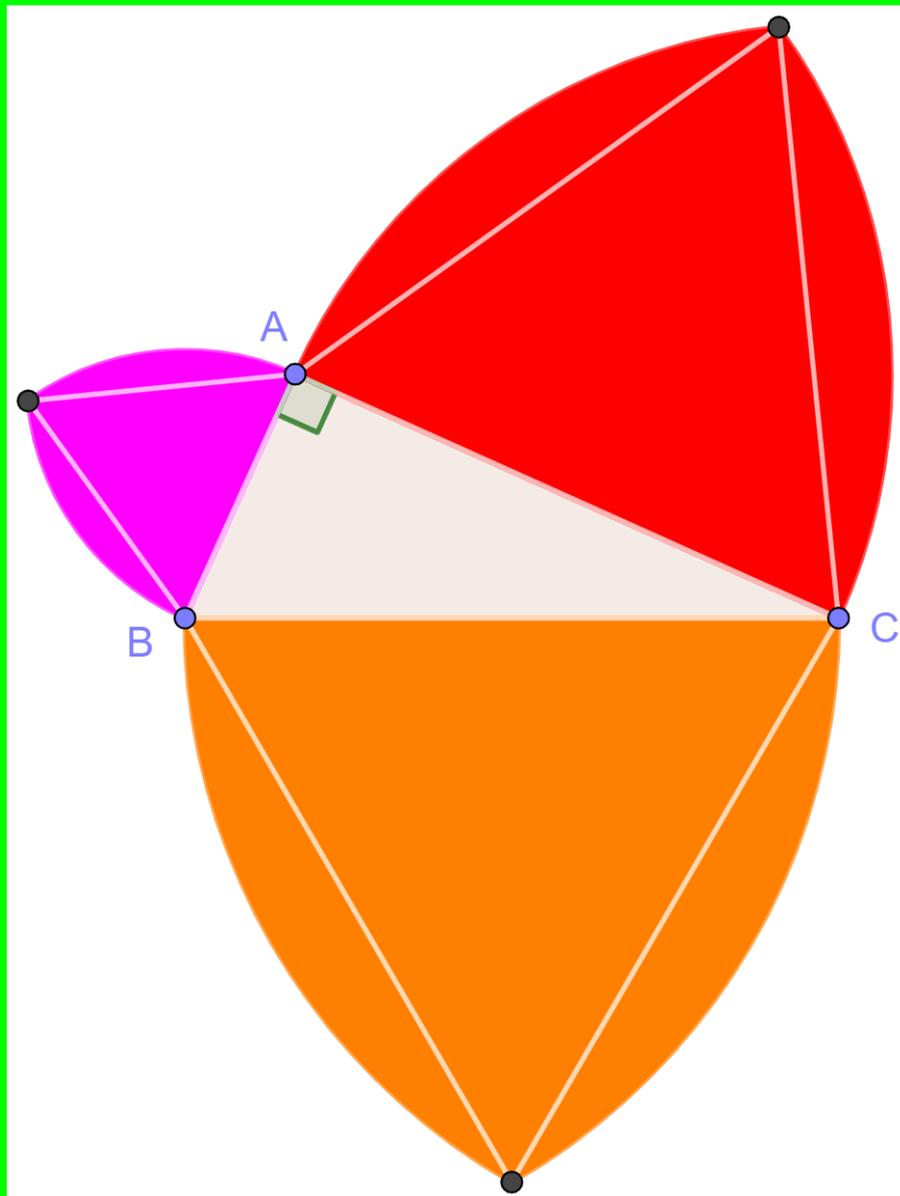


Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra



Juan López Linares

JUAN LÓPEZ LINARES

Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra

DOI: 10.11606/9786587023267

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2022

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-Reitora: Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

Diretor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Vice-Diretor: Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da
Universidade de São Paulo

L864t	López Linares, Juan Teorema de Pitágoras: demonstrações interativas no GeoGebra / Juan López Linares. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2022. 57 p. ISBN 978-65-87023-26-7 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023267 1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino médio. 6. Formação de professores. I. Título.
-------	--

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



Dedico este livro a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores e Estudantes do curso de Geometria Olímpica com GeoGebra que motivaram a escrita deste livro eletrônico.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

AUTOR

Prof. Dr. JUAN LÓPEZ LINARES: <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Quando adolescente participava como estudante de um grupo de treinamento para olimpíadas de Física. Embora tivesse sucessos nas competições desta disciplina, nas olimpíadas de Matemática não tinha resultados espetaculares. Sempre sentiu falta de um grupo de treinamento em Matemática. Essa experiência extracurricular determinou seu futuro profissional e motivou sua linha de trabalho hoje.

Atualmente Professor do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores e estudantes de alto rendimento.

Na área de Ensino de Matemática Olímpica, publicou 15 artigos, 10 livros eletrônicos (e-book), um capítulo de livro e uma dissertação de mestrado. Textos completos e gratuitos podem ser encontrados [aqui](#). Também disponibilizou mais de 750 vídeo aulas. Adicionalmente, no site do [GeoGebra](#) estão disponíveis mais de 500 construções geométricas interativas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProFMat) pela UFSCar em 2019.

Título

Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra

Prefácio

Este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 39 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. A discussão é organizada em cinco capítulos: Ida do Teorema de Pitágoras; Volta do Teorema de Pitágoras; Equação Pitagórica Diofantina; Problemas e aplicações; Além do Teorema de Pitágoras. São apresentadas sete demonstrações, as duas últimas encontram-se como corolários da Generalização de Pappus e do Teorema de Ptolomeu. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mãos na massa.

Palavras-chave: Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

Lista de Figuras

2.1	Referência para a demonstração 1 do Teorema 1. Versão interativa aqui	14
2.2	Outra divisão possível na demonstração 1 do Teorema 1. Versão interativa aqui	15
2.3	Referência para a demonstração 2 do Teorema 1. Versão interativa aqui	16
2.4	Referência para a demonstração 3 do Teorema 1. Versão interativa aqui	17
2.5	Referência para a demonstração do Lema 2. Versão interativa aqui	19
2.6	Divisão do quadrado $ACGF$. Perigal, demonstração 4 do Teorema 1. Versão interativa aqui	20
2.7	Divisão do quadrado $BCDE$. Perigal, demonstração 4 do Teorema 1. Versão interativa aqui	21
2.8	Construção inicial da demonstração 5 do Teorema 1. Versão interativa aqui	23
2.9	Construção final da demonstração 5 do Teorema 1. Versão interativa aqui	24
3.1	Caso $\hat{A} > 90^\circ$ da volta do Teorema de Pitágoras. Versão interativa aqui	26
3.2	Caso $\hat{A} < 90^\circ$ da volta do Teorema de Pitágoras. Versão interativa aqui	27
4.1	Exemplos de triângulos construídos com trincas pitagóricas. Versão interativa aqui	31
5.1	Construção geométrica inicial para o Problema 1. Versão interativa aqui	33
5.2	Construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui	34
5.3	A soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos é igual a área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa. Versão interativa aqui	35
5.4	Relação entre as áreas de triângulos semelhantes. Versão interativa aqui	36
5.5	A área do triângulo construído sobre a hipotenusa BC é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos CA e AB . Versão interativa aqui	37
5.6	Caso $n = 10$. A área do polígono regular de n lados construído sobre a hipotenusa de um triângulo ABC , retângulo em A , é igual à soma das áreas dos polígonos regulares de n lados construídos sobre seus catetos CA e AB . Versão interativa aqui	38

5.7	A soma das áreas dos polígonos construídos sobre os catetos é igual a área do polígono construído sobre a hipotenusa. Versão interativa aqui	39
5.8	A soma das áreas das bandeirinhas construídas sobre os catetos é igual a área da bandeirinha construído sobre a hipotenusa. Versão interativa aqui	40
5.9	A soma das áreas das ogivas construídas sobre os catetos é igual a área da ogiva construída sobre a hipotenusa. Versão interativa aqui	41
5.10	A soma das áreas dos setores circulares construídos sobre os catetos é igual a área dos setores circulares construído sobre a hipotenusa. Versão interativa aqui	42
6.1	Construção inicial da generalização de Pappus. Versão interativa aqui	44
6.2	Generalização de Pappus. Versão interativa aqui	45
6.3	Teorema 1 (Ida de Pitágoras) é um caso particular da Proposição 12 (Pappus). Versão interativa aqui	46
6.4	Enunciado do Teorema de Ptolomeu. Para um quadrilátero ser inscritível o produto dos comprimentos das diagonais deve ser igual à soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos e vice-versa. Versão interativa aqui	47
6.5	Demonstração da forma direta do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa aqui	48
6.6	Demonstração da recíproca do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa aqui	49
6.7	Teorema de Ptolomeu no retângulo $ABCD$. Versão interativa aqui	51

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	11
2	Ida do Teorema de Pitágoras	13
2.1	Área de quadrado calculada de duas formas	13
2.2	Área de trapézio	15
2.3	Semelhança de triângulos. Relações métricas.	17
2.4	Demonstração do Perigal	18
2.5	Demonstração de Airy	22
3	Volta do Teorema de Pitágoras	25
4	Equação Pitagórica Diofantina	28
4.1	Trinca primitiva para um ímpar dado	30
4.2	Trinca primitiva para um múltiplo de quatro dado	30
4.3	Área de um triângulo Pitagórico é múltiplo de seis	30
5	Problemas e aplicações	32
5.1	Fermat, lei dos cossenos, trincas e volta do Teorema de Pitágoras	32
5.1.1	Resolução do Problema 1	32
5.2	Pitágoras com triângulos equiláteros	34
5.3	Relação entre as áreas de triângulos semelhantes	35
5.4	Pitágoras com triângulos semelhantes	36
5.5	Pitágoras com polígonos regulares	38
5.6	Pitágoras com polígonos semelhantes	39
5.7	Bandeirinhas Pitagóricas	40
5.8	Ogivas e Pitágoras	41
5.9	Setores circulares e Pitágoras	41

6 Além do Teorema de Pitágoras	43
6.1 Extensão do Teorema de Pitágoras feita por Pólya	43
6.2 Generalização de Pappus	43
6.3 Teorema de Ptolomeu	46
7 Referências Bibliográficas	52

Capítulo 1

Introdução

O livro faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O mesmo aconteceu na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma Moodle de Cultura e Extensão da USP.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Bruno Holanda [2], do Prof. Rodrigo Pinheiro [34] e do Prof. Cícero Thiago [38]. Também serviram como referência os livros de Geometria [28] e Geometria Analítica [1] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

O texto conta com 39 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, links para os gráficos interativos são disponibilizados em páginas do [GeoGebra](#). Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube.

A discussão é organizada em cinco capítulos: Ida do Teorema de Pitágoras; Volta do Teorema de Pitágoras; Equação Pitagórica Diofantina; Problemas e aplicações; Além do Teorema de Pitágoras. São apresentadas sete demonstrações, as duas últimas encontram-se como corolários da Generalização de Pappus e do Teorema de Ptolomeu. Mas sem a pretensão de esgotar o tema.

O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa.

Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contra partida, na versão impressa tradicional o aprendiz precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma

resolução.

O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movimentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes.

Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendizado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar e buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

Quatro livros eletrônicos gratuitos com as notas de aulas do curso Geometria Olímpica com GeoGebra estão disponíveis em [10], [11], [12] e [5]. Também foram publicados quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [6], [7], [8] e [9]. Outros trabalhos da área de Matemática são [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [3], [20], [22], [23], [24], [25], [35], [21], [36] e [4].

