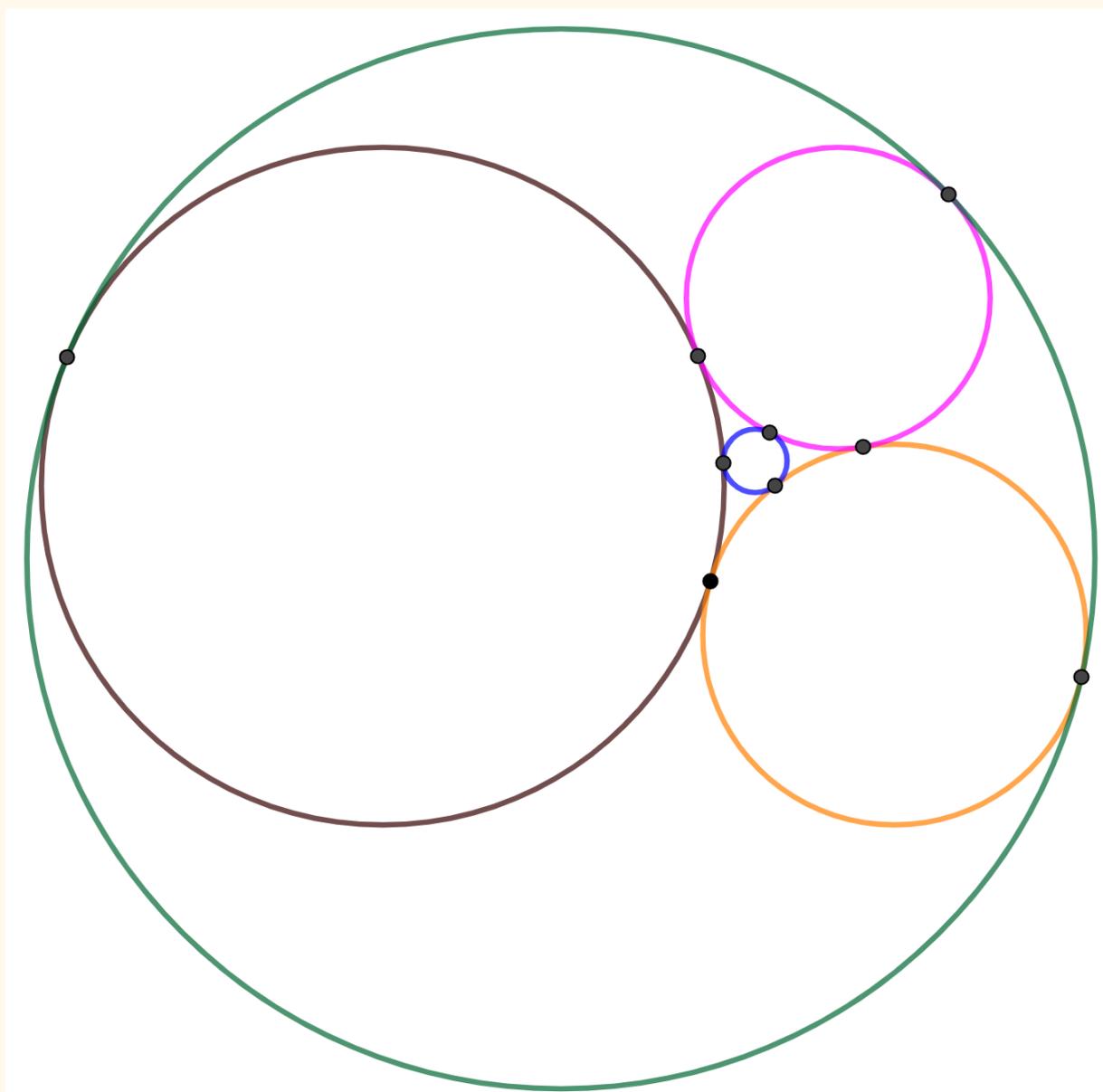


**Transformação de Inversão: Teoria,
Exercícios de Construção Geométrica,
Problemas Olímpicos e Aplicações**



Juan López Linares

JUAN LÓPEZ LINARES

**Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção
Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações**

DOI: 10.11606/9786587023250

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2022

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-Reitora: Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Diretor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Vice-Diretor: Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

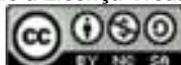
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da
Universidade de São Paulo

L864t	López Linares, Juan Transformação de inversão: teoria, exercícios de construção geométrica, problemas olímpicos e aplicações/ Juan López Linares. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023250 1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino médio. 6. Formação de professores. I. Título.
-------	--

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



Dedico este livro a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores-Estudantes do curso de “Geometria Olímpica com GeoGebra” que motivaram a escrita deste livro eletrônico.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

AUTOR

Dr. JUAN LÓPEZ LINARES: <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Quando adolescente participava como estudante de um grupo de treinamento para olimpíadas de Física. Embora tivesse sucessos nas competições desta disciplina, nas olimpíadas de Matemática não tinha resultados espetaculares. Sempre sentiu falta de um grupo de treinamento em Matemática. Essa experiência extracurricular determinou seu futuro profissional e motivou sua linha de trabalho hoje.

Atualmente Professor do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores e estudantes de alto rendimento.

Na área de Ensino de Matemática Olímpica, publicou 15 artigos, 9 livros eletrônicos (e-book), um capítulo de livro e uma dissertação de mestrado. Textos completos e gratuitos podem ser encontrados [aqui](#). Também disponibilizou mais de 750 vídeo aulas. Adicionalmente, no site do [GeoGebra](#) estão disponíveis mais de 500 construções geométricas interativas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProFMat) pela UFSCar em 2019.

Título

Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica,
Problemas Olímpicos e Aplicações

Prefácio

Este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 68 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. A discussão é organizada em cinco capítulos: Conceitos básicos; Aplicações da inversão; Prova de Teoremas utilizando inversão; Exercícios de construção geométrica por inversão; Problemas resolvidos utilizando inversão. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mãos na massa.

Palavras-chave: Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

Lista de Figuras

2.1	Ilustração da Definição 1 e da construção dos pontos inversos P' e Q' . Quando $S \in i \Rightarrow S' = S$. Versão interativa aqui	17
2.2	Guia para o Exercício 3. A construção ilustra o caso em que P é interior a i , mas o procedimento é válido também nos outros casos. Versão interativa aqui	19
2.3	Guia para o primeiro caso do Exercício 4. Versão interativa aqui	21
2.4	Guia para o segundo caso do Exercício 4. Versão interativa aqui	22
2.5	Guia para a demonstração da Proposição 1. Versão interativa aqui	23
2.6	Guia para a demonstração das Proposições 2, 3 e 4. Versão interativa aqui	24
2.7	Guia para a demonstração da Proposição 5. Versão interativa aqui	26
2.8	Guia para a demonstração da Proposição 6. Versão interativa aqui	27
2.9	Guia para a demonstração da Corolário 7. Versão interativa aqui	28
2.10	Guia para a demonstração da Proposição 8. Versão interativa aqui	29
2.11	Guia para a demonstração da Proposição 9. Versão interativa aqui	30
2.12	Guia para a demonstração da Proposição 10. Versão interativa aqui	31
2.13	Guia para a demonstração da Proposição 11. Versão interativa aqui	32
2.14	Guia para a demonstração da Proposição 12. Versão interativa aqui	33
2.15	Guia para a demonstração da Proposição 13. Versão interativa aqui	34
2.16	Guia para a demonstração da Proposição 14. Versão interativa aqui	35
2.17	Guia para a demonstração da Proposição 15. Versão interativa aqui	36
2.18	Guia para a Definição 4. Versão interativa aqui	37
2.19	Guia para a demonstração do Teorema 16. Versão interativa aqui	38
2.20	Guia para a demonstração do Corolário 17. Versão interativa aqui	39
3.1	Inversão e Projeção Estereográfica da Terra. Versão interativa aqui	40
3.2	Inversão e Mecanismo de Peaucellier–Lipkin. Versão interativa aqui	42
4.1	Guia para a demonstração da Teorema 20. Versão interativa aqui	45
4.2	Apresentação do Teorema de Feuerbach. Versão interativa aqui	46
4.3	Lema 22. Teorema de Feuerbach. Versão interativa aqui	47
4.4	Lema 23. Teorema de Feuerbach. Versão interativa aqui	48

4.5	Lema 24. Teorema de Feuerbach. Versão interativa aqui .	49
4.6	Demonstração do Teorema de Feuerbach. Versão interativa aqui .	50
5.1	Construção geométrica inicial para o Exercício 5. Versão interativa aqui .	53
5.2	Construção geométrica final para o Exercício 5. Versão interativa aqui .	54
5.3	Construção geométrica inicial para o Exercício 6. Versão interativa aqui .	55
5.4	Construção geométrica final para o Exercício 6. Versão interativa aqui .	56
5.5	Construção geométrica inicial para o Exercício 7. Versão interativa aqui .	57
5.6	Construção geométrica após a transformação de inversão para o Exercício 7. Versão interativa aqui .	58
5.7	Solução para o Exercício 7. Versão interativa aqui .	58
5.8	Construção geométrica para o enunciado do Exercício 8. Versão interativa aqui .	59
5.9	Construção geométrica para o Exercício 8. Versão interativa aqui .	60
5.10	Construção geométrica para o Exercício 8. Versão interativa aqui .	62
5.11	Construção geométrica para o Exercício 9. Versão interativa aqui .	63
5.12	Construção geométrica para o enunciado do Exercício 10. Versão interativa aqui .	64
5.13	Primeira construção geométrica para a solução do Exercício 10. Versão interativa aqui .	65
5.14	Segunda construção geométrica para a solução do Exercício 10. Versão interativa aqui .	66
5.15	Uma circunferência de inversão i , centrada em S e de raio arbitrário, transforma o $\triangle ABC$ no triângulo equilátero $A'B'C'$. Versão interativa aqui .	67
5.16	Guia para a demonstração do Proposição 27. Versão interativa aqui .	68
6.1	Construção geométrica inicial para o Problema 1. Versão interativa aqui .	71
6.2	Construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui .	73
6.3	Construção geométrica inicial para a segunda resolução do Problema 1. Versão interativa aqui .	74
6.4	Construção geométrica da segunda resolução do Problema 1. Versão interativa aqui .	75
6.5	Construção geométrica inicial para o Problema 2. Elementos do espaço inverso em linhas tracejadas. Versão interativa aqui .	76
6.6	Segunda construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa aqui .	77
6.7	Terceira construção geométrica para o Problema 2. Todos os elementos das duas construções anteriores. Versão interativa aqui .	78
6.8	Construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa aqui .	79
6.9	Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa aqui .	80
6.10	Construção geométrica para o Problema 4. Versão interativa aqui .	81

6.11	Elementos inversos do Problema 4. Versão interativa aqui	82
6.12	Construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa aqui	83
6.13	Construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa aqui	85
6.14	Problema 5 por inversão. Versão interativa aqui	86
6.15	Construção geométrica inicial para o Problema 6. Versão interativa aqui	88
6.16	Construção geométrica para o Problema 6. Versão interativa aqui	90
6.17	Construção geométrica utilizando inversão para o Problema 6. Versão interativa aqui	91
6.18	Construção geométrica inicial para o Problema 7. Versão interativa aqui	92
6.19	Construção geométrica para o Problema 7. O ponto $R_2 \in R_1R_3$, não aparece pela escala. Versão interativa aqui	93
6.20	Construção geométrica inicial utilizando inversão para o Problema 7. Versão interativa aqui	94
6.21	Construção geométrica somente dos elementos após inversão para o Problema 7. Versão interativa aqui	95
6.22	Construção geométrica utilizando inversão para o Problema 7. Versão interativa aqui	96
6.23	Construção geométrica do Problema 8. Caso i) M' é um quadrilátero e $\angle A' + \angle C' < 180^\circ$. Versão interativa aqui	97
6.24	Construção geométrica para o Problema 8. Caso ii) M' é o triângulo $A'B'C'$ com D' no interior. Versão interativa aqui	98

Siglas

AA Critério de Semelhança Ângulo-Ângulo. 48

ALA Critério de Congruência Ângulo-Lado-Ângulo. 47

IMO International Mathematical Olympiad, Olimpíada Internacional de Matemática. 70, 75, 78-81, 83, 87, 88, 91, 96

LAL Critério de Congruência ou Semelhança Lado-Ângulo-Lado. 38

SL Short List, Lista Curta. 75, 78, 79, 91, 96

Sumário

Lista de Figuras

Siglas

1	Introdução	14
2	Conceitos básicos sobre inversão	16
2.1	Construção de P' quando P está no interior de i .	17
2.1.1	Resolução do Exercício 1	17
2.2	Construção de Q' quando Q está no exterior de i .	18
2.2.1	Resolução do Exercício 2.	18
2.3	Primeira construção do inverso válida para qualquer posição.	18
2.3.1	Resolução do Exercício 3.	18
2.4	Segunda construção do inverso válida para qualquer posição.	20
2.4.1	Resolução do Exercício 4.	20
2.5	Inversão de pares de pontos	22
2.6	Inversão de retas e circunferências	24
2.7	Ângulos e inversão	27
2.8	Divisão harmônica e inversão	31
2.9	Inversos de centros de circunferência	32
2.10	Polo e Polar	36
3	Aplicações da inversão.	40
3.1	Projeção Estereográfica.	40
3.2	Mecanismo de Peaucellier–Lipkin	42
4	Prova de Teoremas utilizando inversão.	44
4.1	Teorema de Ptolomeu	44
4.2	Teorema de Feuerbach	46

5	Exercícios de construção geométrica por inversão	52
5.1	Transformação de reta e circunferência em circunferências concêntricas	52
5.1.1	Resolução do Exercício 5.	52
5.2	Pontos mágicos de duas circunferências disjuntas e não concêntricas	54
5.2.1	Resolução do Exercício 6.	54
5.3	Famílias de circunferências tangentes a outras duas	56
5.3.1	Resolução do Exercício 7.	56
5.4	Corrente de Steiner	59
5.4.1	Resolução do Exercício 8.	59
5.5	Corrente de Pappus	62
5.5.1	Resolução do Exercício 9.	63
5.6	Circunferências tangentes a outras três	63
5.6.1	Resolução do Exercício 10.	64
5.7	Primeiro ponto Isodinâmico como centro de inversão	66
5.8	Semelhança de $A'B'C'$ com as projeções de P no circuncírculo	68
6	Problemas resolvidos utilizando inversão	70
6.1	Inversão. Incírculo. Potência de ponto. P4 IMO 1969.	70
6.1.1	Primeira resolução do Problema 1.	70
6.1.2	Segunda resolução do Problema 1.	73
6.2	Inversão. Circunferências concêntricas. Teorema de Pitágoras. P12 SL IMO 1982.	75
6.2.1	Resolução do Problema 2.	75
6.3	Inversão. Incírculo e circuncírculo. Colinearidade. P14 SL IMO 1986.	78
6.3.1	Resolução do Problema 3.	78
6.4	Incentro. Homotetia. Inversão. P7 SL IMO 1992.	79
6.4.1	Resolução do Problema 4.	80
6.4.2	Verificação do Problema 4 por inversão.	82
6.5	Semelhança. Circunferências Ortogonais. Inversão. P2 IMO 1993.	83
6.5.1	Primeira resolução do Problema 5.	83
6.5.2	Resolução do Problema 5 por inversão.	85
6.6	Teorema da Bissetriz. Triângulo Pedal. Lei dos Senos. Inversão. P2 IMO 1996.	87
6.6.1	Primeira resolução do Problema 6.	88
6.6.2	Construção e resolução do Problema 6 por inversão.	90
6.7	Teorema de Desargues. Incentro e Circuncentro. Inversão. P9 SL IMO 1997.	91
6.7.1	Resolução do Problema 7.	92
6.7.2	Resolução do Problema 7 por inversão.	93
6.8	Topologia. Inversão. P8 SL IMO 1999.	96
6.8.1	Resolução do Problema 8.	96

7 Referências Bibliográficas

99

Índice Remissivo

105

Capítulo 1

Introdução

O livro faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso [Geometria Olímpica com GeoGebra](#) para professores e estudantes de alto rendimento em Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. Os mesmos acontecem na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma Apolo de Cultura e Extensão da USP.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Rodrigo Pinheiro [33] e do Prof. Cícero Thiago [36]. Também serviram como referência os livros de Geometria [26] e Geometria Analítica [2] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

O texto conta com 68 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, os links dos gráficos interativos são disponibilizados em páginas do [GeoGebra](#). Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube.

A discussão é organizada em cinco capítulos: Conceitos básicos; Aplicações da inversão; Prova de Teoremas utilizando inversão; Exercícios de construção geométrica por inversão, Problemas resolvidos utilizando inversão.

O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa.

Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contra partida, na versão impressa tradicional o aprendiz precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma resolução.

O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movi-

mentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes.

Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendizado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar e buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

Três livros eletrônicos gratuitos com as notas de aulas da primeira parte do curso Geometria Olímpica com GeoGebra estão disponíveis em [10], [11] e [12]. Também foram publicados quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [6], [7], [8] e [9]. Outros trabalhos da área de Matemática são [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [5], [20], [22], [23], [24], [25], [34] e [21].

Capítulo 2

Conceitos básicos sobre inversão

A geometria inversiva que será discutida neste e-book é o estudo duma transformação do plano no plano. Esta mapeia circunferências e retas em outras circunferências ou retas e preserva, localmente, os ângulos entre as curvas que cruzam-se. Vários problemas difíceis tornam-se muito mais simples utilizando a inversão.

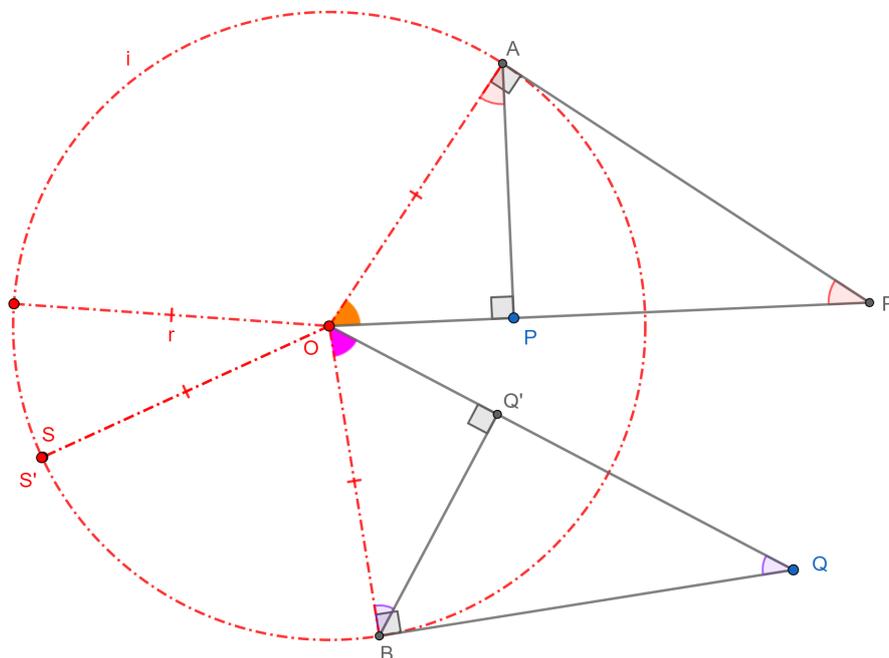
Definição 1 (Inversão de ponto). *Dados um plano l , uma circunferência $i \in l$, com centro O e raio r , e um ponto $P \in l$, o ponto P' que pertence a semirreta OP e satisfaz*

$$OP' \cdot OP = r^2$$

é chamado inverso de P em relação a i (Figura 2.1). O ponto O é chamado “centro de inversão” e i é chamada de “circunferência de inversão”. Também utiliza-se a notação

$$P' = \text{Inv}(P, i).$$

Figura 2.1: Ilustração da Definição 1 e da construção dos pontos inversos P' e Q' . Quando $S \in i \Rightarrow S' = S$. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Segue diretamente da Definição 1 que os pontos sobre a circunferência de inversão são invariantes. Isto é, quando o ponto $S \in i \Rightarrow S' = S$. Adicionalmente, $P = Inv(Inv(P, i), i)$. Os pontos no interior de i são transformados em pontos no exterior de i e vice-versa. Também convencionam-se que “o infinito” e o centro de inversão O formam um par inversivo.

2.1 Construção de P' quando P está no interior de i .

Exercício 1. Construir o inverso do ponto P , quando P é interior a circunferência de inversão i de centro O .

2.1.1 Resolução do Exercício 1

A seguir descreve-se um procedimento de construção do inverso P' , com régua e compasso, quando o ponto P está no **interior** da circunferência de inversão (Figura 2.1):

1. Traçar a semirreta OP .
2. Traçar uma perpendicular a OP passando por P e marcar o ponto A na interseção desta com i .

3. Construir o segmento OA . Traçar uma tangente a i passando por A e marcar o ponto P' na interseção desta com a reta OP .

Como $\angle AOP = \angle AOP'$ (comum) e $\angle OPA = \angle OAP' = 90^\circ$ tem-se:

$$\triangle OPA \sim \triangle OAP'.$$

Segue que:

$$\frac{AP}{P'A} = \frac{AO}{P'O} = \frac{PO}{AO} \Rightarrow OP \cdot OP' = OA^2 = r^2.$$

2.2 Construção de Q' quando Q está no exterior de i .

Exercício 2. Construir o inverso do ponto Q , quando Q é exterior a circunferência de inversão i de centro O .

2.2.1 Resolução do Exercício 2.

Segue o procedimento de construção do inverso Q' , quando o ponto Q está no exterior da circunferência de inversão (Figura 2.1):

1. Traçar a semirreta OQ .
2. Traçar uma tangente a i partindo de Q e marcar o ponto de tangência B . Construir o segmento OB .
3. Marcar Q' como a projeção ortogonal de B sobre OQ .

Analogamente ao caso anterior vale $\triangle OQB \sim \triangle OBQ'$ e

$$OQ \cdot OQ' = OB^2 = r^2.$$

2.3 Primeira construção do inverso válida para qualquer posição.

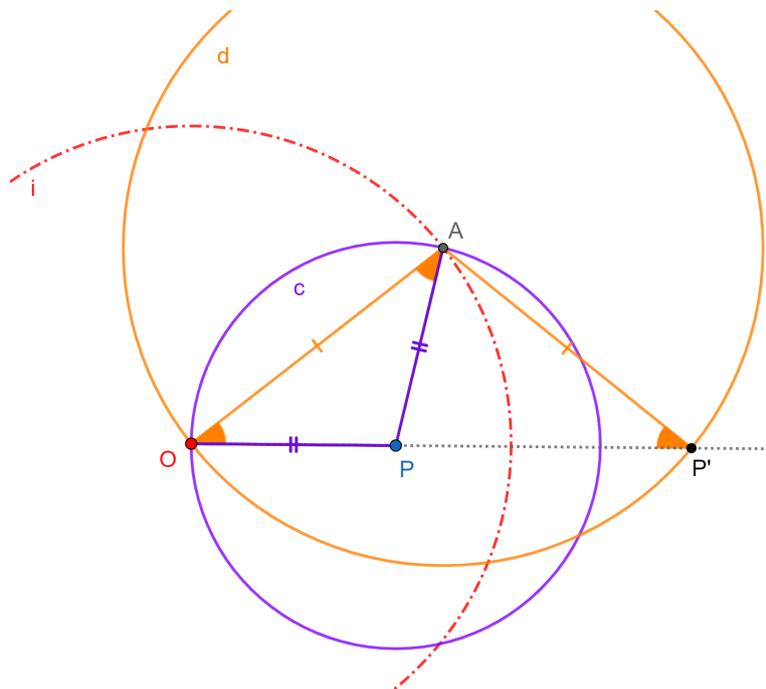
Exercício 3. Construir o inverso do ponto P , dentro ou fora da circunferência de inversão i e centro O , utilizando somente regra e compasso.

2.3.1 Resolução do Exercício 3.

A Figura 2.2 ilustra o procedimento de construção descrito a seguir.

1. Com centro em P e raio PO construir a circunferência c . Marcar o ponto A em uma das interseções entre i e c .
2. Com centro em A e raio AO construir a circunferência d . Marcar o ponto P' na interseção da semirreta OP com d .

Figura 2.2: Guia para o Exercício 3. A construção ilustra o caso em que P é interior a i , mas o procedimento é válido também nos outros casos. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Como os triângulos OPA e OAP' são isósceles por construção, então:

$$\angle OAP = \angle AOP = \angle AP'O.$$

Como $\angle AOP = \angle AOP'$ (comum) e $\angle OAP = \angle OP'A$ tem-se:

$$\triangle OAP \sim \triangle OP'A.$$

Segue que:

$$\frac{OA}{OP'} = \frac{OP}{OA} \Rightarrow OP \cdot OP' = OA^2.$$

2.4 Segunda construção do inverso válida para qualquer posição.

Exercício 4. *Construir o inverso do ponto A , dentro ou fora, da circunferência de inversão i de centro O e raio OB .*

2.4.1 Resolução do Exercício 4.

1. Traçar a reta OA e marcar o ponto $C = OA \cap i$, com C entre O e A ou entre O e A' .
2. Traçar a reta BC e a reta $BA = h$.
3. Construir a reta h' , reflexão da reta h em relação a reta BC . Marcar o ponto $A' = h' \cap OA$.

Por construção obtêm-se:

$$\angle ABC = \angle A'BC,$$

$$\angle OBC = \angle OCB.$$

Separa-se a análise em dois casos.

