprimento da poligonal $ABCD$ seja mínima?*

4.3.1 Resolução do Problema 3

Sejam A' e D' as reflexões dos pontos A e D respeito aos segmentos MN e PN , respectivamente. Adicionalmente, marquem-se os pontos $E = A'D' \cap MN$ e $F = A'D' \cap PN$. O mínimo acontece quando os pontos B e C são colineares com A' e D' . Ou seja, quando $B = E$ e $C = F$ (Figura 4.3).

Figura 4.3: Resolução do Problema do cavaleiro I. Versão interativa [aqui](#). Movimentar os pontos B e C para encontrar o caminho mais curto.



Fonte: O autor.

Pela reflexão vale $AB = A'B$, $AE = A'E$, $DC = D'C$ e $DF = D'F$. Adicionalmente, pela aplicação da desigualdade triangular nos $\triangle A'BC$ e $\triangle A'CD'$ obtêm-se:

$$A'B + BC \geq A'C,$$

$$A'C + CD' \geq A'D'.$$

Considerando as duas desigualdades anteriores segue:

$$A'B + BC + CD' \geq A'C + CD' \geq A'D'.$$

Portanto, para quaisquer pontos $B \in MN$ e $C \in PN$ é válido que:

$$AB + BC + CD = A'B + BC + CD' \geq A'D' = A'E + EF + FD' = AE + EF + FD.$$

4.4 Problema do cavaleiro II (jogo 4)

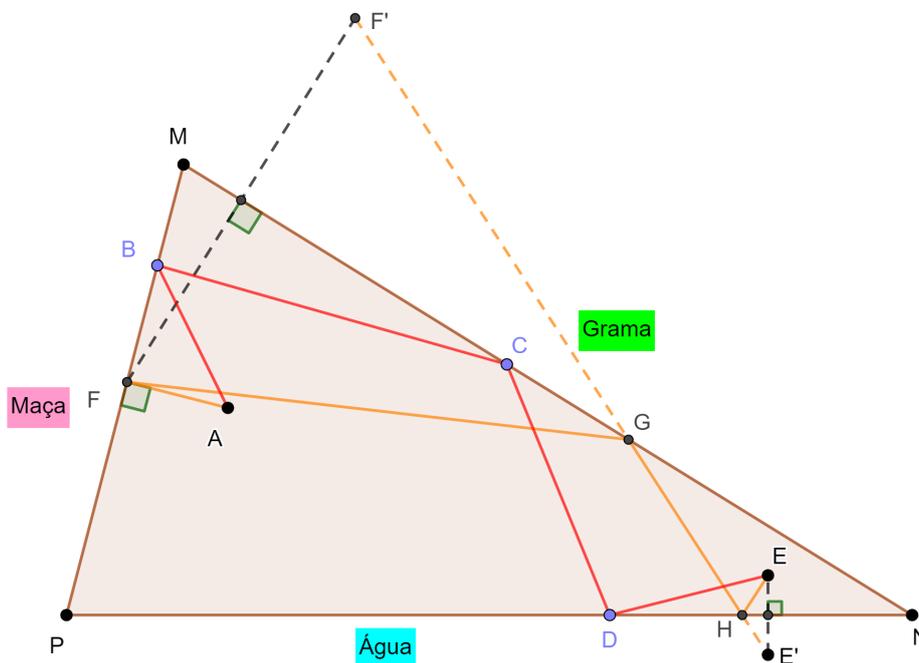
Problema 4. *Um cavaleiro está com seu cavalo no ponto A (Figura 4.4). Ele deve primeiro levar o cavalo a comer maçã em algum ponto $B \in PM$. Segundo, levar o cavalo a comer grama em algum ponto $C \in MN$. Terceiro, tomar água em algum ponto $D \in PN$ e finalmente continuar para o Estábulo no ponto E . Qual deve ser a posição dos pontos B , C e D para que o comprimento da poligonal $ABCDE$ seja mínima?*

4.4.1 Resolução do Problema 4

A primeira parte do caminho acontece afastando-se do destino final. Por isso deve ser feita a menor distância entre o ponto A e o segmento PM . Isto é AF , onde F é a projeção ortogonal de A sobre PM .

Neste momento a situação é análoga ao Problema 3. Sejam F' e E' as reflexões dos pontos F e E respeito aos segmentos MN e PN , respectivamente. O mínimo acontece quando os pontos C e D são colineares com F' e E' . Ou seja, $C = G$ e $D = H$ (Figura 4.4).

Figura 4.4: Resolução do Problema do cavaleiro II. Versão interativa [aqui](#). Movimentar os pontos B , C e D para encontrar o caminho mais curto.



Fonte: O autor.

4.5 Removedor de minas (jogo 5)

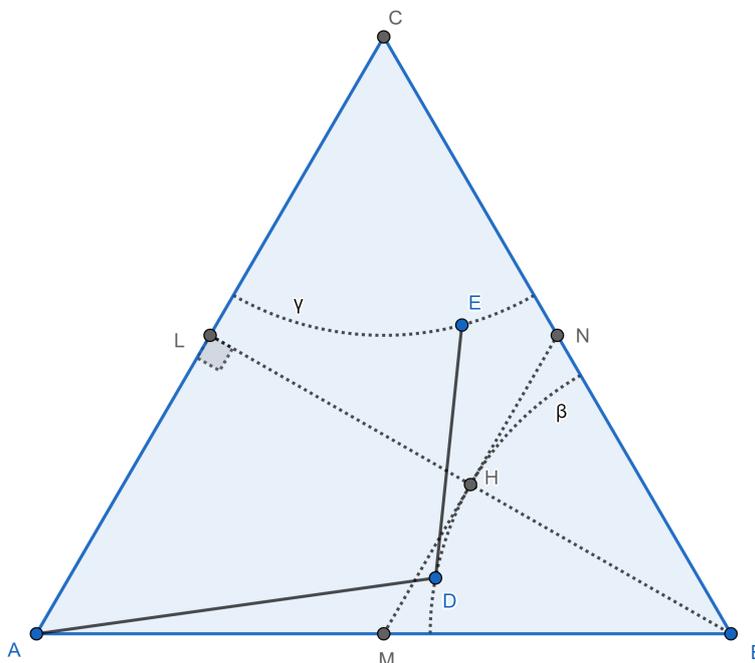
Problema 5. *Um soldado tem que detectar minas em um área com a forma de um triângulo equilátero. O raio do seu detector é igual a metade da altura do triângulo. O soldado começa em um vértice. Determinar o caminho mais curto que o soldado deve seguir para garantir que toda a região seja checada.*

A **IMO** (International Mathematical Olympiad, Olimpíada Internacional de Matemática) 1973 foi realizada na cidade de Moscou, capital da Rússia. O problema acima foi proposto por Dorde Dugosija da delegação da Iugoslávia [2].

4.5.1 Resolução do Problema 5

A Figura 4.5 mostra um triângulo equilátero ABC . M , N e L são pontos médios dos lados AB , BC e AC , respectivamente. Os arcos de circunferência β e γ têm raios iguais a metade da altura do triângulo ABC e estão centrados em B e C , respectivamente. H é o ponto de interseção da altura LB , a base média MN e o arco de circunferência β . MN é paralela com AC e tangente a β .

Figura 4.5: Triângulo equilátero ABC . M , N e L são pontos médios dos lados AB , BC e AC , respectivamente. Os arcos de circunferência β e γ tem raios iguais a metade da altura do triângulo ABC e estão centrados em B e C , respectivamente. H é o ponto de interseção da altura LB , a base média MN e o arco de circunferência β . MN é paralela com AC e tangente a β . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

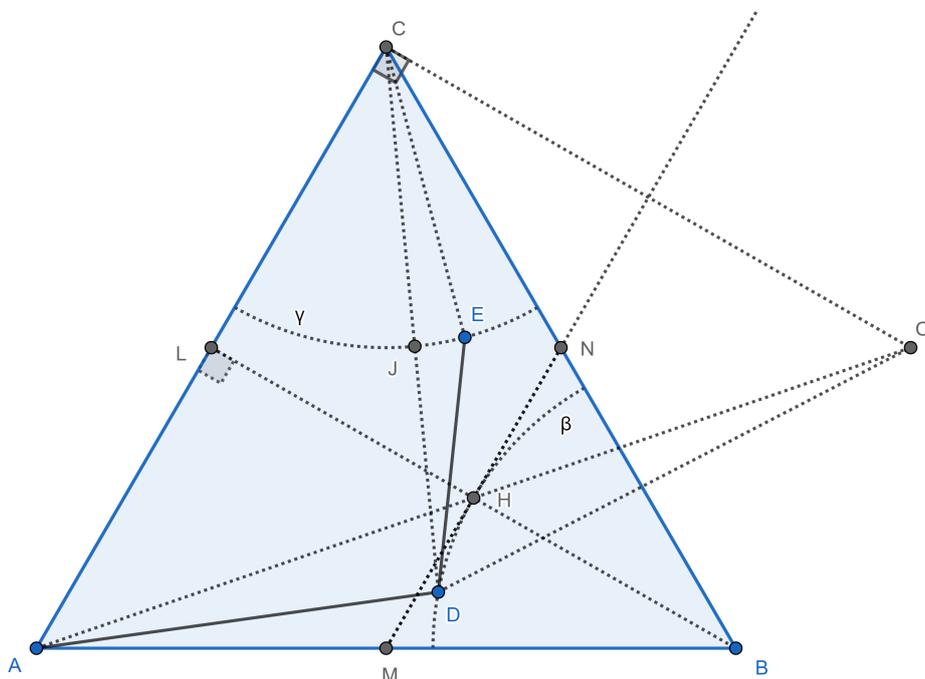
Supondo que o soldado parta do vértice A ele deve chegar no mínimo a um ponto $D \in \beta$ para verificar toda a área dentro do triângulo perto do vértice B . Da mesma forma, o soldado deve alcançar um ponto $E \in \gamma$ para verificar toda a área dentro do triângulo perto do vértice C . Logo, precisa-se minimizar a soma dos comprimentos dos segmentos AD e DE .

Seja l a medida dos lados do triângulo ABC , utilizando o Teorema de Pitágoras prova-se que $LB = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ e os raios de β e γ são:

$$LH = HB = CE = R = \frac{\sqrt{3}}{4}l.$$

Na Figura 4.6 adicionam-se os segmentos CE , CD e o ponto J , interseção de γ com CD .

Figura 4.7: A figura anterior adiciona-se o ponto C' , reflexão do ponto C em relação a semirreta MN . Nota-se que $CC' = LB$. Também são construídos os segmentos AC' e $C'D$. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ACC' , retângulo em C , encontra-se que:

$$AC' = \sqrt{AC^2 + (CC')^2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2},$$

$$AC' = \frac{\sqrt{7}}{2}l.$$

Agora utiliza-se a Desigualdade Triangular no triângulo ADC' :

$$AC' \leq AD + DC'.$$

A igualdade acontece quando o ponto D é colinear com os pontos A e C' .

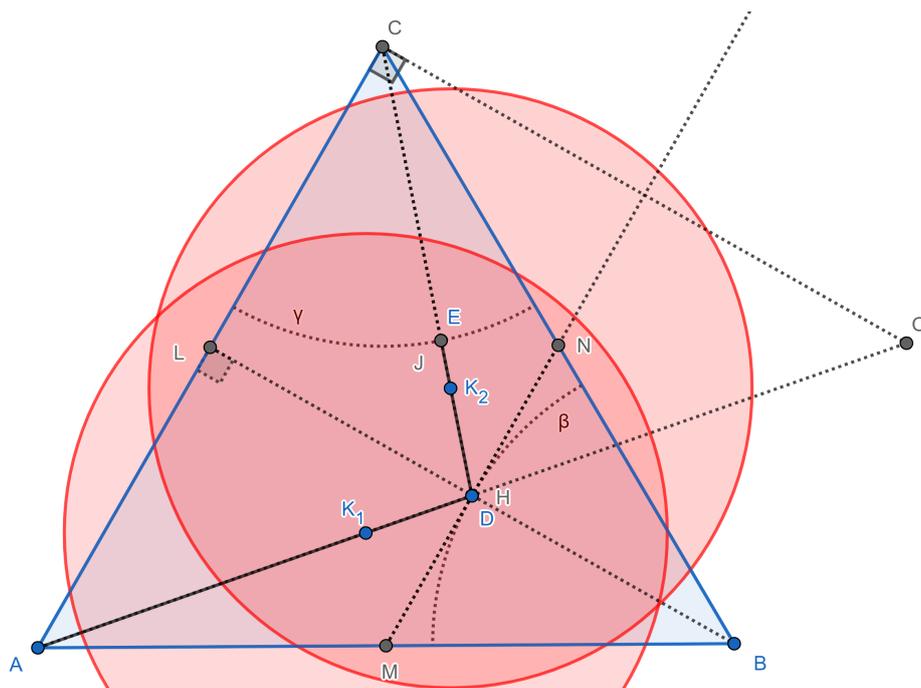
Segue que independentemente da posição do ponto D tem-se:

$$AD \geq AC' - DC',$$

$$AD \geq \frac{\sqrt{7}}{2}l - DC'.$$

$DE = HJ$, e as áreas de cobertura, círculos de raio $\frac{\sqrt{3}}{4}l$, do detector de minas em cada caso. Seguindo o caminho indicado o soldado consegue verificar todo o interior e fronteira do triângulo ABC no menor tempo possível. A resolução também está disponível em [vídeo](#).