Capítulo 2

Ida do Teorema de Pitágoras

Pitágoras de Samos foi um filósofo grego que fez importantes desenvolvimentos na matemática, astronomia e teoria da música. O teorema que leva seu nome era conhecido pelos babilônios 1000 anos antes, mas ele pode ter sido o primeiro a prová-lo. Acredita-se que nasceu por volta do ano 570 antes de Cristo e morreu por volta do ano 490 antes de Cristo [33].

Teorema 1 (Ida de Pitágoras). *Sejam o $\triangle ABC$, retângulo em A , e $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Então vale que:*

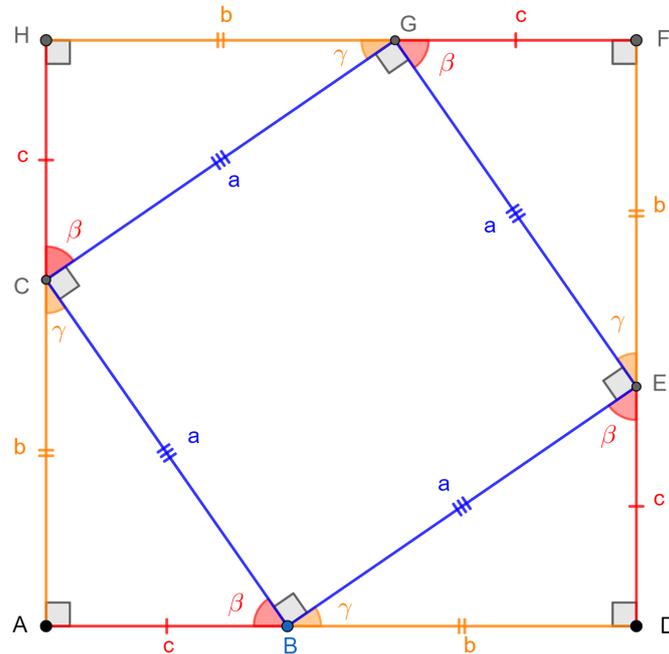
$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{2.0.1}$$

Nas próximas seções serão apresentadas cinco demonstrações. Outras duas demonstrações encontram-se no Capítulo 6 como corolários da Proposição 12 (Pappus) e do Teorema 14 (Ptolomeu).

2.1 Área de quadrado calculada de duas formas

Demonstração 1 do Teorema 1. A Figura 2.1 será utilizada como referência.

Figura 2.1: Referência para a demonstração 1 do Teorema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Devido ao $\triangle ABC$ ser retângulo em A tem-se que $\angle B + \angle C = \beta + \gamma = 90^\circ$. Adicionalmente, por construção, vale que:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEB \cong \triangle FGE \cong \triangle HCG.$$

Segue que:

$$\angle BCG = \angle CGE = \angle GEB = \angle EBC = 90^\circ.$$

Logo, o quadrilátero $BCGE$ é um quadrado de lado a .

Existem duas formas para calcular a área do quadrado $ADFH$. Uma diretamente como o quadrado do lado $b + c$ e a segunda como a soma das áreas de quatro triângulos idênticos e a do quadrado $BCGE$:

$$(b + c)^2 = 4 \left(\frac{bc}{2} \right) + a^2.$$

Desenvolvendo e simplificando encontra-se:

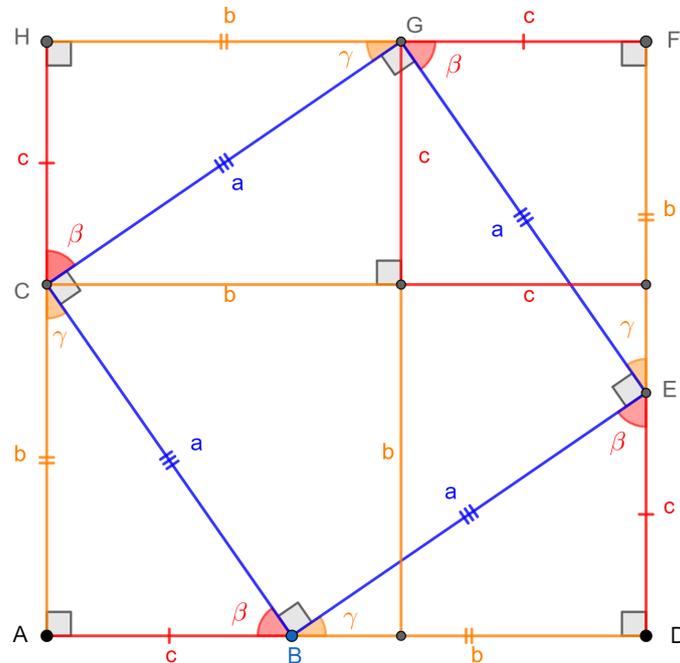
$$2bc + b^2 + c^2 = 2bc + a^2, \tag{2.1.1}$$

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

O quadrado $ADFH$ também pode ser dividido em dois retângulos de lados b e c e dois

quadrados, um de lado b e outro de lado c . Isto corresponde-se com o lado esquerdo da equação (2.1.1) e pode ser verificado na Figura 2.2.

Figura 2.2: Outra divisão possível na demonstração 1 do Teorema 1. Versão interativa [aqui](#).



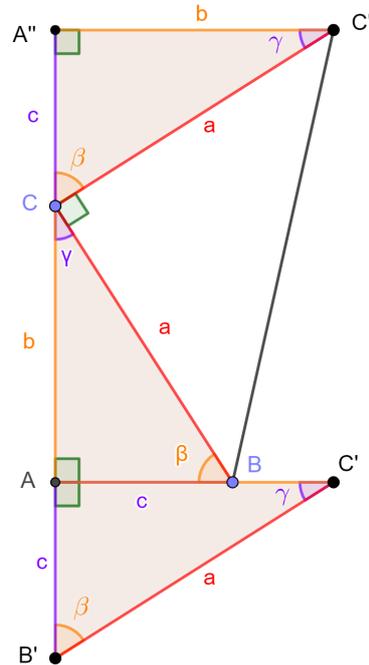
Fonte: O autor.

□

2.2 Área de trapézio

Demonstração 2 do Teorema 1. A Figura 2.3 será utilizada como referência.

Figura 2.3: Referência para a demonstração 2 do Teorema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Inicia-se girando o $\triangle ABC$, em torno ao vértice A , 90° em sentido horário. Isto gera o $\triangle A'B'C'$, onde os pontos A' e A são coincidentes.

A seguir o $\triangle A'B'C'$ é deslocado uma distância $b+c$ na direção da reta AC e de tal forma que o ponto B'' , do $\triangle A''B''C''$, coincida com o vértice C . Por construção, os três triângulos são congruentes e suas áreas iguais:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C'',$$

$$[ABC] = [A'B'C'] = [A''B''C''].$$

Adicionalmente, do $\triangle ABC$ tem-se $\beta + \gamma = 90^\circ$ e $\angle ACA'' = 180^\circ$, então $\angle BCC'' = 90^\circ$.

Considera-se o trapézio retângulo $ABC''A''$. Sua área pode ser calculada de duas formas.

1) Como a soma das áreas de três triângulos:

$$[ABC''A''] = [ABC] + [A''B''C''] + [BCC''] = 2\frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2}.$$

2) Pela fórmula da semi-soma das bases vezes a altura:

$$[ABC''A''] = \left(\frac{b+c}{2}\right)(b+c) = \frac{b^2 + c^2 + 2bc}{2}.$$

Comparando as duas equações anteriores o resultado segue:

$$\frac{2bc + a^2}{2} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc}{2},$$

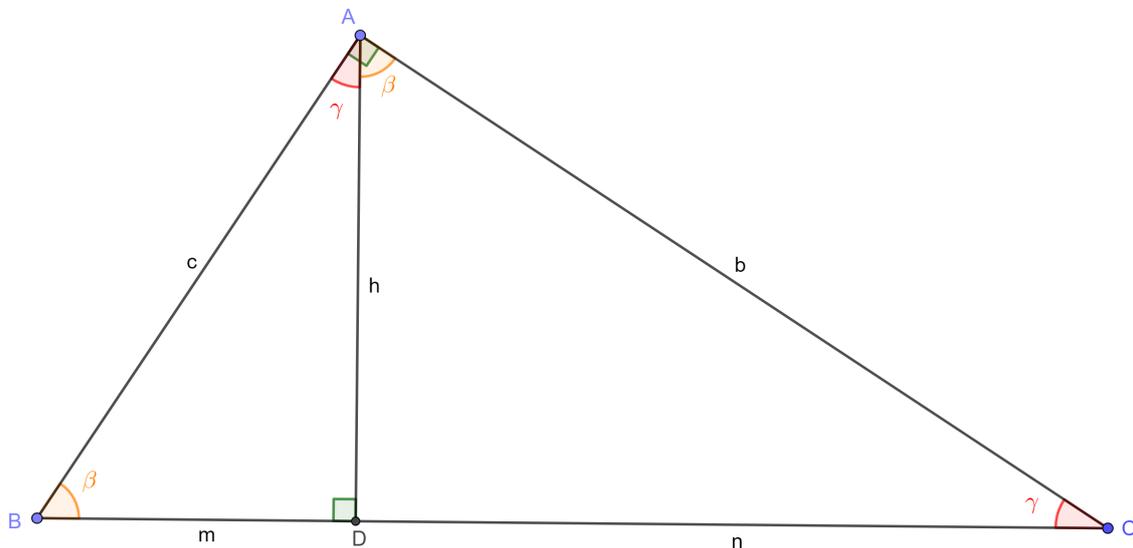
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

□

2.3 Semelhança de triângulos. Relações métricas.

Demonstração 3 do Teorema 1. A Figura 2.4 será utilizada como referência.