Primeiro caso (Figura 2.3). Quando A é interno a i vale que:

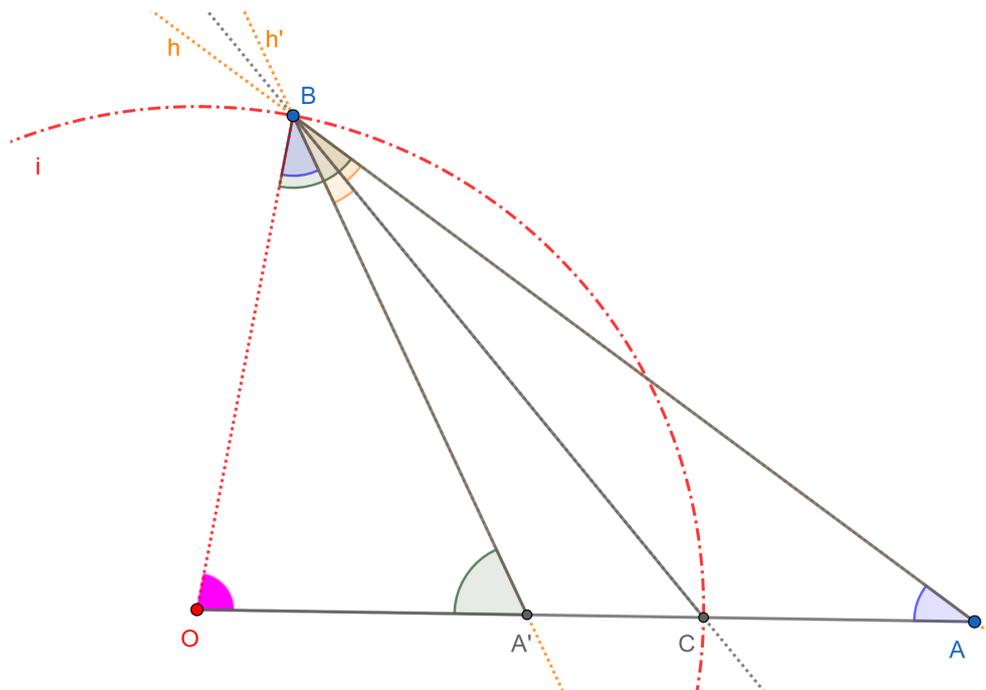
$$\angle OCB = \angle OA'B + \angle A'BC,$$

$$\angle OBC = \angle OA'B + \angle ABC,$$

$$\angle OBA + \angle ABC = \angle OA'B + \angle ABC$$

e encontra-se que $\angle OBA = \angle OA'B$.

Figura 2.4: Guia para o segundo caso do Exercício 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Adicionalmente, valendo nos dois casos, $\angle BOA = \angle A'OB$ (comum). Segue que:

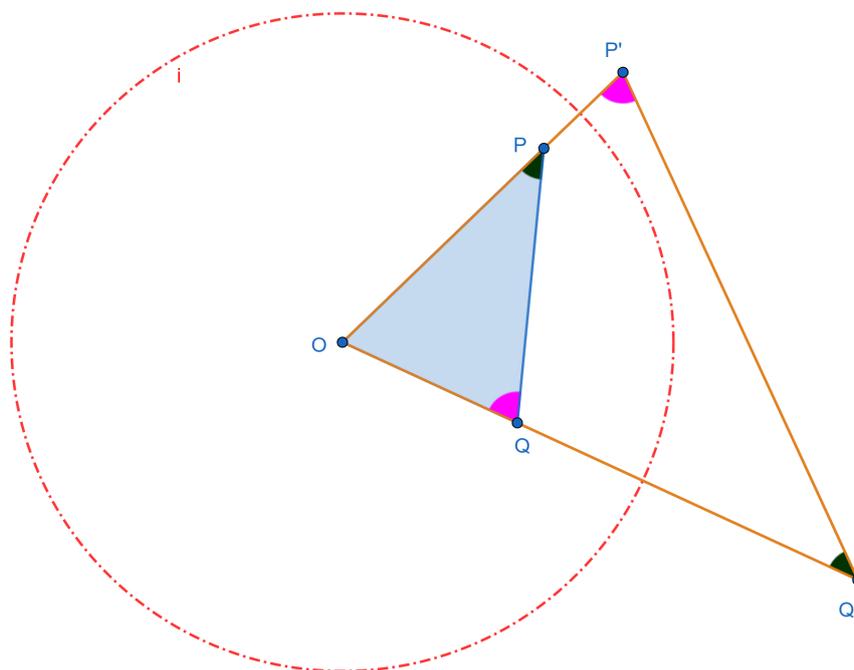
$$\triangle OAB \sim \triangle OBA'.$$

Logo, $OA \cdot OA' = OB^2$.

2.5 Inversão de pares de pontos

Proposição 1 (Propriedade dos inversos de dois pontos). *Considera-se uma circunferência de inversão i de centro O e raio r (Figura 2.5). Sejam os pontos P, Q , (não colineares com O e diferentes deste) e $P' = Inv(P, i)$ e $Q' = Inv(Q, i)$. Então $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$ e*

$$Q'P' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} PQ.$$

Figura 2.5: Guia para a demonstração da Proposição 1. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Demonstração. Tem-se,

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = r^2. \quad (2.5.1)$$

Isto é,

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}.$$

Como $\angle POQ = \angle Q'OP'$ (comum), pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado, segue que: $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$. Com isto:

$$\angle OPQ = \angle OQ'P',$$

$$\angle OQP = \angle OP'Q'.$$

Também vale que:

$$\frac{OQ}{OP'} = \frac{PQ}{Q'P'}.$$

Na equação anterior coloca-se em evidência $Q'P'$ e de (2.5.1) utiliza-se $OP' = \frac{r^2}{OP}$ para concluir que:

$$Q'P' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} PQ.$$

□

2.6 Inversão de retas e circunferências

Até aqui apresentou-se a inversão de pontos isoladamente. A seguir estudam-se os inversos dos lugares geométricos (LG) reta e circunferência. Isto é, conjuntos de pontos.

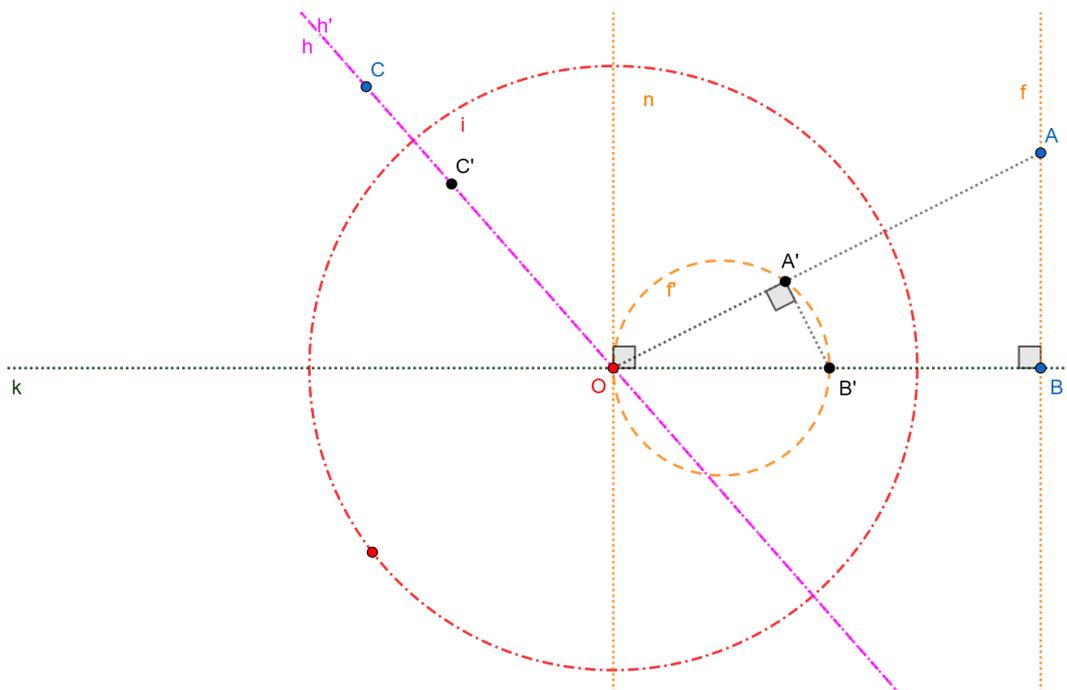
Definição 2 (Inversa de Lugar Geométrico). *Dados um plano l e um lugar geométrico $f \in l$, o LG $f' \in l$, é chamado inverso de f quando o ponto $P \in f$ se, e somente se, o ponto $P' \in f'$.*

Embora $P' \neq P$ em geral, existem casos em que o LG não muda após a inversão.

Proposição 2 (Inversão de reta que passa por O). *A inversa h' de uma reta h que passa pelo centro de inversão O é ela mesma (Figura 2.6).*

Demonstração. Segue diretamente da Definição 1. Os pontos no interior de i e sobre a semirreta OC transformam-se nos pontos no exterior de i e vice-versa. \square

Figura 2.6: Guia para a demonstração das Proposições 2, 3 e 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Proposição 3 (Inversão de reta que **não** passa por O). *A inversa f' de uma reta f que não passa por O é uma circunferência que passa por O (Figura 2.6). Adicionalmente, a reta n , tangente a f' em O , é paralela a f .*

Demonstração. Construir uma reta k perpendicular a f passando pelo centro de inversão O . Marcar o ponto $B = k \cap f$ e escolher um ponto arbitrário $A \in f$ ($A \neq B$). Sejam $A' = Inv(A, i)$ e $B' = Inv(B, i)$.

Como viu-se na Proposição 2.5 tem-se $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$. Segue que $\angle OA'B' = \angle OBA = 90^\circ$. Do fato de $\angle OA'B' = 90^\circ$, para todo $A \in f$ ($A \neq B$), o ponto A' pertence a circunferência f' de diâmetro OB' . Convenciona-se que “o infinito” pertence a reta f e $O = Inv(\infty, i) \in f'$.

Reciprocamente, dado um ponto $A' \in f'$ ($A' \neq B'$ e $A' \neq O$) tem-se $\angle OA'B' = 90^\circ$ (pois OB' é diâmetro de f'). Pela Proposição 2.5 segue que $\triangle OB'A' \sim \triangle OAB$. Portanto, $\angle OBA = \angle OA'B' = 90^\circ$. Como $\angle OBA = 90^\circ$, para todo $A' \in f'$ ($A' \neq B'$ e $A' \neq O$), todo ponto A está contido numa reta perpendicular ao segmento OB . Como $O \in f'$, por convenção, $\infty = Inv(O, i)$ e “o infinito” pertence a reta f .

Para a segunda parte, suponha-se, por absurdo, que as retas f e n não sejam paralelas. Logo, existe o ponto $P = (f \cap n) \neq \infty$. Então, $P' \in f' \cap n'$. Como a reta n passa por O , pela Proposição 2, segue que $n = n'$ e $P' \in f' \cap n$ ($P' \neq O$, pois $P \neq \infty$). Ou seja, tanto P' quanto O são pontos diferentes que pertencem a interseção de f' e n . Contradição, n não seria tangente a f' . \square

Proposição 4 (Inversão de circunferência que passa por O). *A inversa de uma circunferência f' que passa pelo ponto de inversão O é uma reta $f = Inv(f', i)$ (Figura 2.6). Adicionalmente, a reta n , tangente a f' em O , é paralela com f .*

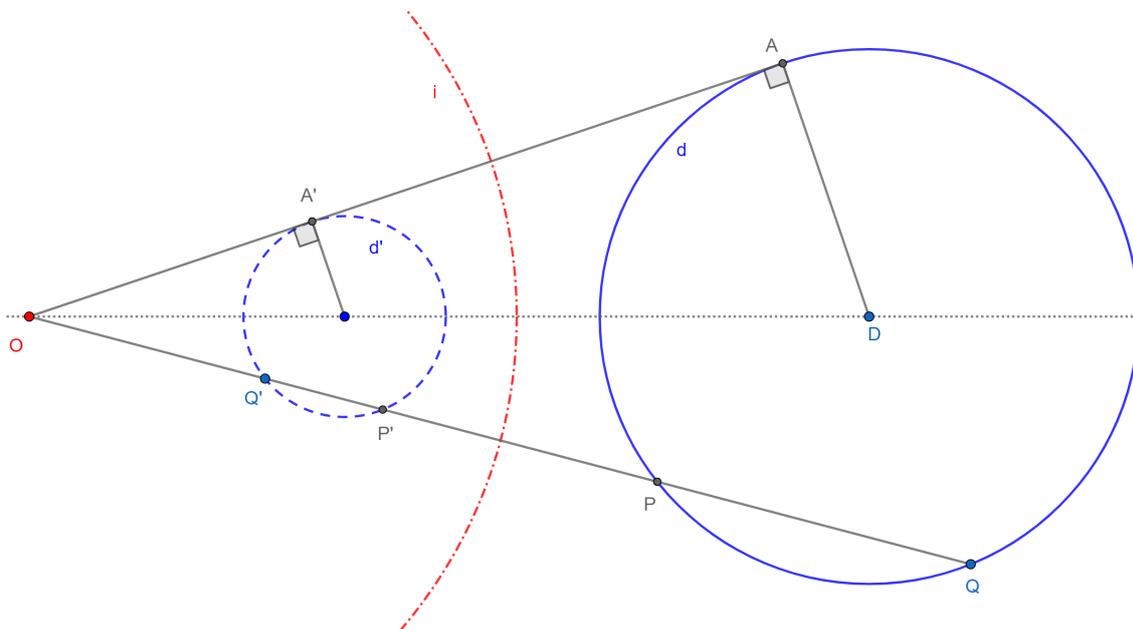
Demonstração. Segue diretamente da Proposição 3 e da propriedade:

$$Inv(Inv(P, i), i) = Inv(P', i) = P.$$

\square

Proposição 5 (Inversão de circunferência que **não** passa por O). *A inversa de uma circunferência d que não passa pelo centro de inversão O é outra circunferência d' (Figura 2.7). Adicionalmente, as retas tangentes externas comuns de d e d' passam por O . Isto é, o ponto O é o centro de homotetia externo de d e d' .*

Figura 2.7: Guia para a demonstração da Proposição 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja uma circunferência de inversão i de centro O e raio r . Seja um ponto $Q \in d$, P a segunda interseção da reta OQ com d , $P' = Inv(P, i)$, $Q' = Inv(Q, i)$ e OA um segmento tangente a d . A potência do ponto O relativa a d não depende da posição específica de Q e pode ser escrita como:

$$OQ \cdot OP = Pot_d(O) = OA^2.$$

Por outro lado, como P e P' são um par de inversão vale:

$$OP' \cdot OP = r^2.$$

Dividindo as duas últimas equações encontra-se:

$$\frac{OQ}{OP'} = \frac{Pot_d(O)}{r^2} = \frac{OA^2}{r^2} = cte.$$

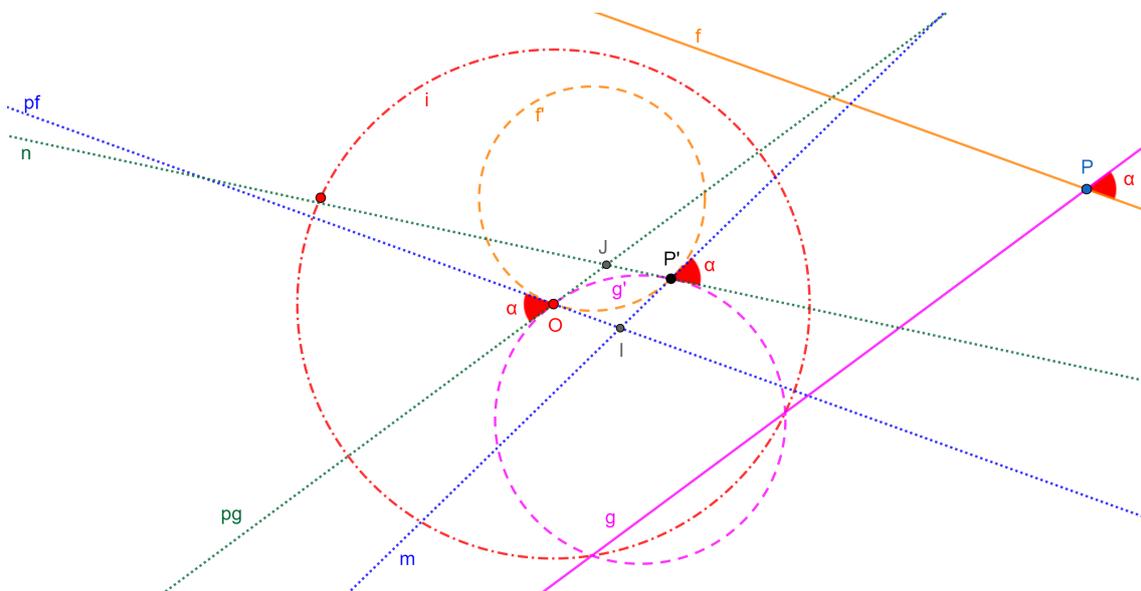
Em palavras, independentemente da posição do ponto Q sobre a circunferência d a razão $\frac{OQ}{OP'}$ não muda. Ou seja, os pontos Q e P' são homólogos. Com isto, d' é outra circunferência e uma tangente a d também o será a d' . O resultado continua sendo válido quando $P = Q$, pois neste caso $OP = OQ = OA$. \square

2.7 Ângulos e inversão

Definição 3 (Ângulo entre duas circunferências que intersectam-se). *O ângulo entre duas circunferências que intersectam-se num ponto é definido como sendo igual ao ângulo formado pelas suas retas tangentes no mesmo ponto. Duas circunferências são chamadas ortogonais quando este ângulo é 90° .*

Proposição 6 (Inversão preserva o ângulo entre retas). *Sejam f e g duas retas que não passam por O e intersectam-se no ponto P formando um ângulo α . Considera-se uma inversão relativa a uma circunferência i centrada em O . Sejam f' e g' as inversas de f e g , respectivamente. Então o ângulo formado entre f' e g' em $P' = Inv(P, i)$ é α (Figura 2.8).*

Figura 2.8: Guia para a demonstração da Proposição 6. Versão interativa [aqui](#).



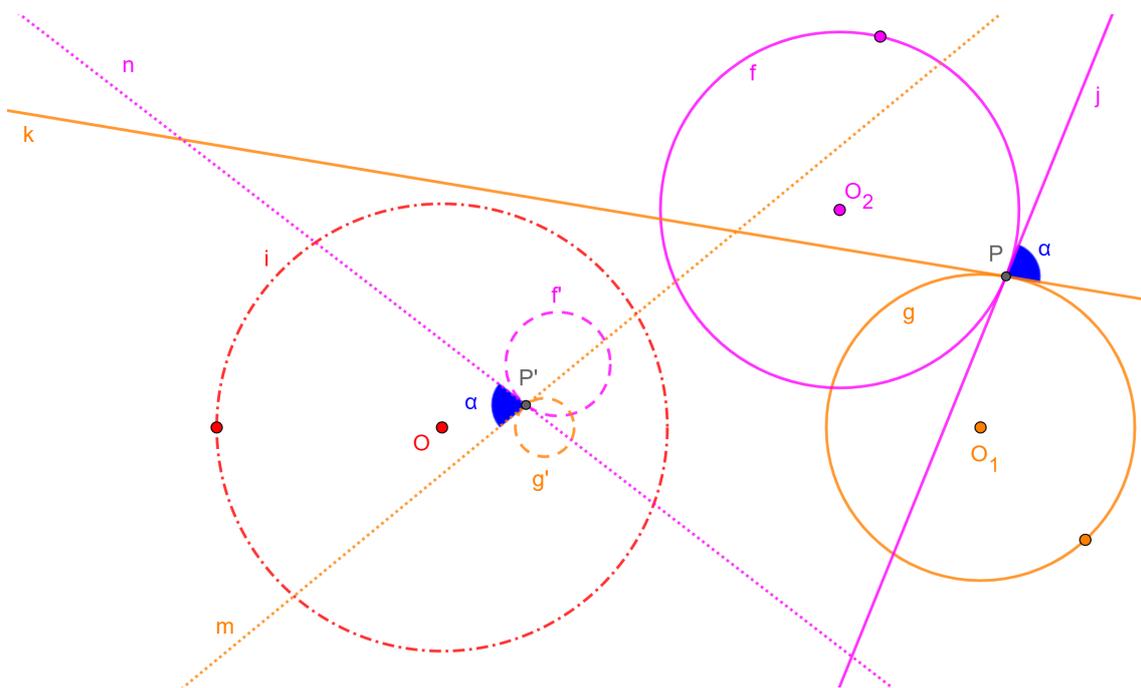
Fonte: O autor.

Demonstração. Como as retas f e g não passam por O transformam-se, pela inversão, nas circunferências f' e g' passando por O . Sejam pf e pg as retas tangentes a f' e g' em O . Viu-se na Proposição 3 que $pg \parallel g$ e $pf \parallel f$. Logo, o ângulo entre pf e pg em O é α . Consideram-se as retas m e n , tangentes em $P' = Inv(P, i)$ a f' e g' , respectivamente. Sejam $I = pf \cap m$ e $J = pg \cap n$. Como os triângulos IOP' e JOP' são isósceles de base OP' o ângulo entre m e n também é α . \square

Os ângulos entre duas retas quando alguma delas (ou as duas) passa(m) pelo centro de inversão também são preservados.

Corolário 7 (Inversão preserva o ângulo entre circunferências). *Sejam f e g duas circunferências que intersectam-se no ponto P formando um ângulo α . Considera-se uma inversão relativa a uma circunferência i centrada em O . Sejam f' e g' as inversas de f e g , respectivamente. Então o ângulo formado entre f' e g' no ponto $P' = \text{Inv}(P, i)$ é α . Em outras palavras, a inversão preserva os ângulos formados entre duas circunferências (Figura 2.9). A mesma conclusão também vale para uma reta e uma circunferência.*

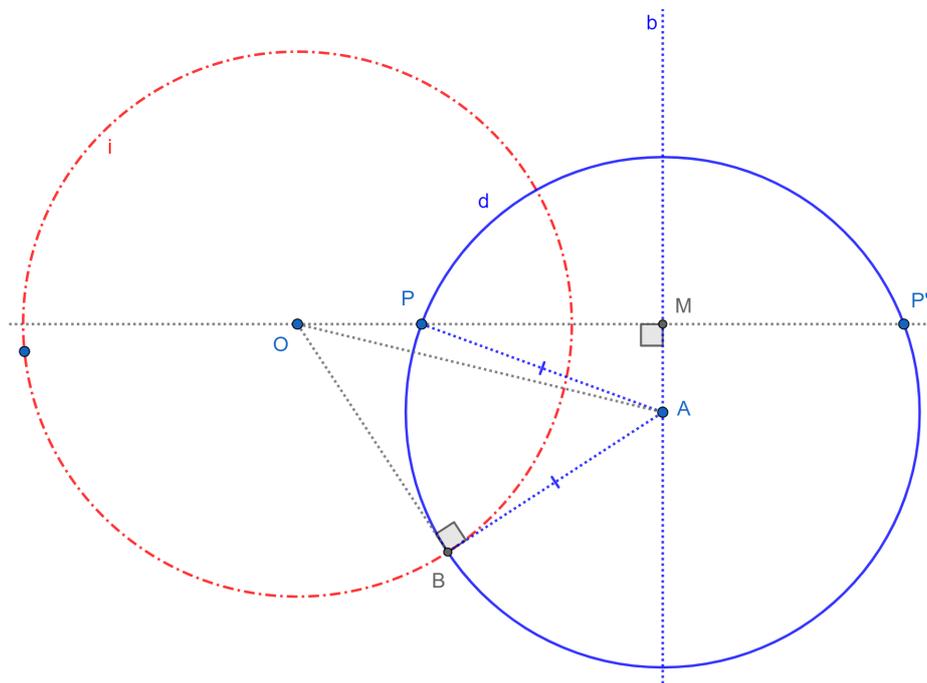
Figura 2.9: Guia para a demonstração da Corolário 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. O ângulo formado entre duas circunferências é definido pelo ângulo formado pelas suas retas tangentes no ponto de interseção. Com isso o resultado segue da Proposição 6. O ângulo entre as retas j e k em P é o mesmo que o ângulo entre as retas m e n em $P' = \text{Inv}(P, i)$. \square

Proposição 8 (Ortogonalidade com i de circunferência por P e P'). *Qualquer circunferência d que passe por um ponto P e seu inverso P' , respeito a circunferência i , é ortogonal com i (Figura 2.10).*

Figura 2.10: Guia para a demonstração da Proposição 8. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Demonstração. Por serem inversos respeito a i vale que:

$$OP \cdot OP' = OB^2. \quad (2.7.1)$$

Sendo M ponto médio de PP' tem-se:

$$OM = \frac{OP' + OP}{2}, \quad (2.7.2)$$

$$PM = \frac{OP' - OP}{2}. \quad (2.7.3)$$

Quer-se provar que:

$$OA^2 = OB^2 + AB^2. \quad (2.7.4)$$

Mas $AB = AP$ e pelo Teorema de Pitágoras no $\triangle OMA$ segue:

$$OM^2 + AM^2 = OB^2 + AP^2.$$

De (2.7.2) e do Teorema de Pitágoras no $\triangle APM$ tem-se:

$$\left(\frac{OP' + OP}{2}\right)^2 + AM^2 = OB^2 + PM^2 + AM^2.$$

Simplificando e utilizando (2.7.3) encontra-se:

$$\left(\frac{OP' + OP}{2}\right)^2 = OB^2 + \left(\frac{OP' - OP}{2}\right)^2.$$

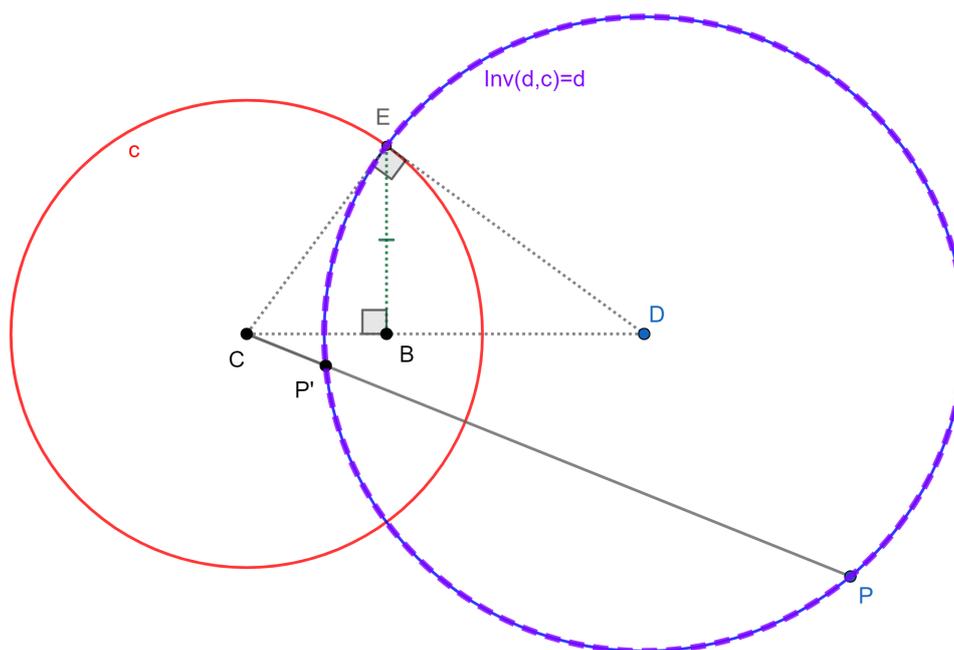
Desenvolvendo os quadrados e simplificando volta-se a (2.7.1):

$$OP \cdot OP' = OB^2.$$

Conclui-se que vale (2.7.4). Pela inversa do Teorema de Pitágoras a proposição fica provada. \square

Proposição 9 (Inversão entre circunferências ortogonais). *Consideram-se duas circunferências c e d ortogonais. A inversa d' de d relativa a c é ela mesma. Isto é, $d' = \text{Inv}(d, c) = d$. Analogamente, $\text{Inv}(c, d) = c$. Também vale que: $B = \text{Inv}(D, c) = \text{Inv}(C, d)$ (Figura 2.11).*

Figura 2.11: Guia para a demonstração da Proposição 9. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja $P \in d$. Está é uma recíproca da Proposição 8. Como c e d são ortogonais, então $P' = \text{Inv}(P, c) \in d$. Para a segunda parte basta analisar o $\triangle CED$, retângulo em E devido a ortogonalidade, e lembrar dos procedimentos de construção de pontos inversos. \square

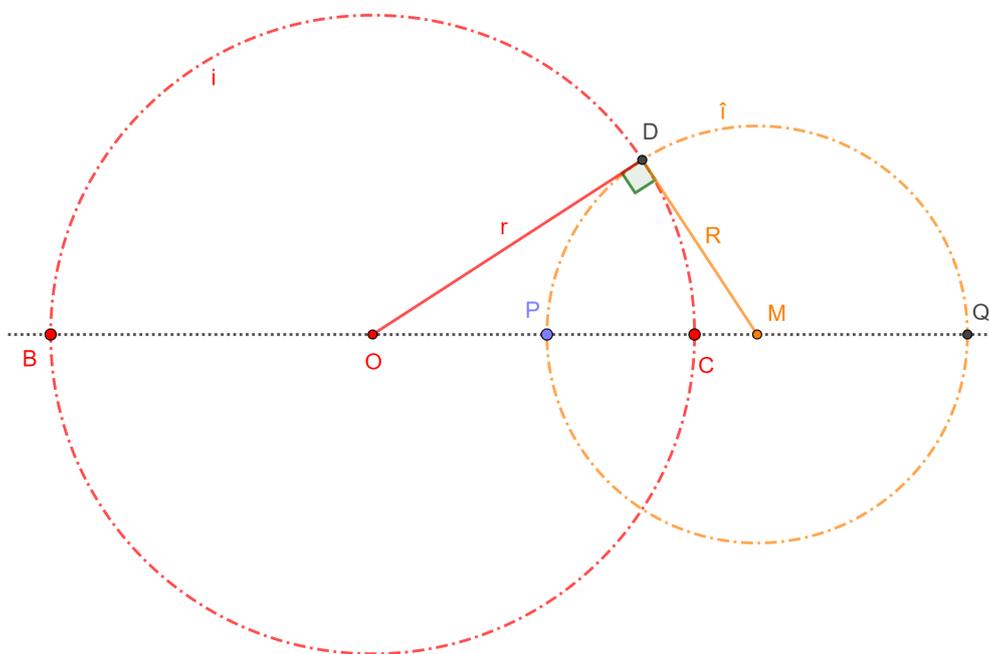
2.8 Divisão harmônica e inversão

Proposição 10 (Divisão harmônica e inversão). *Os pontos P e Q dividem harmonicamente o segmento BC se, e somente se, P e Q são pares inversivos relativo a uma circunferência i de diâmetro BC (Figura 2.12). Isto é, sendo O o ponto médio de BC e $r = OB = OC$ vale:*

$$\frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC} \Leftrightarrow PO \cdot QO = r^2.$$

Adicionalmente, as circunferências de diâmetros BC e PQ são ortogonais.