Figura 4.9: Configuração que minimiza $AD + DE$. Além disso, são mostrados dois instantes de tempo, quando o soldado está em $K_1 \in AD = AH$ e em $K_2 \in DE = HJ$, e as áreas de cobertura, círculos de raio $\frac{\sqrt{3}}{4}l$, do detector de minas em cada caso. Versão interativa [aqui](#).

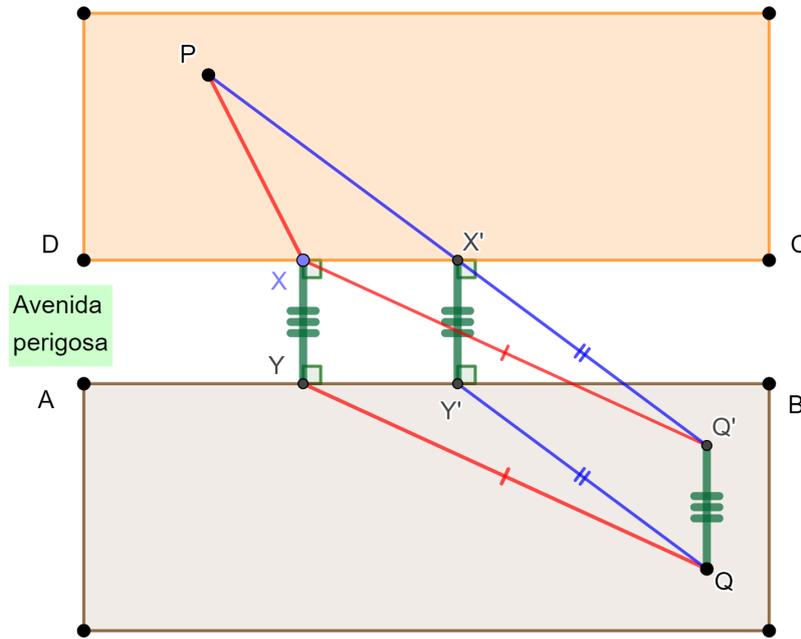


Fonte: O autor.

4.6 Problema da faixa de pedestres (jogo 6)

Problema 6. *Uma pessoa deve deslocar-se do ponto P até o ponto Q pela poligonal $PXYQ$ (Figura 4.10). O segmento XY representa uma faixa de pedestres colocada perpendicularmente aos segmentos AB e CD e que atravessa uma avenida perigosa. Como escolher o ponto $X \in CD$ de tal forma que a poligonal $PXYQ$ tenha comprimento mínimo?*

Figura 4.10: Resolução do Problema da Faixa de Pedestres. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.6.1 Resolução do Problema 6

O comprimento do segmento XY não depende da posição de $X \in CD$. Isto é, essa distância não pode ser minimizada e será “eliminada” com uma construção geométrica. Coloca-se o ponto Q' de tal forma que $XYQQ'$ seja um paralelogramo (Figura 4.10). Consequentemente, $XY = Q'Q$ e $XQ' = YQ$. Seja $X' \in CD$ colinear com P e Q' . Pela desigualdade triangular aplicada no $\triangle PXQ'$ vale que:

$$PX + XQ' = PX + YQ \geq PQ' = PX' + X'Q'.$$

Mas $X'Y'QQ'$ também é um paralelogramo e vale que $X'Y' = Q'Q$ e $X'Q' = Y'Q$. Com isso,

$$PX + YQ \geq PX' + Y'Q,$$

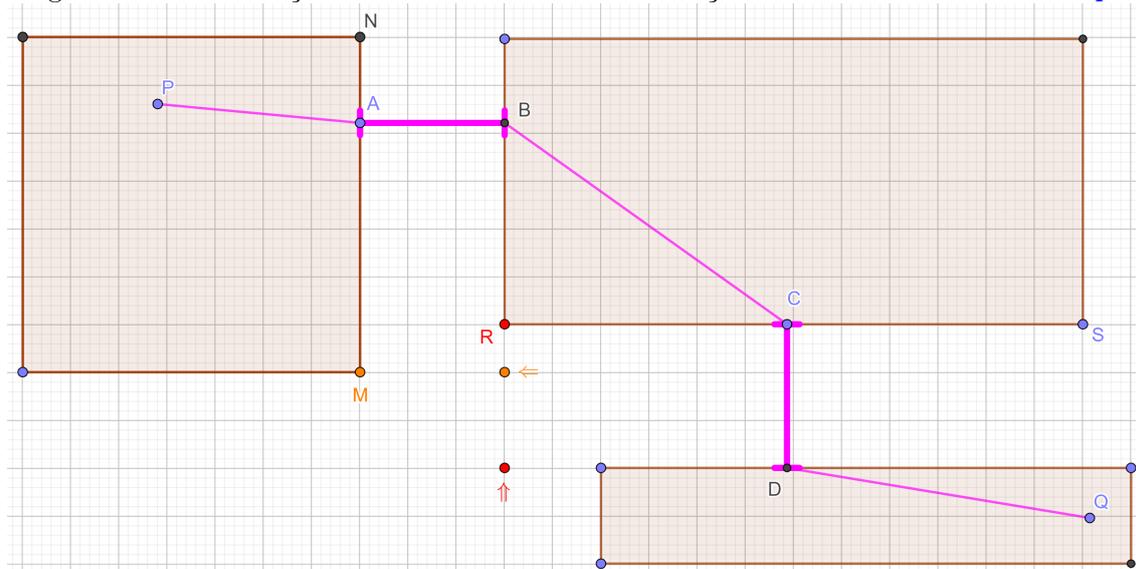
$$PX + XY + YQ \geq PX' + X'Y' + Y'Q.$$

Isto é, a posição do ponto X que minimiza o comprimento da poligonal $PXYQ$ encontra-se quando X é colinear com P e Q' (ponto X').

4.7 Rio traiçoeiro (jogo 7)

Problema 7. *Uma pessoa deve deslocar-se do ponto P até o ponto Q pela poligonal $PABCDQ$ (Figura 4.11). Os segmentos AB e CD representam pontes construídas perpendicularmente aos lados dos retângulos e que atravessam um rio traiçoeiro. Como escolher os pontos $A \in MN$ e $C \in RS$ de tal forma que a poligonal $PABCDQ$ tenha comprimento mínimo?*

Figura 4.11: Resolução 1 do Problema do Rio traiçoeiro I. Versão interativa [aqui](#).

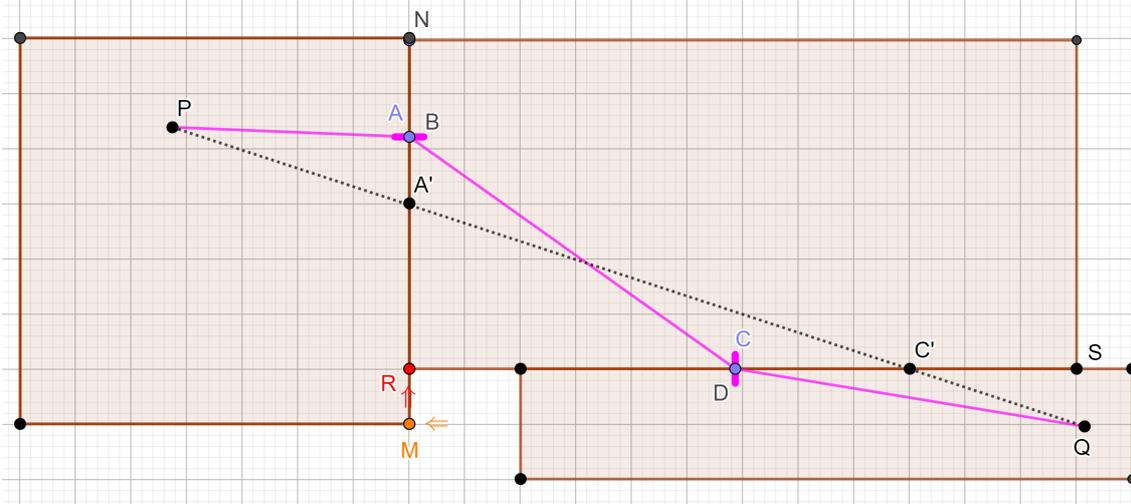


Fonte: O autor.

4.7.1 Resolução 1 do Problema 7

Os comprimentos dos segmentos AB e CD não dependem da posição de A e C . A figura pode ser modificada para zerar essas distâncias (Figura 4.12). Para isso podem ser feitos os pontos em vermelho e amarelo na Figura 4.11 coincidir com uma translação vertical e outra horizontal.

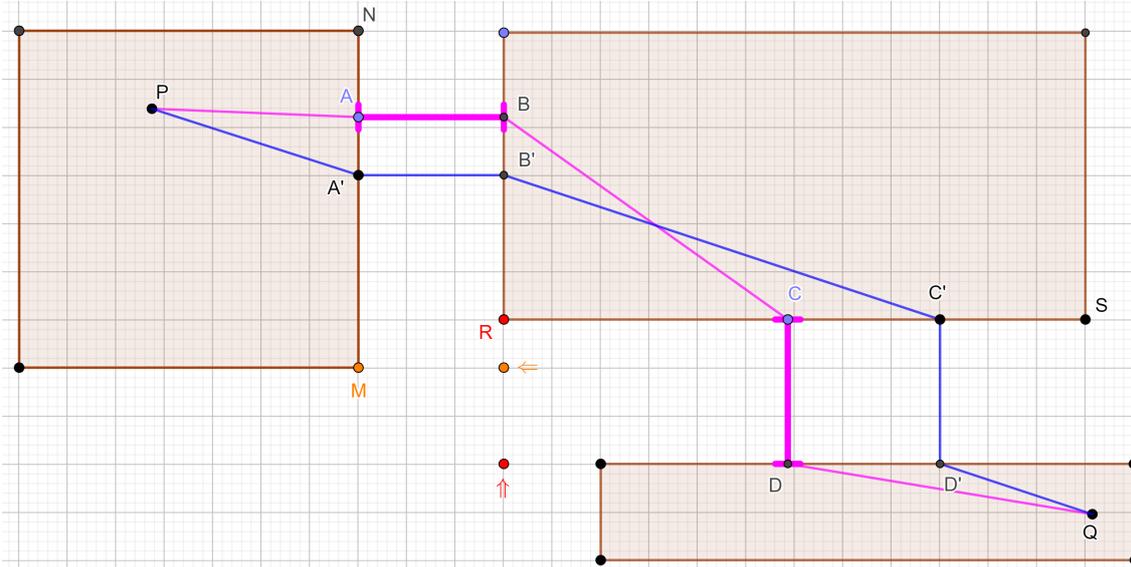
Figura 4.12: Resolução 1 do Problema do Rio traiçoeiro II. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Pela Desigualdade Triangular o comprimento da poligonal $PABCDQ$ é mínimo quando A e C são colineares com P e Q na Figura 4.12. Isto é, quando $A = A'$ e $C = C'$. Uma vez encontrada essas posições retornasse na configuração inicial (Figura 4.13). Ou seja, a poligonal $PA'B'C'D'Q$ é a de menor comprimento.

Figura 4.13: Resolução 1 do Problema do Rio traiçoeiro III. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.7.2 Resolução 2 do Problema 7

Os comprimentos dos segmentos AB e CD não dependem da posição de A e C . A figura pode ser modificada para zerar essas distâncias (Figura 4.14). Para isso, primeiro, traça-se por

$PAC'''Q''$. Segue que:

$$PA' + A'C''' + C'''Q'' \leq PA + AC''' + C'''Q'',$$

$$PA' + B'C' + D'Q \leq PA + BC + DQ.$$

Na desigualdade anterior adiciona-se $A'B' + C'D'$ no lado esquerdo e $AB + CD = A'B' + C'D'$ no direito:

$$PA' + A'B' + B'C' + C'D' + D'Q \leq PA + AB + BC + CD + DQ,$$

$$PA'B'C'D'Q \leq PABCDQ.$$

Em palavras, a poligonal $PABCDQ$ de comprimento mínimo acontece quando $A = A'$ e $C = C'$.

4.8 Problema do jardineiro ou construção de uma Elipse (jogo 8)

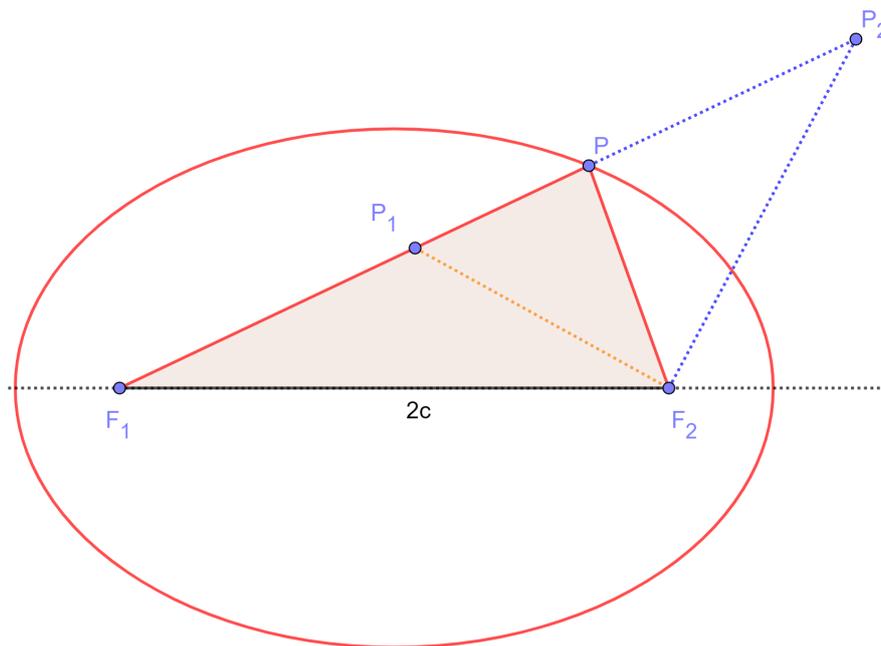
Problema 8. *Construção de uma Elipse.*

4.8.1 Resolução do Problema 8

Os jardineiros costumavam fixar duas estacas no chão e amarrar os extremos duma corda nelas. Depois, mantendo a corda esticada traçavam uma curva no chão para delimitar a área do jardim. Uma exemplificação dessa construção, feita em sala de aula, está disponível [aqui](#).