Figura 2.4: Referência para a demonstração 3 do Teorema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja AD a altura relativa ao vértice A do $\triangle ABC$, retângulo em A . Sejam $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $BD = m$, $DC = n$ e $AD = h$. Segue que $a = m + n$, $\angle DAC = \beta$, $\angle DAB = \gamma$ e $\beta + \gamma = 90^\circ$. Pelo critério de semelhança **AA** obtêm-se:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA,$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC,$$

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC.$$

Consequentemente valem as proporcionalidades entre os lados:

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{h} = \frac{a}{c}, \quad (2.3.1)$$

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{n} = \frac{a}{b}, \quad (2.3.2)$$

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} = \frac{c}{b}. \quad (2.3.3)$$

De (2.3.2) e (2.3.1) encontra-se:

$$b^2 = n \cdot a, \quad (2.3.4)$$

$$c^2 = m \cdot a. \quad (2.3.5)$$

Em palavras, cateto ao quadrado é igual ao produto da sua projeção pela hipotenusa. Somando (2.3.4) e (2.3.5) chega-se na equação do Teorema de Pitágoras:

$$b^2 + c^2 = n \cdot a + m \cdot a = (n + m)a = a^2.$$

□

Adicionalmente, de (2.3.3) mostra-se que h é a média geométrica do produto das projeções:

$$h^2 = m \cdot n \Leftrightarrow h = \sqrt{m \cdot n}. \quad (2.3.6)$$

Finalmente, de (2.3.1) encontra-se que a hipotenusa vezes a altura é igual ao produto dos catetos:

$$a \cdot h = b \cdot c. \quad (2.3.7)$$

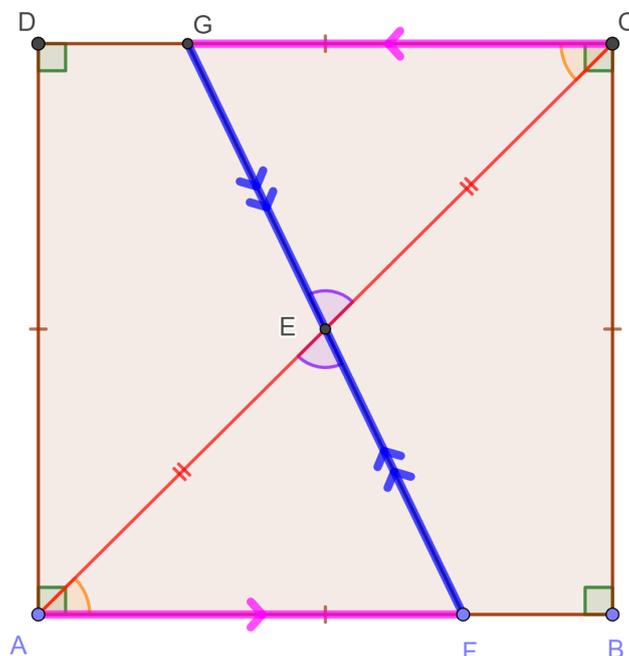
Coletivamente as equações (2.3.4), (2.3.5), (2.3.6), (2.3.7) e (2.0.1) são conhecidas como relações métricas do triângulo retângulo.

2.4 Demonstração do Perigal

Henry Perigal era balconista, corretor da bolsa, matemático amador e astrônomo. Ele é conhecido por sua produção mecânica de curvas geométricas, por sua prova de dissecação do teorema de Pitágoras e por suas ideias pouco ortodoxas sobre astronomia. Acredita-se que nasceu no ano 268 e morreu em 190 antes de Cristo [32].

Lema 2 (Para a demonstração do Perigal). *Seja um quadrado $ABCD$, o ponto $E = AC \cap BD$ seu centro, um ponto $F \in AB$ e o ponto $G = FE \cap CD$ (Figura 2.5). Então $FE = EG$.*

Figura 2.5: Referência para a demonstração do Lema 2. Versão interativa [aqui](#).



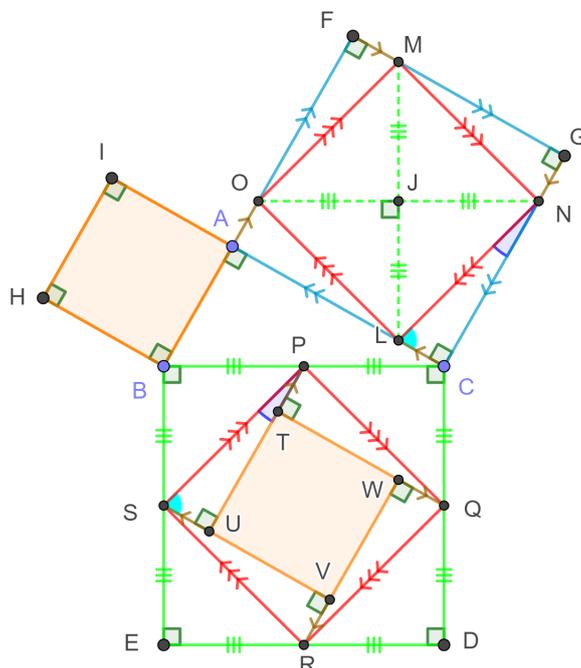
Fonte: O autor.

Demonstração. É construída a diagonal AC . Como E é o centro segue que $AE = EC$. Adicionalmente, por alternos entre paralelas, $\angle EAF = \angle ECG$ e, por opostos pelo vértice, $\angle AEF = \angle CEG$. Logo pelo critério de congruência ALA encontra-se $\triangle AEF \equiv \triangle CEG$. Com isso, $FE = EG$ e $AF = CG$. \square

O resultado anterior pode ser generalizado para qualquer paralelogramo, o quadrilátero $ABCD$ não precisa ser quadrado.

Demonstração 4 do Teorema 1. Suponha-se, sem perda de generalidade, que o lado AC seja o cateto de maior medida. Construir externamente ao $\triangle ABC$ os quadrados $BCDE$, $CAFG$ e $ABHI$ (Figura 2.6). Determinar o ponto $J = CF \cap AG$. Por J traçar uma perpendicular a BC e marcar os pontos K , L e M na interseção desta com BC , CA e FG , respectivamente. Adicionalmente, por J traçar uma perpendicular a LM e marcar os pontos N e O na interseção desta com CG e AF , respectivamente.

Figura 2.7: Divisão do quadrado $BCDE$. Perigal, demonstração 4 do Teorema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Por construção, o quadrilátero $BCNO$ é um paralelogramo. De fato, $\angle BAC = \angle ACN = 90^\circ$ implica que $BO \parallel CN$. Segue que $BO = CN$. Logo,

$$BA + AO = c + AO = CN = CG - NG = AC - AO = b - AO,$$

$$2AO = b - c,$$

$$AO = \frac{b - c}{2},$$

$$OF = \frac{b + c}{2}.$$

Com isto, $OF - AO = c$.

Por outro lado, como J é ponto médio de ON vale que:

$$JN = JL = BP = BS.$$

De $\angle LJN = \angle SBP = 90^\circ$, pelo critério de congruência **LAL**, tem-se:

$$\triangle LJN \cong \triangle SBP.$$

Ou seja, $LN = SP$. Adicionalmente, como $LJ \parallel SB$ e $JN \parallel BP$ então $LN \parallel SP$.

Por serem ângulos formados por respectivas paralelas segue:

$$\angle LNC = \angle SPU,$$

$$\angle NLC = \angle PSU.$$

Pelo critério de congruência ALA tem-se:

$$\triangle LNC \equiv \triangle SPU.$$

Com isto $SU = LC$, $UP = CN$ e $\angle SUP = \angle LCN = 90^\circ$. Portanto, o quadrilátero $SBPU$ é congruente com $LJNC$. Analogamente, o quadrilátero $PCQT$ é congruente com $OJLA$, $QDRW$ com $MJOF$ e $RESV$ com $NJMG$.

Verifica-se também que $UT = TW = WV = VU = c$. Ou seja, o quadrado $ABHI$ é congruente com $WVUT$. Portanto,

$$[ACGF] + [ABHI] = [BCDE],$$

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

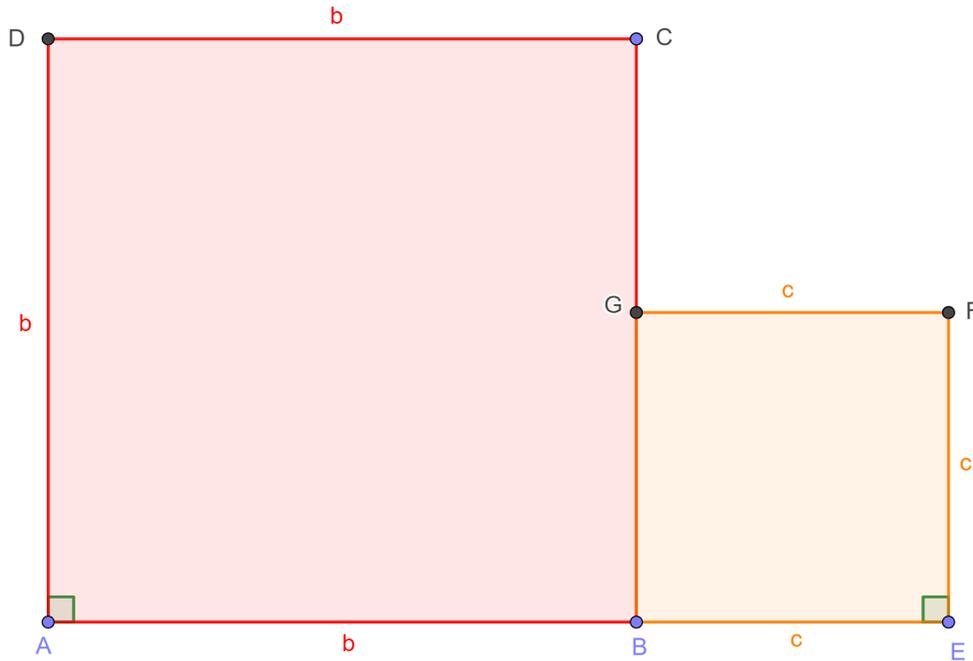
□

2.5 Demonstração de Airy

George Biddell Airy foi professor Lucasiano em Cambridge e Astrônomo Real. A Cátedra Lucasiana de Matemática é um dos mais prestigiados cargos acadêmicos no mundo e seus antigos titulares incluem Isaac Newton, Charles Babbage, George Stokes, Joseph Larmor, Paul Dirac e Stephen Hawking. Airy fez muitas contribuições importantes para a matemática e astronomia. Nasceu no ano 1801 e morreu em 1892 [29].

Demonstração 5 do Teorema 1. Inicialmente consideram-se os quadrados $ABCD$ e $BEFG$ de lados b e c , respectivamente (Figura 2.8).

Figura 2.8: Construção inicial da demonstração 5 do Teorema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

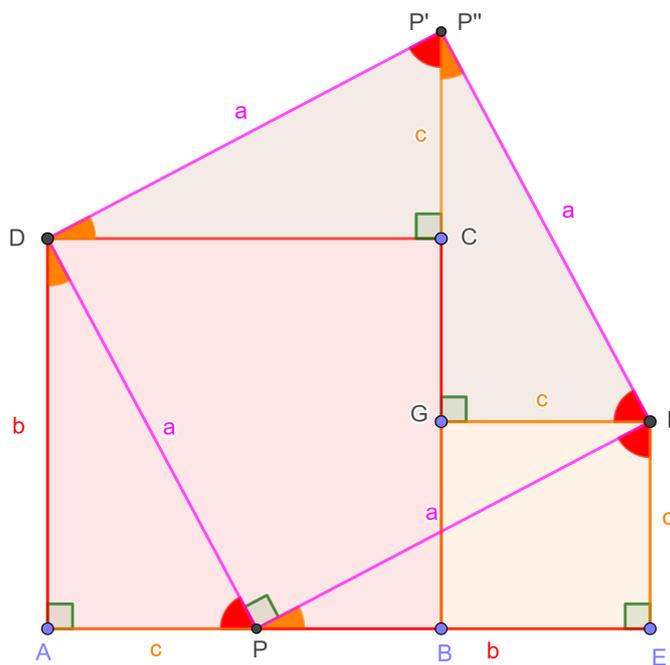
Sobre o segmento AE coloca-se um ponto P tal que $AP = c$ e $PE = b$ (Figura 2.9). Pelo critério de congruência **LAL** segue que $\triangle ADP \cong \triangle EPF$. Sejam $DP = PF = a$. Dado que os triângulos anteriores são retângulos e o ângulo raso APE , encontra-se que $\angle DPF = 90^\circ$.

Gira-se o $\triangle DAP$, em sentido anti-horário, 90° respeito ao vértice D e rotaciona-se o $\triangle DAP$, em sentido horário, 90° relativo ao ponto F . Os pontos P' e P'' , imagens de P , são coincidentes. A imagem de A é C e de E é G .