Figura 2.12: Guia para a demonstração da Proposição 10. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Será feita a prova do caso $P \in OC$. Quando $P \in BO$ a demonstração é análoga. Vale que:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{PO + r}{r - PO} = \frac{QO + r}{QO - r} = \frac{QB}{QC}.$$

A equação anterior é equivalente ao conjunto a seguir:

$$(PO + r)(QO - r) = (QO + r)(r - PO),$$

$$PO \cdot QO = r^2.$$

Seja M o ponto médio do segmento PQ e $R = PM = MQ$. Como

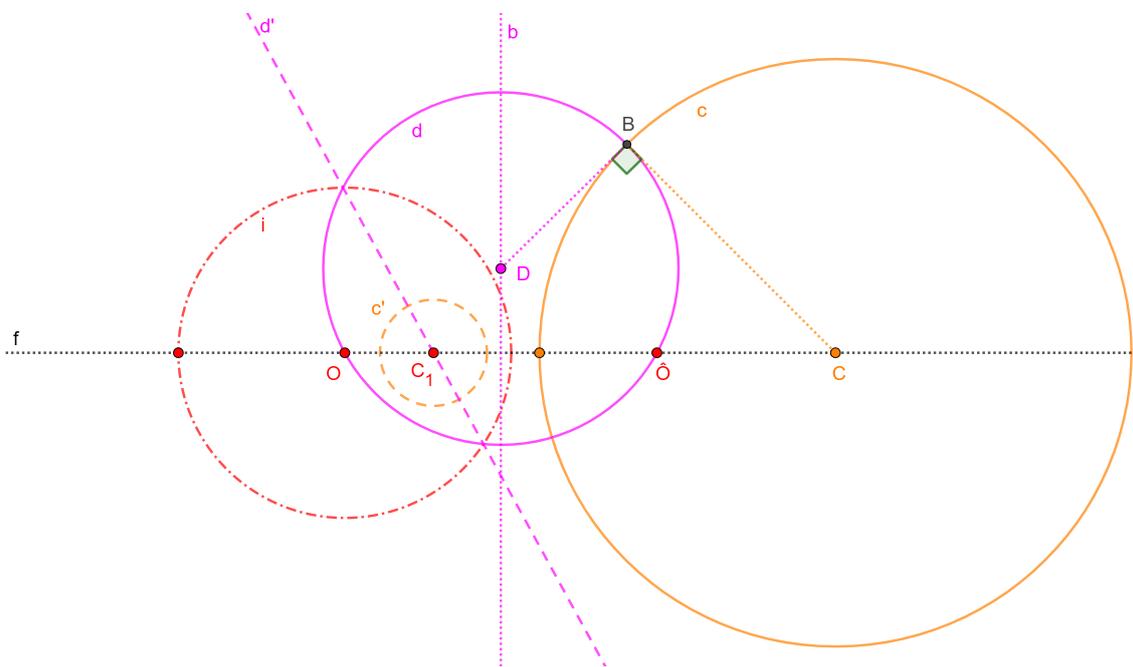
$$\frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC} \Leftrightarrow \frac{CP}{CQ} = \frac{BP}{BQ},$$

então $CM \cdot BM = R^2$. Em outras palavras, B e C são pares de inversão relativos a circunferência \hat{i} de diâmetro PQ . Adicionalmente, devido a passarem por pares de inversão (Proposição 8), as circunferências i e \hat{i} são ortogonais. \square

2.9 Inversos de centros de circunferência

Proposição 11 (Centro de circunferência inversa c' quando $O \notin c$). *Seja i uma circunferência de inversão de centro O e c uma circunferência de centro C que não passa por O . Seja f a reta que passa por O e C . Seja \hat{O} o inverso de O em relação a c ($\hat{O} = Inv(O, c)$) e c' o inverso de c em relação a i ($c' = Inv(c, i)$). Então o inverso de \hat{O} em relação a i , o ponto $C_1 = Inv(\hat{O}, i)$, será o centro de c' . Isto é, $C_1 = Inv(Inv(O, c), i)$ (Figura 2.13).*

Figura 2.13: Guia para a demonstração da Proposição 11. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

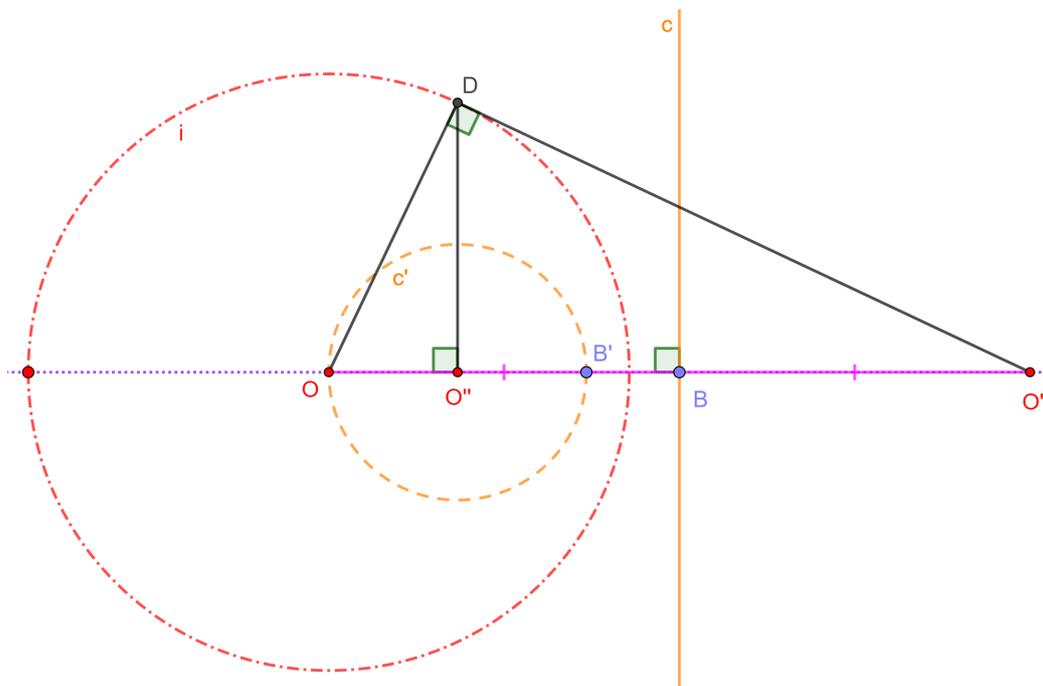
Demonstração. Na Figura 2.13 a reta b é a mediatriz do segmento $O\hat{O}$ e o ponto D é o centro da circunferência d . Como O e \hat{O} são um par de pontos inversos em relação a c tem-se que $O, \hat{O} \in f$ e d , que passa por eles, é ortogonal com c (Proposição 8).

A inversa d' de d em relação a i é uma reta, pois d passa pelo centro de inversão O (Proposição 4). Como d e c são ortogonais, pelo Corolário 7, também o serão d' e c' . Logo, d' passa por C_1 .

Como \hat{O} e C_1 são um par de pontos inversos em relação a i e $\hat{O} \in f$, então $C_1 \in f$. A reta f passa por O , logo a inversa dela em relação a i é ela mesma (Proposição 2). Segue que $C_1 = d' \cap f' = d' \cap f$. \square

Proposição 12 (Centro de circunferência inversa c' quando a reta c não passa por O). *Considera-se uma circunferência de inversão $i(O, r)$. O centro O'' da circunferência inversa c' , de uma reta c que não passa por O , é obtido em duas etapas. Primeiro é feita a reflexão do ponto O relativo a reta c . Segundo, a inversão do ponto O' relativo a i : $O'' = \text{Inv}(O', i)$ (Figura 2.14).*

Figura 2.14: Guia para a demonstração da Proposição 12. Versão interativa [aqui](#).



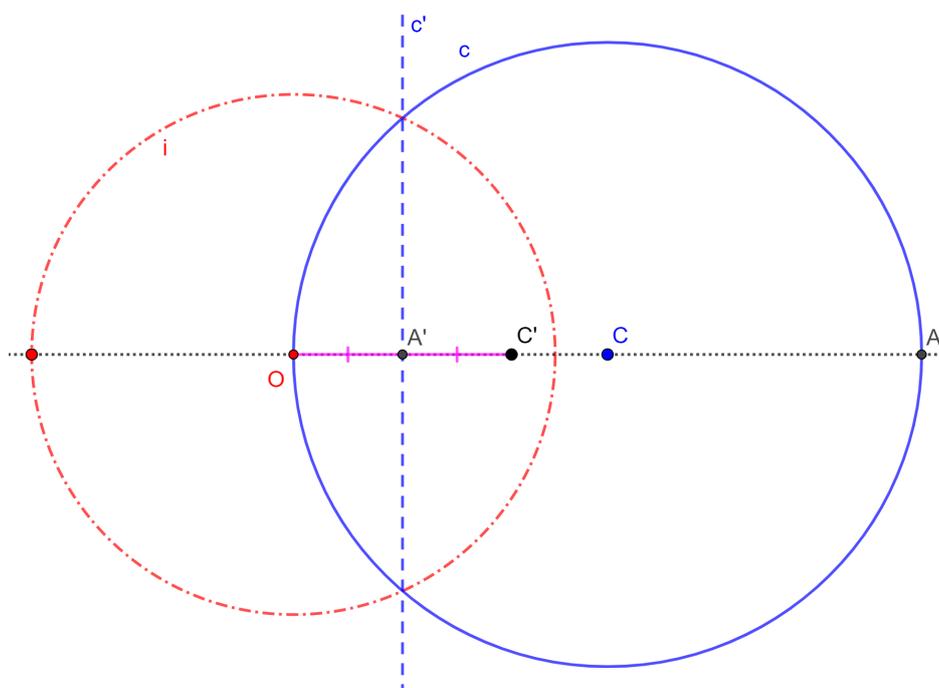
Fonte: O autor.

A reflexão do ponto O relativo a reta c pode ser considerada como a inversão relativo a uma circunferência de raio infinito. Neste caso, como na Proposição 11, também vale que: $O'' = \text{Inv}(\text{Inv}(O, c), i)$.

Demonstração. Têm-se que: $OB = BO'$ e $OB \cdot OB' = r^2 = OO' \cdot OO''$. Como $OO' = 2OB$, então $OO'' = \frac{OB'}{2}$. \square

Proposição 13 (Inverso do centro da circunferência c quando $O \in c$). *Considera-se uma circunferência de inversão $i(O, r)$. O inverso do centro C de um círculo $c(C, CA)$ em que o centro de inversão $O \in c$, é o simétrico de O com relação a $c' = \text{Inv}(c, i)$ (Figura 2.15).*

Figura 2.15: Guia para a demonstração da Proposição 13. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Pela Definição 1 tem-se:

$$r^2 = OC \cdot OC' = OA \cdot OA'.$$

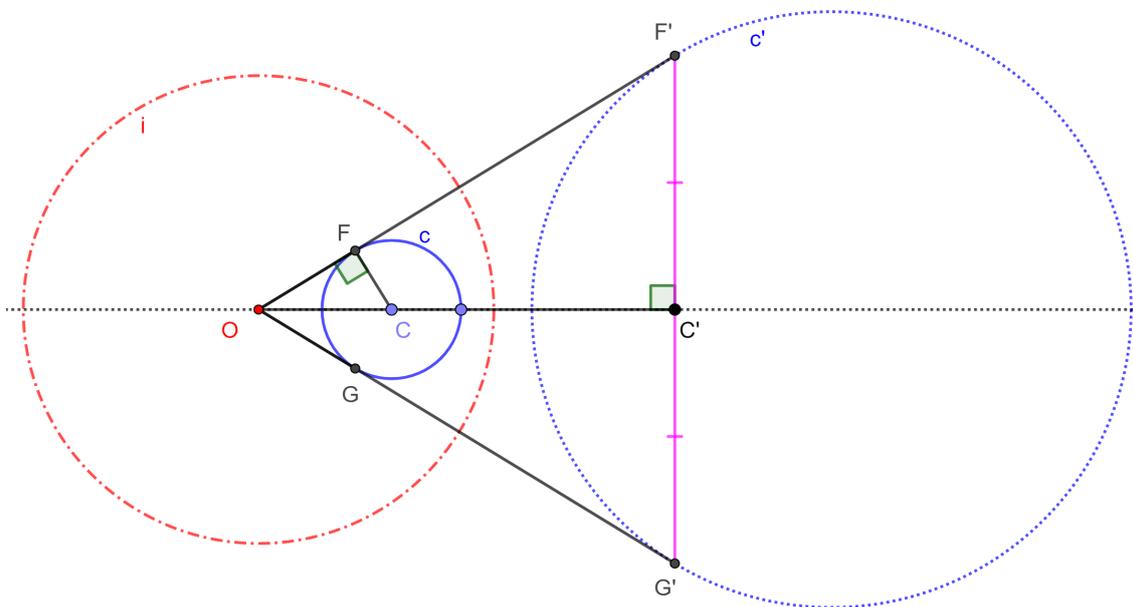
Mas $OA = 2 \cdot OC$, segue que:

$$OC' = 2 \cdot OA'.$$

□

Proposição 14 (Inverso do centro da circunferência c quando O é exterior a c). *O inverso do centro C de um círculo c , em que o centro de inversão O está no exterior de c , é o ponto médio dos pontos de tangência das retas tangentes c' que passam por O (Figura 2.16).*

Figura 2.16: Guia para a demonstração da Proposição 14. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

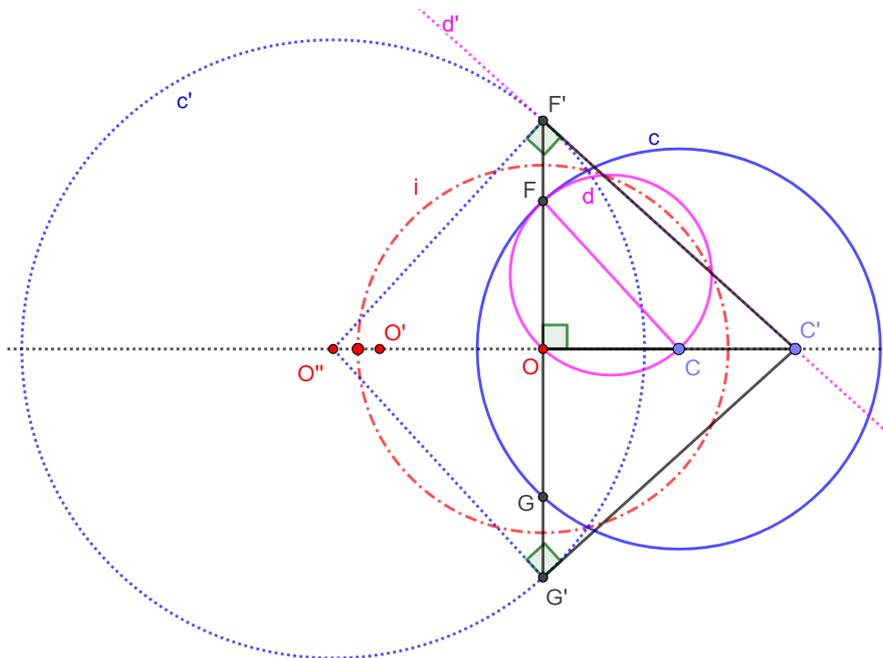
Demonstração. Como $F' = Inv(F)$ e $C' = Inv(C)$, pela Proposição 1, tem-se:

$$\triangle OFC \sim \triangle OC'F'.$$

Logo, $\angle OC'F' = \angle OFC = 90^\circ$. Isto é, OC' é mediatriz do $\triangle OF'G'$ e $F'C' = C'G'$. □

Proposição 15 (Inverso do centro da circunferência c quando O é interior a c). *O inverso do centro C de um círculo c , em que o centro de inversão O está no interior de c , é a interseção das retas tangentes a $c' = Inv(c, i)$ pelas interseções da perpendicular a OC passando por O (Figura 2.17).*

Figura 2.17: Guia para a demonstração da Proposição 15. Versão interativa [aqui](#).

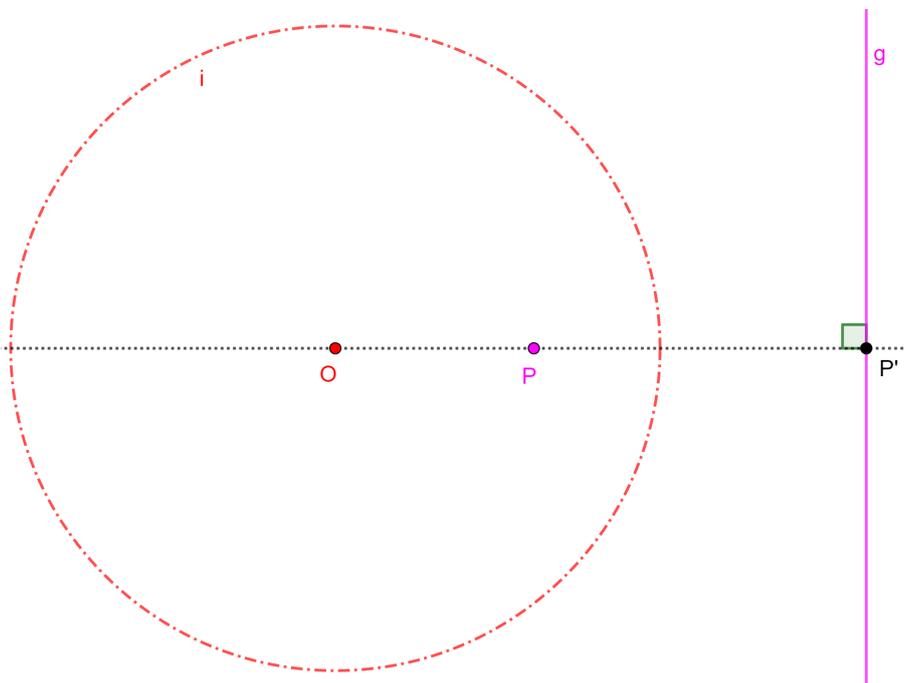


Fonte: O autor.

Demonstração. Seja d a circunferência circunscrita ao $\triangle OCF$. Como $\angle COF = 90^\circ$ segue FC é diâmetro de d . Logo, d e c são tangentes em F . Sendo $F' = Inv(F, i)$ e $d' = Inv(d, i)$ têm-se que d' e c' são tangentes em F' . Sejam $O' = Inv(O, c)$ e $O'' = Inv(O', i)$. Viu-se na Proposição 11 que O'' é o centro de c' e $\angle O''F'C' = 90^\circ$. \square

2.10 Polo e Polar

Definição 4 (Polo e Polar). *Considera-se uma circunferência de inversão i de centro O e os pontos pares de inversão P e P' . A reta g , perpendicular a OP' passando por P' , é chamada Polar de P e o ponto P é denominado Polo de g (Figura 2.18).*

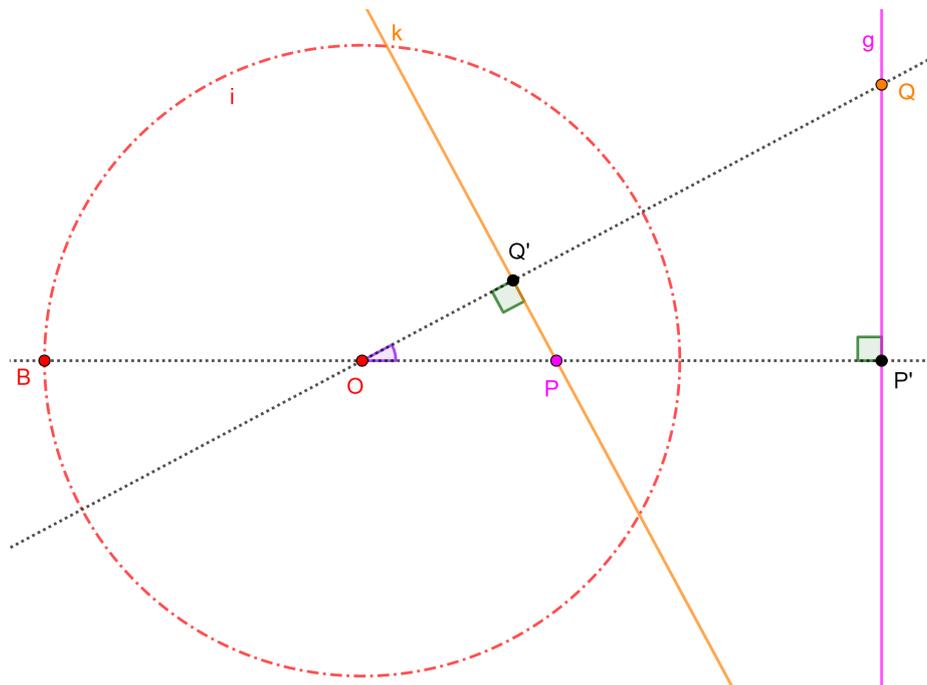
Figura 2.18: Guia para a Definição 4. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Philippe de la Hire foi um matemático francês que trabalhou em seções cônicas e em geodésia e astronomia. Nasceu em 1640 e morreu em 1718 [32].

Teorema 16 (La Hire). *Com referência a Figura 2.19, o ponto Q está na Polar de P (reta g) se, e somente se, P está na Polar de Q (reta k).*

Figura 2.19: Guia para a demonstração do Teorema 16. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Considera-se inicialmente que $Q \in g$, e g é a Polar do Polo P , quer-se provar que $P \in k$, sendo k Polar do Polo Q . Da definição de inversão

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = OB^2$$

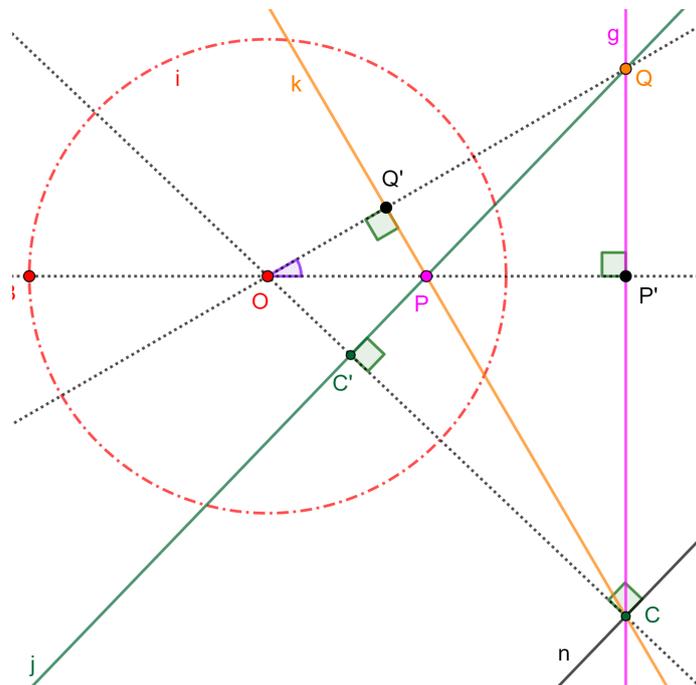
e o ângulo comum $\angle Q'OP = \angle P'OQ$ tem-se, pelo critério de semelhança **LAL**, que:

$$\triangle OP'Q \sim \triangle OQ'P.$$

Logo, $\angle OQ'P = \angle OP'Q = 90^\circ$. Ou seja, $P \in k$. A prova da recíproca é análoga. □

Corolário 17. Com referência a Figura 2.20, seja $C = k \cap g$. Se três pontos (Polos) são colineares, por exemplo P, Q e C' , então suas Polares, g, k e n , são concorrentes e vice-versa.