Definição 4 (Elipse como Lugar Geométrico). *Dados os pontos F_1 e F_2 (chamados focos) e a constante não negativa a , com $2a > 2c = |F_1F_2|$ (Figura 4.15), uma Elipse são todos os pontos P que satisfazem:*

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

Figura 4.15: Definição de Elipse e Desigualdade Triangular. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Seja P_1 um ponto dentro da Elipse (Figura 4.15). Então pela Desigualdade Triangular aplicada no $\triangle P_1PF_2$ segue:

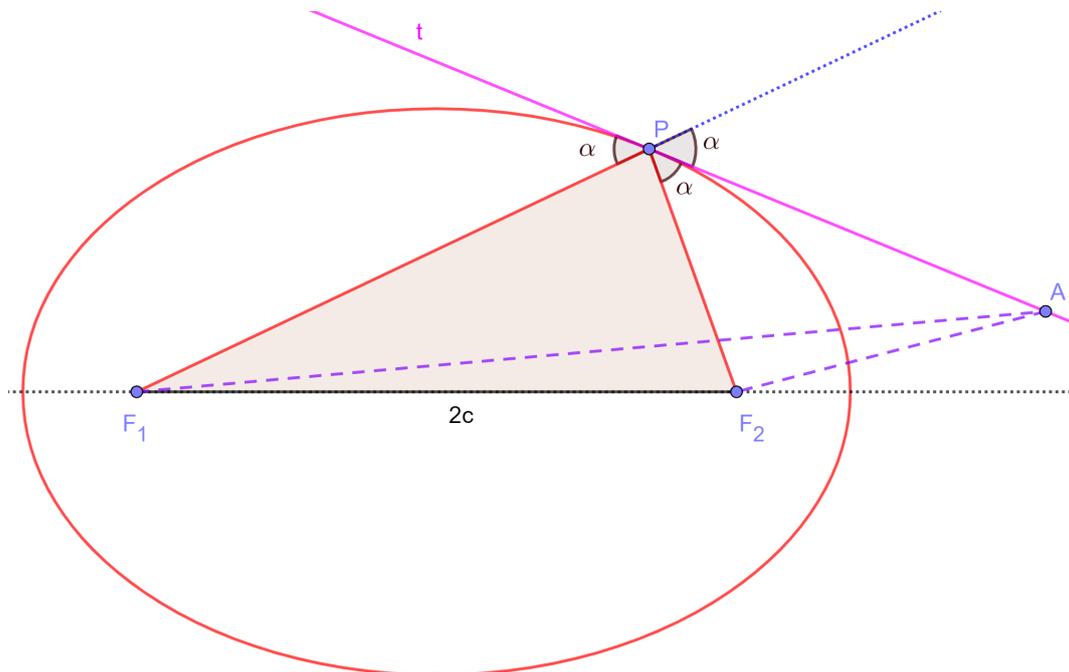
$$P_1F_1 + P_1F_2 < P_1F_1 + P_1P + PF_2 = PF_1 + PF_2 = 2a.$$

Seja P_2 um ponto fora da Elipse (Figura 4.15). Então pela Desigualdade Triangular aplicada no $\triangle PP_2F_2$ tem-se:

$$P_2F_1 + P_2F_2 = PF_1 + PP_2 + P_2F_2 > PF_1 + PF_2 = 2a.$$

Proposição 5. *Seja t uma reta tangente à elipse em P , então a reta t é bissetriz externa no vértice P do $\triangle F_1PF_2$ (Figura 4.16).*

Figura 4.16: Uma reta tangente à elipse em P é bissetriz externa do $\triangle F_1PF_2$. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja o ponto $A \in t$. Como o ponto A é externo a Elipse vale que:

$$AF_1 + AF_2 \geq PF_1 + PF_2.$$

A soma $AF_1 + AF_2$ é mínima quando $A = P$. Logo, os ângulos formados por F_1P e F_2P e t são iguais. Isto é, a reta t é bissetriz externa no vértice P do $\triangle F_1PF_2$. \square

4.9 Ponto de Fermat (jogo 9)

Pierre de Fermat foi um advogado francês e funcionário do governo mais lembrado por seu trabalho em teoria dos números. Em particular por o "Último Teorema de Fermat". Nasceu em 1601 e morreu em 1665 [33].

Um artigo muito didático sobre o Teorema de Napoleão e o ponto de Fermat pode ser encontrado em [35].

Problema 9. Encontrar o ponto P , no interior do $\triangle ABC$, que minimiza a soma $AP+BP+CP$.

4.9.1 Resolução do Problema 9

Serão discutidos dois casos: o primeiro quando todos os ângulos internos do triângulo são menores que 120° e o segundo quando um dos ângulo é maior ou igual a 120° .

4.9.1.1 Todos os ângulos internos do $\triangle ABC$ são menores que 120° .

Seja P um ponto arbitrário no interior do $\triangle ABC$. É construído o $\triangle AQ_B B'$ com uma rotação de 60° no sentido anti-horário, com centro em A , do $\triangle APC$. Adicionalmente, constrói-se o $\triangle BQ_A A'$ com uma rotação de 60° no sentido horário, com centro em B , do $\triangle BPC$. Também é construído o $\triangle AQ_C C'$ com uma rotação de 60° no sentido horário, com centro em A , do $\triangle APB$ (Figura 4.17).

Obtêm-se, por construção, que $\triangle AQ_B B' \equiv \triangle APC$, $\triangle BQ_A A' \equiv \triangle BPC$ e $\triangle AQ_C C' \equiv \triangle APB$. Adicionalmente, os triângulos ACB' , BCA' , ABC' , APQ_B , BPQ_A e APQ_C são equiláteros.

Tem-se $\angle BAB' = \angle C'AC$, $BA = C'A$ e $AB' = AC$. Pelo critério de congruência LAL encontra-se $\triangle BAB' \equiv \triangle C'AC$ e $BB' = CC'$. Analogamente mostra-se que $\triangle ABA' \equiv \triangle C'BC$ e $BB' = CC' = AA'$.

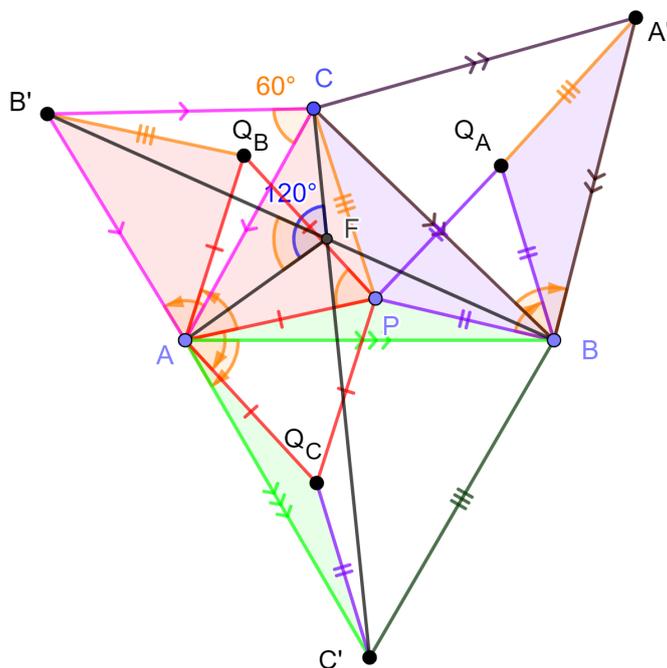
Pela desigualdade triangular o comprimento da poligonal $CPQ_C C'$ é maior ou igual ao comprimento do segmento CC' e o comprimento da poligonal $BPQ_B B'$ é maior ou igual ao comprimento do segmento BB' . Isto é,

$$CP + PA + PB = CP + PQ_C + Q_C C' \geq CC',$$

$$BP + PA + PC = BP + PQ_B + Q_B B' \geq BB'.$$

As igualdades (mínimo de $AP + BP + CP$) acontecem quando os pontos C , P , Q_C e C' e os pontos B' , Q_B , P e B são colineares. Isto é, quando $P = F = CC' \cap BB'$.

Figura 4.17: Construção geométrica para o caso em que todos os ângulos internos do $\triangle ABC$ são menores que 120° . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

No caso $P = F$ tem-se $Q_B \in BB'$ e vale $\angle B'FA = \angle Q_BFA = \angle B'CA = 60^\circ$. Ou seja, F é concíclico com A, B' e C e $\angle AFC = 120^\circ$. Analogamente mostra-se que $\angle AFB = \angle BFC = 120^\circ$.

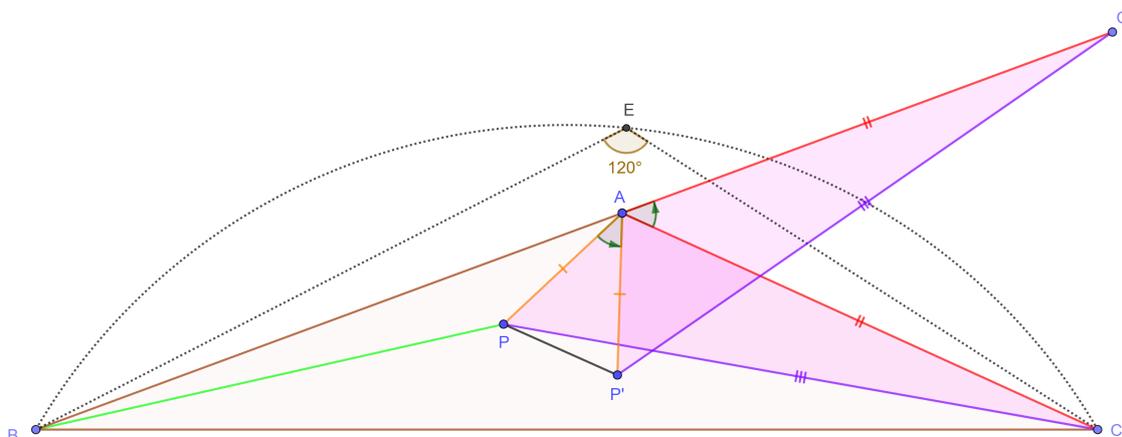
Para ganhar o jogo 9 neste caso basta construir dois triângulos equiláteros externamente aos lados. Por exemplo, o $\triangle ABC'$ e o $\triangle ACB'$. A seguir estender dois barbantes BB' e CC' . A posição do ponto P que minimiza a soma das distâncias aos vértices encontra-se em $F = CC' \cap BB'$.

4.9.1.2 Caso do $\triangle ABC$ com $\angle BAC \geq 120^\circ$.

Num $\triangle ABC$ com ângulo interno $\angle BAC \geq 120^\circ$ o ponto que minimiza as somas das distâncias aos vértices (Ponto de Fermat) é o ponto A .

Seja P um ponto do interior do $\triangle ABC$. Construimos o $\triangle AP'C'$ por uma rotação do $\triangle APC$ em torno ao vértice A e de tal forma que B, A e C' sejam colineares (Figura 4.18).

Figura 4.18: Construção geométrica para o caso em que $\angle BAC \geq 120^\circ$. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Como $\angle BAC \geq 120^\circ$, então $\angle CAC' = \angle PAP' \leq 60^\circ$ e $P'A = PA \geq PP'$. Segue que:

$$PA + PB + PC \geq PP' + PB + P'C' = BP + PP' + P'C' = BPP'C'.$$

Pela desigualdade triangular a poligonal $BPP'C'$ tem comprimento maior o igual ao segmento BC' , logo

$$PA + PB + PC \geq BC' = AB + AC'.$$

Finalmente, $AC = AC'$ e

$$PA + PB + PC \geq AB + AC.$$

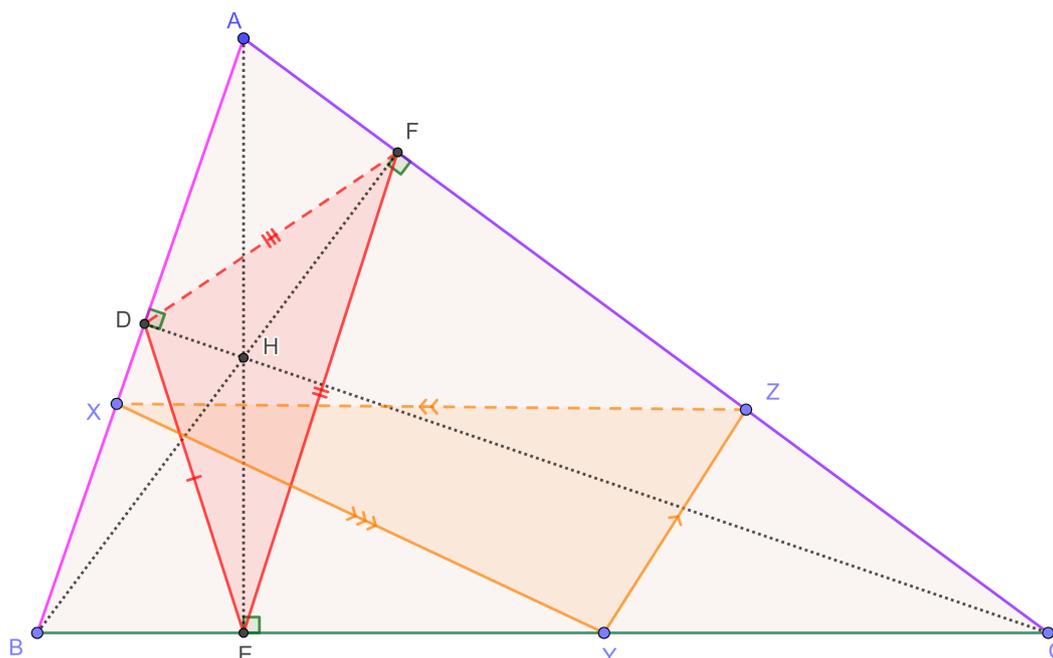
Para ganhar o jogo 9 neste caso basta colocar o ponto P no vértice A .