Verifica-se que o quadrilátero $PF P'D$ é um quadrado de lado a . Comparando as áreas deste último com os dois quadrados iniciais chegasse em:

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Figura 2.9: Construção final da demonstração 5 do Teorema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

□

Outras demonstrações podem ser encontradas em [26].

Capítulo 3

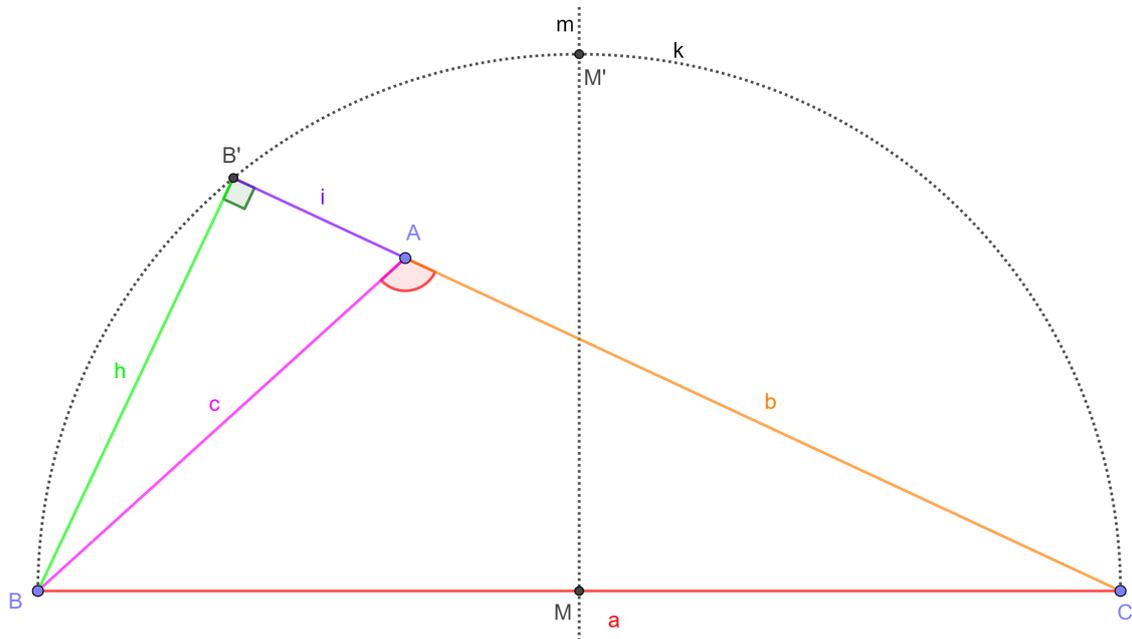
Volta do Teorema de Pitágoras

Teorema 3. *Sejam o $\triangle ABC$ com $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então vale que o $\triangle ABC$ é retângulo em A . Isto é, $\hat{A} = 90^\circ$.*

Demonstração. Da hipótese $a^2 = b^2 + c^2$ segue que $a > b$ e $a > c$. Ou seja, a é o maior dos lados. Será suposto, sem perda de generalidade, que $b \geq c > 0$. Como ao maior lado de um triângulo é oposto o maior ângulo vale que $\hat{A} > \hat{B} \geq \hat{C}$. Suponha-se, por absurdo, que $\hat{A} \neq 90^\circ$. Deve-se discutir dois casos: a) $\hat{A} > 90^\circ$ e b) $\hat{A} < 90^\circ$.

a) Caso $\hat{A} > 90^\circ$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então $\hat{C} \leq \hat{B} < 90^\circ$. Na versão interativa da Figura 3.1 é traçado o semicírculo k determinado pelo lado BC e a mediatriz m . Sejam os pontos $M = BC \cap m$ e $M' = k \cap m$. O ponto A é posicionado no interior do setor circular $M'MB$. Isto garante que o $\triangle ABC$ seja obtusângulo.

Figura 3.1: Caso $\hat{A} > 90^\circ$ da volta do Teorema de Pitágoras. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Prolonga-se o lado AC . Seja o ponto $B' \in AC$ a projeção ortogonal do vértice B . Sejam $BB' = h$ e $B'A = i$. Pelo Teorema 1 (Ida de Pitágoras) aplicado aos triângulos $BB'A$ e $BB'C$ segue:

$$c^2 = h^2 + i^2,$$

$$a^2 = h^2 + (i + b)^2.$$

Subtraindo as duas equações anteriores e simplificando encontra-se:

$$a^2 - c^2 = (i + b)^2 - i^2 = 2ib + b^2.$$

Mas, por hipótese, vale $a^2 = b^2 + c^2$. Logo, $2ib = 0$. Como $b > 0$ chega-se em $i = 0$. Isto é uma contradição, pois neste caso o ponto B' não estaria no exterior do lado AC e $B' = A$.

b) Caso $\hat{A} < 90^\circ$. De $a > b \geq c$ vale que $\hat{C} \leq \hat{B} < \hat{A} < 90^\circ$ e o $\triangle ABC$ é acutângulo. O ponto A deve ser posicionado entre os arcos de circunferência MBM' (parte de k), CBM'' (parte de k') e o segmento $M'M''$ (Figura 3.2).

Capítulo 4

Equação Pitagórica Diofantina

Quer-se encontrar todas as soluções inteiras da forma (x, y, z) da equação Pitagórica:

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (4.0.1)$$

A equação anterior equivale a procurar triângulos retângulos com lados inteiros positivos. Serão seguidos os passos da demonstração em [27].

Existem soluções para inteiros negativos, para isso basta trocar o sinal, na solução de inteiros positivos (x, y, z) , para pelo menos uma das coordenadas negativas. Exemplos: $(-x, y, z)$, $(-x, y, -z)$, etc. Pelo fato de todos os somandos estarem ao quadrado a igualdade é mantida. Existem também as soluções em que alguma das coordenadas é nula. Isto é, $(0, y, \pm y)$, $(x, 0, \pm x)$ e $(0, 0, 0)$. No que segue estuda-se somente quando $x, y, z \in \mathbb{N}$, $x, y, z > 0$.

Suponha-se que $\text{mdc}(x, y, z) = d > 1$, então $\text{mdc}(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}) = \text{mdc}(x', y', z') = 1$. Caso (x', y', z') seja uma solução de (4.0.1) a tripla $(d \cdot x', d \cdot y', d \cdot z') = (x, y, z)$ também o será. Neste ponto o problema passa a ser encontrar as soluções de:

$$x'^2 + y'^2 = z'^2, \quad (4.0.2)$$

com x' , y' e z' primos entre si.

Se $\text{mdc}(y', z') = r > 1$, então $r^2 | z'^2 - y'^2$. De (4.0.2) tem-se $r^2 | x'^2$ e segue que $r | x'$. Absurdo, pois $\text{mdc}(x', y', z') = 1$. Logo, $\text{mdc}(y', z') = 1$. Analogamente se mostra que $\text{mdc}(x', z') = 1$. Em particular, o resultado anterior significa que se x' ou y' é par, então z' é ímpar.

Se x' e y' fossem pares simultaneamente, então na ordem x'^2 , y'^2 , $x'^2 + y'^2$, z'^2 e z' seriam pares. Contradição, pois $\text{mdc}(x', y', z') = 1$.

Por outro lado, se x' e y' fossem ímpares simultaneamente, então teriam a forma $x' = 2n+1$ e $y' = 2m+1$ para $n, m \in \mathbb{N}$. Com isto,

$$x'^2 = 4n^2 + 4n + 1 \equiv 1 \pmod{4},$$

$$y'^2 = 4m^2 + 4m + 1 \equiv 1 \pmod{4}.$$

De (4.0.2) teria-se que $z'^2 \equiv 2 \pmod{4}$. Mas nenhum número inteiro ao quadrado deixa resto 2 na divisão por 4 (quadrado de número par deixa resto 0 e quadrado de número ímpar deixa resto 1).

Logo, entre x' e y' existe um par e um ímpar. E como tinha-se visto z' deve ser ímpar. No que segue será suposto, sem perda de generalidade, que x' é ímpar e y' é par:

$$x' = 2n + 1, y' = 2m, z' = 2r + 1, \quad (4.0.3)$$

para $n, m, r \in \mathbb{N}$.

Reescreve-se (4.0.2) como

$$\begin{aligned} x'^2 &= z'^2 - y'^2, \\ x'^2 &= (z' + y')(z' - y'). \end{aligned} \quad (4.0.4)$$

Se $\text{mdc}(z' + y', z' - y') = d > 1$, então

$$\begin{aligned} d|(z' + y') + (z' - y') &= 2z', \\ d|(z' + y') - (z' - y') &= 2y'. \end{aligned}$$

Segue que:

$$d|\text{mdc}(2y', 2z') = 2\text{mdc}(y', z') = 2.$$

Isto é, $d = 2$ ou $d = 1$. Mas tem-se de (4.0.3) que tanto $z' + y'$ como $z' - y'$ são ímpares:

$$\begin{aligned} z' + y' &= 2(r + m) + 1, \\ z' - y' &= 2(r - m) + 1. \end{aligned}$$

Ou seja, $d \neq 2$ e $\text{mdc}(z' + y', z' - y') = 1$.

O resultado anterior e (4.0.4) implicam que $z' + y'$ e $z' - y'$ são quadrados perfeitos. Quando um quadrado perfeito é o produto de dois primos entre si cada um dos primos é um quadrado perfeito. Ou seja, existem $u, v \in \mathbb{N}$, com $u > v$ e $\text{mdc}(u, v) = 1$ tais que:

$$z' + y' = u^2, z' - y' = v^2, x'^2 = u^2v^2. \quad (4.0.5)$$

Adicionalmente, como $z' + y'$ e $z' - y'$ são ímpares deve-se ter que u e v também são ímpares. Resolvendo o sistema em (4.0.5) encontra-se:

$$x' = uv, y' = \frac{u^2 - v^2}{2}, z' = \frac{u^2 + v^2}{2}. \quad (4.0.6)$$

Resumindo parcialmente, as soluções de (4.0.2) podem ser escritas utilizando (4.0.6):

$$\boxed{\begin{aligned} (x', y', z') &= \left(uv, \frac{u^2 - v^2}{2}, \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \\ u, v &\in \mathbb{N}; u, v \text{ ímpares}; u > v; \text{mdc}(u, v) = 1. \end{aligned}} \quad (4.0.7)$$

Alternativamente, podem ser definidos $a, b \in \mathbb{N}$ tais que:

$$a = \frac{u + v}{2}, b = \frac{u - v}{2}. \quad (4.0.8)$$

Segue que $\text{mdc}(a, b) = 1$. Resolvendo o sistema (4.0.8) tem-se:

$$u = a + b, v = a - b. \quad (4.0.9)$$

Como $a + b$ é ímpar, os números a e b tem paridades distintas. Substituindo (4.0.9) em (4.0.7) encontra-se uma segunda forma de escrever as soluções de (4.0.2):

$$\boxed{\begin{aligned} (x', y', z') &= (a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2), \\ a, b &\in \mathbb{N}; a + b \text{ ímpar}; a > b; \text{mdc}(a, b) = 1. \end{aligned}} \quad (4.0.10)$$