Figura 2.20: Guia para a demonstração do Corolário 17. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Pelo Teorema 16 a Polar j do Polo C deve passar por P e Q . Assim como a Polar n de C' passa por C . \square

Capítulo 3

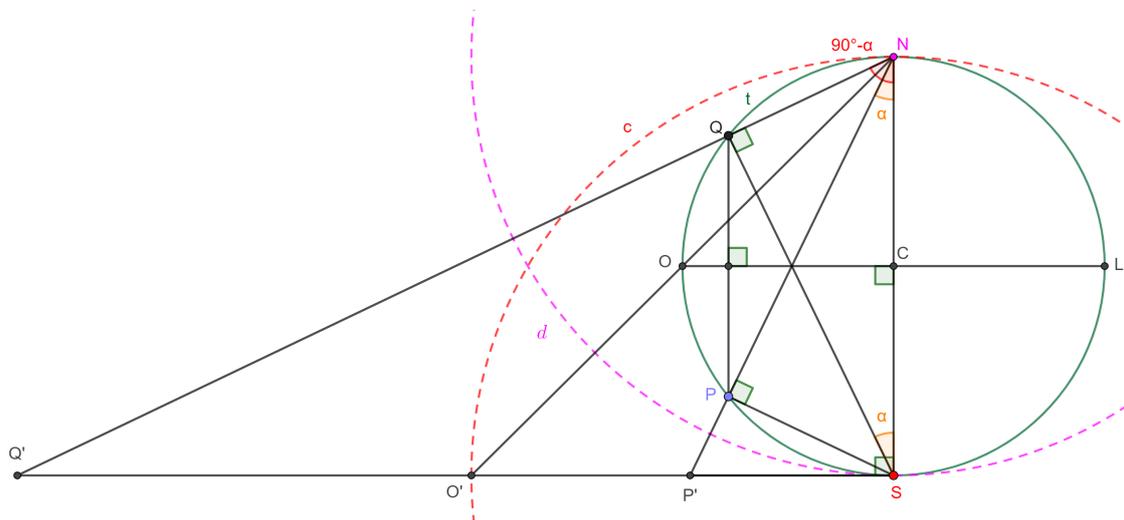
Aplicações da inversão.

3.1 Projção Estereográfica.

Numa Projção Estereográfica qualquer ponto P na superfície de uma esfera, por exemplo a Terra, é representado, sobre um plano tangente a ela, por outro ponto P' .

Na Figura 3.1 a circunferência t , de centro C , representa um corte transversal da superfície da Terra. Suponha-se que o ponto de tangência seja o polo Sul S . A semirreta que parte do polo Norte N e passa por $P \in t$ intersepta uma perpendicular ao segmento NS em P' .

Figura 3.1: Inversão e Projção Estereográfica da Terra. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Proposição 18. *Os pontos P e P' formam um par inversivo relativo a circunferência d com centro em N e raio NS (Figura 3.1).*

Demonstração. Seja $\angle SNP = \alpha$. Do triângulo NPS , retângulo em P , segue que:

$$NP = NS \cos(\alpha).$$

Analogamente, do triângulo NSP' , retângulo em S , tem-se:

$$\cos(\alpha) = \frac{NS}{NP'}.$$

Juntando as duas últimas equações encontra-se:

$$NP \cdot NP' = NS^2.$$

Isto é, P e P' são inversos relativos a d . □

Seja o ponto Q a reflexão de P relativa a uma perpendicular a NS passando por C (projeção ortogonal do equador da Terra). Pela Proposição 18 vale que Q e sua Projeção Estereográfica Q' formam um par inversivo relativo a d (Figura 3.1).

Proposição 19. *Os pontos P' e Q' formam um par inversivo relativo a circunferência c com centro em S e raio NS (Figura 3.1).*

Demonstração. Pela simetria da reflexão $\angle QSN = \alpha$. Do triângulo SQN , retângulo em Q , segue que:

$$\angle SNQ = 90^\circ - \alpha.$$

Do triângulo NPS , retângulo em P , chega-se a:

$$SP = NS \sin(\alpha).$$

Analogamente, do triângulo NSP' , retângulo em S , tem-se:

$$\tan(\alpha) = \frac{SP'}{NS}.$$

Do mesmo modo, do triângulo NSQ' , retângulo em S , segue:

$$\frac{1}{\tan(\alpha)} = \tan(90^\circ - \alpha) = \frac{SQ'}{NS}.$$

Manipulando as duas últimas equações encontra-se:

$$SP' \cdot SQ' = NS^2.$$

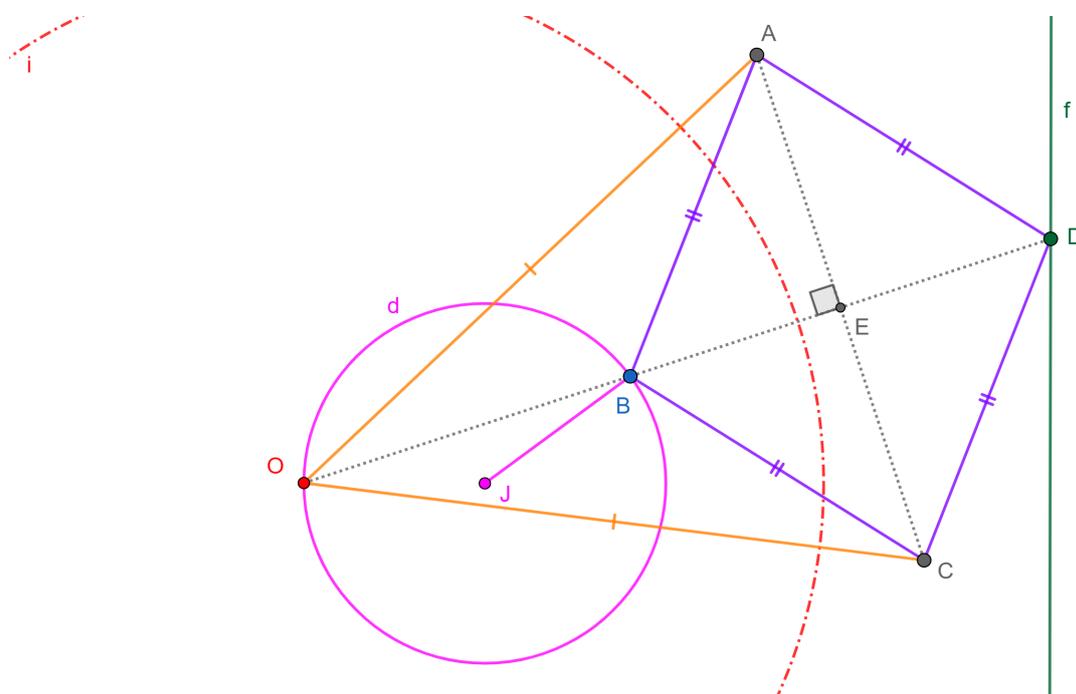
Isto é, P' e Q' são inversos relativos a c . □

3.2 Mecanismo de Peaucellier–Lipkin

O inversor de Peaucellier–Lipkin, inventado em 1864, foi o primeiro mecanismo plano capaz de transformar movimento de rotação em movimento retilíneo perfeito, e vice-versa.

Na Figura 3.2 podem ser vistas seis barras de comprimento fixo com as restrições de $OA = OC$ e $AB = BC = CD = DA$. Isto é, as quatro últimas formam um losango. Além disso, o ponto O é fixo. O ponto B é restringido a mover-se ao longo duma circunferência d , centrada em J (ponto da mediatriz do segmento OB), por outra barra de comprimento fixo BJ .

Figura 3.2: Inversão e Mecanismo de Peaucellier–Lipkin. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Então o ponto D necessariamente terá que mover-se ao longo de uma linha reta f (mostrada em verde). Reciprocamente, se o ponto D fosse restringido a mover-se ao longo de uma linha, que não passa por O , então o ponto B teria necessariamente que mover-se ao longo de um círculo (passando por O).

Seja E o ponto de encontro das diagonais do losango $ABCD$. Tem-se que $BE = ED$ e $\angle BEA = 90^\circ$. Segue que:

$$OB \cdot OD = (OE - BE)(OE + BE),$$

$$OB \cdot OD = OE^2 - BE^2.$$

Somando e subtraindo EA^2 reescreve-se:

$$OB \cdot OD = (OE^2 + EA^2) - (BE^2 + EA^2).$$

Pelo Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos OEA e BEA segue:

$$OB \cdot OD = OA^2 - AB^2 = r^2.$$

Do fato de OA e AB serem barras rígidas, com $OA > AB$, a última igualdade pode-se escrever como o quadrado de um número positivo r . Isto é,

$$r = \sqrt{OA^2 - AB^2}.$$

Logo, a equação $OB \cdot OD = r^2$ significa que existe uma circunferência i , de raio r e centrada em O , para a qual os pontos B e D são pares inversivos. A inversa da circunferência d , que passa pelo centro de inversão, é uma reta f que não passa por O . Ou seja, se $B \in d$, então $D \in f$. Vale também a recíproca. Esses resultados foram provados na Proposição 3 e na Proposição 4.

Capítulo 4

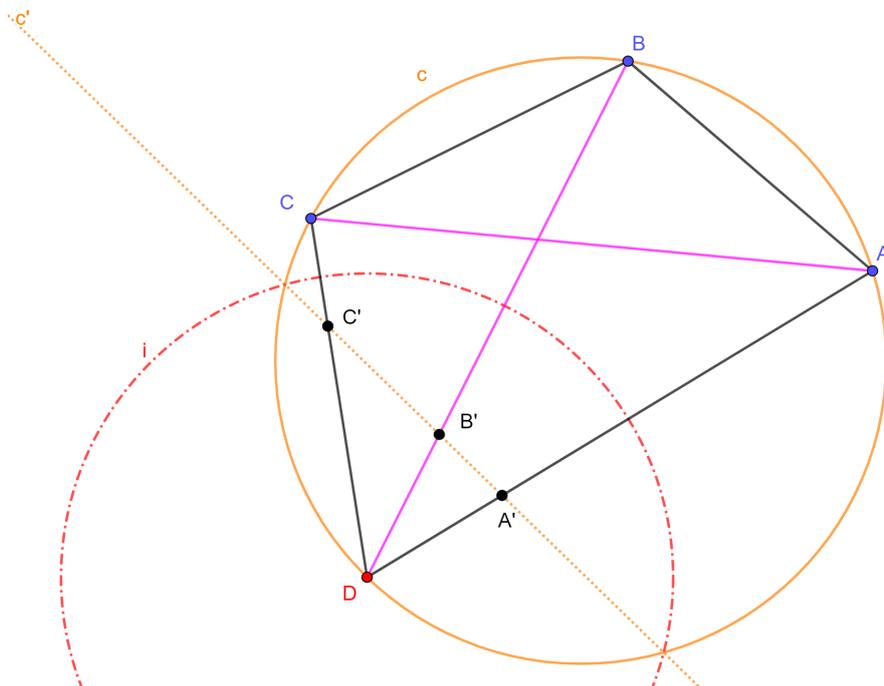
Prova de Teoremas utilizando inversão.

4.1 Teorema de Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu (85-165 d.C., Alexandria, Egito) publicou o tratado “Almagesto” de treze livros defendendo a teoria geocêntrica do movimento dos planetas, a Lua e o Sol. Esta prevaleceu por mais de 1400 anos, até que Nicolau Copérnico revolucionou a Astronomia com o modelo heliocêntrico em 1543. No livro I do “Almagesto”, Ptolomeu enunciou o teorema que leva seu nome. A partir do mesmo ele conseguiu calcular a função comprimento de corda (análoga a função seno atual) com intervalo de meio grau e cinco casas decimais de precisão [1]. A fórmula do Teorema de Ptolomeu, quando aplicada a um retângulo, transforma-se na fórmula do Teorema de Pitágoras.

Teorema 20 (Ida de Ptolomeu). *Em um quadrilátero inscritível $ABCD$ o produto dos comprimentos das diagonais é igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos. Isto é, vale:*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Figura 4.1: Guia para a demonstração da Teorema 20. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Demonstração. Com referência a Figura 4.1, seja c a circunferência circunscrita ao quadrilátero $ABCD$. Considera-se uma circunferência de inversão i com centro num dos vértices do quadrilátero, por exemplo D , e raio arbitrário r . Como c passa pelo centro de inversão, sua inversa c' é uma reta (Proposição 4). Ou seja, os pontos A' , B' e C' (inversos de A , B e C) são colineares e vale que:

$$A'C' = A'B' + B'C'. \quad (4.1.1)$$

Pelas propriedades da inversão de um segmento (Proposição 1) têm-se:

$$A'C' = \frac{r^2}{DA \cdot DC} AC, \quad (4.1.2)$$

$$A'B' = \frac{r^2}{DA \cdot DB} AB, \quad (4.1.3)$$

$$B'C' = \frac{r^2}{DB \cdot DC} BC. \quad (4.1.4)$$

Substituindo (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.4) em (4.1.1) encontra-se:

$$\frac{r^2}{DA \cdot DC} AC = \frac{r^2}{DA \cdot DB} AB + \frac{r^2}{DB \cdot DC} BC.$$

Multiplicando a equação anterior por $DA \cdot DB \cdot DC$ e simplificando segue que:

$$AC \cdot DB = AB \cdot DC + BC \cdot DA.$$

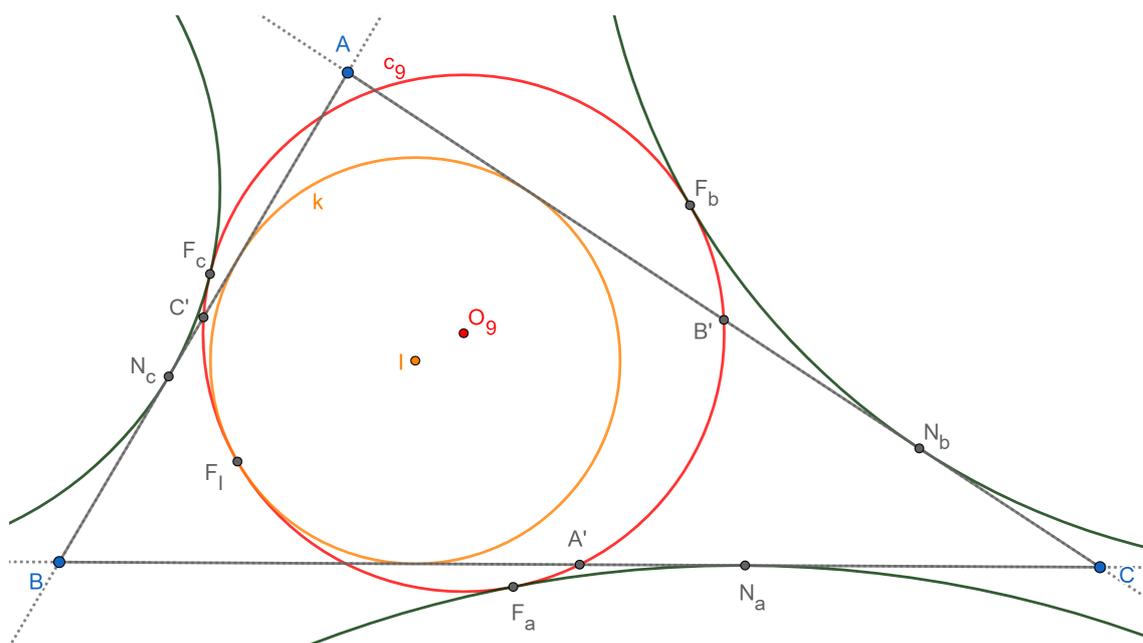
□

4.2 Teorema de Feuerbach

Karl Feuerbach foi um geômetra que descobriu o círculo de nove pontos de um triângulo. Nasceu em 1800 e morreu em 1834 [30].

Teorema 21 (Feuerbach). *O círculo de nove pontos c_9 (vermelho) é tangente ao incírculo k (amarelo) e aos três ex-círculos do $\triangle ABC$ (Figura 4.2). Os pontos de tangência F_I , F_a , F_b e F_c são denominados de Feuerbach.*

Figura 4.2: Apresentação do Teorema de Feuerbach. Versão interativa [aqui](#).

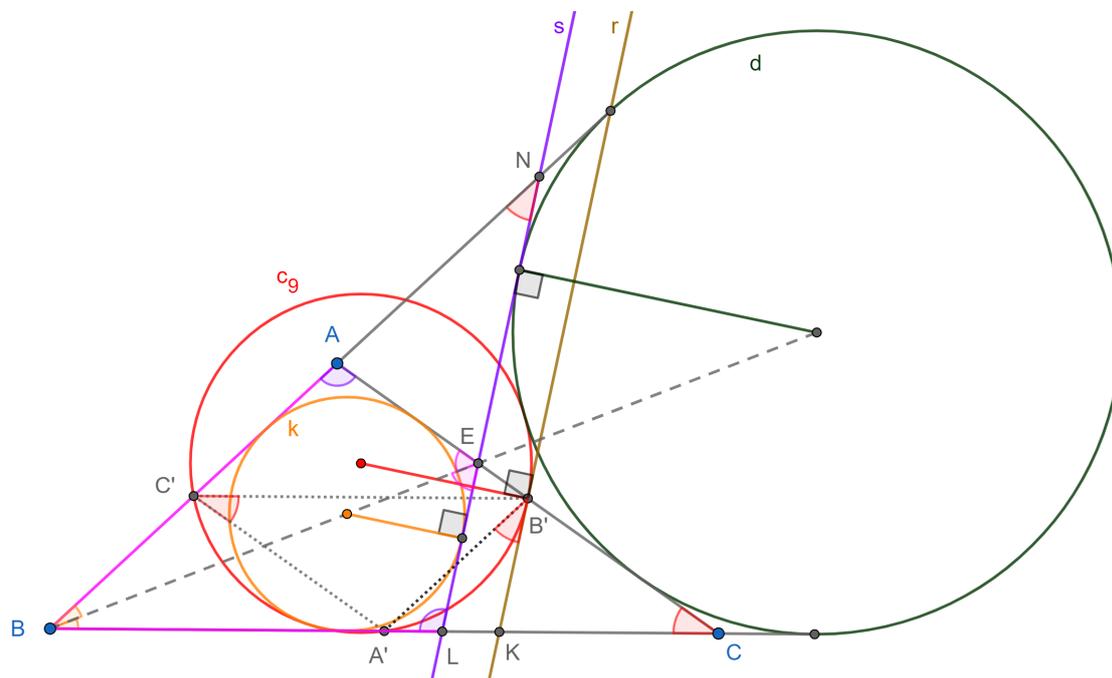


Fonte: O autor.

Antes de demonstrar o teorema anterior precisa-se estudar três lemas [4].

Lema 22. *Sejam A' , B' e C' os pontos médios dos lados de um triângulo ABC , c_9 a sua circunferência dos nove pontos, s a segunda (diferente de AC) reta tangente interna as circunferências inscrita k e ex-inscrita d (correspondente ao vértice B). Seja ainda r uma reta tangente a c_9 por B' . Então r é paralela a s (Figura 4.3).*

Figura 4.3: Lema 22. Teorema de Feuerbach. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja o ponto $K = r \cap BC$. Por serem ângulos de segmentos e inscritos referentes a mesma corda $A'B'$ de c_9 vale que $\angle KB'A' = \angle B'C'A'$. Como $C'B'$ é base média relativa a BC , então $A'CB'C'$ é um paralelogramo e

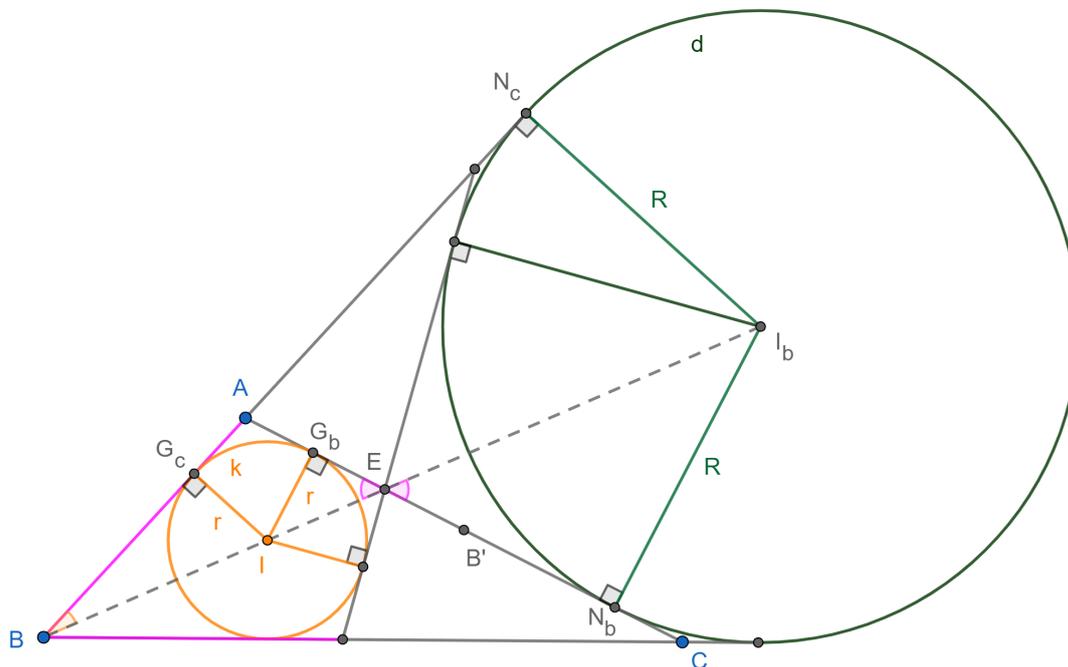
$$\angle B'C'A' = \angle A'CB'.$$

Sejam o ponto $E = s \cap AC$ e $L = s \cap BC$. Como a reta BE é bissetriz por construção obtêm-se que $\angle EBA = \angle EBL$ e $\angle BEL = \angle BEA$. Pelo critério de congruência **ALA** segue que $\triangle BEL \equiv \triangle BEA$. Consequentemente, $\angle BAE = \angle BLE$ e $BA = BL$.

Seja o ponto $N = s \cap BA$. Pelo critério de congruência **ALA** vale que $\triangle BLN \equiv \triangle BAC$. Com isto, $\angle BNL = \angle BCA$. Como $\angle BNL = \angle A'B'K$ as retas r e s são paralelas. \square

Lema 23. *Sejam G_b e N_b os pontos de interseção da circunferência inscrita $k(I)$ e ex-inscrita $d(I_b)$ do triângulo ABC com o segmento AC , respectivamente. Então: a) O ponto médio do segmento AC , isto é B' , também é ponto médio do segmento G_bN_b . b) Os pontos I e I_b dividem harmonicamente o segmento BE (Figura 4.4).*

Figura 4.4: Lema 23. Teorema de Feuerbach. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. A prova do item a) encontra-se no Corolário 2.1 em [20].