4.10 Problema de Fagnano (jogo 10)

Giovanni Francesco Fagnano dei Toschi foi um matemático e clérigo italiano. Nasceu em 1715 e morreu em 1797 [32].

Problema 10 (Fagnano). *Entre todos os $\triangle XYZ$ inscritos num triângulo acutângulo ABC o de perímetro mínimo é o órtico DEF (Figura 4.19).*

Figura 4.19: Problema de Fagnano. Versão interativa [aqui](#). Podem movimentar-se os pontos X , Y e Z .



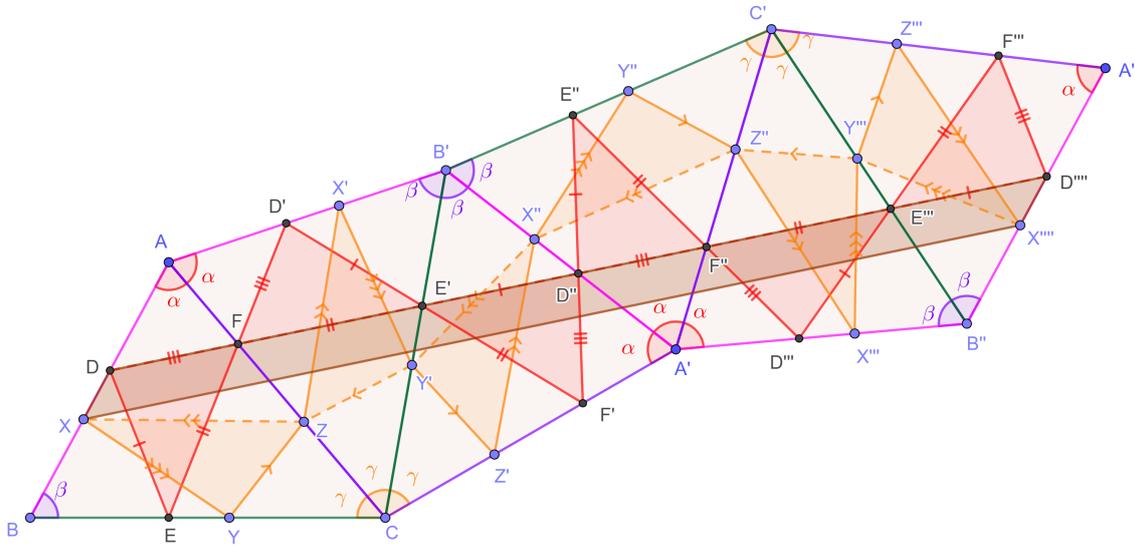
Fonte: O autor.

Serão apresentadas duas resoluções. Será visto que para ganhar o jogo 10 basta colocar os pontos X , Y e Z nas posições dos pés das alturas do $\triangle ABC$. Isto é, $X = D$, $Y = E$ e $Z = F$.

4.10.1 Resolução 1 do problema de Fagnano

Como o $\triangle DEF$ é órtico do $\triangle ABC$, viu-se na Proposição 4 que $\angle DFB = \angle BFE$ (Figura 4.20). A mesma igualdade não acontece quando traçada uma normal a AC passando por $Z \neq F$. A reflexão de um ponto arbitrário P será denotada por P' .

Figura 4.20: Resolução 1 (após cinco conjuntos de reflexões). Problema de Fagnano. Versão interativa [aqui](#). Podem movimentar-se os pontos X, Y e Z .



Fonte: O autor.

É feita uma primeira reflexão em relação a reta AC dos triângulos ABC, XYZ e DEF . Vale que $DX = D'X'$ e o lado AB girou um ângulo 2α . Nota-se ainda que $\angle DFB = \angle E'FB'$ e com isso os pontos D, F e E' são colineares. O mesmo não acontece com os pontos X, Z e Y' .

A seguir é realizada uma segunda reflexão, desta vez em relação a reta $B'C$, dos triângulos $AB'C, X'Y'Z$ e $D'E'F$. Vale que $DX = D'X' = D''X''$ e o lado AB girou um ângulo $2\alpha + 2\beta$. Os lados dos $\triangle DEF$ e $\triangle XYZ$ foram “esticados” nas poligonais $DFE'D''$ e $XZY'X''$. Porém, neste estágio, ainda não fica evidente a comparação entre os comprimentos dessas duas poligonais. Os pontos iniciais e finais são diferentes.

Prossegue-se com uma terceira reflexão em relação a reta $A'B'$ dos triângulos $A'B'C, X''Y'Z'$ e $D''E'F'$. Os pontos D'' e X'' e o lado $A'B'$ são invariantes. Continua valendo que $DX = D'X' = D''X''$ e o lado AB girou um ângulo $2\alpha + 2\beta$.

Continua-se com uma quarta reflexão em relação a reta $A'C'$ dos triângulos $A'B'C', X''Y''Z''$ e $D''E''F''$. Vale que $DZ = D'Z' = D''Z'' = D'''Z'''$ e o lado AB girou um ângulo $2\alpha + 2\beta - 2\alpha$.

Finaliza-se a construção com uma quinta reflexão em relação a reta $B''C'$ dos triângulos $A'B''C', X'''Y'''Z'''$ e $D'''E'''F'''$. Vale que:

$$DZ = D'Z' = D''Z'' = D'''Z''' = D''''Z''''$$

e o lado AB girou um ângulo

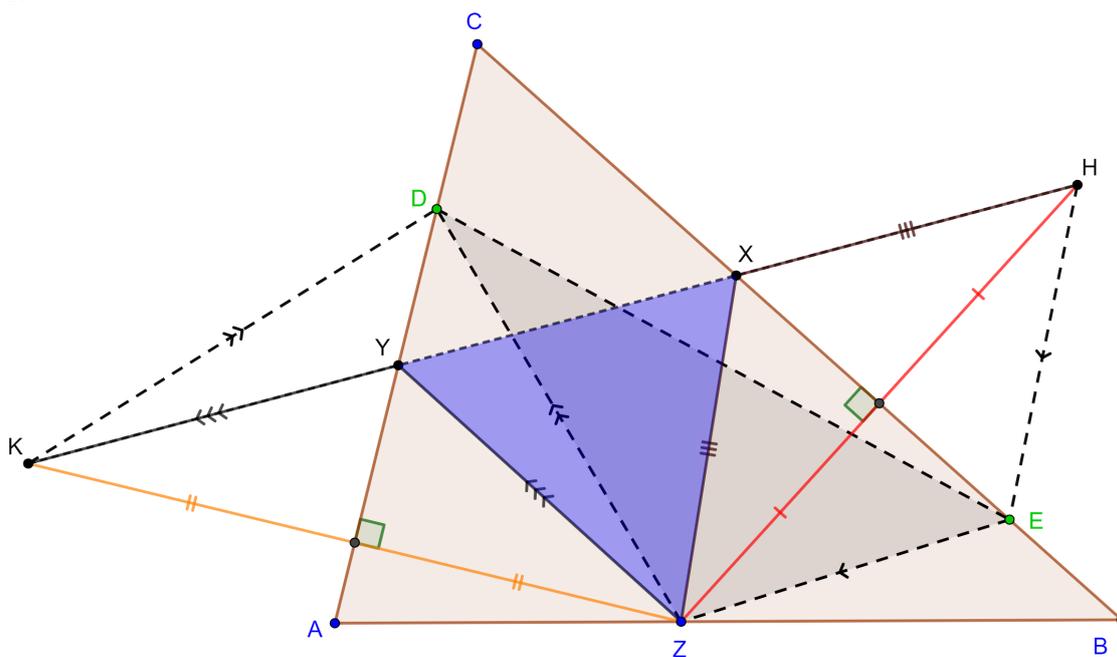
$$2\alpha + 2\beta - 2\alpha - 2\beta = 0.$$

Como $AB \parallel A''B''$ e $XD = X''''D''''$, então o quadrilátero $XDD''''X''''$ é um paralelogramo. Segue que $DD'''' = XX''''$. O anterior permite comparar o comprimento do segmento DD'''' , equivalente ao dobro do perímetro do $\triangle DEF$, com a poligonal $XZY'X''Z''Y'''X''''$, equivalente a duas vezes o perímetro do $\triangle XYZ$. Pela aplicação da desigualdade triangular o perímetro do triângulo órtico é o mínimo possível.

4.10.2 Resolução 2 do problema de Fagnano

Um ponto Z é escolhido de forma arbitrária sobre o lado AB . O ponto H é obtido pela reflexão de Z sobre o lado BC . Analogamente, o ponto K é obtido pela reflexão de Z sobre o lado AC . Como $\angle ACB < 90^\circ$ o segmento HK intersecta os lados do $\triangle ABC$ em X e Y (Figura 4.21). Será mostrado que o $\triangle XYZ$ é aquele tem o menor perímetro para um Z fixo.

Figura 4.21: Resolução 2. Primeira parte. Problema de Fagnano. Versão interativa [aqui](#). Podem movimentar-se os pontos D e E para verificar o mínimo no comprimento da poligonal $HEDK$.



Fonte: O autor.

Sejam $D \in AC$ e $E \in BC$ outros dois pontos. Desta forma, obtêm-se o $\triangle ZDE$ inscrito no $\triangle ABC$. Nota-se que $ZX = XH$ e $ZY = YK$, pois H e K são reflexões de Z em relação a BC e AC . Analogamente, traçando os segmentos ZE, EH, ZD, DE e DK obtêm-se que $ZE = EH$ e $ZD = DK$.

Comparando os perímetros dos $\triangle XYZ$ e $\triangle ZDE$ nota-se que:

$$2p_{XYZ} = ZX + XY + YZ = HX + XY + YK = HK,$$

$$2p_{ZDE} = ZE + ED + DZ = HE + ED + DK \geq HK.$$

Este último resultado é devido a Desigualdade Triangular. Portanto, o $\triangle XYZ$ possui o menor perímetro dado um ponto Z fixo.

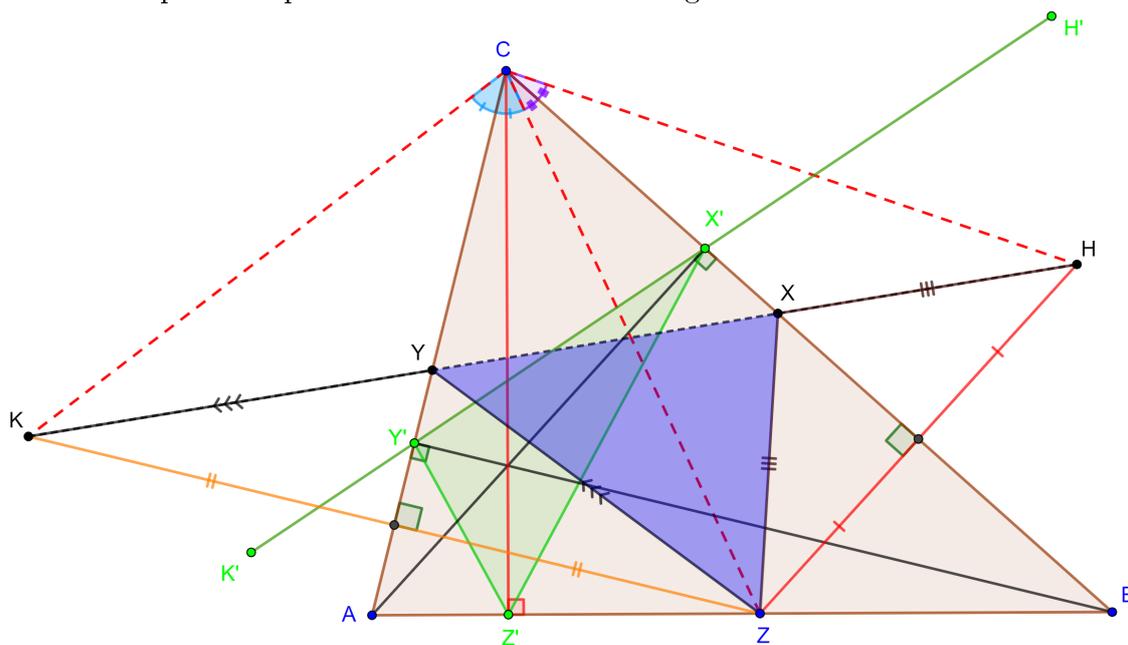
Agora quer-se encontrar o ponto $Z \in AB$ de tal modo que HK seja o menor possível (Figura 4.22). Devido as duas reflexões $CK = CZ = CH$. Adicionalmente, o

$$\angle KCH = 2\angle ACB < 180^\circ$$

e o $\angle KCH$ não depende da posição do ponto Z em AB . Como o ponto C também é fixo o segmento HK é mínimo quando $CH = CK$ for mínimo. Ou seja, quando CZ for mínimo. O valor mínimo de CZ é CZ' (projeção ortogonal de C sobre AB).