4.1 Trinca primitiva para um ímpar dado

As trincas primitivas com todos os números naturais ímpares, a partir de 3, podem ser encontradas colocando $v = 1$ e $u = 2n + 1, \forall n \geq 1$ em (4.0.7):

$$(x', y', z') = (2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1).$$

4.2 Trinca primitiva para um múltiplo de quatro dado

As trincas primitivas com todos os números naturais múltiplos de 4, a partir de 4, podem ser encontradas colocando $b = 1$ e $a = 2n, \forall n \geq 1$ em (4.0.10):

$$(x', y', z') = (4n^2 - 1, 4n, 4n^2 + 1).$$

4.3 Área de um triângulo Pitagórico é múltiplo de seis

Utilizando (4.0.10) pode-se calcular a área S de um triângulo retângulo com lados inteiros:

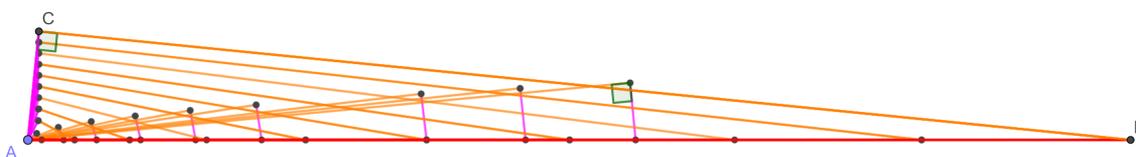
$$S = ab(a^2 - b^2).$$

A mesma é sempre um número inteiro. Colocando $b = 1$ e $a = 2n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$ na equação anterior tem-se:

$$S = 2n(4n^2 - 1) = (2n - 1)2n(2n + 1).$$

Portanto, $2|S$ e, por ser o produto de três números consecutivos, $3|S$. Isto é, $6|S$. A Figura 4.1 ilustra alguns triângulos construídos com trincas pitagóricas.

Figura 4.1: Exemplos de triângulos construídos com trincas pitagóricas. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Capítulo 5

Problemas e aplicações

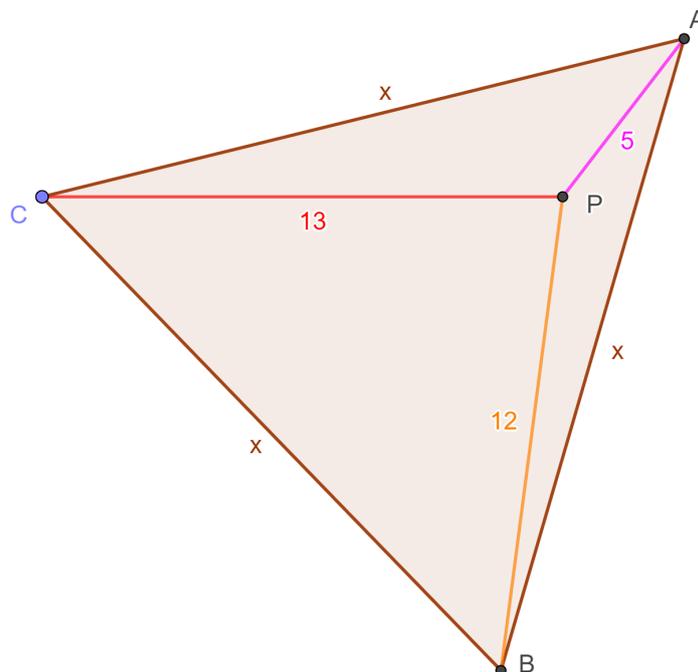
5.1 Fermat, lei dos cossenos, trincas e volta do Teorema de Pitágoras

Problema 1. *O triângulo ABC é equilátero de lado x e P é um ponto no interior do $\triangle ABC$, de tal forma que $PA = 5$, $PB = 12$ e $PC = 13$. Determinar o valor de x .*

5.1.1 Resolução do Problema 1

A Figura 5.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 5.1: Construção geométrica inicial para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Os números 5, 12 e 13 formam uma trinca pitagórica:

$$5^2 + 12^2 = 13^2.$$

Porém, alguma construção geométrica adicional deve ser feita para colocar os lados na configuração de um triângulo. Uma ideia origina-se na demonstração do Ponto de Fermat, discutido na seção 5 em [36].

É feita uma rotação de 60° , em sentido horário, em torno ao vértice A do $\triangle APB$ (Figura 5.2). Com isto o ponto P transforma-se no ponto Q . Como o $\triangle ABC$ é equilátero o segmento AB transforma-se no segmento $AC = AB = x$, $AP = AQ = 5$, $BP = CQ = 12$ e $\angle BAP = \angle CAQ$. Adicionalmente, o $\triangle APQ$ também é equilátero e o segmento $PQ = PA = AQ = 5$.

Pelo Teorema 3 (volta ou recíproca de Pitágoras) o $\triangle PQC$ é retângulo em Q . Segue que $\angle CQA = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

Aplicando-se a Lei dos Cossenos ao $\triangle CQA$ encontra-se:

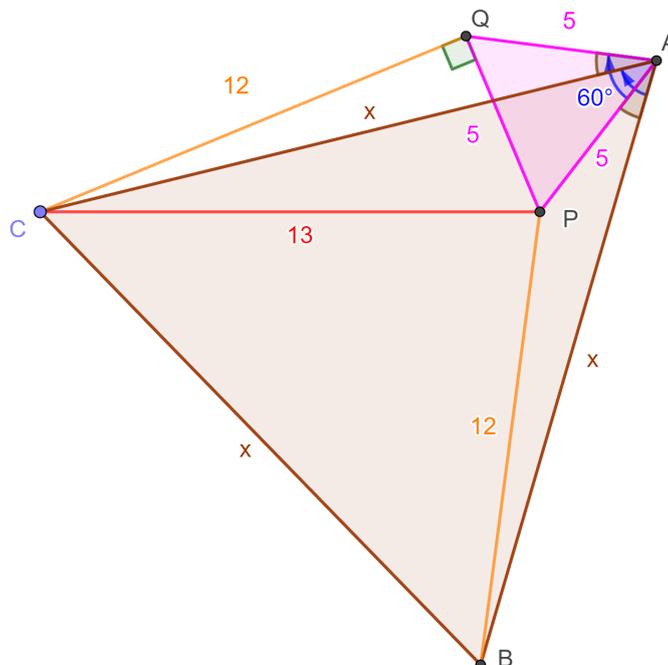
$$x^2 = 5^2 + 12^2 - 2 \cdot 5 \cdot 12 \cos(150^\circ),$$

$$x^2 = 13^2 + 2 \cdot 5 \cdot 12 \cos(60^\circ),$$

$$x^2 = 169 + 120 \cdot \frac{1}{2} = 169 + 60 = 229,$$

$$x = \sqrt{229}.$$

Figura 5.2: Construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

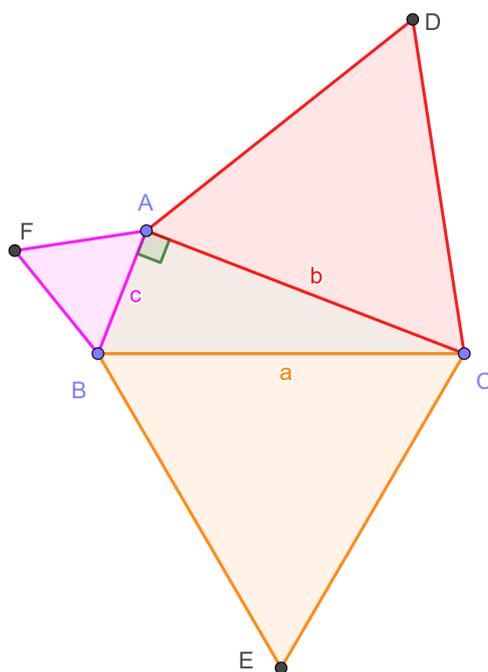
A seguir serão apresentadas algumas aplicações do Teorema de Pitágoras discutidas em [37].

5.2 Pitágoras com triângulos equiláteros

Proposição 4. *Seja o $\triangle ABC$, retângulo em A. A soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos é igual a área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa. Isto é, na Figura 5.3 vale que:*

$$[\triangle ACD] + [\triangle ABF] = [\triangle BCE].$$

Figura 5.3: A soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos é igual a área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Tem-se:

$$[\triangle ACD] + [\triangle ABF] = [\triangle BCE],$$

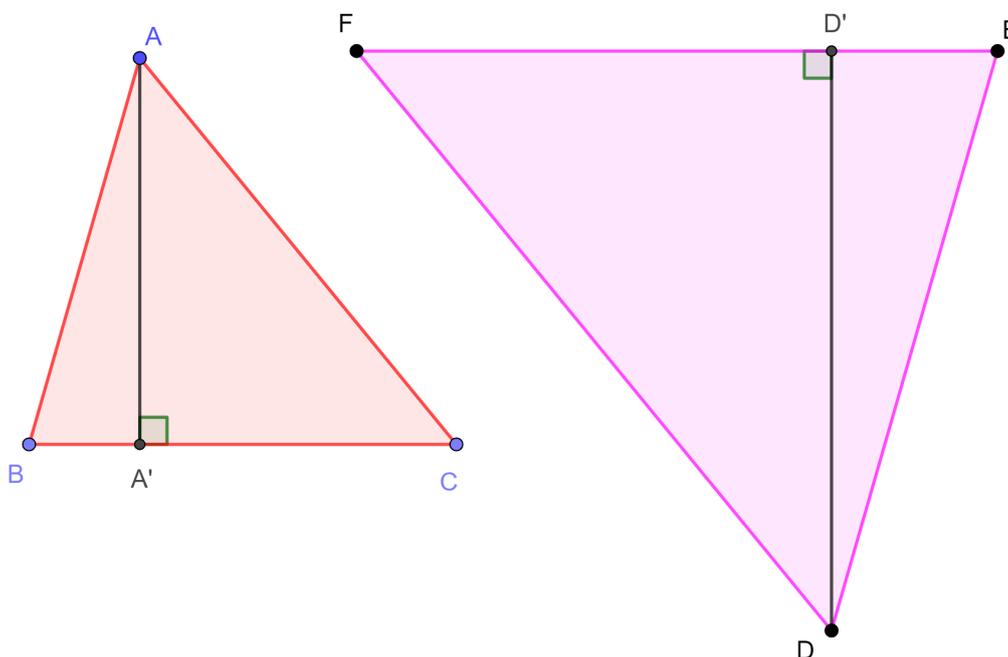
$$\frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

A última equação é verdadeira pelo Teorema 1 (Ida de Pitágoras). \square

5.3 Relação entre as áreas de triângulos semelhantes

Proposição 5. *Se dois triângulos são semelhantes com razão de semelhança k , então a razão das áreas é k^2 .*

Figura 5.4: Relação entre as áreas de triângulos semelhantes. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Demonstração. Por hipótese $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (Figura 5.4). Sejam os pontos A' e D' as projeções ortogonais dos pontos A e D sobre os lados BC e EF , respectivamente. Suponha-se, sem perda de generalidade, que:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AA'}{DD'} = k.$$

Segue que:

$$\frac{[\triangle ABC]}{[\triangle DEF]} = \frac{\frac{BC \cdot AA'}{2}}{\frac{EF \cdot DD'}{2}} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AA'}{DD'} = k^2.$$