Item b). Sejam G_c e N_c os pontos de interseção da circunferência inscrita $k(I)$ e ex-inscrita $d(I_b)$ do triângulo ABC com a reta AB , respectivamente (Figura 4.4). Por AA vale a semelhança:

$$\triangle BG_cI \sim \triangle BN_cI_b.$$

Segue que:

$$\frac{IB}{I_bB} = \frac{IG_c}{I_bN_c} = \frac{r}{R}. \tag{4.2.1}$$

Por AA também vale a semelhança:

$$\triangle IG_bE \sim \triangle I_bN_bE.$$

Segue que:

$$\frac{IE}{I_bE} = \frac{IG_b}{I_bN_b} = \frac{r}{R}. \tag{4.2.2}$$

De (4.2.1) e (4.2.2) encontra-se:

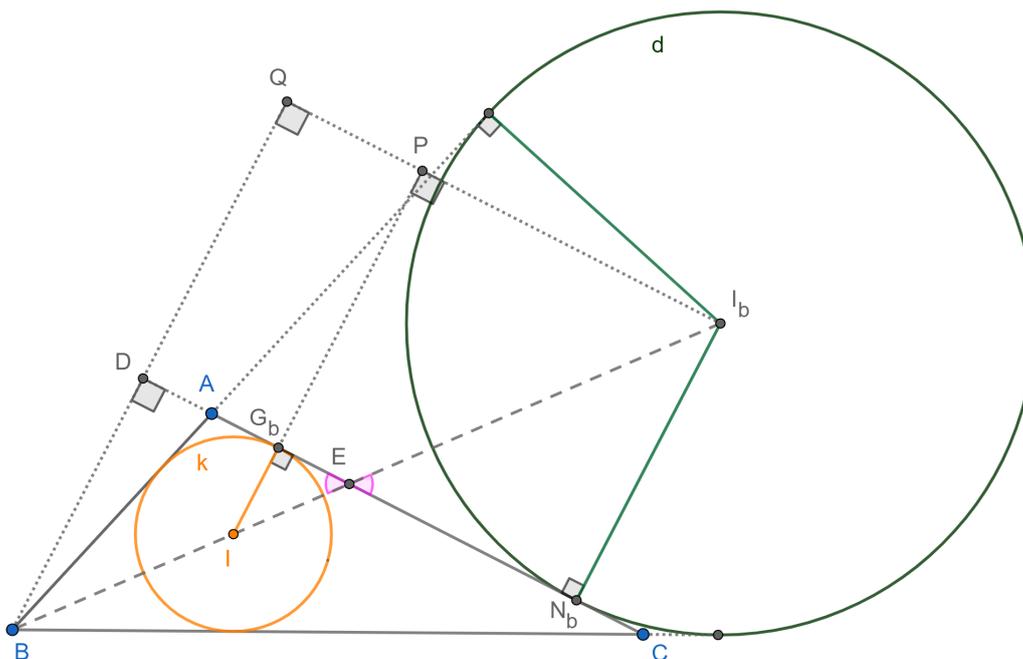
$$\frac{IB}{I_bB} = \frac{IE}{I_bE}.$$

A equação anterior significa que os pontos I e I_b dividem harmonicamente o segmento BE e

vice-versa. Isto é, os pontos B e E dividem harmonicamente o segmento II_b . □

Lema 24. *Seja D o pé da altura do vértice B sobre a reta AC . Os pontos D e E são conjugados harmônicos em relação ao segmento G_bN_b (Figura 4.5).*

Figura 4.5: Lema 24. Teorema de Feuerbach. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Pela semelhança $\triangle IG_bE \sim \triangle I_bN_bE$ sabe-se que:

$$\frac{G_bE}{N_bE} = \frac{IE}{I_bE}.$$

Como I e I_b dividem harmonicamente o segmento BE (Lema 23) encontra-se:

$$\frac{G_bE}{N_bE} = \frac{IB}{I_bB}. \tag{4.2.3}$$

Traça-se por I_b uma paralela a reta AC e marca-se sobre esta as projeções ortogonais Q e P dos pontos B e I , respectivamente. Pelo Teorema de Tales tem-se:

$$\frac{IB}{I_bB} = \frac{QP}{QI_b} = \frac{G_bD}{N_bD}. \tag{4.2.4}$$

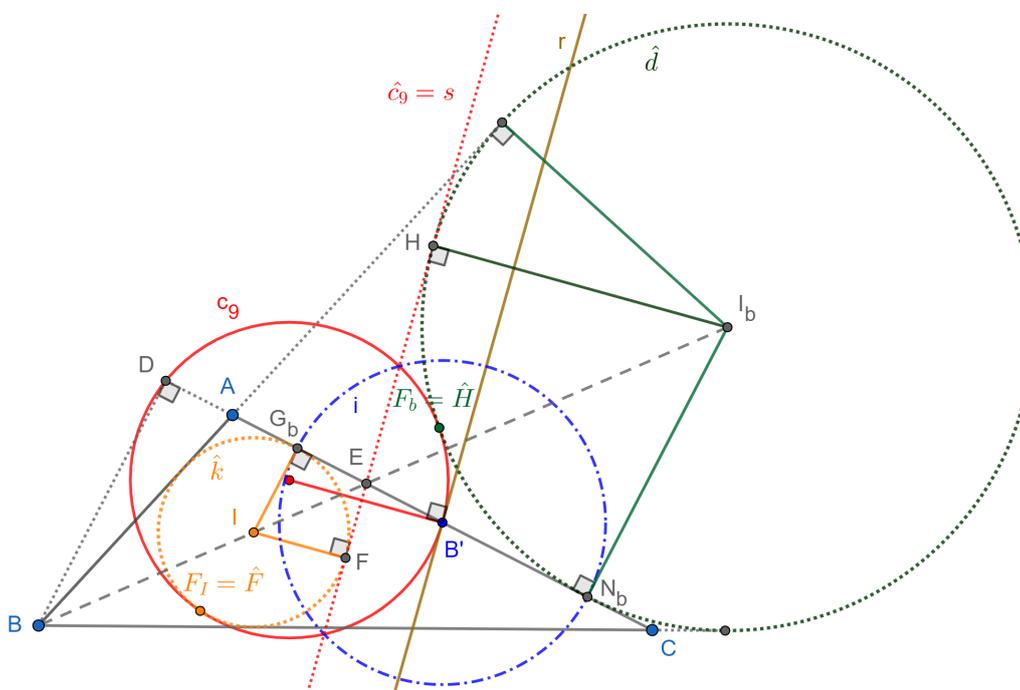
De (4.2.3) e (4.2.4) encontra-se:

$$\frac{G_b E}{N_b E} = \frac{G_b D}{N_b D}.$$

A equação anterior significa que os pontos D e E dividem harmonicamente o segmento $G_b N_b$ e vice-versa. Isto é, os pontos G_b e N_b dividem harmonicamente o segmento DE . \square

Teorema 25 (Feuerbach). *O círculo de nove pontos c_9 (vermelho) é tangente ao incírculo k (amarelo) e ao ex-círculo d do $\triangle ABC$ (Figura 4.6).*

Figura 4.6: Demonstração do Teorema de Feuerbach. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Considera-se uma circunferência de inversão i , com centro em B' e diâmetro $G_b N_b$ (Figura 4.6). Isto é possível pois viu-se no Lema 23 que $G_b B' = B' N_b$.

Por construção, as circunferências k e d são ortogonais a i . Pela Proposição 9 elas são invariantes após a inversão em relação a i . Ou seja, $\hat{k} = Inv(k, i) = k$ e $\hat{d} = Inv(d, i) = d$. A reta AC também é invariante, pois passa pelo centro de inversão.

A circunferência de nove pontos do $\triangle ABC$, ou seja c_9 , passa pelo centro de inversão B' . Consequentemente, sua inversa \hat{c}_9 é uma reta. Como os pontos D e E são pares harmônicos relativos ao segmento $G_b N_b$ (Lema 24), então, pela Proposição 10, $\hat{D} = Inv(D, i) = E$ e \hat{c}_9 passa pelo ponto E .

Adicionalmente, pela Proposição 4, \hat{c}_9 é paralela a reta r (tangente a c_9 por B'). Também viu-se no Lema 22 que r é paralela com a reta s , segunda tangente interna comum de k e d e que passa por E . Ou seja, $\hat{c}_9 = s$.

Como \hat{c}_9 é tangente as circunferências \hat{k} e \hat{d} , pelo Corolário 7, segue que c_9 é tangente com k e d . De fato, os pontos de Feuerbach são $F_I = Inv(F, i) = \hat{F}$ e $F_b = Inv(H, i) = \hat{H}$.

A demonstração da tangência entre c_9 e os outros dois ex-incírculos é feita de forma análoga. \square

Uma apresentação em vídeo do Teorema de Feuerbach está disponível [aqui](#).

Capítulo 5

Exercícios de construção geométrica por inversão

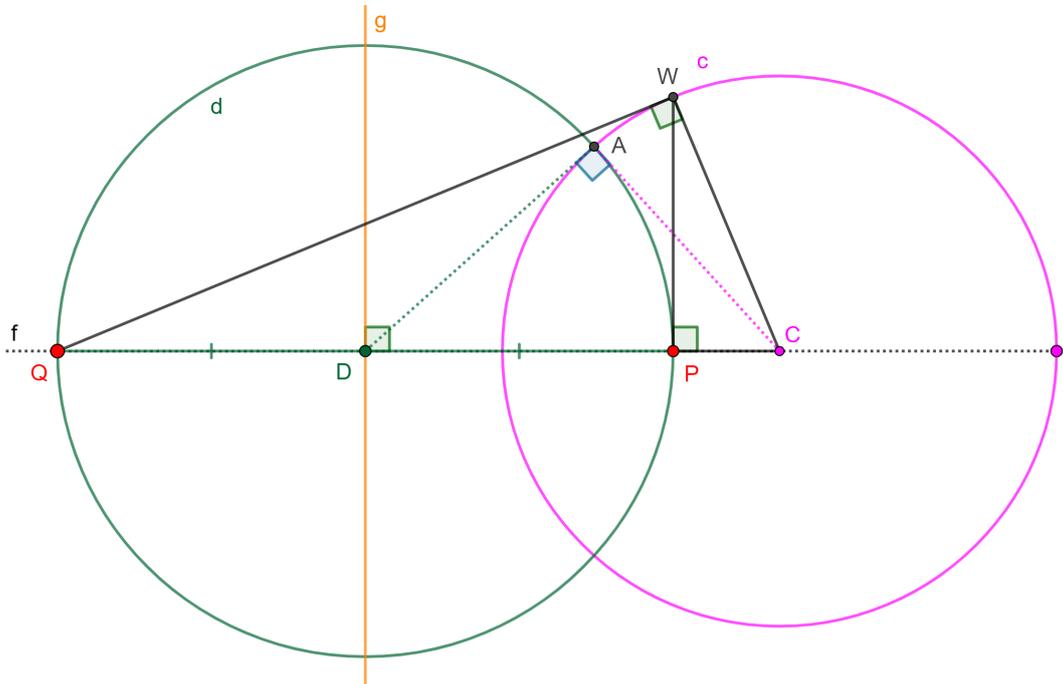
5.1 Transformação de reta e circunferência em circunferências concêntricas

Exercício 5. *Transformar por inversão a reta g e a circunferência c em circunferências concêntricas. Construir dinamicamente as circunferências tangentes simultaneamente a g e c .*

5.1.1 Resolução do Exercício 5.

A Figura 5.1 mostra uma construção geométrica inicial.

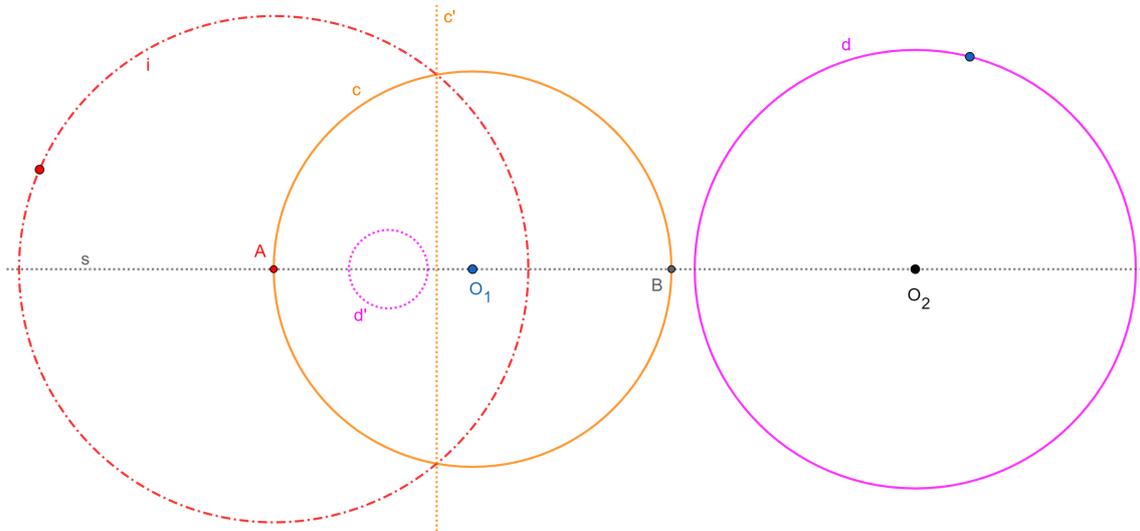
Figura 5.1: Construção geométrica inicial para o Exercício 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

1. Traçar a reta f perpendicular a g e passando pelo centro C de c . Marcar o ponto $D = g \cap f$.
2. Esboçar um ponto $A \in c$ tal que $\angle DAC = 90^\circ$. Construir com centro em D a circunferência d de raio DA e marcar os pontos mágicos P e Q na interseção de d com f . d é perpendicular com c e g simultaneamente.
3. Os pontos P e Q são chamados mágicos porque são os únicos onde pode ser colocado o centro de uma circunferência de inversão que transforma c e g em circunferências concêntricas. Vale que: $P = Inv(Q, c)$ e $Q = Inv(P, c)$. Entendendo a reflexão relativa a reta g como uma operação de inversão relativa a uma circunferência de raio infinito pode-se escrever também: $P = Inv(Q, g)$ e $Q = Inv(P, g)$.
4. A circunferência i , com centro em Q , transforma por inversão c e g nas circunferências concêntricas c' e g' , respectivamente (Figura 5.2). O centro comum destas últimas é o ponto $P' = Inv(P, i)$ (Proposição 11 e Proposição 12).
5. Uma circunferência r que tangencie simultaneamente c' e g' (relativamente fácil de construir) é transformada pela inversão relativa a i na circunferência r' que tangencia tanto c como g (difícil de construir por outro caminho).

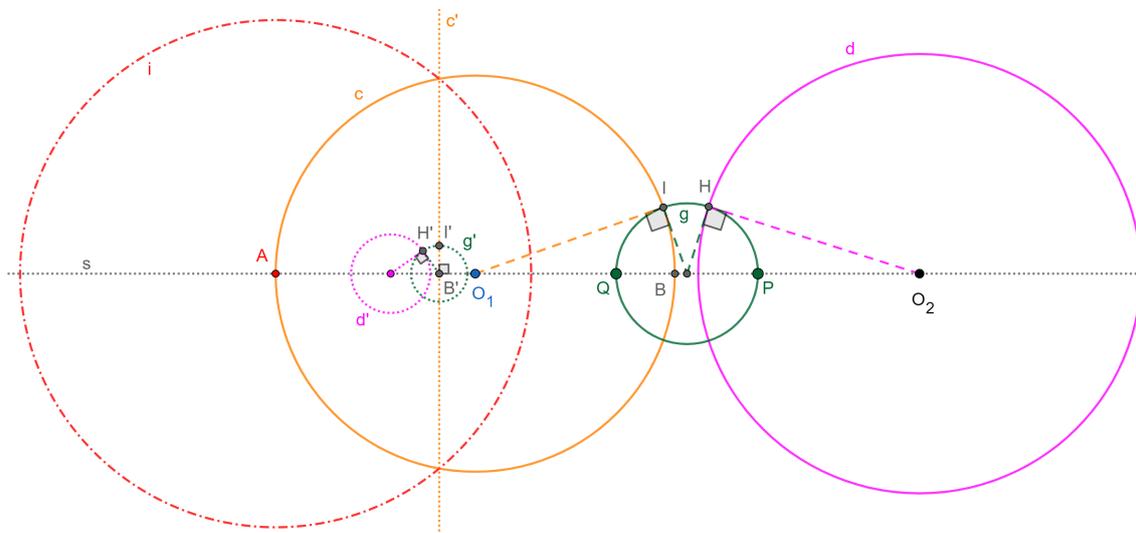
Figura 5.3: Construção geométrica inicial para o Exercício 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

1. Traçar a reta s passando pelos centros O_1 e O_2 das circunferências c e d . Marcar os pontos A, B na interseção de s com c .
2. Com centro no ponto A construir uma circunferência de inversão i de raio arbitrário. Como c passa pelo centro de inversão, sua inversa é a reta c' . O inverso de d é a circunferência d' .
3. Agora a situação é análoga ao Exercício 5. Marcar o ponto $B' = Inv(B, i) = s \cap c'$. Construir uma tangente a d' passando por B' e destacar o ponto de interseção H' . Com centro em B' e raio $B'H'$ esboçar a circunferência g' . Têm-se $g' \perp c'$ e $g' \perp d'$.
4. Construir a circunferência $g = Inv(g', i)$. Pelo Corolário 7 segue que $g \perp c$ e $g \perp d$. Marcar os pontos mágicos P e Q nas interseções de g e s .
5. Como c e g são ortogonais, pela Proposição 9, P e Q formam um par de inversão relativo a c . Analogamente, como d e g são ortogonais, pela Proposição 9, P e Q formam um par de inversão relativo a d .

Figura 5.4: Construção geométrica final para o Exercício 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

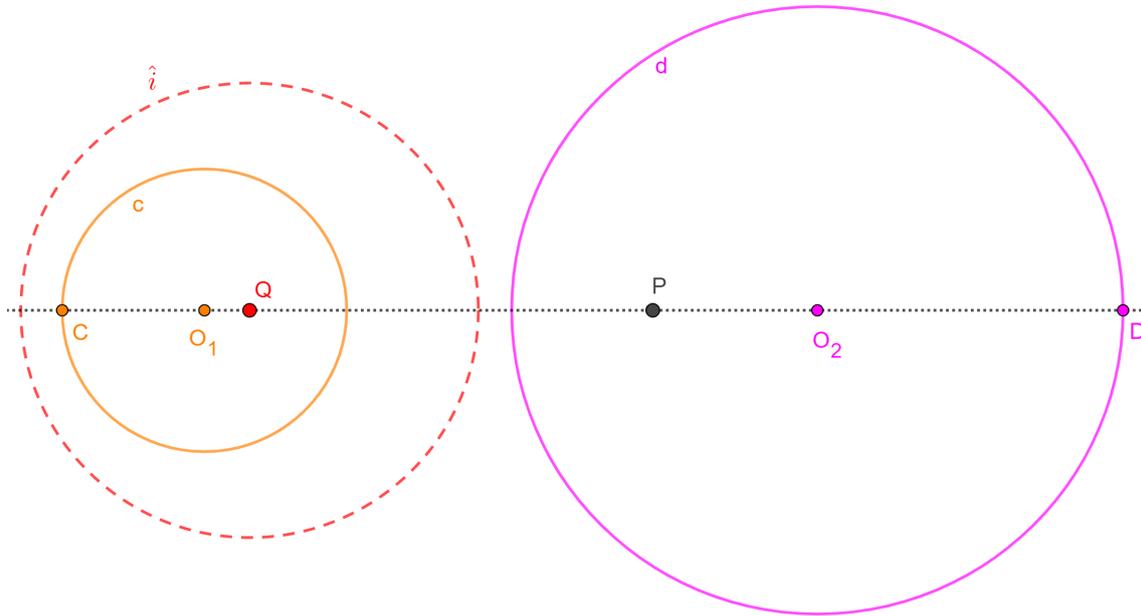
5.3 Famílias de circunferências tangentes a outras duas

Exercício 7. *Sejam $c(O_1, O_1C)$ e $d(O_2, O_2D)$ círculos disjuntos. Construir dinamicamente as famílias de circunferências tangentes simultaneamente a c e d .*

5.3.1 Resolução do Exercício 7.

A Figura 5.5 mostra uma construção geométrica inicial.

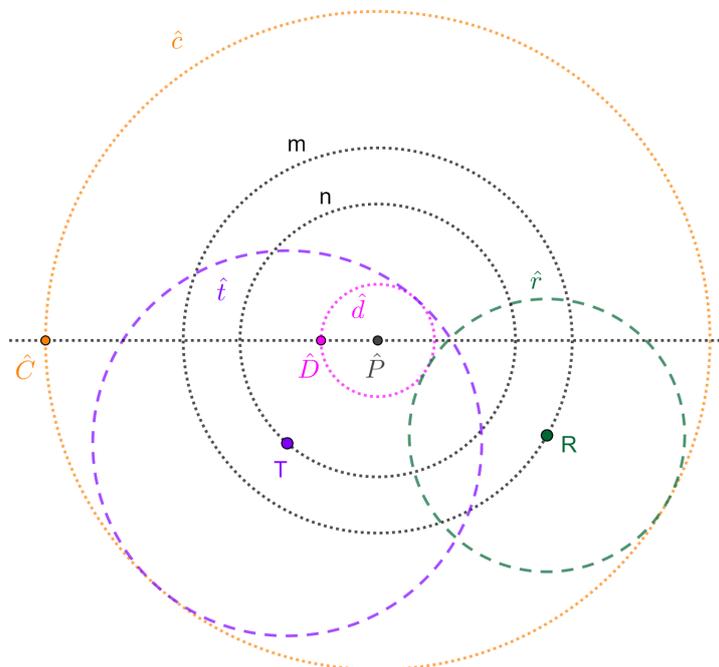
Figura 5.5: Construção geométrica inicial para o Exercício 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

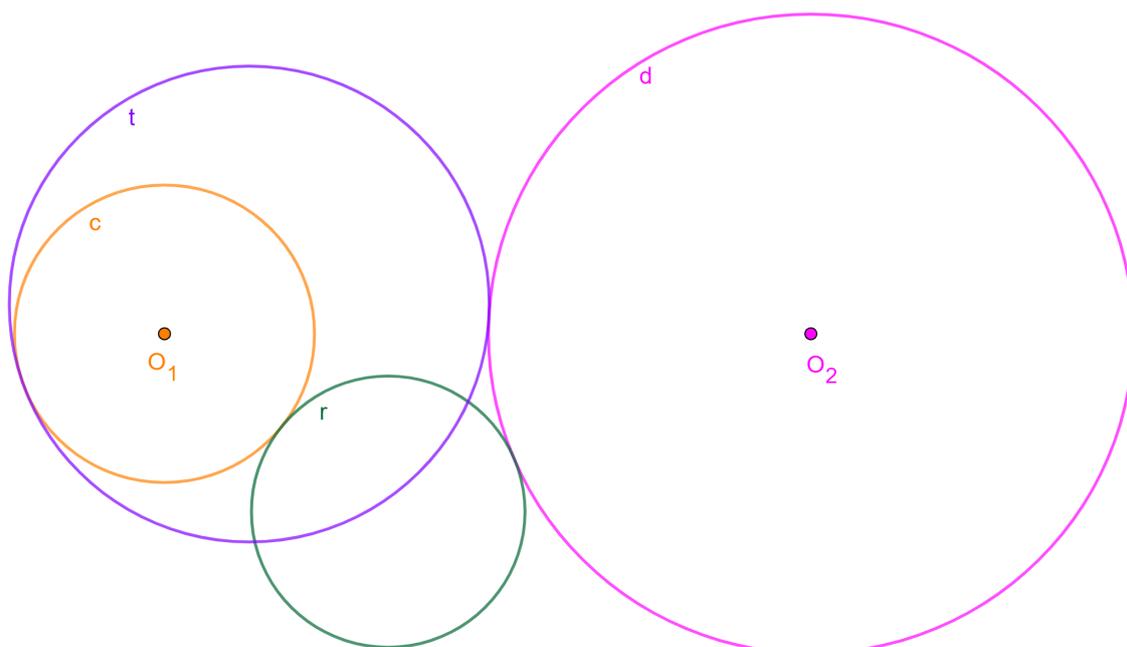
1. Suponham-se construídos os pontos mágicos P e Q (Exercício 6). Com centro em Q construir uma circunferência de inversão \hat{i} de raio arbitrário.
2. Construir as circunferências inversas $\hat{c} = Inv(c, \hat{i})$ e $\hat{d} = Inv(d, \hat{i})$ com centro comum $\hat{P} = Inv(P, \hat{i})$ (Figura 5.6).
3. Com centro em \hat{P} e raio $\frac{\hat{P}\hat{C} + \hat{P}\hat{D}}{2}$ esboçar a circunferência m . Colocar o ponto $R \in m$. Com centro em R e raio $\frac{\hat{P}\hat{C} - \hat{P}\hat{D}}{2}$ esboçar a circunferência \hat{r} .
4. Com centro em \hat{P} e raio $\frac{\hat{P}\hat{C} - \hat{P}\hat{D}}{2}$ esboçar a circunferência n . Colocar o ponto $T \in n$. Com centro em T e raio $\frac{\hat{P}\hat{C} + \hat{P}\hat{D}}{2}$ esboçar a circunferência \hat{t} . Tanto \hat{r} como \hat{t} são tangentes internamente em \hat{c} e externamente em \hat{d} .
5. As famílias de circunferências $r = Inv(\hat{r}, \hat{i})$ e $t = Inv(\hat{t}, \hat{i})$ são as soluções do problema (Figura 5.7).
6. Animar os pontos R e T da Figura 5.6.

Figura 5.6: Construção geométrica após a transformação de inversão para o Exercício 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Figura 5.7: Solução para o Exercício 7. Versão interativa [aqui](#).



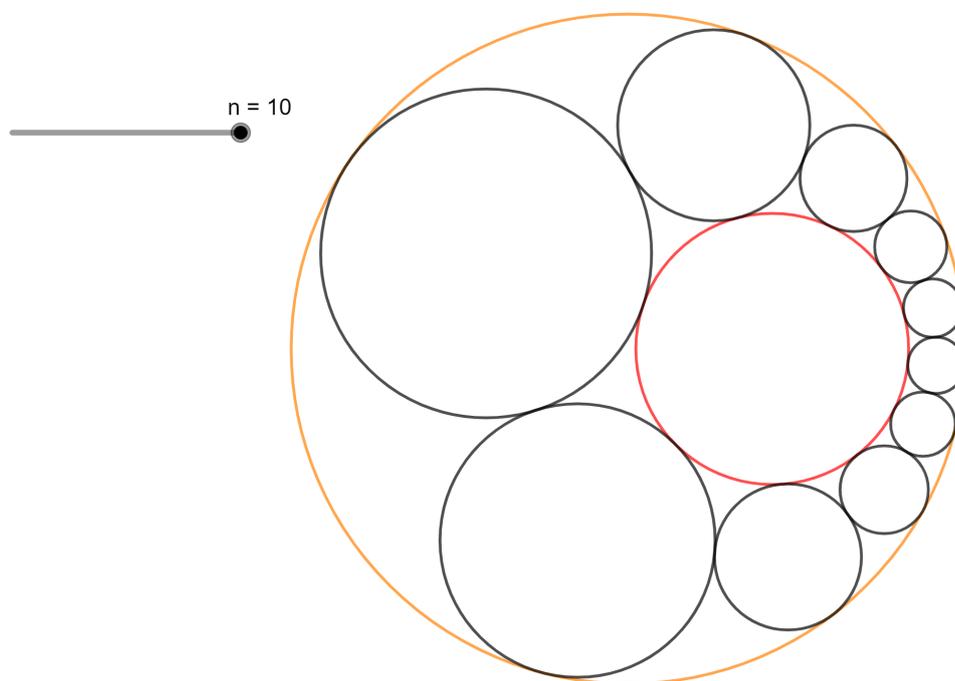
Fonte: O autor.

5.4 Corrente de Steiner

Jakob Steiner foi um matemático suíço que fez grandes contribuições para a geometria projetiva. Nasceu em 1796 e morreu em 1863 [29].

Exercício 8. A Figura 5.8 mostra uma corrente de Steiner com $n = 10$ circunferências (em preto) tangentes entre si, externamente a circunferência em vermelho e internamente a circunferência em amarelo. Reproduzir essa construção de forma dinâmica, como ilustrado na versão interativa. Isto é, permitir que $3 \leq n \leq 10$ e as circunferências pretas movimentem-se.

Figura 5.8: Construção geométrica para o enunciado do Exercício 8. Versão interativa [aqui](#).

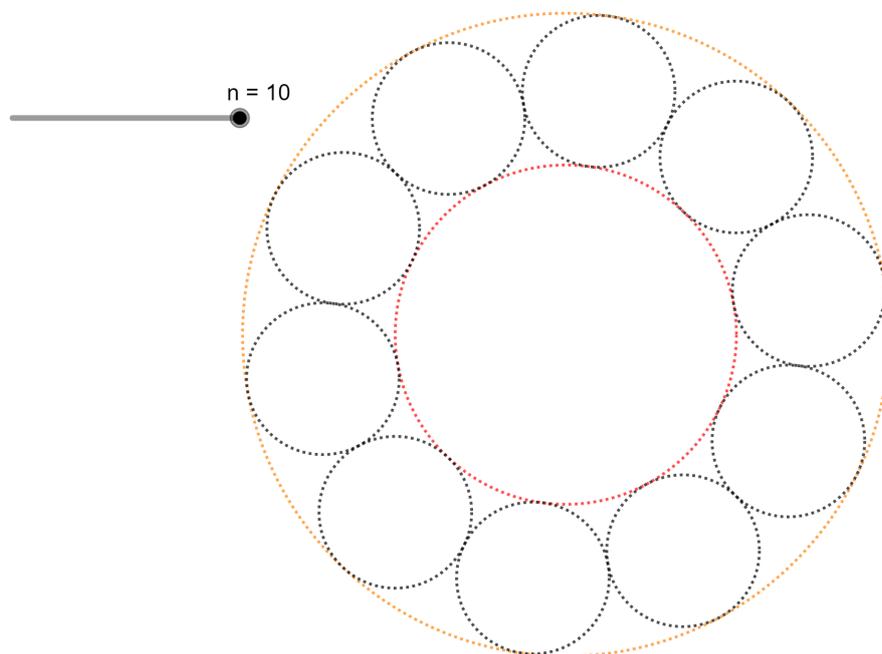


Fonte: O autor.