Quando Z' é o pé da altura relativa ao vértice C , então Y' e X' são os pés das alturas relativas aos vértices B e A , respectivamente.

Figura 4.22: Resolução 2. Segunda parte. Problema de Fagnano. Versão interativa [aqui](#). Pode movimentar-se o ponto Z para verificar o mínimo do segmento HK .



Fonte: O autor.

Capítulo 5

Outras desigualdades na Geometria

5.1 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Proposição 6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Dadas duas seqüências de números reais (a_1, a_2, \dots, a_n) e (b_1, b_2, \dots, b_n) então:*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \quad (5.1.1)$$

e vale a igualdade quando $b_i = \lambda a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, com λ real.

Demonstração. Considera-se a função real de variável real:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado e colocando x em evidência pode-se escrever:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Isto é, f é um polinômio de segundo grau na variável x . Como f é uma soma de quadrados, então $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por consequência, o discriminante é negativo ou igual a zero:

$$\Delta = 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0.$$

Dividindo por 4 chega-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz reescrita com os símbolos de somatórios:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2.$$

A igualdade acontece quando o discriminante é zero. Nesse caso f tem uma raiz dupla $x = \lambda$. Mas isto corresponde a escrever:

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n (a_i \lambda - b_i)^2 = 0.$$

Como as sequências (a_n) e (b_n) são de números reais, os quadrados são não negativos. A única possibilidade é que $a_i \lambda - b_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Isto é, acontece a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz quando as sequências (a_n) e (b_n) são proporcionais. \square

Uma verificação interativa da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, com sequências bidimensionais, pode ser feita [aqui](#).

5.2 Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica

Proposição 7 (Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica). *Seja $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma lista de números reais positivos com $n \geq 2$, então:*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i},$$

em que

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$$

A igualdade ocorre quando $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Demonstração. Caso $n = 2$: Quer-se provar que:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}.$$

Multiplicando os dois lados por 2 e elevando ao quadrado tem-se:

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 \cdot x_2.$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando obtêm-se outras sentenças equivalentes:

$$x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 4x_1 \cdot x_2,$$

Para o cálculo da Média Quadrática M_Q primeiro nota-se que:

$$MB = \frac{AB - BC}{2}.$$

Segundo, utiliza-se o Teorema de Pitágoras no $\triangle MBD$, retângulo em M :

$$BD^2 = \left(\frac{AB + BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB - BC}{2}\right)^2$$

e o resultado segue.

Para o cálculo da Média Geométrica M_G utiliza-se uma das relações métricas no $\triangle AEC$, retângulo em E : “Altura ao quadrado é igual ao produto das projeções”. Ou seja:

$$BE^2 = AB \cdot BC.$$

E para o cálculo da Média Harmônica M_H foca-se no $\triangle MBE$, retângulo em B : “Cateto ao quadrado é o produto da hipotenusa com a sua projeção”. Ou seja:

$$BE^2 = ME \cdot FE.$$

Como $ME = M_A$ e $BE = M_G$ segue que:

$$\frac{2}{M_H} = \frac{2}{FE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC}.$$

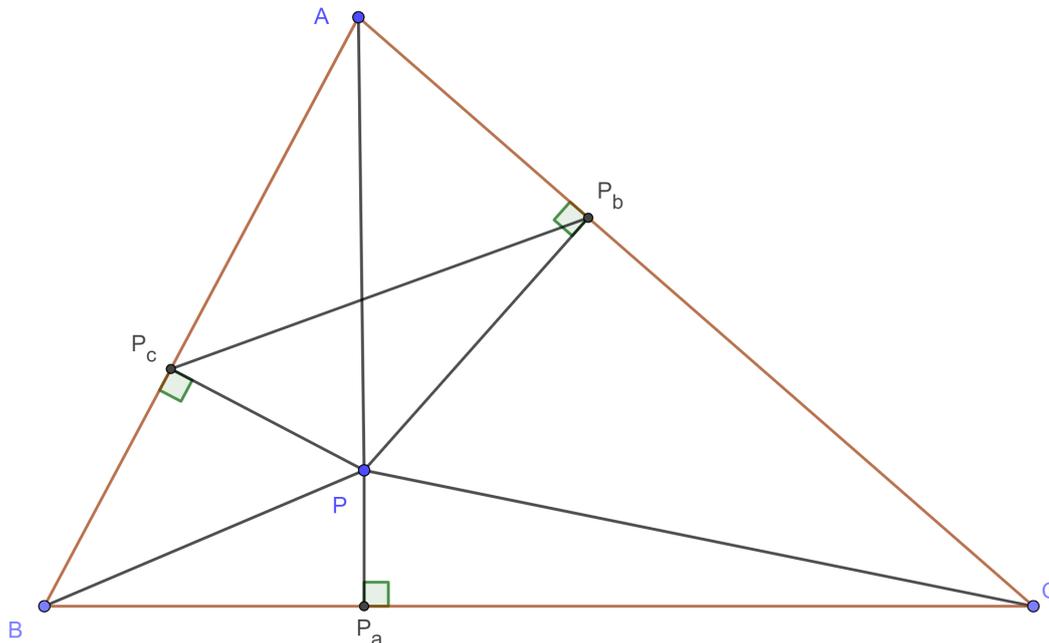
5.3 Teorema de Erdős-Mordell

Lema 8 (Para o Teorema de Erdős-Mordell). *Considera-se um triângulo ABC e um ponto P no seu interior. Sejam P_a , P_b e P_c as projeções ortogonais do ponto P nos lados BC , CA e AB , respectivamente. Então vale a desigualdade*

$$AP \cdot BC \geq P_cP \cdot CA + P_bP \cdot AB,$$

com igualdade se, e somente se, $P_bP_c \parallel BC$ (Figura 5.2).

Figura 5.2: Lema para a prova de Erdős-Mordell. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seguiremos a prova pelo Teorema de Ptolomeu utilizada em [41]. Sejam B' e C' as projeções ortogonais dos pontos B e C na reta P_cP_b (Figura 5.3). Então $BC \geq B'C'$ e vale a igualdade se, e somente se, $P_cP_b \parallel BC$. Alternativamente,

$$BC \geq B'P_c + P_cP_b + P_bC'.$$

A seguir multiplica-se a desigualdade anterior pelo valor positivo AP :

$$AP \cdot BC \geq AP \cdot B'P_c + AP \cdot P_cP_b + AP \cdot P_bC'. \tag{5.3.1}$$

De $\angle PP_bA = \angle PP_cA = 90^\circ$ o quadrilátero AP_bPP_c é inscritível e

$$\angle APP_b = \angle AP_cP_b = \angle BP_cB',$$

$$\angle APP_c = \angle AP_bP_c = \angle CP_bC'.$$

Logo, pelo critério de semelhança ângulo-ângulo têm-se:

$$\triangle APP_b \sim \triangle BP_cB',$$

$$\triangle APP_c \sim \triangle CP_bC'.$$

Segue que

$$\frac{AP}{BP_c} = \frac{PP_b}{P_cB'} \Leftrightarrow AP \cdot B'P_c = P_bP \cdot P_cB, \tag{5.3.2}$$

$$\frac{AP}{CP_b} = \frac{PP_c}{P_bC'} \Leftrightarrow AP \cdot P_bC' = P_cP \cdot P_bC. \tag{5.3.3}$$

Pelo Teorema de Ptolomeu aplicado no quadrilátero cíclico AP_bPP_c tem-se:

$$AP \cdot P_cP_b = AP_b \cdot P_cP + AP_c \cdot P_bP. \tag{5.3.4}$$

Substituindo (5.3.2), (5.3.3) e (5.3.4) em (5.3.1) encontra-se:

$$AP \cdot BC \geq P_bP \cdot P_cB + AP_b \cdot P_cP + AP_c \cdot P_bP + P_cP \cdot P_bC.$$

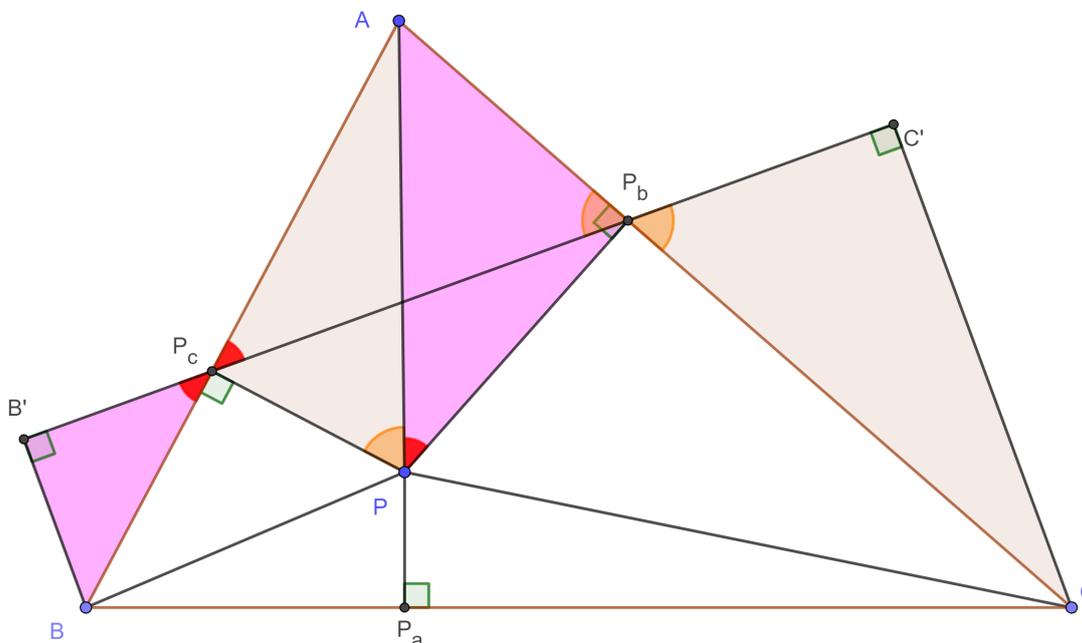
Agrupando e simplificando o resultado segue:

$$AP \cdot BC \geq P_bP(AP_c + P_cB) + P_cP(AP_b + P_bC),$$

$$AP \cdot BC \geq P_bP \cdot AB + P_cP \cdot AC.$$

□

Figura 5.3: Construção para a prova do Lema 8. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

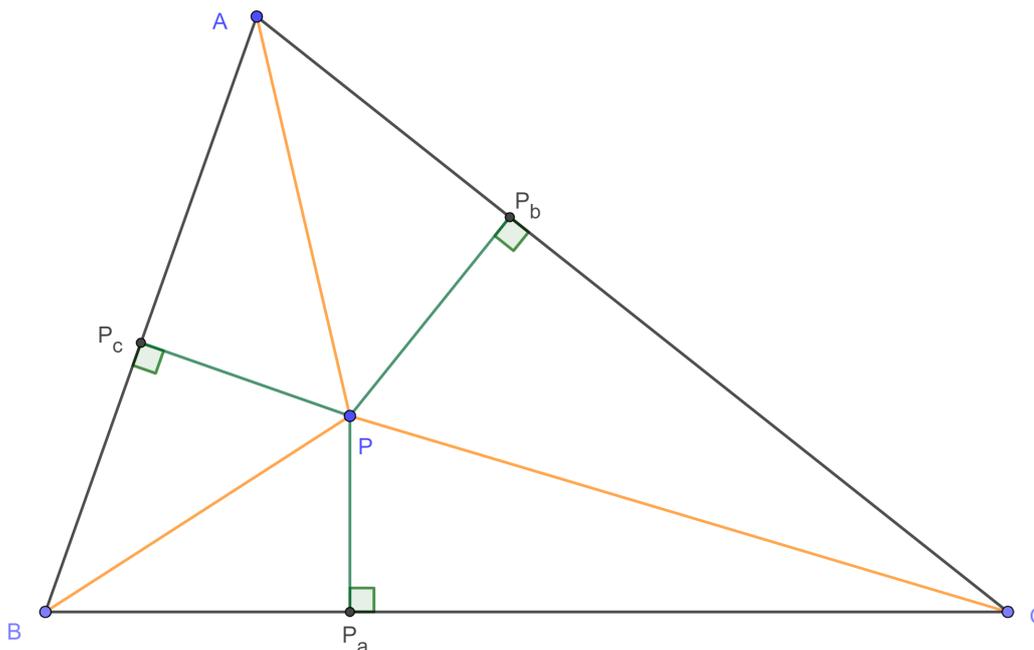
Teorema 9 (Erdős-Mordell). *Considera-se um triângulo ABC e um ponto P no seu interior. Sejam P_a , P_b e P_c as projeções ortogonais do ponto P nos lados BC, CA e AB, respectivamente.*

Então vale a desigualdade

$$AP + BP + CP \geq 2(P_aP + P_bP + P_cP),$$

com igualdade se, e somente se, P for o circuncentro de um $\triangle ABC$ equilátero (Figura 5.4).