□

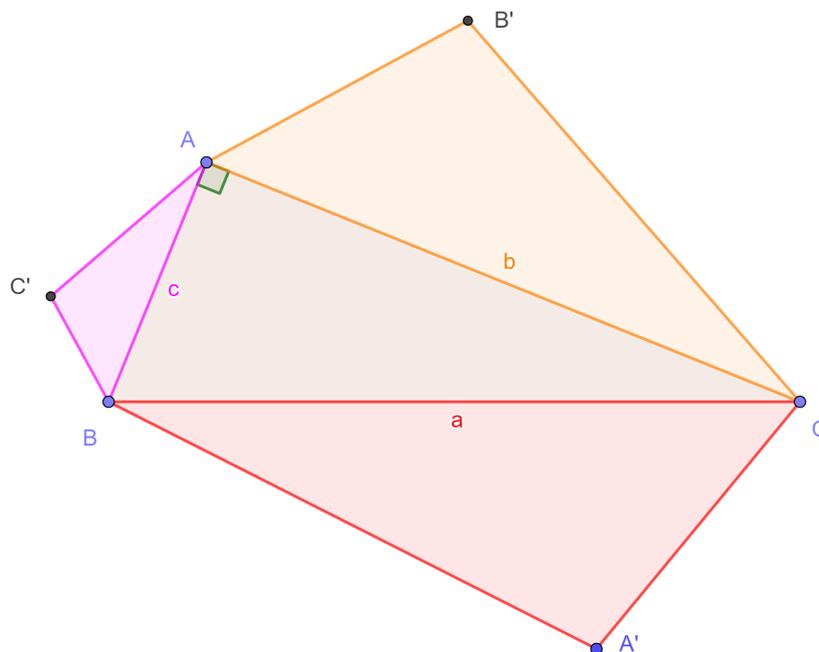
O resultado anterior vale para figuras (não somente triângulos) semelhantes em geral.

5.4 Pitágoras com triângulos semelhantes

Proposição 6. *Seja o $\triangle ABC$, retângulo em A . Construir os pontos A' , B' e C' tais que os triângulos BCA' , CAB' e ABC' sejam semelhantes. Então a área do triângulo construído sobre a hipotenusa BC é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos CA e AB . Isto é, na Figura 5.5 vale que:*

$$[\triangle CAB'] + [\triangle ABC'] = [\triangle BCA'].$$

Figura 5.5: A área do triângulo construído sobre a hipotenusa BC é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos CA e AB . Versão interativa [aqui](#).



Demonstração. Pelo Teorema 1 (Teorema de Pitágoras) vale:

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1.$$

Multiplica-se a equação anterior pela área do $\triangle BCA'$:

$$\frac{b^2}{a^2}[\triangle BCA'] + \frac{c^2}{a^2}[\triangle BCA'] = [\triangle BCA'].$$

Como $\triangle CAB' \sim \triangle BCA'$ e $\triangle ABC' \sim \triangle BCA'$, pela Proposição 5 segue que:

$$[\triangle CAB'] + [\triangle ABC'] = [\triangle BCA'].$$

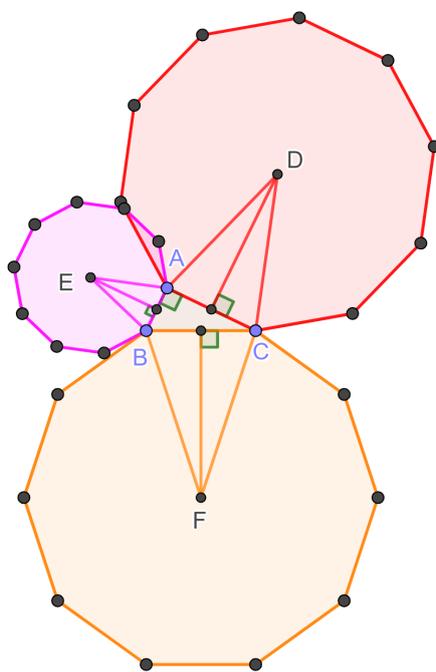
□

5.5 Pitágoras com polígonos regulares

Proposição 7. *A área do polígono regular de n lados, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, construído sobre a hipotenusa de um triângulo ABC , retângulo em A , é igual à soma das áreas dos polígonos regulares de n lados construídos sobre seus catetos CA e AB .*

A Figura 5.6 ilustra o caso $n = 10$.

Figura 5.6: Caso $n = 10$. A área do polígono regular de n lados construído sobre a hipotenusa de um triângulo ABC , retângulo em A , é igual à soma das áreas dos polígonos regulares de n lados construídos sobre seus catetos CA e AB . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Sejam D , E e F os centros dos polígonos regulares construídos sobre os lados CA , AB e BC , respectivamente. As distâncias destes pontos aos lados respectivos (Apótemas), embora dependam de n , são sempre proporcionais a b , c e a com o mesmo fator para um n dado. Com isto, $\forall n \geq 3$ vale que:

$$\triangle ACD \sim \triangle ABE \sim \triangle BCF.$$

Pela Proposição 6 segue:

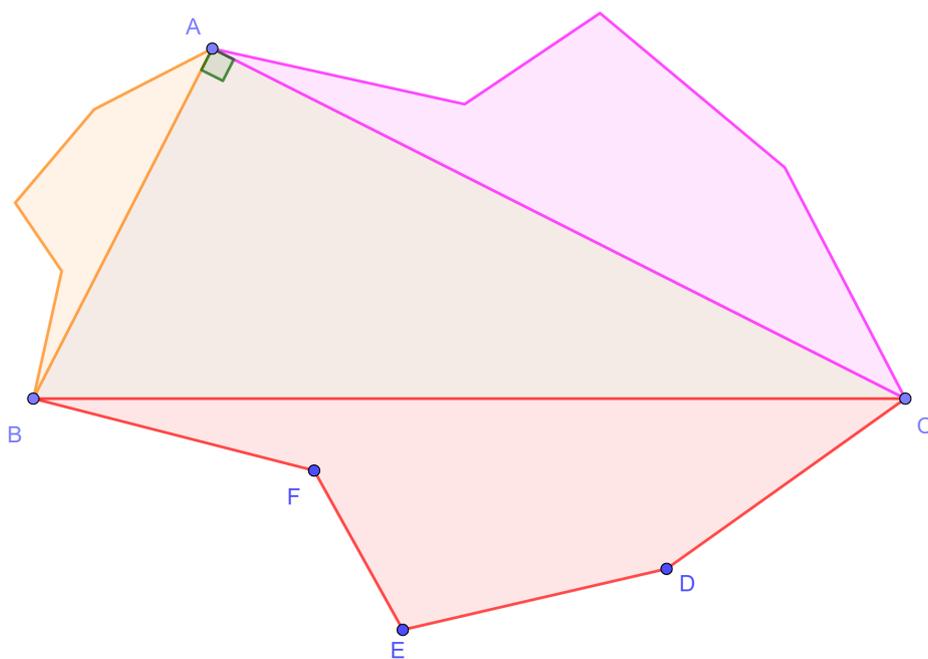
$$[\triangle ACD] + [\triangle ABE] = [\triangle BCF].$$

Resta multiplicar a equação anterior por n , pois um polígono regular de n lados é formado por n triângulos idênticos. \square

5.6 Pitágoras com polígonos semelhantes

Proposição 8. *Seja o $\triangle ABC$, retângulo em A . Construir o polígono $BCDEF$ com base na hipotenusa BC (Figura 5.7). Sobre os catetos CA e AB construir polígonos semelhantes a $BCDEF$ com fator de semelhança $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$, respectivamente. Então, a soma das áreas dos polígonos construídos sobre os catetos é igual a área do polígono construído sobre a hipotenusa.*

Figura 5.7: A soma das áreas dos polígonos construídos sobre os catetos é igual a área do polígono construído sobre a hipotenusa. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Sejam P_b e P_c os polígonos semelhantes a $BCDEF$ construídos sobre os lados CA e AB , respectivamente. Segue:

$$[P_b] + [P_c] = \left(\frac{b}{a}\right)^2 [BCDEF] + \left(\frac{c}{a}\right)^2 [BCDEF],$$

$$[P_b] + [P_c] = \left(\frac{b^2 + c^2}{a^2}\right) [BCDEF],$$

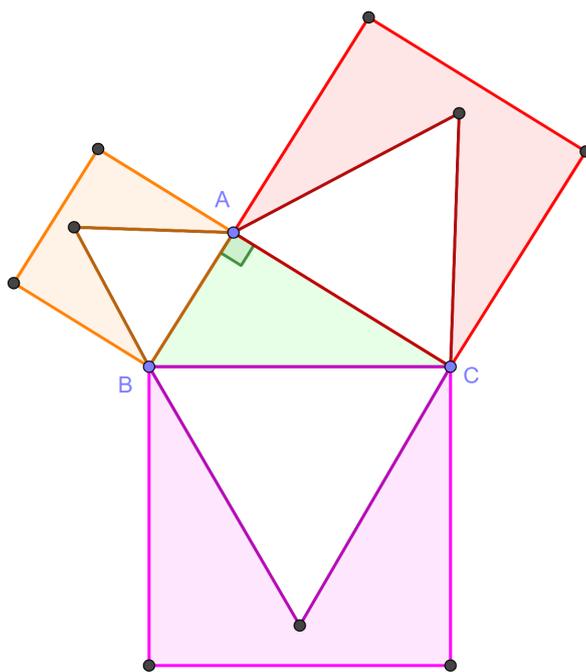
$$[P_b] + [P_c] = [BCDEF].$$

A última passagem decorre do Teorema 1 (Ida de Pitágoras). \square

5.7 Bandeirinhas Pitagóricas

Proposição 9. *Seja o $\triangle ABC$, retângulo em A . Construir quadrados e triângulos equiláteros com base na hipotenusa BC e os catetos CA e AB (Figura 5.8). Considerar os polígonos não convexos resultantes de retirar a área do triângulo equilátero do quadrado (bandeirinhas coloridas). Então, a soma das áreas das bandeirinhas construídas sobre os catetos é igual a área da bandeirinha construído sobre a hipotenusa.*

Figura 5.8: A soma das áreas das bandeirinhas construídas sobre os catetos é igual a área da bandeirinha construído sobre a hipotenusa. Versão interativa [aqui](#).



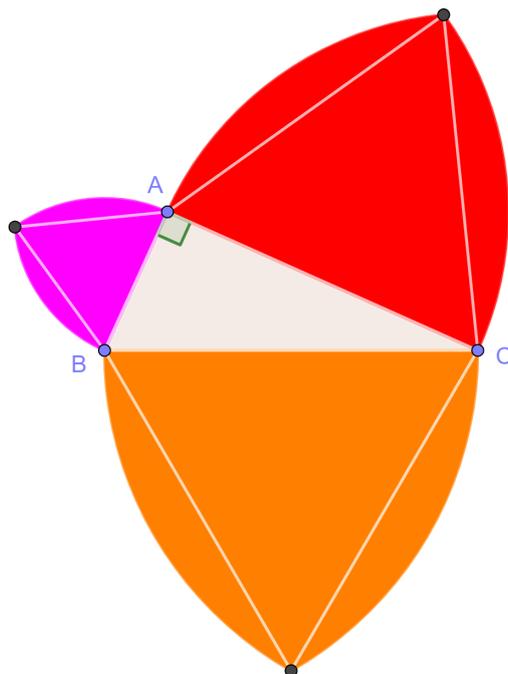
Fonte: O autor.