5.4.1 Resolução do Exercício 8.

A Figura 5.8 é obtida após a inversão da Figura 5.9. Nota-se que a relação de tangencia entre as circunferências é preservada. Porém, as circunferências tracejadas vermelha e amarela na Figura 5.9 são concêntricas. Ou seja, a construção geométrica da Figura 5.9 é muito mais simples de ser executada.

Figura 5.9: Construção geométrica para o Exercício 8. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

A Figura 5.10 permite acompanhar a discussão que segue.

1. Construir a circunferência c' com centro no ponto O e raio $r = OA$.
2. Criar um controle deslizante $3 \leq n \leq 10$, com $n \in \mathbb{N}$.
3. Pela simetria o ângulo 2α formado pelos centros de duas circunferências pretas consecutivas e O é:

$$2\alpha = \frac{360^\circ}{n}.$$

4. Definir:

$$\alpha = \frac{\pi}{n}.$$

5. Sejam ρ o raio comum das circunferências pretas, B um dos centros e C um ponto de tangência entre elas, conforme a Figura 5.10.
6. O $\triangle OBC$ é retângulo em C e $\angle BOC = \alpha$. Segue que:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\rho}{r + \rho}.$$

7. Da equação anterior coloca-se em evidência ρ . Definir:

$$\rho = \frac{r \operatorname{sen}(\alpha)}{1 - \operatorname{sen}(\alpha)}.$$

8. Define-se também $R = r + 2\rho$. Construir a circunferência d' com centro em O e raio R .

9. Construir a circunferência k com centro em O e raio $r + \rho$.

10. Colocar o ponto B sobre k com o comando:

$$B = \text{Ponto}(k).$$

11. Construir os centros das circunferências pretas, conjunto de pontos $M[i]$, com o comando:

$$M = \text{Sequencia}(\text{Girar}(B, 2 \cdot \alpha \cdot i, O), i, 1, n).$$

12. Isto leva a $B = M[n]$.

13. Construir as circunferências pretas $w'[i]$ com o comando:

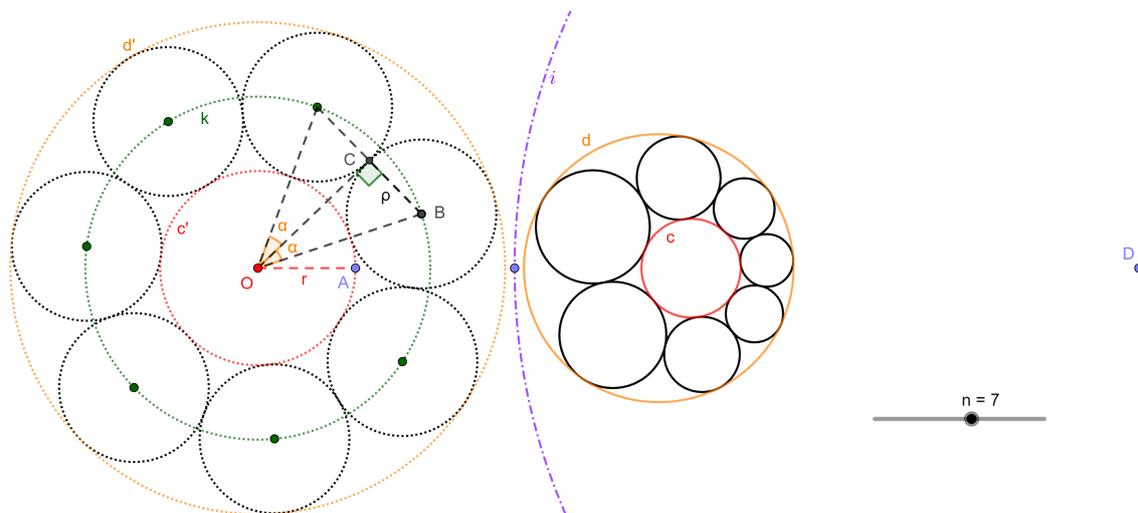
$$w' = \text{Sequencia}(\text{Circulo}(\text{Elemento}(M, j), \rho), j, 1, n).$$

14. Construir uma circunferência de inversão i com centro no ponto D .

15. Fazer a inversão de c' , d' e w' para obter c , d e w , conforme a Figura 5.10.

16. Animar o ponto B .

Figura 5.10: Construção geométrica para o Exercício 8. Versão interativa [aqui](#).



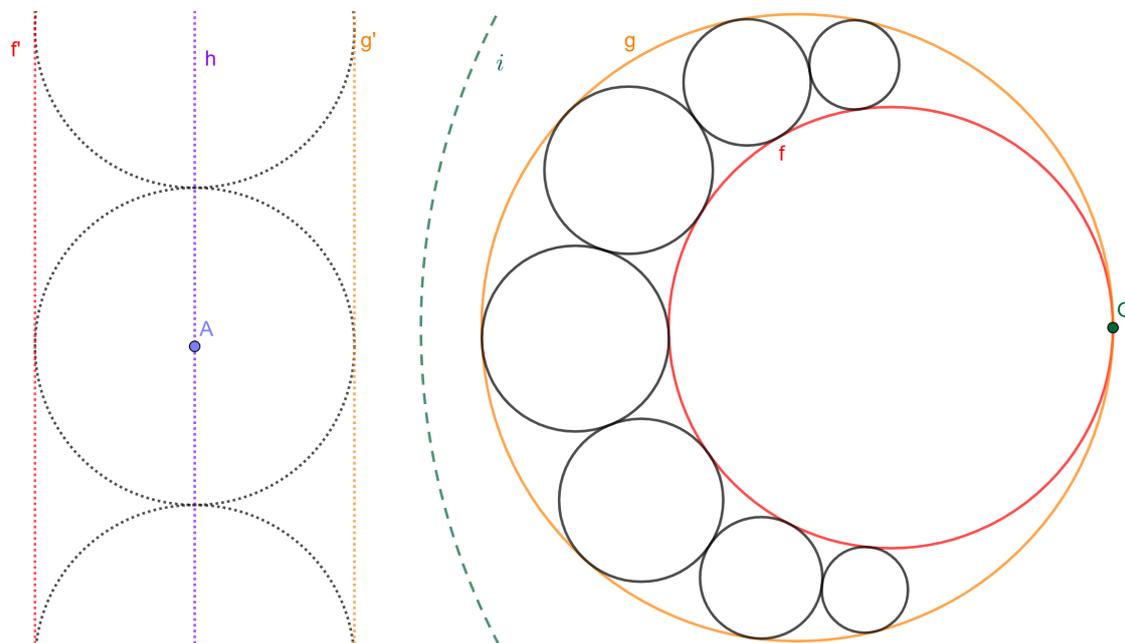
Fonte: O autor.

5.5 Corrente de Pappus

Pappus de Alexandria foi um dos grandes geômetras gregos e um de seus teoremas é citado como base da geometria projetiva moderna. Escreveu comentários sobre os Elementos de Euclides e o Almagesto de Ptolomeu. Acredita-se que nasceu em 290 e morreu em 350 antes de Cristo [31].

Exercício 9. O lado direito da Figura 5.11 mostra uma corrente de Pappus com $n = 7$ circunferências (em preto) tangentes entre si, externamente a circunferência c (em vermelho) e internamente a circunferência d (em amarelo). Reproduzir essa construção de forma dinâmica, como ilustrado na versão interativa.

Figura 5.11: Construção geométrica para o Exercício 9. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

5.5.1 Resolução do Exercício 9.

O lado direito da Figura 5.11 resulta da inversão relativo a circunferência i do lado esquerdo. As retas paralelas f' e g' , por não passarem pelo centro de inversão O , transformam-se nas circunferências f e g que passam por O .

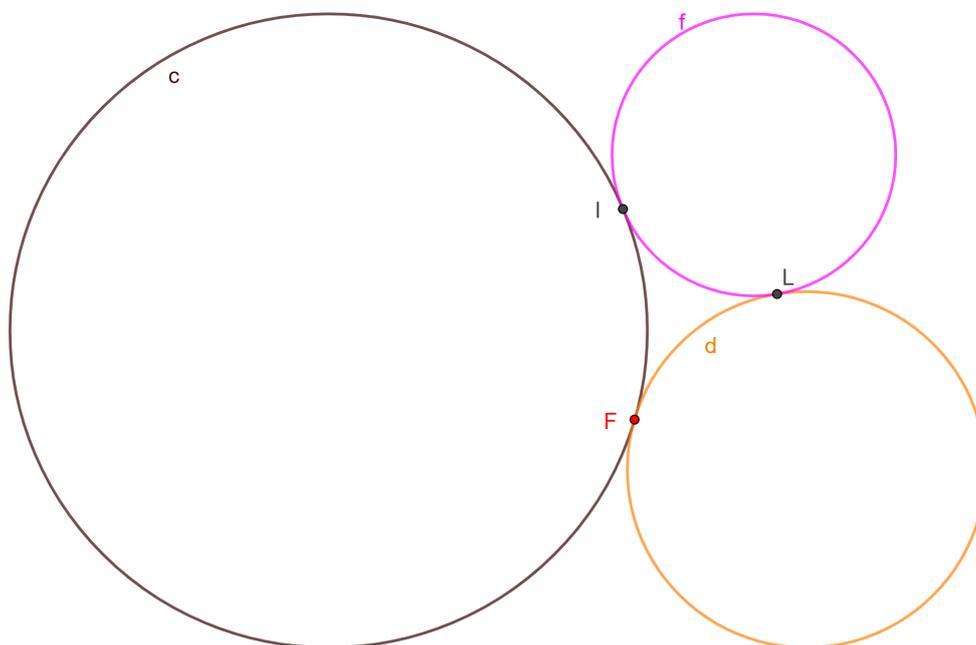
Nota-se que a relação de tangencia entre as circunferências e retas é preservada após a inversão. Porém, a construção geométrica do lado esquerdo Figura 5.11 é muito mais simples de ser executada.

Para animar a construção traça-se a reta h equidistante de f' e g' . Coloca-se um ponto $A \in h$. Os centros das circunferências pretas w' utilizam A como parâmetro. No final basta animar o ponto A .

5.6 Circunferências tangentes a outras três

Exercício 10. *Construir as duas circunferências tangentes simultaneamente com outras três circunferências tangentes entre si (Figura 5.12).*

Figura 5.12: Construção geométrica para o enunciado do Exercício 10. Versão interativa [aqui](#).

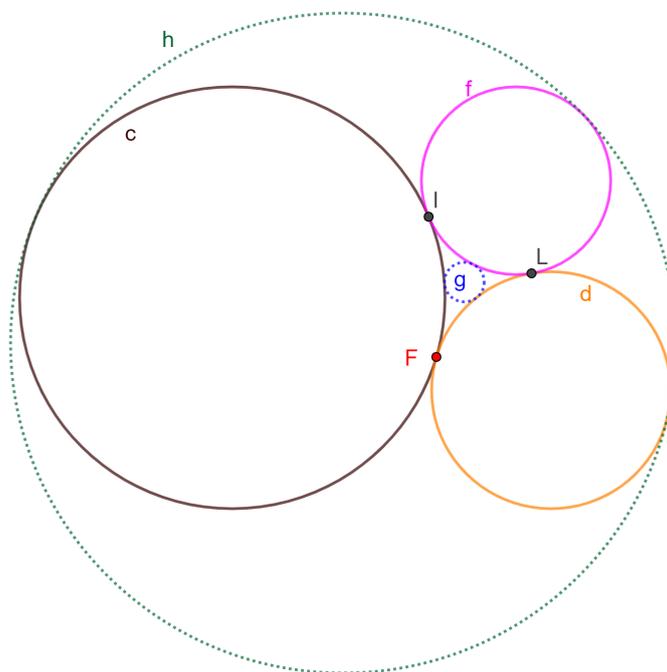


Fonte: O autor.

5.6.1 Resolução do Exercício 10.

A circunferência de inversão i foi colocada com centro em F , ponto de tangência das circunferências c e d . A inversão transforma X em X' e X' em X . Como c e d são tangentes, e passam pelo centro de inversão, então c' e d' são retas paralelas. Como a circunferência f é tangente com c e d , mas não passa pelo centro de inversão, transforma-se numa circunferência f' tangente com c' e d' . A inversão preserva localmente os ângulos (Figura 5.13).

Figura 5.14: Segunda construção geométrica para a solução do Exercício 10. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

O Exercício 10 é um caso particular do problema número 10 de Apolônio. Em [35] encontra-se um estudo detalhado sobre Inversão Geométrica aplicada à resolução dos Problemas de Apolônio.

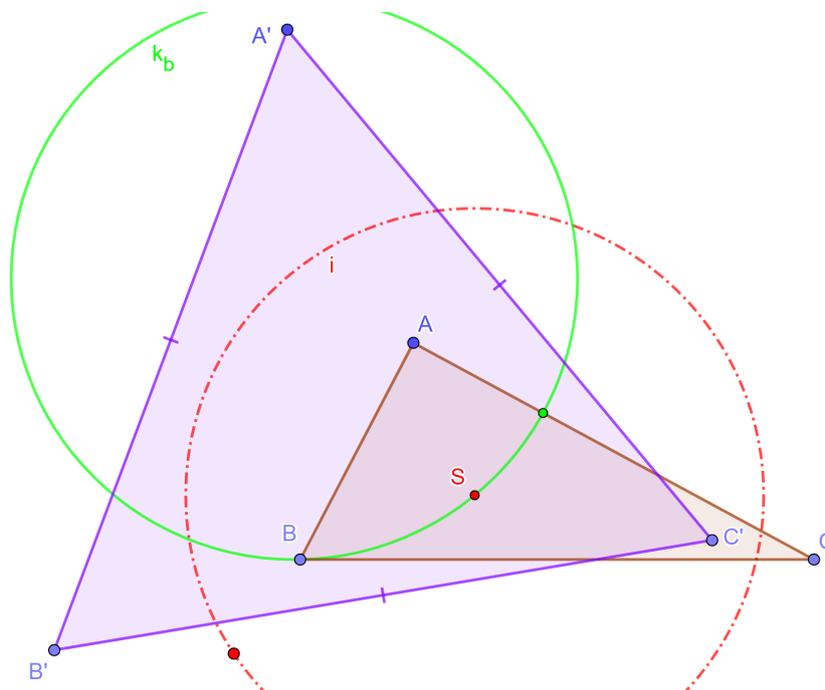
Apolônio de Perga foi um matemático grego conhecido como "O Grande Geômetra". Suas obras tiveram uma influência muito importante no desenvolvimento da matemática e seu famoso livro *Cônicas* introduziu os termos parábola, elipse e hipérbole. Acredita-se que nasceu no ano 268 e morreu em 190 antes de Cristo [27].

5.7 Primeiro ponto Isodinâmico como centro de inversão

Seja o $\triangle ABC$. A interseção das bissetrizes internas com os lados opostos determinam os pontos P_a , P_b e P_c . Analogamente, a interseção das bissetrizes externas com o prolongamento dos lados opostos determinam os pontos Q_a , Q_b e Q_c . Cada distância $P_i Q_i$, com $i = 1, 2, 3$, é diâmetro de uma circunferência de Apolônio. As três circunferências de Apolônio concorrem nos Pontos Isodinâmicos $S = X(15)$ e $S' = X(16)$.

Proposição 26. *Uma circunferência de inversão i , centrada em S e de raio arbitrário r , transforma o $\triangle ABC$ no triângulo equilátero $A'B'C'$ (Figura 5.15).*

Figura 5.15: Uma circunferência de inversão i , centrada em S e de raio arbitrário, transforma o $\triangle ABC$ no triângulo equilátero $A'B'C'$. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Pela Proposição 1 vale que:

$$A'B' = \frac{r^2}{SB \cdot SA} BA,$$

$$B'C' = \frac{r^2}{SC \cdot SB} CB,$$

$$C'A' = \frac{r^2}{SA \cdot SC} AC.$$

Dividindo as duas primeiras equações segue:

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{SC \cdot SB \cdot BA}{SB \cdot SA \cdot CB} = \frac{SC \cdot BA}{SA \cdot CB}.$$

Por outro lado, o ponto S pertence a circunferência B-Apolônio k_b . Isto significa que vale:

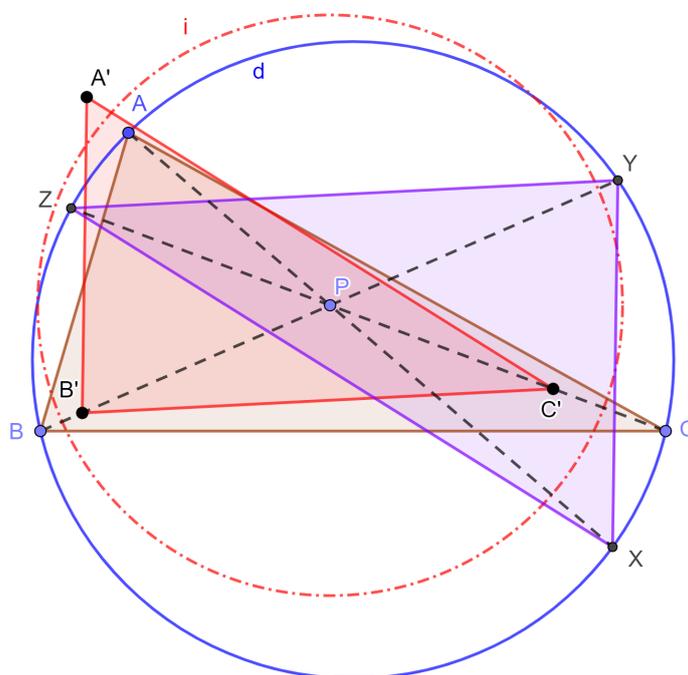
$$\frac{SA}{SC} = \frac{BA}{BC}.$$

Das duas últimas equações encontra-se que $A'B' = B'C'$. Analogamente mostra-se que $B'C' = C'A'$. Isto demonstra que o $\triangle A'B'C'$ é equilátero. \square

5.8 Semelhança de $A'B'C'$ com as projeções de P no circuncírculo

Proposição 27. *Seja P qualquer ponto dentro de um triângulo ABC . Sejam X , Y e Z as interseções de AP , BP , e CP com o circuncírculo d do $\triangle ABC$. Então o $\triangle A'B'C'$, obtido pela inversão respeito a uma circunferência i com centro em P e raio arbitrário r , é semelhante ao $\triangle XYZ$ (Figura 5.16).*

Figura 5.16: Guia para a demonstração do Proposição 27. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Pela Potência do ponto P relativo a d tem-se:

$$PA \cdot PX = PB \cdot PY = PC \cdot PZ.$$

Da inversão relativa a i segue:

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC' = r^2.$$

Dividindo as duas equações anteriores encontra-se:

$$\frac{PX}{PA'} = \frac{PY}{PB'} = \frac{PZ}{PC'}.$$

Ou seja, $\triangle XYZ \sim \triangle A'B'C'$. □

Quando o ponto P coincide com o primeiro ponto isodinâmico S o triângulo $A'B'C'$ é equilátero (Proposição 26) e conseqüentemente XYZ também.

Capítulo 6

Problemas resolvidos utilizando inversão

6.1 Inversão. Incírculo. Potência de ponto. P4 IMO 1969.

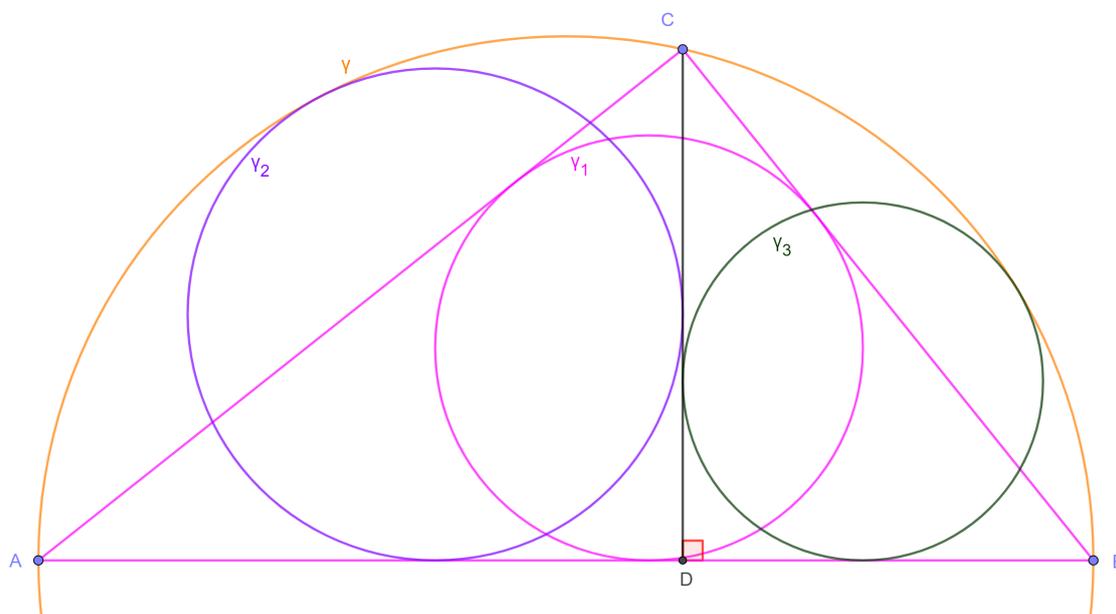
Problema 1. *Seja AB o diâmetro da circunferência γ . O ponto $C \in \gamma$, diferente de A e de B . Seja o ponto D a projeção de C em AB . Considerar três outras circunferências γ_1 , γ_2 e γ_3 com AB como tangente comum: γ_1 inscrita no triângulo ABC , e γ_2 e γ_3 tangentes ao segmento CD e a γ (ambos). Provar que γ_1 , γ_2 e γ_3 têm duas tangentes comuns.*

A IMO 1969 foi realizada na cidade de Bucareste, Romênia. Problema 47 da lista longa, proposto pela delegação dos Países Baixos e escolhido como P4 da competição [3].

6.1.1 Primeira resolução do Problema 1.

A Figura 6.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 6.1: Construção geométrica inicial para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja O o ponto médio de AB e centro de γ . Sejam O_1, O_2 e O_3 e r_1, r_2 e r_3 os centros e raios de γ_1, γ_2 , e γ_3 , respectivamente. Adicionalmente, sejam C_1, C_2 e C_3 os pontos de tangencia de γ_1, γ_2 e γ_3 com AB . Sejam D_2 e D_3 os pontos de tangencia de γ_2 e γ_3 com CD . Finalmente, sejam G_2 e G_3 os pontos de tangencia de γ_2 e γ_3 com γ .

Como γ_2 é tangente internamente a γ , elas são homotéticas com centro em G_2 e têm-se que os trios de pontos G_2, O_2 e O e G_2, D_2 e B são colineares. De fato, $G_2O = OB$ e $G_2O_2 = O_2D_2$ implicam que os $\triangle G_2OB$ e $\triangle G_2O_2D_2$ são isósceles e $\angle O_2D_2G_2 = \angle O_2G_2B = \angle OBG_2$. Logo, $O_2D_2 \parallel AB$.

Analogamente, como γ_3 é tangente internamente a γ , elas são homotéticas com centro em G_3 e têm-se que os trios de pontos G_3, O_3 e O e G_3, D_3 e A são colineares. De fato, $G_3O = OA$ e $G_3O_3 = O_3D_3$ implicam que os $\triangle G_3OA$ e $\triangle G_3O_3D_3$ são isósceles e $\angle O_3D_3G_3 = \angle O_3G_3A = \angle OAG_3$. Logo, $O_3D_3 \parallel AB$.

Como AB é diâmetro de γ os triângulos ACB, AG_2B e AG_3B são retângulos em C, G_2 e G_3 , respectivamente. A potência do ponto B em relação a γ_2 pode ser escrita como:

$$BC_2^2 = BD_2 \cdot BG_2. \tag{6.1.1}$$

Por outro lado, de $\angle BG_2A = \angle BDD_2 = 90^\circ$ e $\angle ABG_2 = \angle D_2BD$ (comum) tem-se

$\triangle BG_2A \sim \triangle BDD_2$. Segue que:

$$\frac{BG_2}{BD} = \frac{BA}{BD_2} = \frac{G_2A}{DD_2},$$

$$BD_2 \cdot BG_2 = BD \cdot BA. \quad (6.1.2)$$

Utilizando uma das relações métricas no $\triangle ABC$ tem-se:

$$BD \cdot BA = BC^2. \quad (6.1.3)$$

De (6.1.1), (6.1.2) e (6.1.3) conclui-se que $BC_2 = BC$ e

$$AC_2 = AB - BC. \quad (6.1.4)$$

Analogamente,

$$AC_3 = AC. \quad (6.1.5)$$

Os resultados anteriores permitem construir os pontos C_2 e C_3 . Localiza-se O_2 na interseção da perpendicular ao segmento AB passando por C_2 com a bissetriz do $\angle ADC$. Analogamente, O_3 é construído.

De (6.1.4) e (6.1.5) tem-se:

$$C_2C_3 = AC_3 - AC_2 = AC + BC - AB. \quad (6.1.6)$$

Das relações métricas do incírculo no $\triangle ABC$ sabe-se que:

$$AC_1 = \frac{AB + AC + BC}{2} - BC = \frac{AB + AC - BC}{2}. \quad (6.1.7)$$

Logo, de (6.1.4) e (6.1.7):

$$C_2C_1 = AC_1 - AC_2 = \frac{AC + BC - AB}{2}. \quad (6.1.8)$$

Comparando (6.1.6) e (6.1.8) segue que C_1 é ponto médio de C_2 e C_3 .