Figura 5.4: Teorema de Erdős-Mordell. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Pelo Lema 8 têm-se as três desigualdades (uma relativa a cada vértice):

$$AP \geq P_cP \cdot \frac{CA}{BC} + P_bP \cdot \frac{AB}{BC},$$

$$BP \geq P_cP \cdot \frac{BC}{CA} + P_aP \cdot \frac{AB}{CA},$$

$$CP \geq P_bP \cdot \frac{BC}{AB} + P_aP \cdot \frac{CA}{AB}.$$

Valem as três igualdades quando $P_bP_c \parallel BC$, $P_cP_a \parallel CA$ e $P_aP_b \parallel AB$. Ou seja, P é o circuncentro do $\triangle ABC$.

Somando as três desigualdades anteriores obtém-se:

$$\begin{aligned} AP + BP + CP &\geq \\ &\geq \left(\frac{CA}{AB} + \frac{AB}{CA}\right) P_aP + \left(\frac{BC}{AB} + \frac{AB}{BC}\right) P_bP + \left(\frac{CA}{BC} + \frac{BC}{CA}\right) P_cP. \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Os três parêntesis em (5.3.5) são da forma:

$$x + \frac{1}{x}.$$

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica no conjunto de números positivos $\{x, \frac{1}{x}\}$ encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{x + \frac{1}{x}}{2} &\geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1, \\ x + \frac{1}{x} &\geq 2. \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

O resultado anterior é substituído nos três parenteses de (5.3.5):

$$AP + BP + CP \geq 2(P_aP + P_bP + P_cP). \tag{5.3.7}$$

A igualdade em (5.3.6) acontece quando $x = \frac{1}{x}$. Ou seja, $x = 1$. Isto leva a uma igualdade em (5.3.7) quando $AB = BC = CA$. Isto é, ABC é equilátero. Adicionalmente, deve ser satisfeito que P seja o circuncentro do $\triangle ABC$. \square

Capítulo 6

Problemas resolvidos de olimpíadas internacionais

6.1 Desigualdade Triangular. Desigualdade das Médias. Áreas. P1 **IMO** 1976.

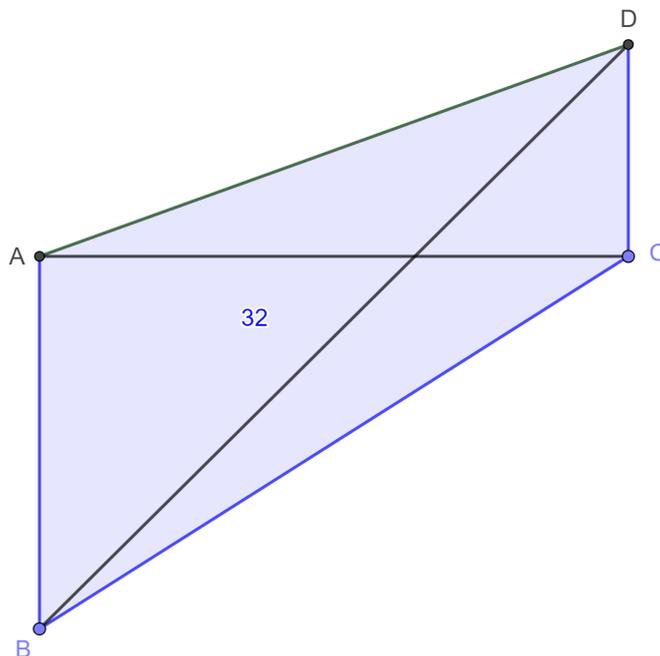
Problema 11. *Num quadrângulo convexo com área 32 cm^2 , a soma dos comprimentos de dois lados não adjacentes e uma diagonal é igual a 16 cm . a) Qual é o comprimento da outra diagonal? b) Quais são os comprimentos dos lados do quadrângulo se o perímetro é um mínimo? c) Será possível escolher os lados para que o perímetro seja um máximo?*

A **IMO** 1976 foi realizada na cidade de Lienz, Áustria. Problema 3 da **SL**, proposto pela delegação da antiga Checoslováquia e escolhido como P1 da competição [2].

6.1.1 Resolução do Problema 11.

A Figura 6.1 mostra uma construção geométrica inicial do Problema 11.

Figura 6.1: Construção geométrica inicial para o Problema 11. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Um quadrângulo é uma figura plana que consiste em quatro pontos, cada um unido a outros dois por segmentos (que se intersectam ou não). Quando o quadrângulo é convexo, equivale a um quadrilátero convexo.

Todas as unidades de comprimento são dadas em cm e as de área em cm^2 . As mesmas serão omitidas no que segue. Seja $S = 32$ e

$$d = 16 = AB + CD + AC. \tag{6.1.1}$$

a) A área do quadrângulo $ABCD$ pode ser calculada pela soma das áreas dos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$, onde AC é o lado comum. Adicionalmente, para medidas fixas de dois lados, o ângulo, determinado por estes, que maximiza a área de um triângulo é 90° . Ou seja, acontece o máximo quando os dois triângulos são retângulos:

$$S \leq \frac{1}{2}AC(AB + CD).$$

Utilizando (6.1.1) reescreve-se a desigualdade anterior como:

$$S \leq \frac{1}{2}AC(d - AC). \tag{6.1.2}$$

Por outro lado, considerando AC como variável e utilizando a Desigualdade das Médias

Geométrica e Aritmética (Proposição 7) no conjunto de números positivos $\{AC, d - AC\}$ tem-se:

$$\sqrt{AC(d - AC)} \leq \frac{AC + (d - AC)}{2},$$

$$AC(d - AC) \leq \frac{d^2}{4}. \tag{6.1.3}$$

A igualdade acontece quando $AC = d - AC$ ou $AC = \frac{d}{2}$. Considerando (6.1.2) e (6.1.3) encontra-se:

$$S \leq \frac{d^2}{8}.$$

Utilizando os números dados para d e S conclui-se que somente é possível a igualdade. Isto é, $AC = AB + CD = 8$, $AB \perp AC$ e $CD \perp AC$. Seja $CD = x$ e $AB = 8 - x$.

Constrói-se a reta AB e traça-se por D uma reta l paralela com AC (Figura 6.2). Marque-se o ponto $E = AB \cap l$. O triângulo BED , retângulo em E , é isósceles de base BD . Logo, o comprimento é:

$$BD = 8\sqrt{2}.$$

b) Para encontrar o valor mínimo do perímetro do quadrilátero $ABCD$ basta minimizar a soma $BC + AD$, pois $AB + CD = 8$. Para isso, posiciona-se um ponto F de tal forma que o quadrilátero $ACFD$ seja um paralelogramo. Isto é, $DF = 8$ e $AD = CF$. Constrói-se também o segmento BF .

Aplicando a Desigualdade Triangular (Proposição ??) no $\triangle BCF$ tem-se:

$$BC + CF = BC + AD \geq BF.$$

Isto é, o valor mínimo de $BC + AD$ é BF e, nesse caso, $C \in BF$. Utilizando o Teorema de Pitágoras no $\triangle BEF$ encontra-se $BF = 8\sqrt{5}$.

Por outro lado, quando $C \in BF$, pelo critério de semelhança AA, tem-se $\triangle FDC \sim \triangle FEB$. Da proporcionalidade dos lados segue que:

$$CF = AD = \frac{BF}{2}, \quad DC = \frac{EB}{2} = 4.$$

Logo, $AD = BC = 4\sqrt{5}$ e $AB = CD = 4$.

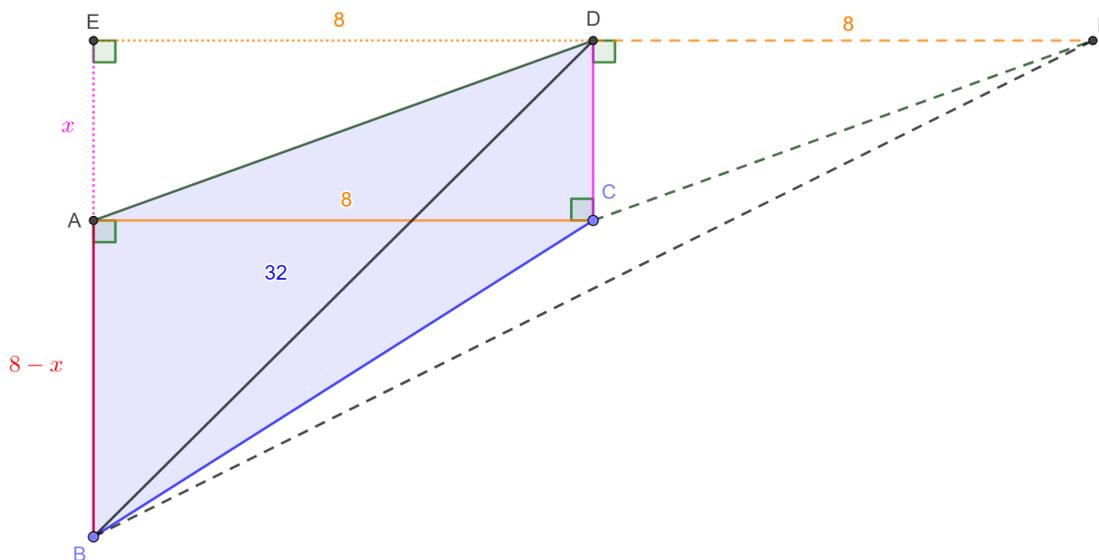
c) Assuma-se, sem perda de generalidade, que $CD < AB$. Neste caso, o ponto C está no interior do $\triangle BDF$ e vale que:

$$BC + AD = BC + CF \leq BD + DF.$$

Isto é, o valor máximo da soma $BC + AD$ é atingido quando os pontos C e D coincidem e o

quadrângulo $ABCD$ é degenerado. A Figura 6.2 mostra os detalhes das construções geométricas dos itens a), b) e c).

Figura 6.2: Construção geométrica para o Problema 11. Versão interativa [aqui](#). Pode ser movimentado o ponto B para encontrar o perímetro mínimo.



Fonte: O autor.

6.2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Incentro. Áreas. P1 IMO 1981.

Problema 12. *Encontrar o ponto P no interior de um $\triangle ABC$ para o qual a soma:*

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \tag{6.2.1}$$

é mínima, em que PD , PE e PF são as perpendiculares de P a BC , CA e AB , respectivamente.

A IMO 1981 foi realizada na cidade de Washington, EUA. Problema 15 da SL, proposto pela delegação do Reino Unido e escolhido como P1 da competição [2].

6.2.1 Resolução do Problema 12.

Nota-se que para qualquer ponto P no interior do $\triangle ABC$ a soma:

$$BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF \tag{6.2.2}$$

é duas vezes a área do mesmo. Isto é, o resultado é constante (não depende de P).

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 6) escreve-se:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2.$$

Identificando em (6.2.2) que $a_1^2 = BC \cdot PD$, $a_2^2 = CA \cdot PE$, $a_3^2 = AB \cdot PF$ e em (6.2.1) que $b_1^2 = \frac{BC}{PD}$, $b_2^2 = \frac{CA}{PE}$ e $b_3^2 = \frac{AB}{PF}$ tem-se:

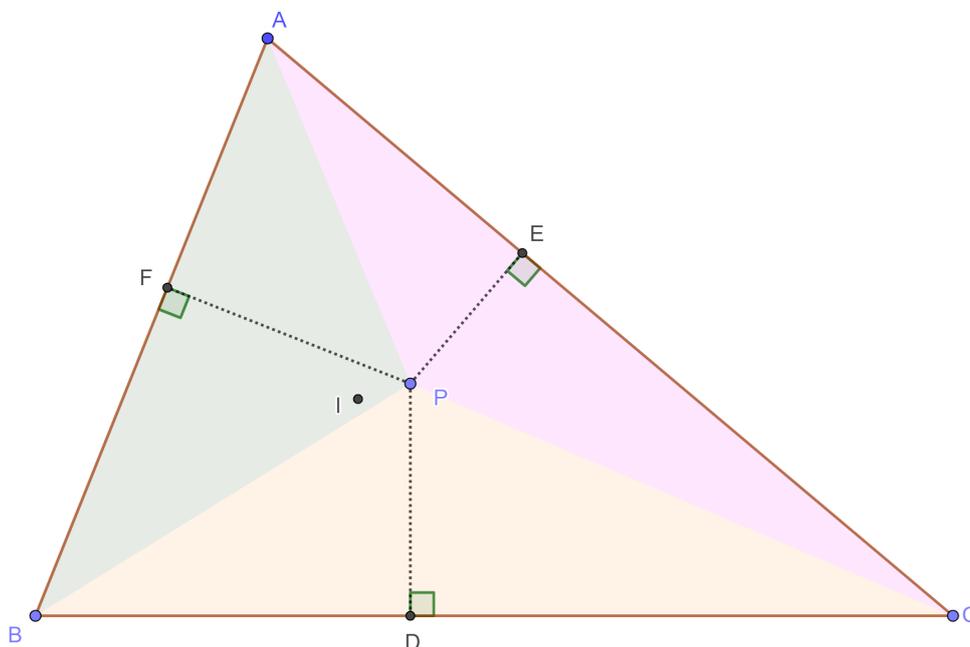
$$(BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF) \left(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \right) \geq (BC + CA + AB)^2.$$

A igualdade, que representa o valor mínimo de (6.2.1), acontece quando as sequências (a_n) e (b_n) são proporcionais. Isto é, quando existe um número λ tal que:

$$(a_1, a_2, a_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3).$$

Logo, $\lambda = PD = PE = PF$. Portanto, o ponto P que minimiza (6.2.1) é o Incentro do $\triangle ABC$. A Figura 6.3 mostra uma construção geométrica.