Demonstração. Pelo Teorema 1 (Ida de Pitágoras) e a Proposição 4 o resultado é válido para quadrados e triângulos equiláteros por separado. Logo, pelas propriedades aditivas das áreas o mesmo também é verdadeiro neste caso. \square

5.8 Ogivas e Pitágoras

Proposição 10. *Seja o $\triangle ABC$, retângulo em A . A soma das áreas das ogivas construídas sobre os catetos é igual a área da ogiva construída sobre a hipotenusa (Figura 5.9).*

Figura 5.9: A soma das áreas das ogivas construídas sobre os catetos é igual a área da ogiva construída sobre a hipotenusa. Versão interativa [aqui](#).

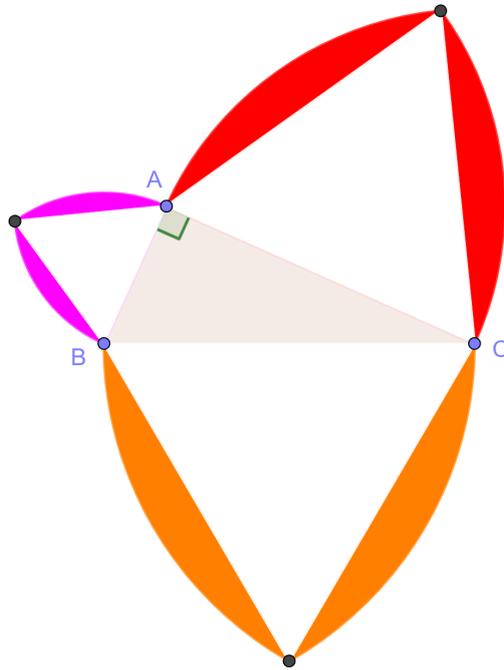


Fonte: O autor.

5.9 Setores circulares e Pitágoras

Proposição 11. *Seja o $\triangle ABC$, retângulo em A . A soma das áreas dos setores circulares construídos sobre os catetos é igual a área dos setores circulares construído sobre a hipotenusa (Figura 5.10).*

Figura 5.10: A soma das áreas dos setores circulares construídos sobre os catetos é igual a área dos setores circulares construído sobre a hipotenusa. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Capítulo 6

Além do Teorema de Pitágoras

6.1 Extensão do Teorema de Pitágoras feita por Pólya

George Pólya foi um cientista prolífico. Trabalhou em probabilidade, análise, teoria dos números, geometria, combinatória e física matemática. Nasceu em 1887 e morreu em 1985 [30].

Definição 1. *Duas figuras Υ e Υ' são semelhantes quando para qualquer par de pontos $A, B \in \Upsilon$ existem $A', B' \in \Upsilon'$ e a fração $\frac{AB}{A'B'}$ é constante.*

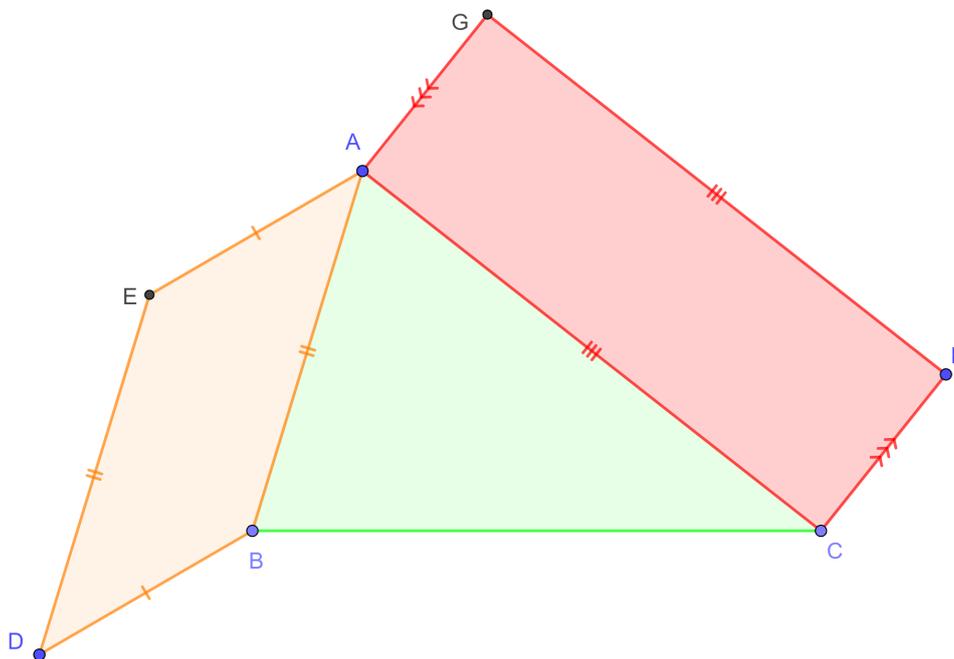
Pólya demonstrou que qualquer construção de figuras semelhantes (polígonos semelhantes são um caso particular) feitas sobre a hipotenusa e os catetos satisfaz o padrão pitagórico da soma das áreas [37].

6.2 Generalização de Pappus

Pappus de Alexandria foi um dos grandes geômetras gregos e um de seus teoremas é citado como base da geometria projetiva moderna. Escreveu comentários sobre os Elementos de Euclides e o Almagesto de Ptolomeu. Acredita-se que nasceu em 290 e morreu em 350 antes de Cristo [31].

Proposição 12 (Pappus). *Seja o $\triangle ABC$, não necessariamente retângulo. Sobre dois de seus lados são construídos dois paralelogramos quaisquer $ABDE$ e $ACFG$ (Figura 6.1). Então é possível construir sobre o outro lado desse triângulo, um terceiro paralelogramo $BCIH$ cuja área seja igual à soma das áreas dos outros dois já construídos.*

Figura 6.1: Construção inicial da generalização de Pappus. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Sejam os pontos $M = DE \cap FG$ e $N = MA \cap BC$ (Figura 6.2). Sobre a reta MA marca-se o ponto P tal que $MA = NP$. Construir uma reta l passando por P e paralela a BC , e as retas r e s passando por B e C e paralelas à reta MA . Sejam os pontos $H = r \cap l$, $I = s \cap l$, $J = r \cap DE$ e $K = s \cap FG$.

Será mostrado que o paralelogramo $BCIH$ satisfaz as condições do enunciado da Proposição 12. Isto é,

$$[ABDE] + [ACFG] = [BCIH] = [BNPH] + [NCIP].$$

Por estarem entre pares de retas paralelas vale que $\angle DBJ = \angle EAM$ e $JB = MA$. Analogamente, $\angle FCK = \angle GAM$ e $KC = MA$. Pelo critério de congruência LAL vale que:

$$\triangle DBJ \equiv \triangle EAM,$$

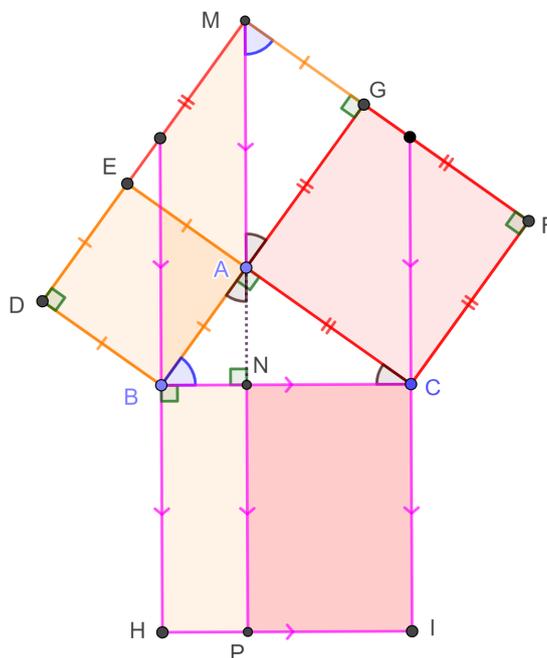
$$\triangle FCK \equiv \triangle GAM.$$

Portanto,

$$[ABDE] = [ABJM],$$

$$[ACFG] = [ACKM].$$

Figura 6.3: Teorema 1 (Ida de Pitágoras) é um caso particular da Proposição 12 (Pappus). Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Pela Proposição 12 (Pappus) o quadrilátero $BCIH$ já é um paralelogramo. Quer-se mostrar que, com as hipóteses dadas neste Corolário, $BCIH$ é um quadrado. Para isso deve-se provar: a) $BC = BH$ e b) $\angle HBC = 90^\circ$.

a) $BC = BH$.

Por construção, $AEMG$ é um retângulo e os triângulos GAM e ACB são congruentes. Assim, $BC = AM$ e como, por construção, $NP = AM$, segue que $NP = BH = BC$.

b) $\angle HBC = 90^\circ$.

Tem-se $\angle BAN = \angle MAG$ (opostos pelo vértice) e $\angle ABN = \angle GMA$ ($\triangle GAM \equiv \triangle ACB$). Logo, $\angle ANB = \angle AGM = 90^\circ$. Como os ângulos BNP e ANB são suplementares, segue que $BNP = 90^\circ$. Por construção, $BH \parallel CI \parallel NP$, portanto, pode-se concluir que o paralelogramo $BCIH$ é um quadrado. \square

O Teorema 1 (Ida de Pitágoras) também é um caso particular do Teorema de Ptolomeu.

6.3 Teorema de Ptolomeu

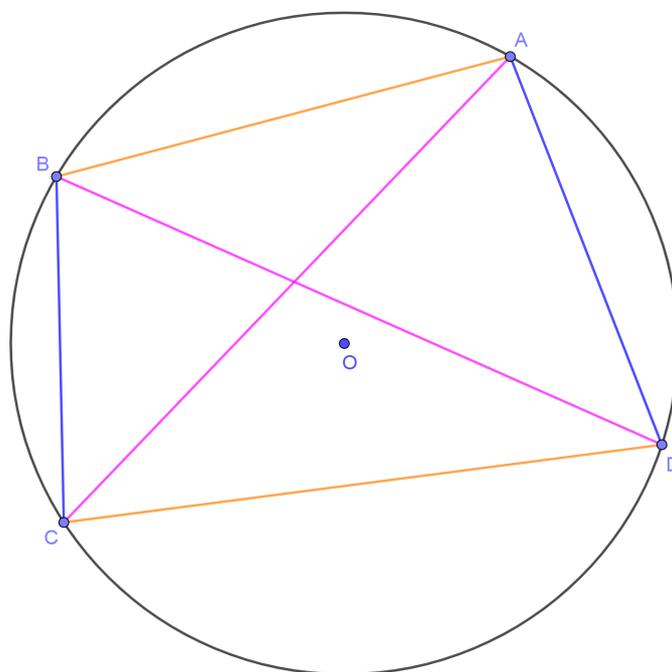
Definição 2. Um quadrilátero é dito inscritível ou cíclico quando seus quatro vértices pertencem a uma mesma circunferência.