Adicionalmente, de $O_2D_2 \parallel AB \parallel D_3O_3$ tem-se:

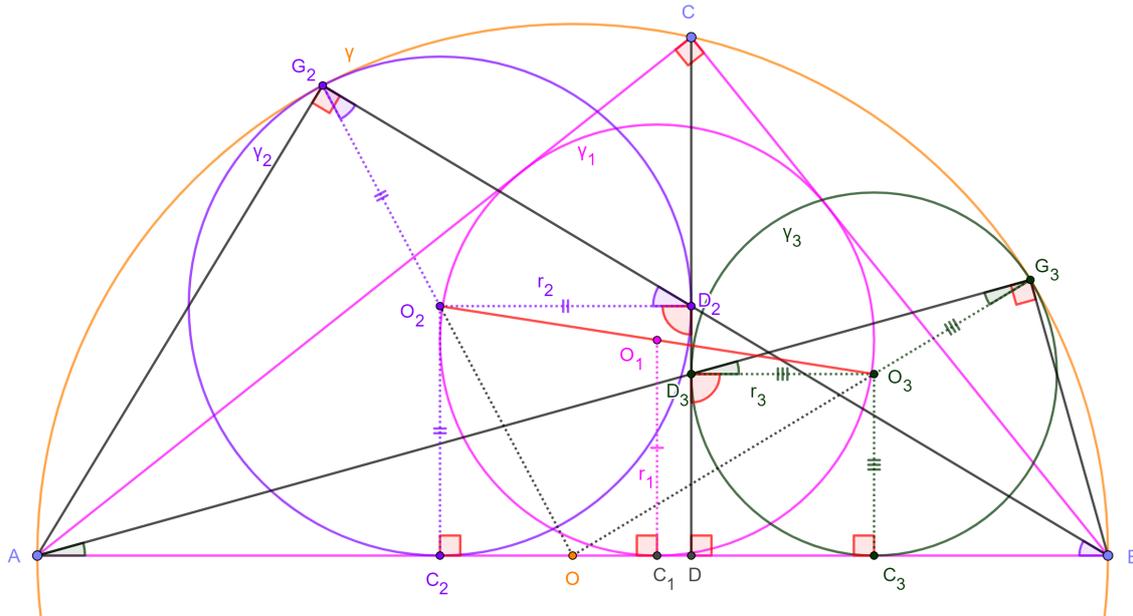
$$C_2O_2 + C_3O_3 = r_2 + r_3 = C_2C_3.$$

E das relações métricas do incírculo no triângulo retângulo ABC :

$$C_1O_1 = r_1 = \frac{AC + BC - AB}{2}.$$

Isto é, C_1O_1 é a média aritmética de C_2O_2 e C_3O_3 . Conclui-se que os pontos O_2 , O_1 e O_3 são colineares e o centro de homotetia de γ_2 , γ_1 e γ_3 está na interseção das retas O_2O_3 e AB . A Figura 6.2 mostra uma construção geométrica.

Figura 6.2: Construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

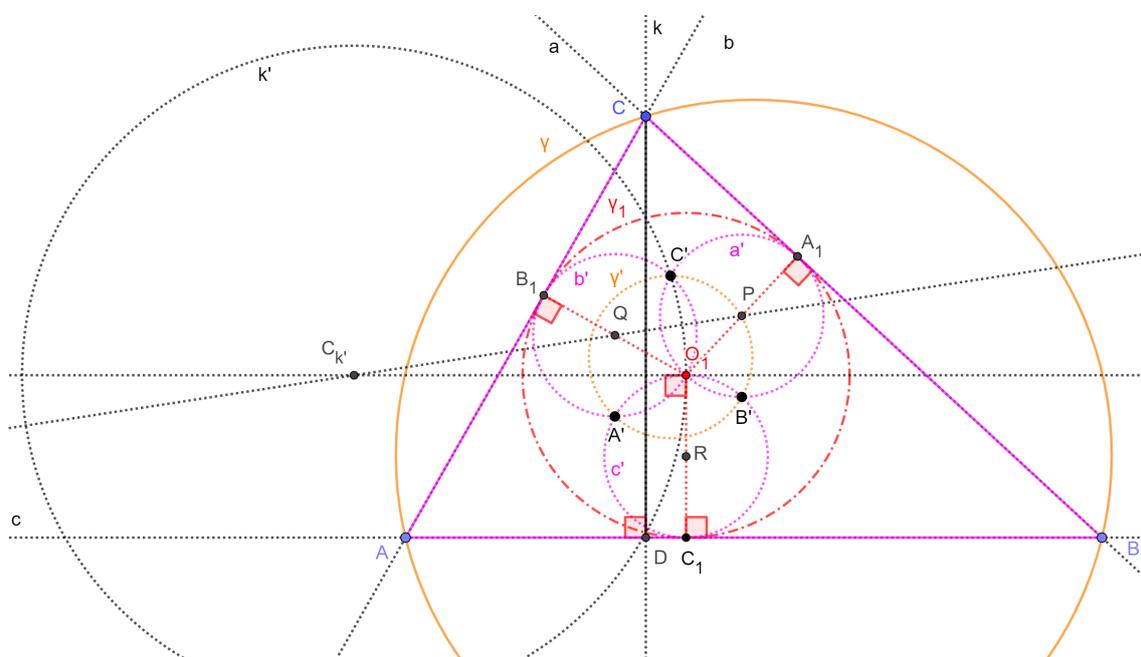
6.1.2 Segunda resolução do Problema 1.

Neste caso utiliza-se a transformação de inversão e a tese será provada para pontos arbitrários $A, B, C \in \gamma$ (Figura 6.3.) Seja γ_1 (o incírculo do $\triangle ABC$) a circunferência de inversão. Denota-se $Inv(X, \gamma_1) = X'$.

Pela inversão, as retas BC , CA e AB , que não passam pelo centro O_1 , são transformadas nas circunferências a' , b' e c' , respectivamente. Os pontos de tangência do incírculo com os lados do $\triangle ABC$ são fixos. Com isto a' , b' e c' passam por O_1 e têm diâmetros iguais ao raio de γ_1 . Sejam P , Q e R os centros de a' , b' e c' , respectivamente.

A reta CD é transformada na circunferência k' que passa por C' e O_1 e é ortogonal com c' . Portanto, o centro $C_{k'}$ está na interseção da tangente a c' em O_1 e a reta PQ (mediatriz de $C'O_1$). A Figura 6.3 mostra uma construção geométrica inicial para a segunda resolução.

Figura 6.3: Construção geométrica inicial para a segunda resolução do Problema 1. Versão interativa [aqui](#).

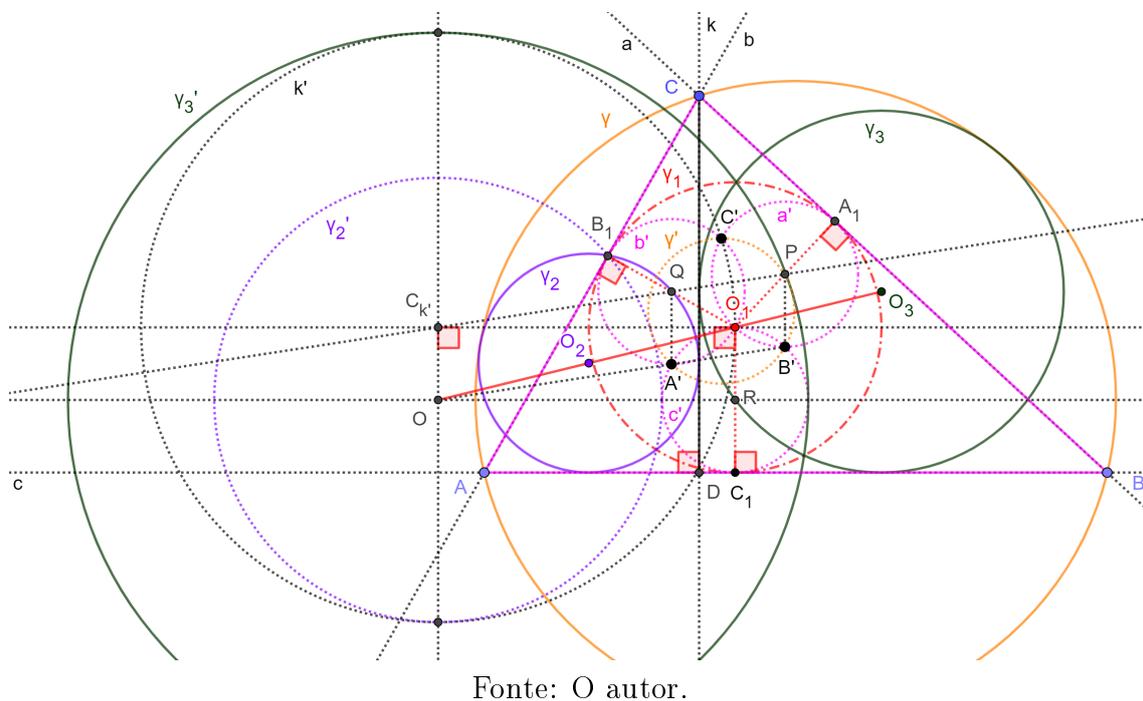


Fonte: O autor.

Construir o ponto O de tal forma que $RO_1C_{k'}O$ seja um paralelogramo e γ_2 e γ_3 as circunferências com centro em O e tangentes a k' . γ_2 e γ_3 também são tangentes a c' , pois OR e $OC_{k'}$ têm comprimentos iguais aos raios de k' e c' , respectivamente. Logo, γ_2 e γ_3 são as inversas de γ_2 e γ_3 .

Adicionalmente, como $QA'OC_{k'}$ e $PB'OC_{k'}$ são paralelogramos e Q, P e $C_{k'}$ são colineares, segue que A', B' e O também são colineares. Consequentemente os centros de γ_1, γ_2 e γ_3 são colineares e estão sobre a reta O_1O . A Figura 6.4 mostra uma construção geométrica da segunda resolução.

Figura 6.4: Construção geométrica da segunda resolução do Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

6.2 Inversão. Circunferências concêntricas. Teorema de Pitágoras. P12 **SL IMO** 1982.

Problema 2. *Quatro circunferências diferentes c, c_1, c_2 e c_3 e uma reta l são dadas em um plano. A circunferência c e a reta l são disjuntas. As circunferências c_1, c_2 e c_3 são tangentes entre si e com c e l . Assumir que o raio de c seja R , determinar a distância do centro de c à l .*

A **IMO** 1982 foi realizada na cidade de Budapeste, Hungria. Problema 12 da lista curta, proposto pela delegação da Finlândia [3].

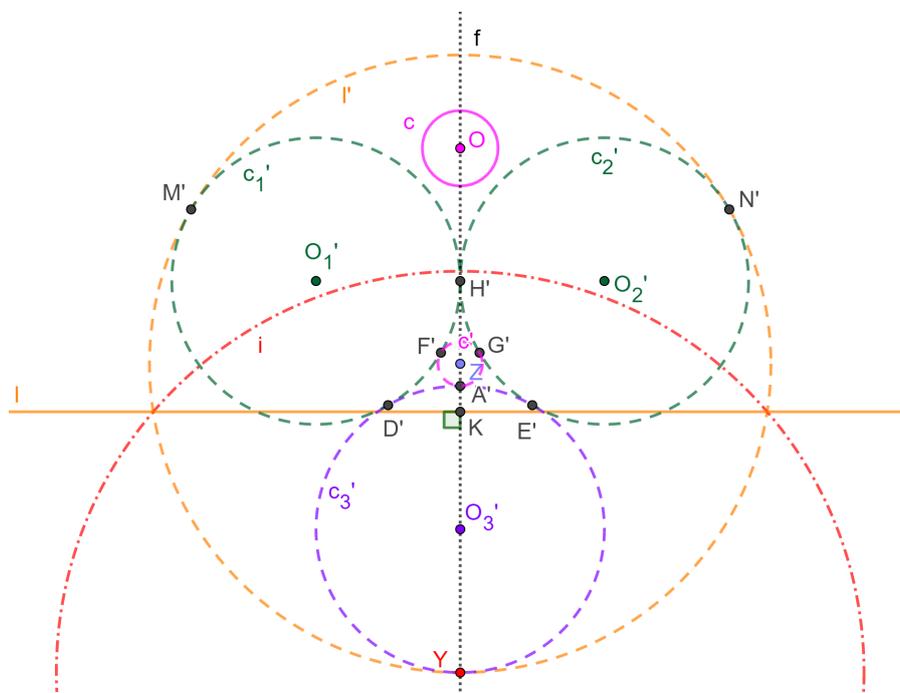
6.2.1 Resolução do Problema 2.

A chave para resolver o problema está em pensar na possibilidade de uma das circunferências c_i , por exemplo c_3 , ser uma reta paralela com l . A tangência entre c_3 e l acontece no infinito. A construção inicial é feita no espaço inverso e com uma simetria que a circunferência c'_3 transforma-se na reta c_3 . Isto facilita as contas.

Seja f uma reta perpendicular a l que passa pelo centro de c , marcar o ponto $K = f \cap l$. Existe um ponto mágico $Y \in f$ tal que uma circunferência de inversão i , centrada em Y , mapeia

c e l em duas circunferências concêntricas c' e l' , de centro comum Z e com c' no interior de l' (Exercício 5). A Figura 6.5 mostra uma construção geométrica inicial.

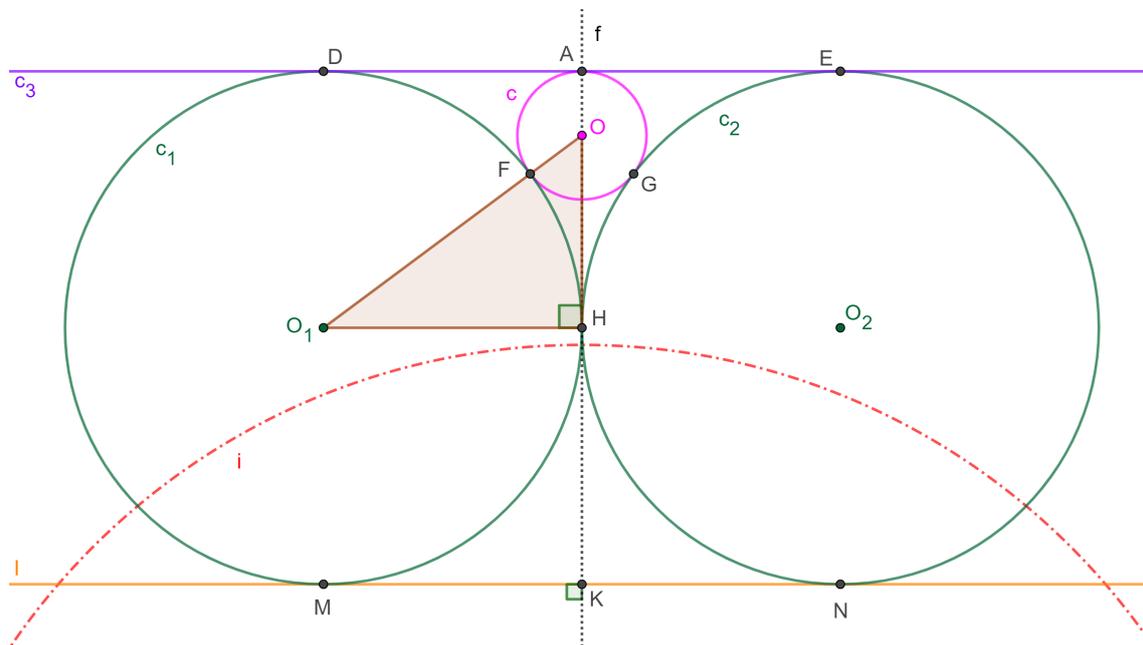
Figura 6.5: Construção geométrica inicial para o Problema 2. Elementos do espaço inverso em linhas tracejadas. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Construir as circunferências c'_i tangentes externamente com c' e internamente com l' , todas com o mesmo raio. Construir c'_3 de tal forma que $c'_3 \cap l' = Y$. Com isso $Inv(c'_3, i) = c_3$ é uma reta paralela com l . Aplicando a inversão aos outros elementos obtêm-se a imagem da Figura 6.6.

Figura 6.6: Segunda construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

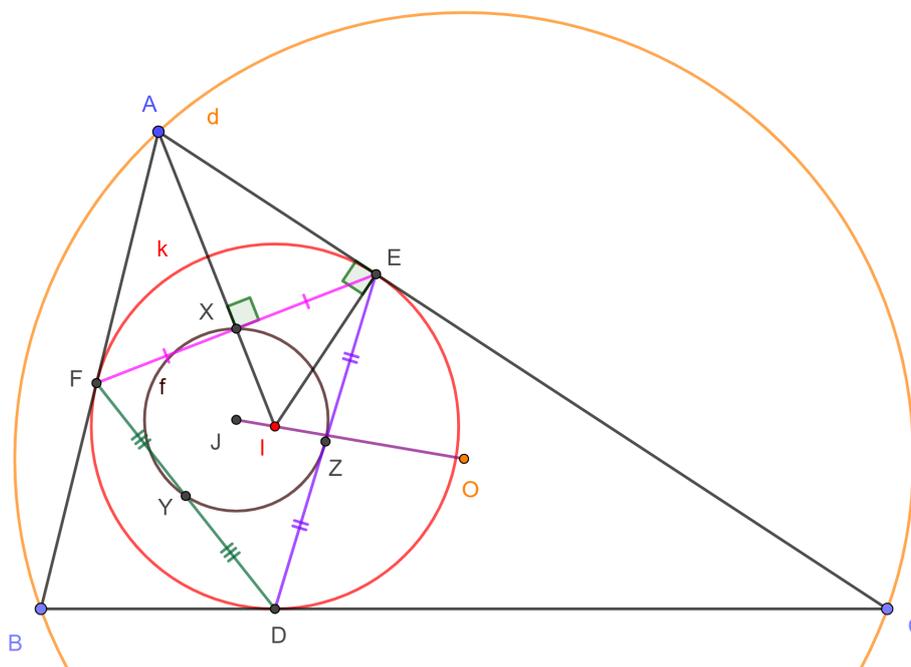
Sejam O_1 , H e $x = O_1H$ o centro da circunferência c_1 , a interseção das circunferências c_1 e c_2 e a distância entre os dois pontos anteriores, respectivamente. Como o raio de c é R , no triângulo retângulo O_1HO , pelo Teorema de Pitágoras, vale:

$$x^2 + (x - R)^2 = (x + R)^2.$$

Segue que $x = 4R$ e a distância de O até L é $OK = 7R$.

Na Figura 6.7 são mostrados simultaneamente todos os elementos das duas construções anteriores. Incluídos os pontos de tangência, dois a dois, entre as curvas. Quando permite-se que as circunferências c'_1 , c'_2 e c'_3 girem um ângulo γ em torno do ponto Z suas inversas c_1 , c_2 e c_3 formam o padrão animado no *Passo = 4*.

Figura 6.8: Construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja I o centro do incírculo k do triângulo ABC . Como $AF = AE$ e $FX = XE$ tem-se que XE é altura no $\triangle AEI$, retângulo em E . Utilizando uma das relações métricas segue:

$$IX \cdot IA = IE^2.$$

Da equação anterior uma inversão em relação à k leva o ponto A para a posição do ponto X . Analogamente, B para Y e C para Z . Isto é, sendo d e f os circuncírculos dos triângulos ABC e XYZ , chega-se a:

$$f = Inv(d, k).$$

Como o centro de uma circunferência é colinear com o centro da sua inversa e o centro de inversão conclui-se que O (centro de d), J (centro de f) e I são colineares.

6.4 Incentro. Homotetia. Inversão. P7 SL IMO 1992.

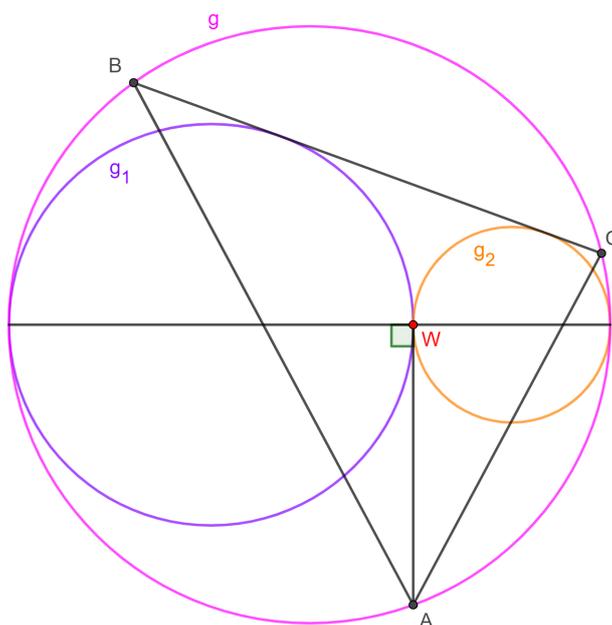
Problema 4. *As circunferências g, g_1 e g_2 seguem as regras: g_1 e g_2 são tangentes externamente no ponto W e as duas são tangentes internamente com g . Os pontos $A, B, C \in g$: a reta BC é uma tangente comum externa de g_1 e g_2 e a reta WA é uma tangente comum a g_1 e g_2 passando por W . O ponto A está no mesmo lado que W em relação a reta BC . Provar que W é o incentro do triângulo ABC .*

A **IMO** 1992 foi realizada na cidade de Moscou, Rússia. Problema 7 da lista curta, proposto pela delegação da Índia [3].

6.4.1 Resolução do Problema 4.

A Figura 6.9 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 6.9: Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam $P = g_1 \cap BC$ e $Q = g_2 \cap BC$ e $R = g_1 \cap g$ e $S = g_2 \cap g$. Seja D o ponto médio do arco BC de g que não contem A . Sejam O, O_1 e O_2 os centros de g, g_1 e g_2 .

Uma homotetia com centro em R e fator $\frac{OR}{O_1R}$ mapeia g_1 em g e o segmento BC em outro paralelo e tangente a g passando por D . Isto é, o ponto D é a imagem de P pela homotetia. Segue que R, P , e D são colineares. Analogamente S, Q e D estão alinhados.

Por D ser ponto médio do arco BC têm-se: $\angle DBC = \angle DCB$ e $DB = DC$. Para a corda BD segue a igualdade dois ângulos inscritos $\angle BCD = \angle BRD$. Com isto, $\triangle DBP \sim \triangle DRB$ e

$$DP \cdot DR = DB^2 = Pot_{g_1}(D). \tag{6.4.1}$$

Analogamente,

$$DQ \cdot DS = DC^2 = Pot_{g_2}(D). \tag{6.4.2}$$

Mas $DB = DC$ e pode-se escrever de (6.4.1) e (6.4.2) que,

$$Pot_{g_1}(D) = DP \cdot DR = DQ \cdot DS = Pot_{g_2}(D). \tag{6.4.3}$$

Isto é, o ponto D está no eixo radical de g_1 e g_2 . Logo, D é colinear com W e A .

Ou seja, as equações (6.4.1) e (6.4.2) podem ser re-escritas como:

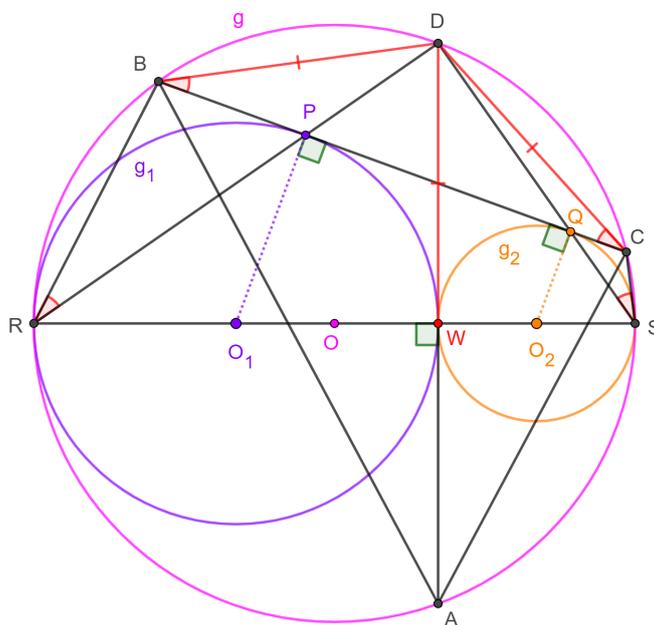
$$DP \cdot DR = DB^2 = Pot_{g_1}(D) = DW^2,$$

$$DQ \cdot DS = DC^2 = Pot_{g_2}(D) = DW^2.$$

Com isso encontra-se que $DW = DB = DC$. Uma introdução aos conceitos de potência de ponto relativa a uma circunferência e eixo radical e outros problemas IMO resolvidos encontra-se em [18].

Como $DW = DB = DC$ e g é a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$, pela Proposição 2.3 em [20], segue que o ponto W é incentro do $\triangle ABC$. Na Figura 6.10 são mostrados todos os elementos das construções anteriores.

Figura 6.10: Construção geométrica para o Problema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

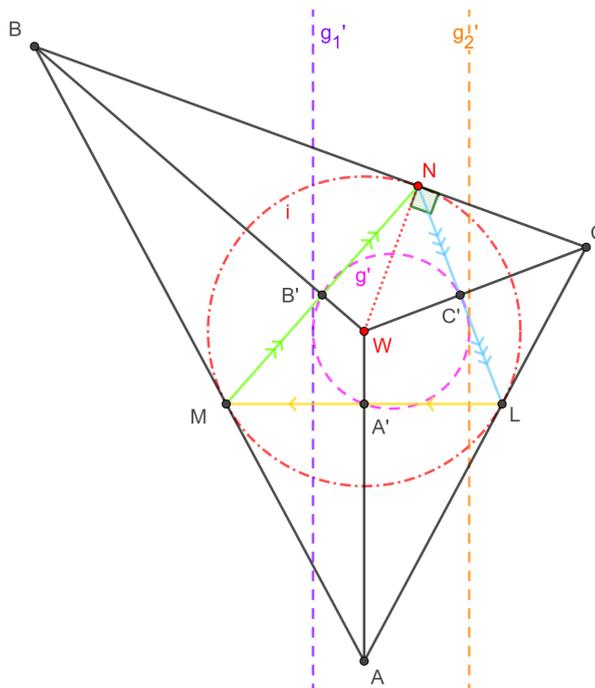
6.4.2 Verificação do Problema 4 por inversão.

Chama-se N a projeção sobre BC do ponto W . Constrói-se a circunferência de inversão i com centro em W e raio WN . Nota-se que i também é o incírculo do $\triangle ABC$. Como o centro de inversão pertence a g_1 e g_2 e elas são tangentes obtêm-se que $g'_1 = Inv(g_1, i)$ e $g'_2 = Inv(g_2, i)$ são retas paralelas.