Figura 6.3: Construção geométrica para o Problema 12. Versão interativa [aqui](#). Movimentando o ponto P pode-se verificar o mínimo.



Fonte: O autor.

6.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Incírculo. Tangentes. P6 IMO 1983.

Problema 13. Se a, b e c são lados de um triângulo, provar que:

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0. \tag{6.3.1}$$

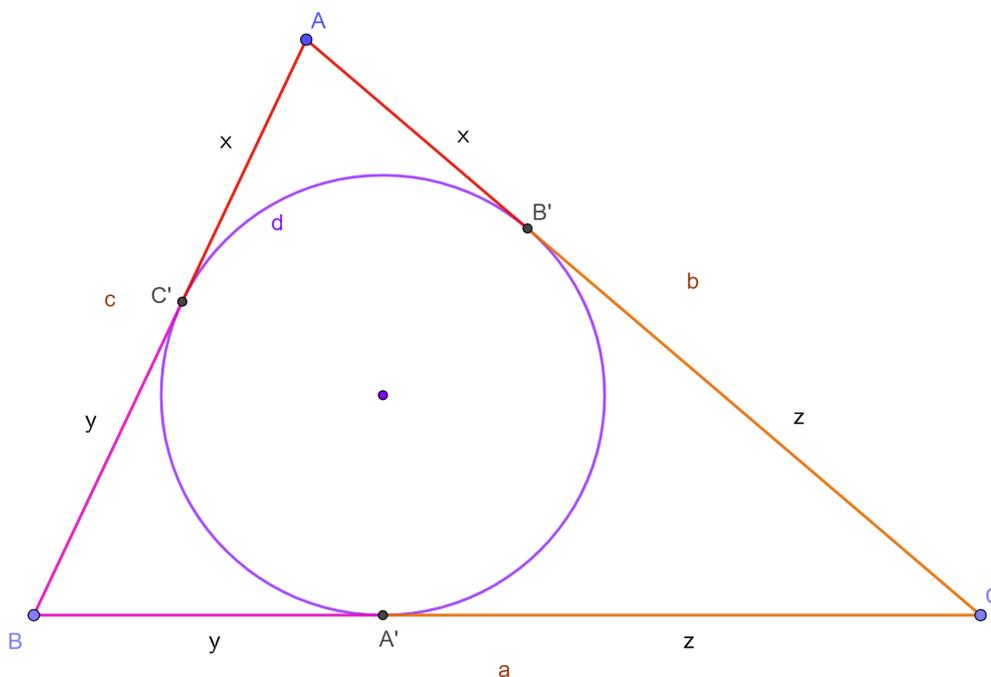
Determinar quando vale a igualdade.

A IMO 1983 foi realizada na cidade de Paris, França. Problema 9 da SL, proposto pela delegação dos Estados Unidos e escolhido como P6 da competição [2].

6.3.1 Resolução do Problema 13.

Constrói-se a circunferência inscrita d no $\triangle ABC$ e marcam-se os pontos de interseção A', B' e C' de d com os lados BC, CA e AB , respectivamente, conforme apresentado na Figura 6.4.

Figura 6.4: Construção geométrica para o Problema 13. Versão interativa [aqui](#). Movimentando o ponto A pode-se verificar o mínimo.



Fonte: O autor.

Devido a tangência têm-se $AB' = AC' = x$, $BA' = BC' = y$ e $CA' = CB' = z$. Logo,

$$\begin{aligned} a &= y + z, \\ b &= z + x, \\ c &= x + y. \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Substituindo (6.3.2) em (6.3.1), segue:

$$(y + z)^2(z + x)(y - x) + (z + x)^2(x + y)(z - y) + (x + y)^2(y + z)(x - z) \geq 0.$$

Expandindo e simplificando tem-se:

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(y + z + x).$$

Multiplicando os dois lados pelo número positivo $z + x + y$ encontra-se uma Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 6):

$$(xy^3 + yz^3 + zx^3)(z + x + y) \geq [\sqrt{xyz}(y + z + x)]^2.$$

As duas seqüências que dão origem a desigualdade anterior são:

$$\begin{aligned} (y\sqrt{xy}, z\sqrt{yz}, x\sqrt{zx}), \\ (\sqrt{z}, \sqrt{x}, \sqrt{y}). \end{aligned}$$

A igualdade acontece quando as seqüências são proporcionais. Isto é,

$$\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{zx^3}{y}.$$

Como x , y e z são números reais positivos existe uma única solução para a igualdade anterior: $x = y = z$. Logo, $a = b = c$. A Figura 6.4 mostra uma construção geométrica.

6.4 Desigualdade Triangular. Bases Médias. Paralelogramo. P7 SL IMO 1999.

Problema 14. *Seja ABC um triângulo e M um ponto em seu interior. Provar que:*

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + BC + CA.$$

A IMO 1999 foi realizada na cidade de Bucareste, Romênia. Problema 7 da SL, proposto

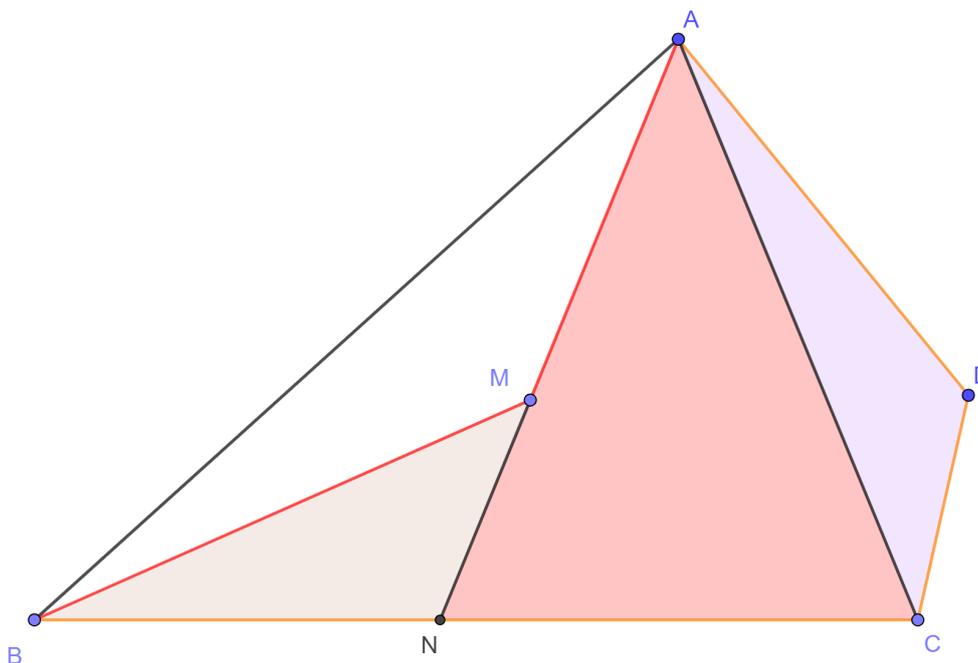
pela delegação da Armênia [2].

6.4.1 Resolução do Problema 14.

Lema 10. *Seja M um ponto no interior de uma quadrilátero convexo $ABCD$. Então vale que:*

$$AM + MB < BC + CD + DA.$$

Figura 6.5: Construção geométrica para o Lema 10. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. A Figura 6.5 mostra uma construção geométrica. Seja $N = AM \cap BC$. Aplica-se a Desigualdade Triangular (Proposição ??) aos triângulos $\triangle MNB$, $\triangle ANC$ e $\triangle CDA$.

No $\triangle MNB$ vale que $MB < MN + NB$, logo:

$$AM + MB < AM + MN + NB = AN + NB. \tag{6.4.1}$$

No $\triangle ANC$ tem-se $AN < NC + CA$. Com isto segue:

$$AN + NB < NC + CA + NB = CA + BC. \tag{6.4.2}$$

E no $\triangle CDA$ vale que $CA < CD + DA$. Portanto,

$$CA + BC < CD + DA + BC. \quad (6.4.3)$$

Concatenando (6.4.1), (6.4.2) e (6.4.3) fica provado o lema. \square

Sejam E , F e J os pontos médios de BC , AC e AB , respectivamente, como mostrado na Figura 6.6. Qualquer ponto M no interior do $\triangle ABC$ está no interior de, pelo menos, dois dos quadriláteros $ABEF$, $BCFJ$ e $CAJE$. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que:

$$MB = \min\{MA + MB + MC\}.$$

Isto é, M está no interior de $ABEF$ e $BCFJ$.

Aplicando o Lema 10 ao quadrilátero $ABEF$ tem-se:

$$AM + MB < BE + EF + FA. \quad (6.4.4)$$

E aplicando o Lema 10 ao quadrilátero $BCFJ$ segue:

$$BM + MC < CF + FJ + JB. \quad (6.4.5)$$

Somando (6.4.4) e (6.4.5) obtêm-se a desigualdade a seguir:

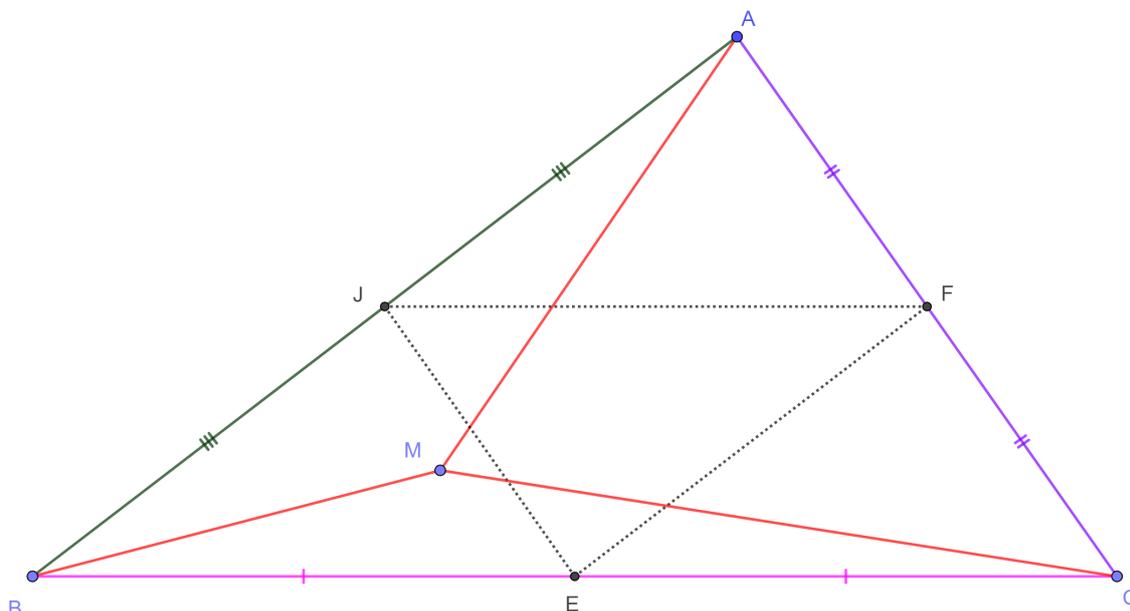
$$MB + MA + MB + MC < BE + FJ + CF + FA + EF + JB.$$

Adicionalmente, devido ao fato de FJ e EF serem Bases Médias têm-se $FJ = EC$ e $EF = JB$. Consequentemente, encontra-se a desigualdade:

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < BC + CA + AB.$$

A Figura 6.6 mostra uma construção geométrica.

Figura 6.6: Construção geométrica para o Problema 14. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

6.5 Desigualdade Triangular. Lei dos Senos. Trigonometria. P1 IMO 2001.

Problema 15. *Considera-se um triângulo acutângulo ABC, com Circuncentro O e altura AP. Seja ainda:*

$$\angle C \geq \angle B + 30^\circ.$$

Provar que:

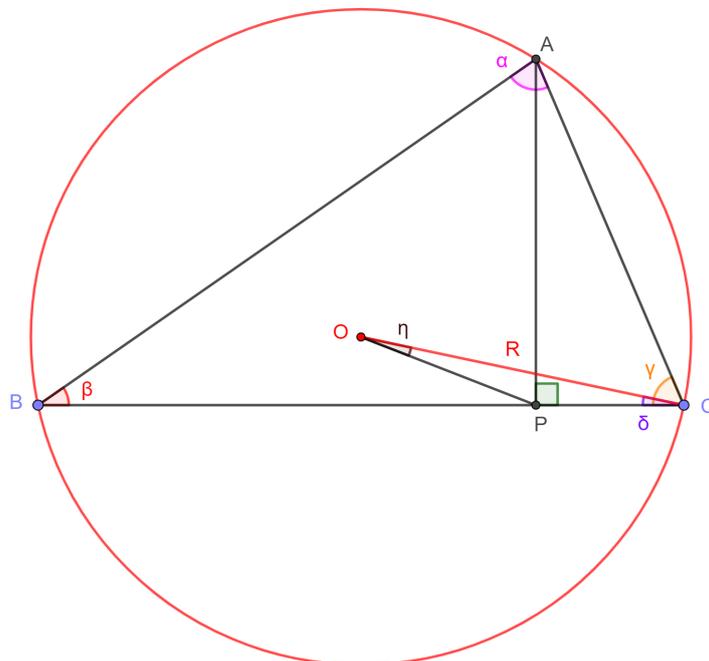
$$\angle A + \angle COP < 90^\circ.$$

A IMO 2001 foi realizada na cidade de Washington, Estados Unidos. Problema 16 da SL, proposto pela delegação da Coreia do Sul e escolhido como P1 da competição [2].