Teorema 14 (Teorema de Ptolomeu). *Em um quadrilátero inscritível $ABCD$ o produto dos comprimentos das diagonais é igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos (Figura 6.4). Isto é, vale*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \quad (6.3.1)$$

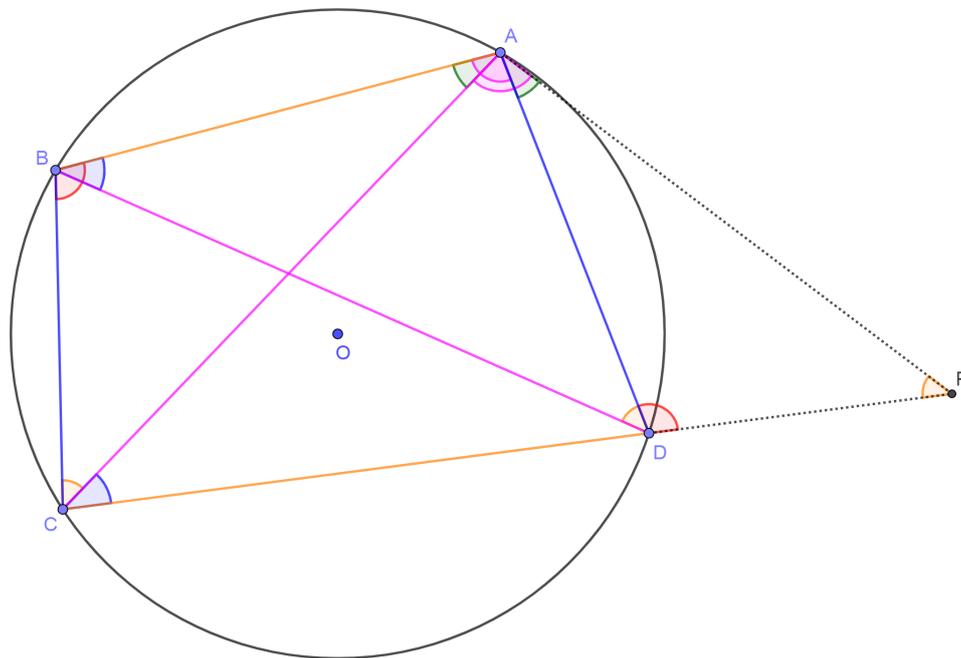
A forma recíproca também é verdadeira. Se (6.3.1) for verdade para o quadrilátero convexo $ABCD$, então ele é inscritível.

Figura 6.4: Enunciado do Teorema de Ptolomeu. Para um quadrilátero ser inscritível o produto dos comprimentos das diagonais deve ser igual à soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos e vice-versa. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. i) Forma direta do Teorema de Ptolomeu. Suponha-se que $ABCD$ seja um quadrilátero inscritível. Tem-se que $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. Estende-se a reta CD e coloca-se o ponto $P \in CD$, tal que $\angle BAC = \angle PAD$ (Figura 6.5).

Figura 6.5: Demonstração da forma direta do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Como $\angle ADP + \angle ADC = 180^\circ$ segue que $\angle ABC = \angle ADP$. Logo,

$$\triangle ABC \sim \triangle ADP,$$

pelo critério de semelhança ângulo-ângulo. Consequentemente:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DP} = \frac{AC}{AP} \Rightarrow DP = \frac{AD \cdot BC}{AB}. \quad (6.3.2)$$

Adicionalmente, $\angle BAD = \angle PAC$, pois $\angle DAC$ é comum aos dois anteriores, e $\angle ABD = \angle ACD$, devido a "enxergarem", a mesma corda AD . Com isto

$$\triangle ABD \sim \triangle ACP,$$

pelo critério de semelhança ângulo-ângulo. Segue que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AP} = \frac{BD}{CP} \Rightarrow CP = \frac{AC \cdot BD}{AB}. \quad (6.3.3)$$

De (6.3.2) e (6.3.3) tem-se

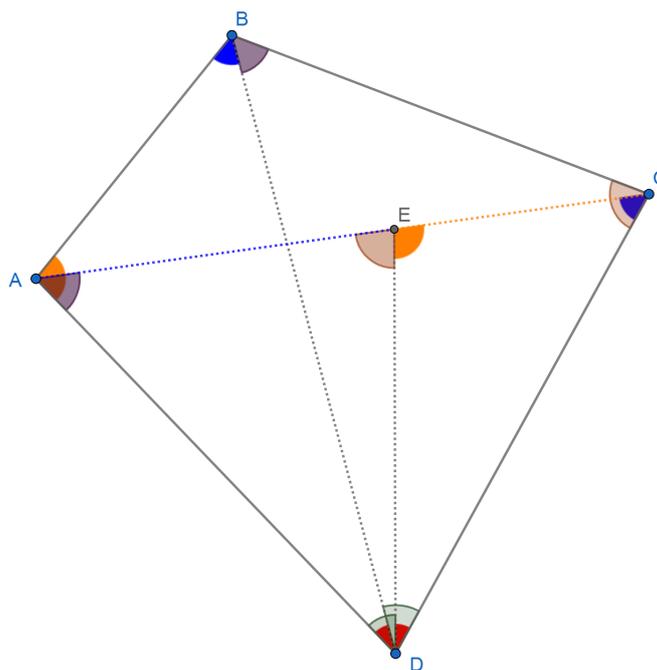
$$CP = CD + DP = CD + \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{AC \cdot BD}{AB}.$$

Multiplicando a última igualdade por AB encontra-se (6.3.1).

ii) Recíproca do Teorema de Ptolomeu. A Figura 6.6 ilustra a construção. Suponha-se que $ABCD$ seja um quadrilátero convexo e vale (6.3.1). Esboça-se um ponto E , no interior de $ABCD$, tal que $\angle EDC = \angle ADB$ e

$$\frac{ED}{DC} = \frac{AD}{DB}. \quad (6.3.4)$$

Figura 6.6: Demonstração da recíproca do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Como $\angle EDC = \angle ADB$ e, por (6.3.4), os lados correspondentes são proporcionais, pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado, tem-se:

$$\triangle EDC \sim \triangle ADB.$$

Logo, $\angle DAB = \angle DEC$, $\angle ABD = \angle ECD$ e

$$\frac{ED}{AD} = \frac{DC}{DB} = \frac{EC}{AB}. \quad (6.3.5)$$

Nota-se que $\angle BDC = \angle ADE$, pois $\angle EDB$ é comum. Logo, por um par de ângulos congruentes e lados correspondentes proporcionais, (6.3.5), tem-se:

$$\triangle BDC \sim \triangle ADE.$$

Segue que $\angle DAE = \angle DBC$, $\angle AED = \angle BCD$ e

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DC}{DE} = \frac{BC}{AE}. \quad (6.3.6)$$

Partindo de (6.3.1) escreve-se:

$$AC = \frac{AD \cdot BC}{BD} + \frac{AB \cdot CD}{BD}.$$

Comparando o lado direito da equação anterior com (6.3.5) e (6.3.6) segue que:

$$AC = AE + EC.$$

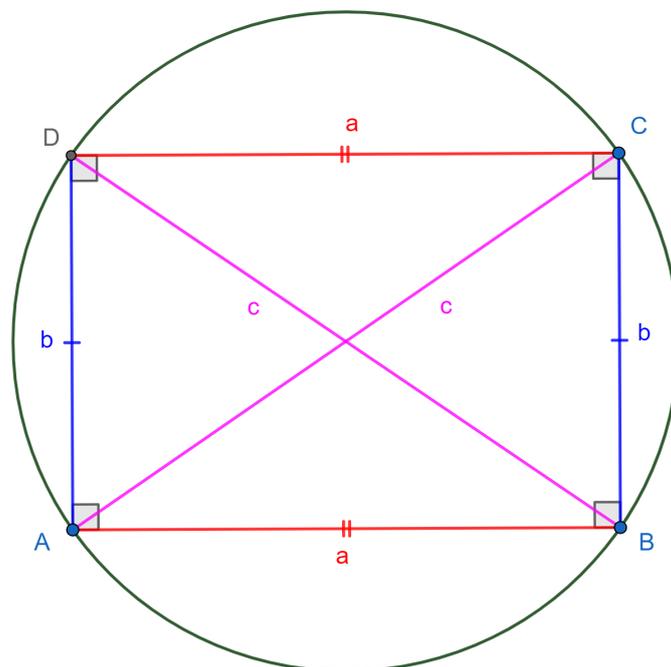
Isto é, A, E e C são colineares. Como $\angle ABD = \angle ACD$, conclui-se que o quadrilátero $ABCD$ é cíclico. \square

Corolário 15. *O Teorema de Ptolomeu aplicado em um retângulo $ABCD$ equivale ao Teorema 1 (Ida de Pitágoras) aplicado nos triângulos retângulos ABC , BCD , CDA e DAB (Figura 6.7).*

Demonstração. Todo retângulo $ABCD$ é inscritível pois a soma dos ângulos opostos é 180° (Figura 6.7). Pelo Teorema de Ptolomeu vale:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

Figura 6.7: Teorema de Ptolomeu no retângulo $ABCD$. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Mas num retângulo $ABCD$ os lados opostos e as diagonais são congruentes entre si. Isto é, $AB = CD = a$, $BC = DA = b$ e $AC = BD = c$. Segue a fórmula do Teorema de Pitágoras relativa aos triângulos retângulos ABC , BCD , CDA e DAB :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

Capítulo 7

Referências Bibliográficas

- [1] DELGADO, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Página 11)
- [2] HOLANDA, B. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2011. (Página 11)
- [3] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: [10.22533/at.ed.24221310814](https://doi.org/10.22533/at.ed.24221310814). Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [4] LÓPEZ LINARES, J. Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 1, p. 27-47, jul. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n12022027047. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [5] LÓPEZ LINARES, J. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023250>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [6] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5

- (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [7] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [8] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [9] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [10] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023212>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [11] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [12] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra - v. 3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 91 p. ISBN 978-65-87023-24-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [13] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática**.

2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [14] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [15] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdv17ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [16] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdv18202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [17] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdv19202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [18] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22-40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdv20202123169664jlljpmfj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [19] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de**

- Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [20] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [21] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [22] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [23] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [24] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/matematiceestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [25] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdvol21202123169664jlljpmsafj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)

- [26] LOOMIS, E. S. **The pythagorean proposition, classics in mathematics education series**. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Washington, D.C., 1968, 310p. (Página 24)
- [27] MOREIRA, C.G.T.A. **Teoria dos Números (Equações Diofantinas) Nível 2** [S. l.: s. n.], 2017. 1 vídeo (1 h 37 min 05 seg). Publicado pelo canal Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Disponível em: <https://youtu.be/w9SeDGFAt8g?t=1640>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 28)
- [28] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Página 11)
- [29] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **George Biddell Airy**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2001. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Airy/>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 22)
- [30] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **George Pólya**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2002. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Polya/>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 43)
- [31] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Pappus of Alexandria**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pappus/>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 43)
- [32] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Henry Perigal Jr**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2021. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Perigal/>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 18)
- [33] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Pythagoras of Samos**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pythagoras/>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 13)
- [34] PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Página 11)

- [35] SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12)
- [36] SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J.; RAMALHO DE FREITAS, M.P.O. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol.3, N.1, Jan-Jun 2022, pp. 70-87. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 12, 33)
- [37] SILVA, J. E. B.; FANTI, E. L. C.; PEDROSO, H. A. Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 6, p. 21-47, jul. 2016. DOI: 10.21167/cqdv06201623169664jebselecfhap2147. Disponível em: <http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp>. Acesso em: 30 jul. 2022. (Página 34, 43)
- [38] THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria-Nível 2, 2006. (Página 11)