6.5.1 Resolução do Problema 15.

A Figura 6.7 mostra uma construção geométrica para o Problema 15.

Figura 6.7: Construção geométrica para o Problema 15. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $\angle OCP = \delta$ e $\angle COP = \eta$. Tem-se $\gamma \geq \beta + 30^\circ$. Como um ângulo central $\angle BOC = 2\alpha$ é duas vezes o inscrito $\angle BAC = \alpha$ e o $\triangle OBC$ é isósceles. Segue que:

$$\angle OCB = \delta = 90^\circ - \alpha.$$

Do enunciado do Problema 15 quer-se provar que $\eta < \delta$. Pela Proposição 2.1, aplicada no $\triangle COP$, o anterior equivale a demonstrar que $PC < OP$.

Por sua vez, para verificar que $PC < OP$ bastará mostrar que:

$$2 \cdot PC < OC = R. \tag{6.5.1}$$

De fato, aplicando a Desigualdade Triangular (Proposição ??) no $\triangle OCP$ e multiplicando por 2 pode-se escrever:

$$2R < 2 \cdot OP + 2 \cdot PC.$$

Utilizando (6.5.1) tem-se:

$$\begin{aligned} 2R &< 2 \cdot OP + R, \\ R &< 2 \cdot OP. \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

Logo, de (6.5.1) e (6.5.2) segue:

$$2 \cdot PC < R < 2 \cdot OP \Rightarrow PC < OP.$$

Devido ao $\angle CPA = 90^\circ$ segue:

$$PC = AC \cos(\gamma).$$

Mas pela Lei dos Senos no $\triangle ABC$ tem-se:

$$2R = \frac{AC}{\sin(\beta)}.$$

Logo,

$$PC = 2R \sin(\beta) \cos(\gamma).$$

Utilizando a hipótese $\gamma \geq \beta + 30^\circ$ e o fato da função cosseno ser decrescente no intervalo entre 0° e 90° encontra-se:

$$PC < 2R \sin(\beta) \cos(\beta + 30^\circ).$$

Resta mostrar que:

$$2 \sin(\beta) \cos(\beta + 30^\circ) < \frac{1}{2}.$$

De fato, utilizando as identidades do cosseno e seno da soma de dois ângulos tem-se:

$$\begin{aligned} 2 \sin(\beta) \cos(\beta + 30^\circ) &= 2 \sin(\beta) [\cos(\beta) \cos(30^\circ) - \sin(\beta) \sin(30^\circ)] \\ &= \sin(2\beta) \cos(30^\circ) - 2 \sin^2(\beta) \sin(30^\circ). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\sin(30^\circ)$ do lado direito encontra-se:

$$\begin{aligned} 2 \sin(\beta) \cos(\beta + 30^\circ) &= \sin(2\beta) \cos(30^\circ) + [1 - 2 \sin^2(\beta)] \sin(30^\circ) - \sin(30^\circ) \\ &= \sin(2\beta) \cos(30^\circ) + \cos(2\beta) \sin(30^\circ) - \sin(30^\circ) \\ &= \sin(2\beta + 30^\circ) - \sin(30^\circ) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como a função seno é sempre menor ou igual a um e $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$ a última desigualdade é verdadeira. Isto conclui a demonstração.

6.6 Arcos de circunferências, desigualdade triangular e circuncirculo. P5 NE IGO 2014-5.

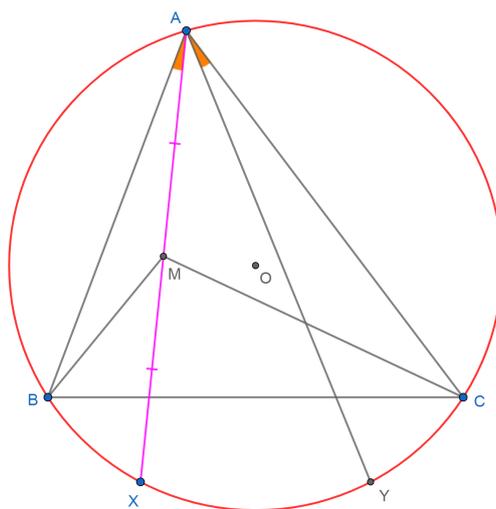
Problema 16. Os pontos X e Y estão sobre o arco BC da circunferência circunscrita ao triângulo ABC (este arco não contém A), de tal forma que $\angle BAX = \angle CAY$. Seja M o ponto médio da corda AX . Mostrar que $BM + MC \geq AY$.

Problema 5 (Nível Elemental) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Mahan Tajrobezar [34].

6.6.1 Resolução

A Figura 6.8 mostra uma construção geométrica inicial do problema.

Figura 6.8: Construção geométrica inicial do Problema 16. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

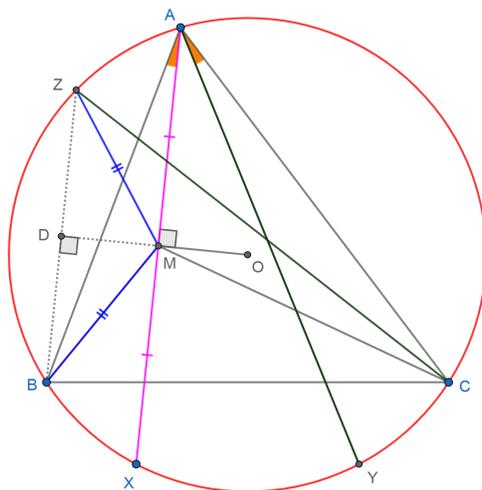
Como O é o circuncentro do $\triangle ABC$, tem-se $OM \perp AX$. Traça-se uma perpendicular a reta OM passando por B e marca-se o ponto Z como a interseção desta com o circuncirculo.

Sendo $OM \perp BZ$, BZ uma corda e O o centro da circunferência, a reta OM é a mediatriz do segmento BZ . Logo, $MZ = MB$. Pela Desigualdade Triangular aplicada no $\triangle MZC$ tem-se $BM + MC = ZM + MC \geq CZ$. Vale a igualdade quando os pontos C , M e Z são colineares. Mas $BZ \parallel AX$, segue que:

$$\widehat{AZ} = \widehat{BX} = \widehat{CY} \Leftrightarrow \widehat{ZAC} = \widehat{YCA} \Leftrightarrow CZ = AY.$$

Consequentemente, $BM + MC \geq AY$. Vale a igualdade quando os pontos C , M e Z são colineares. A Figura 6.9 ilustra o problema resolvido. Uma solução em vídeo está disponível [aqui](#).

Figura 6.9: Guia para a resolução do Problema 16. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

6.7 Desigualdade de Erdős-Mordell, trigonometria e demonstração por contradição. P5 IMO 1991.

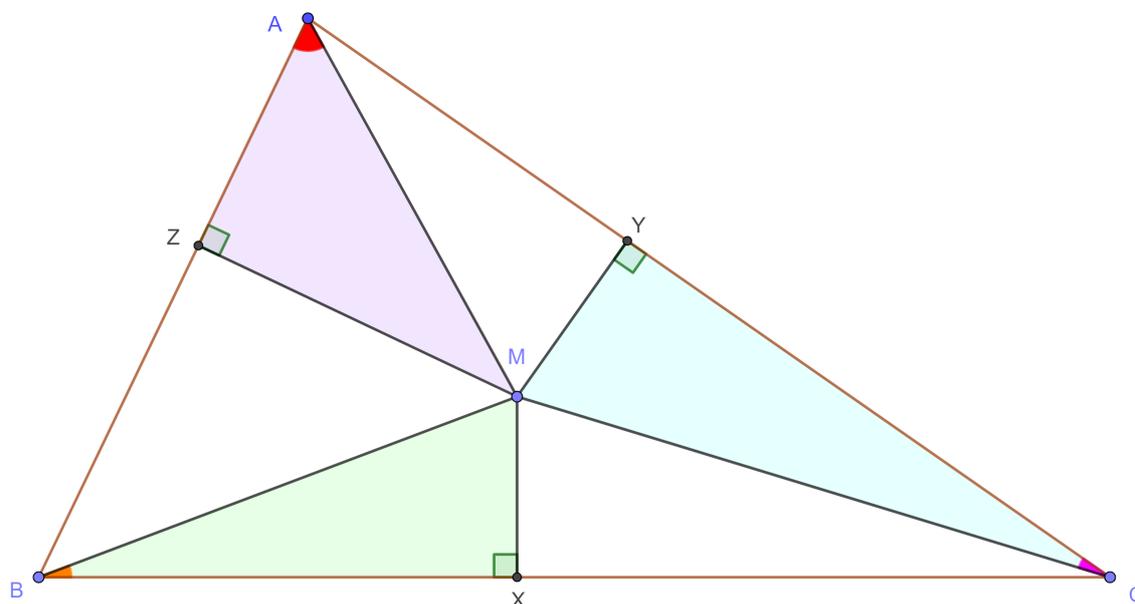
Problema 17. *Sejam ABC um triângulo e M um ponto interior. Mostre que pelo menos um dos ângulos MAB , MBC e MCA é menor ou igual a 30° .*

A IMO 1991 foi realizada na cidade de Sigtuna, Suécia. Problema 4 da lista curta e escolhido como P5 da competição, proposto pela delegação da França [2].

6.7.1 Resolução do Problema 17

Sejam X , Y e Z as projeções de M sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente. Suponha-se, por absurdo, que os ângulos MAB , MBC e MCA são todos maiores que 30° (Figura 6.10).

Figura 6.10: Uma construção geométrica para o Problema 17. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Como $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, o anterior implica que:

$$\frac{MZ}{MA} > \frac{1}{2}, \quad \frac{MX}{MB} > \frac{1}{2}, \quad \frac{MY}{MC} > \frac{1}{2}.$$

Ou seja,

$$MA < 2MZ, \quad MB < 2MX, \quad MC < 2MY.$$

Somando as três últimas desigualdades segue que:

$$MA + MB + MC < 2(MX + MY + MZ).$$

Contradição, pois pelo Teorema 9 tem-se justamente o oposto:

$$MA + MB + MC > 2(MX + MY + MZ).$$

Capítulo 7

Referências Bibliográficas

- [1] DELGADO, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Página(s) 14)
- [2] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium**: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009. New York: Springer, 2011. (Página(s) 37, 65, 68, 70, 72, 74, 78)
- [3] GAY, D. **Geometry by Discovery** Editora: Wiley; 1 edição (17 setembro 1997), 432 páginas, ISBN-10: 0471041777. (Página(s) 35)
- [4] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: [10.22533/at.ed.24221310814](https://doi.org/10.22533/at.ed.24221310814). Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [5] KAMII, C.; JOSEPH, L. L. **Aritmética**: novas perspectivas - implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papyrus, 1992. (Página(s) 13)
- [6] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [7] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN

- 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [8] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [9] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática**. 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [10] LÓPEZ LINARES, J. **Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 57 p. ISBN 978-65-87023-26-7 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023267>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [11] LÓPEZ LINARES, J. Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 1, p. 27-47, jul. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n12022027047. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [12] LÓPEZ LINARES, J. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023250>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [13] LÓPEZ LINARES, J. **Treinamento de Professores e Estudantes do Ensino Fundamental e Médio com Problemas de Olimpíadas de Matemática**. 155 f. Tese (Livre-docência) Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, 2022. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/livredocencia/74/tde-28112022-091705/pt-br.php>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)

LÓPEZ LINARES, J. **Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e desigualdades**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 85 p. ISBN 978-65-87023-28-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023281>.

- [14] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdv19202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [15] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [16] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023212>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [17] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [18] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra - v. 3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 91 p. ISBN 978-65-87023-24-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [19] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [20] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdv17ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em:

- <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [21] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdv18202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [22] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22–40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdv20202123169664jlljpmsafj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [23] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [24] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [25] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [26] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)

LÓPEZ LINARES, J. **Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e desigualdades**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 85 p. ISBN 978-65-87023-28-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023281>.

- [27] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [28] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [29] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdv21202123169664jlljpsafj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [30] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção ProfMat). (Página(s) 14, 59)
- [31] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Página(s) 14)
- [32] O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Giovanni Francesco Fagnano dei Toschi**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2000. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fagnano_Giovanni/. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 52)
- [33] O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Pierre de Fermat**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2002. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fermat/>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 49)
- [34] **Problems and Solutions of 1st IGO**. 2014-2015. Disponível em: <https://igo-official.ir/events/1/>. Acesso em: 28 jul. 2022. (Página(s) 77)
- [35] RODRIGUES, A. R. Napoleão e as “revoluções” no plano euclidiano. **É Matemática, Oxente!**, 2019. Disponível em: <http://ematematicaoexente.com.br>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 13, 49)

- [36] SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [37] SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J.; RAMALHO DE FREITAS, M.P.O. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol.3, N.1, Jan-Jun 2022, pp. 70-87. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 14)
- [38] SAVI, R.; ULBRICHT, V. R. Jogos digitais educacionais: benefícios e desafios. **Renote**, v. 6, n. 1, 2008. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/14405>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 13)
- [39] SOUZA, D. M. **Uso de Transformações Geométricas na Revigoração do Ensino de Geometria Plana**. 125 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/demetrius_melo_souza.pdf. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 13)
- [40] THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria-Nível 2, 2006. (Página(s) 14)
- [41] TORRES, A. A desigualdade de Erdős-Mordell. **Revista Eureka!**, v. 18, p. 42–52, 2003. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka18.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página(s) 61)