Por outro lado, $W \notin g$ e g é tangente com g_1 e g_2 segue que $g' = Inv(g, i)$ é uma circunferência tangente entre as retas g'_1 e g'_2 . Os pontos A' , B' e C' são os inversos de A , B e C , respectivamente.

Sendo $M = AB \cap i$ e $L = CA \cap i$ verifica-se que A' , B' e C' são pontos médios de LM , MN e NL , respectivamente (Ver Problema 3). Na Figura 6.11 são mostrados os elementos inversos citados.

Figura 6.11: Elementos inversos do Problema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

6.5 Semelhança. Circunferências Ortogonais. Inversão. P2 IMO 1993.

Problema 5. A, B, C e D são quatro pontos em um plano, com C e D no mesmo lado da reta AB , tais que $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ e $\angle ADB = 90^\circ + \angle ACB$. Encontrar a razão

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD},$$

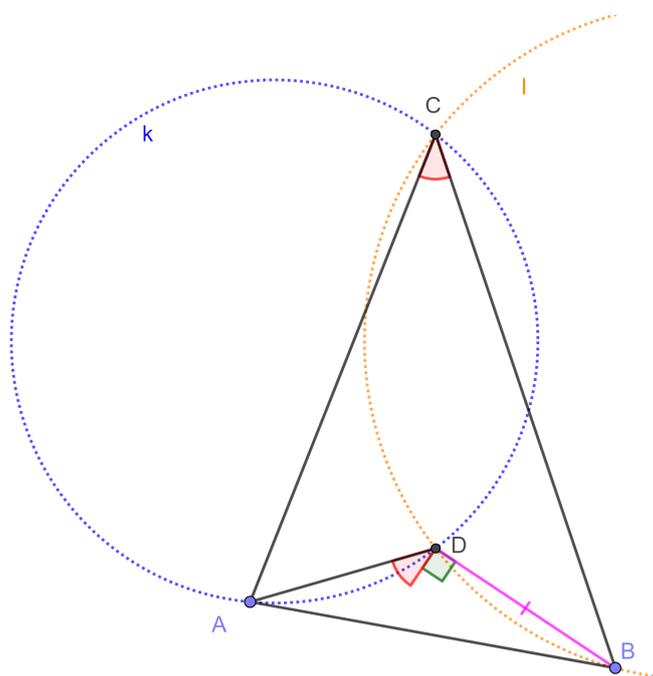
e provar que as circunferências ACD e BCD são ortogonais. Duas circunferências são ditas ortogonais quando nos seus pontos de interseção suas tangentes são perpendiculares.

A IMO 1993 foi realizada na cidade de Istambul, Turquia. Problema 22 da lista curta e escolhido como P2 da competição, proposto pela delegação do Reino Unido [3].

6.5.1 Primeira resolução do Problema 5.

A Figura 6.12 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 6.12: Construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja M o ponto dentro do $\angle ADB$ tal que $BD = MD$ e $BD \perp MD$. Com isso

$$BM = \sqrt{2}BD$$

e segue das hipóteses que:

$$\begin{aligned}\angle ADM &= \angle ACB, \\ \frac{AC}{BC} &= \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{MD}.\end{aligned}$$

Pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado tem-se:

$$\triangle ACB \sim \triangle ADM.$$

Segue que $\angle CAB = \angle DAM$, $\angle CAD = \angle BAM$ e

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AD}.$$

Do resultado anterior, por lado-ângulo-lado, encontra-se que:

$$\triangle CAD \sim \triangle BAM.$$

Consequentemente,

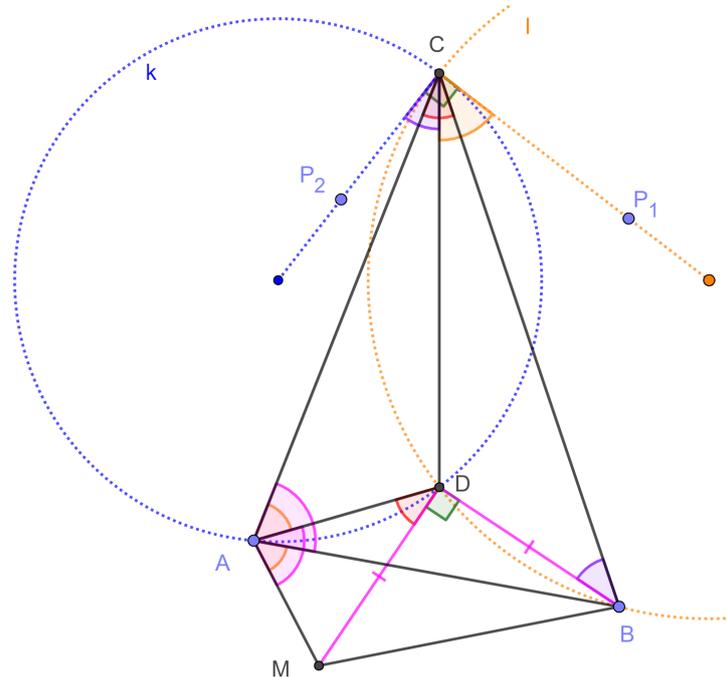
$$\begin{aligned}\frac{AC}{AB} &= \frac{CD}{BM} = \frac{CD}{\sqrt{2}BD}, \\ \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} &= \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Sejam k e l as circunferências ACD e BCD , respectivamente. Sejam P_1 e P_2 pontos sobre as tangentes em C a k e l , respectivamente. Pela igualdade entre ângulos de segmento e inscritos vale:

$$\angle P_1CP_2 = \angle P_1CD + \angle DCP_2 = \angle CAD + \angle CBD = 90^\circ.$$

A última igualdade decorre do estudo dos ângulos nos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$. Com isto, k e l são ortogonais. Na Figura 6.13 são mostrados todos os elementos das construções anteriores.

Figura 6.13: Construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

6.5.2 Resolução do Problema 5 por inversão.

Constrói-se a circunferência de inversão i com centro em C e raio ao quadrado:

$$r^2 = CA \cdot CB. \tag{6.5.1}$$

A inversão mapeia os pontos A , B e D em A' , B' e D' , respectivamente (Figura 6.14). Pela Proposição 1 tem-se a semelhança:

$$\triangle CAB \sim \triangle CB'A'.$$

Adicionalmente, pelo raio de inversão escolhido, encontra-se:

$$CA' = CB, CB' = CA. \tag{6.5.2}$$

Logo, mais do que semelhantes, vale a congruência:

$$\begin{aligned} \triangle CAB &\equiv \triangle CB'A', \\ A'B' &= BA = \frac{BA \cdot CD}{CD}. \end{aligned} \tag{6.5.3}$$

Utilizando novamente a Proposição 1 obtêm-se:

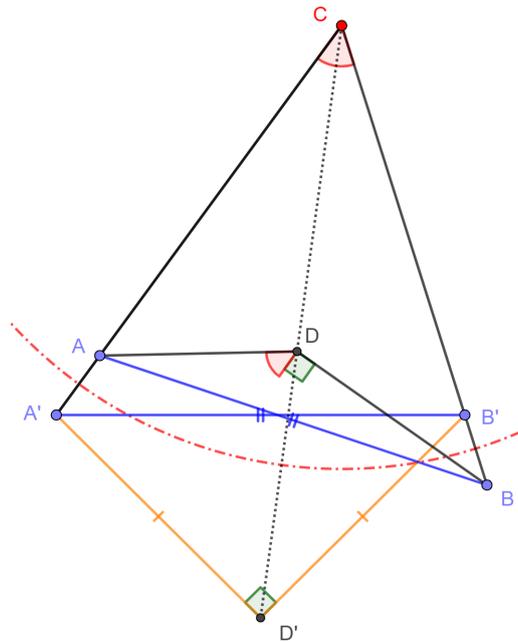
$$A'D' = \frac{r^2}{CA \cdot CD} DA = \frac{CB \cdot DA}{CD}, \quad (6.5.4)$$

$$B'D' = \frac{r^2}{CB \cdot CD} DB = \frac{CA \cdot DB}{CD}. \quad (6.5.5)$$

Por hipóteses $AC \cdot BD = AD \cdot BC$, logo $A'D' = B'D' = x$ e o $\triangle A'B'D'$ é isósceles de base $A'B'$. Para calcular a razão requerida utilizam-se (6.5.3) e (6.5.5):

$$\frac{A'B'}{B'D'} = \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}. \quad (6.5.6)$$

Figura 6.14: Problema 5 por inversão. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Resta provar que a hipóteses $\angle ADB = 90^\circ + \angle ACB$ implica que o $\triangle A'B'D'$ é retângulo em D' . Pois nesse caso, $\frac{A'B'}{B'D'} = \sqrt{2}$ e de (6.5.6) conclui-se que:

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}.$$

Seja $\angle C = \alpha$. Pela Lei dos Cossenos aplicada no $\triangle ABC$ segue:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos(\alpha),$$

$$\cos(\alpha) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC}. \quad (6.5.7)$$

Por outro lado, pela Lei dos Cossenos aplicada no $\triangle ABD$ tem-se:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos(90^\circ + \alpha), \\ AB^2 &= AD^2 + BD^2 + 2AD \cdot BD \operatorname{sen}(\alpha), \\ \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{AB^2 - AD^2 - BD^2}{2AD \cdot BD}. \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

Substituindo (6.5.3), (6.5.4) e (6.5.5) em (6.5.8) encontra-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{(A'B')^2 - \left(\frac{A'D' \cdot CD}{CB}\right)^2 - \left(\frac{B'D' \cdot CD}{CA}\right)^2}{2 \frac{A'D' \cdot CD}{CB} \cdot \frac{B'D' \cdot CD}{CA}}, \\ \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{(A'B' \cdot CA \cdot CB)^2 - (A'D' \cdot CD)^2 - (B'D' \cdot CD)^2}{2A'D' \cdot B'D' \cdot CD^2 \cdot CA \cdot CB}. \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

Como $A'D' = B'D' = x$ a equação (6.5.9) simplifica para:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{(A'B' \cdot CA \cdot CB)^2 - 2(x \cdot CD)^2}{2x^2 \cdot CD^2 \cdot CA \cdot CB}. \quad (6.5.10)$$

Utiliza-se agora a identidade trigonométrica fundamental e as equações (6.5.3), (6.5.7) e (6.5.10):

$$\left(\frac{AC^2 + BC^2 - (A'B')^2}{2AC \cdot BC}\right)^2 + \left(\frac{(A'B' \cdot AC \cdot BC)^2 - 2(x \cdot CD)^2}{2x^2 \cdot CD^2 \cdot AC \cdot BC}\right)^2 = 1.$$

Desenvolvendo e simplificando a equação anterior chega-se em:

$$\frac{A'B'}{x} = \sqrt{2}.$$

Pela recíproca do Teorema de Pitágoras conclui-se que $\angle A'D'B' = 90^\circ$.

6.6 Teorema da Bissetriz. Triângulo Pedal. Lei dos Senos. Inversão. P2 IMO 1996.

Problema 6. *Seja P um ponto no interior do $\triangle ABC$ tal que:*

$$\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B. \quad (6.6.1)$$

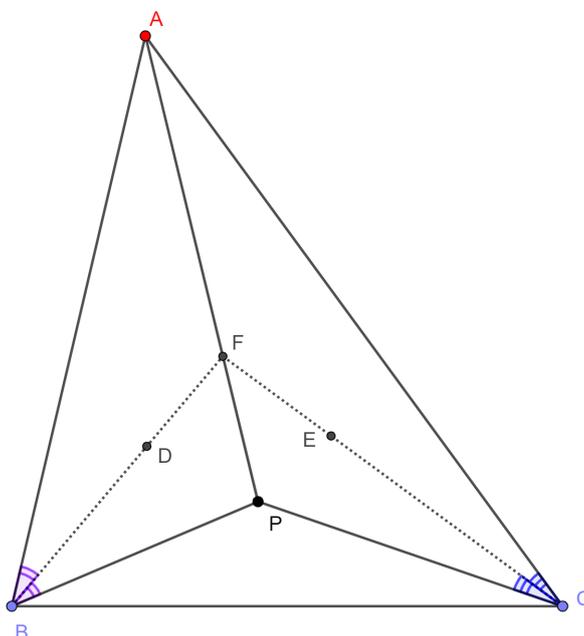
Sejam D e E os incentros dos $\triangle APB$ e $\triangle APC$, respectivamente. Mostrar que AP , BD e CE são concorrentes.

A **IMO** 1996 foi realizada na cidade de Mumbai, Índia. Problema 11 da lista curta e escolhido como P2 da competição, proposto pela delegação do Canadá [3].

6.6.1 Primeira resolução do Problema 6.

A Figura 6.15 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 6.15: Construção geométrica inicial para o Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja $F = BD \cap CE$. Quer-se mostrar que $F \in AP$. Como BD e CE são bissetrizes, pois D e E são incentros, pela forma recíproca do Teorema da Bissetriz, bastará provar que:

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AF}{FP} = \frac{AC}{CP}. \quad (6.6.2)$$

Sejam X , Y e Z os pés das projeções ortogonais do ponto P nos lados BC , CA e AB , respectivamente (Figura 6.16). Os quadriláteros $AZPY$, $BZPX$ e $CXPY$ são cíclicos, pois a soma de um par de ângulos opostos é 180° .

No quadrilátero $CXPY$ tem-se que:

$$\angle XPY = 180^\circ - \angle C. \quad (6.6.3)$$

Pelo ângulo raso em Z vale que:

$$\angle XZY = 180^\circ - \angle XZB - \angle YZA. \quad (6.6.4)$$

Utilizando agora que $BZPX$ e $AZPY$ são inscritíveis e (6.6.4) segue:

$$\angle XZY = 180^\circ - \angle XPB - \angle YPA. \quad (6.6.5)$$

De (6.6.3) e considerando a soma dos ângulos em torno ao ponto P tem-se:

$$\angle APB = 180^\circ - \angle XPB - \angle YPA + \angle C. \quad (6.6.6)$$

Da comparação entre (6.6.5) e (6.6.6) chega-se a:

$$\angle XZY = \angle APB - \angle C. \quad (6.6.7)$$

Analogamente demonstra-se que:

$$\angle XYZ = \angle APC - \angle B. \quad (6.6.8)$$

De (6.6.1), (6.6.7) e (6.6.8) obtêm-se $\angle XZY = \angle XYZ$, o $\triangle XYZ$ é isósceles e

$$XY = XZ. \quad (6.6.9)$$

Adicionalmente, BP e CP são diâmetros das circunferências circunscritas a $BZPX$ e $CXPY$, respectivamente. Pela Lei dos Senos aplicada aos $\triangle XBZ$ e $\triangle XCY$ obtêm-se:

$$XZ = BP \operatorname{sen}(\angle B),$$

$$XY = CP \operatorname{sen}(\angle C).$$

De (6.6.9) e as duas equações anteriores segue:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{\operatorname{sen}(\angle C)}{\operatorname{sen}(\angle B)}. \quad (6.6.10)$$

Utilizando mais uma vez a Lei dos Senos, agora no $\triangle ABC$, encontra-se:

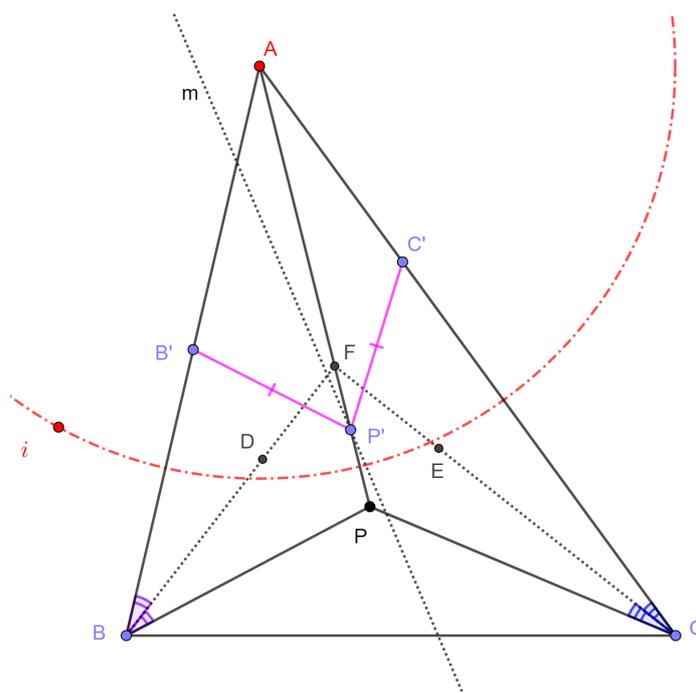
$$\frac{\operatorname{sen}(\angle C)}{\operatorname{sen}(\angle B)} = \frac{AB}{AC}. \quad (6.6.11)$$

Logo, dividindo as duas equações anteriores, encontra-se:

$$\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}.$$

Pela forma recíproca do Teorema da Bissetriz o resultado segue. A Figura 6.17 mostra uma construção geométrica utilizando inversão.

Figura 6.17: Construção geométrica utilizando inversão para o Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

6.7 Teorema de Desargues. Incentro e Circuncentro. Inversão. P9 SL IMO 1997.

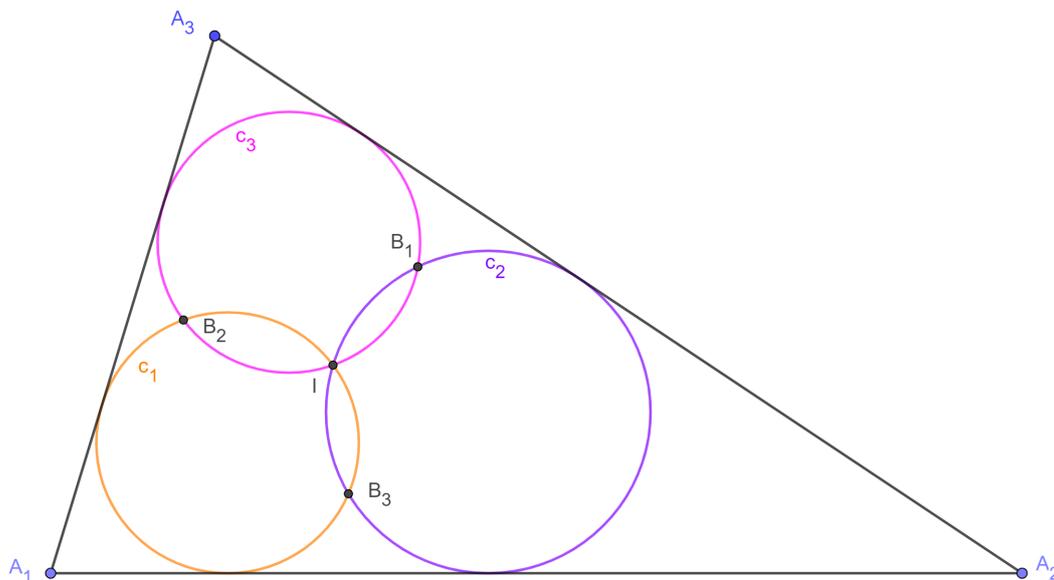
Problema 7. *Seja $A_1A_2A_3$ um triângulo não isósceles com incentro I . Seja c_i , com $i = 1, 2, 3$, a menor circunferência que passa por I e é tangente a A_iA_{i+1} e A_iA_{i+2} (considera-se a soma dos índices módulo 3). Seja B_i , com $i = 1, 2, 3$, o segundo ponto de interseção de c_{i+1} e c_{i+2} . Provar que os circuncentros dos triângulos A_1B_1I , A_2B_2I e A_3B_3I são colineares.*

A IMO 1997 foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina. Problema 9 da lista curta, proposto pela delegação dos Estados Unidos [3].

6.7.1 Resolução do Problema 7.

A Figura 6.18 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 6.18: Construção geométrica inicial para o Problema 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

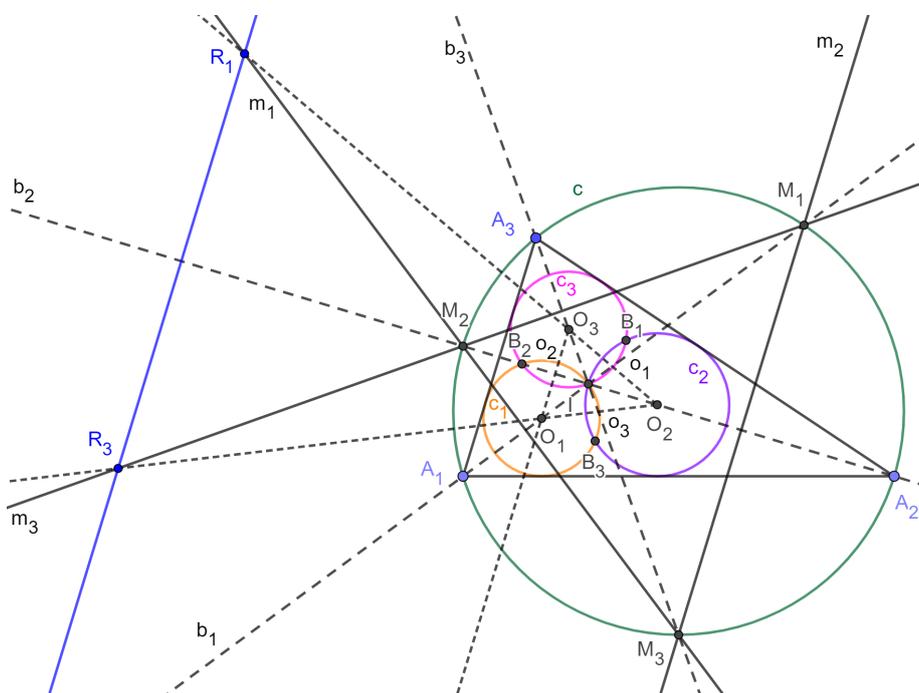
Nesta resolução, considera-se $i = 1, 2, 3$ e a soma de todos os índices módulo 3. Para construir c_i , primeiro esboça-se uma perpendicular, passando por I , à bissetriz interna b_i (no vértice A_i). A interseção dessa perpendicular com os dois lados mais próximos determina um triângulo, do qual c_i é o incírculo.

Seja c a circunferência circunscrita ao $\triangle A_1A_2A_3$ (Figura 6.19). Denotam-se por O_i os centros das circunferências c_i e por M_i o ponto médio do arco $A_{i+1}A_{i+2}$ de c que não contém A_i .

Primeiro, nota-se que a reta $O_{i+1}O_{i+2}$ é a mediatriz o_i do segmento IB_i , e consequentemente o circuncentro R_i do $\triangle A_iB_iI$ está contido em o_i . Segundo, sejam $M_{i+1}M_{i+2}$ as retas m_i . Da igualdade das medidas dos segmentos $M_{i+1}A_i = M_{i+1}I$, pela Proposição 2.3 em [20], tem-se que m_i é mediatriz dos pontos A_i e I . Isto implica que R_i está contido na reta m_i . Ou seja, $R_i = O_{i+1}O_{i+2} \cap M_{i+1}M_{i+2}$.

No que segue consideram-se os $\triangle M_1M_2M_3$ e $\triangle O_1O_2O_3$. Como as retas M_1O_1 , M_2O_2 e M_3O_3 são concorrentes em I , pelo Teorema de Desargues, as interseções dos prolongamentos dos lados correspondentes R_i , com $i = 1, 2, 3$, são colineares. A Figura 6.19 mostra uma construção geométrica.

Figura 6.19: Construção geométrica para o Problema 7. O ponto $R_2 \in R_1R_3$, não aparece pela escala. Versão interativa [aqui](#).



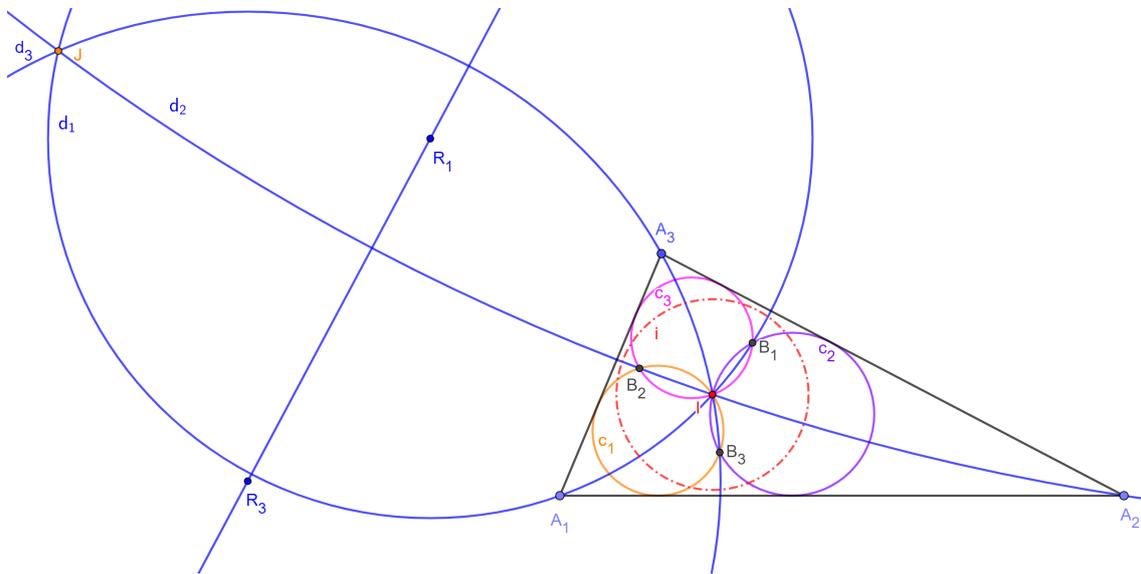
Fonte: O autor.

Girard Desargues foi um matemático francês, considerado um dos fundadores da geometria projetiva. Seu trabalho centrou-se na teoria das seções cônicas e perspectiva. Nasceu em 1591 e morreu em 1661 [28].

6.7.2 Resolução do Problema 7 por inversão.

As circunferências circunscritas aos $\triangle A_iB_iI$, com $i = 1, 2, 3$, serão denotadas por d_i . Sabe-se que, se R_1, R_2 e R_3 são os circuncentros dos triângulos A_1B_1I, A_2B_2I e A_3B_3I , respectivamente, então eles são os centros de d_1, d_2 e d_3 , que tem o ponto I em comum. Para mostrar que os R_i são colineares bastará provar que as circunferências d_i tem um segundo ponto $J \neq I$ em comum. A Figura 6.20 mostra uma construção geométrica inicial utilizando inversão.

Figura 6.20: Construção geométrica inicial utilizando inversão para o Problema 7. Versão interativa [aqui](#).

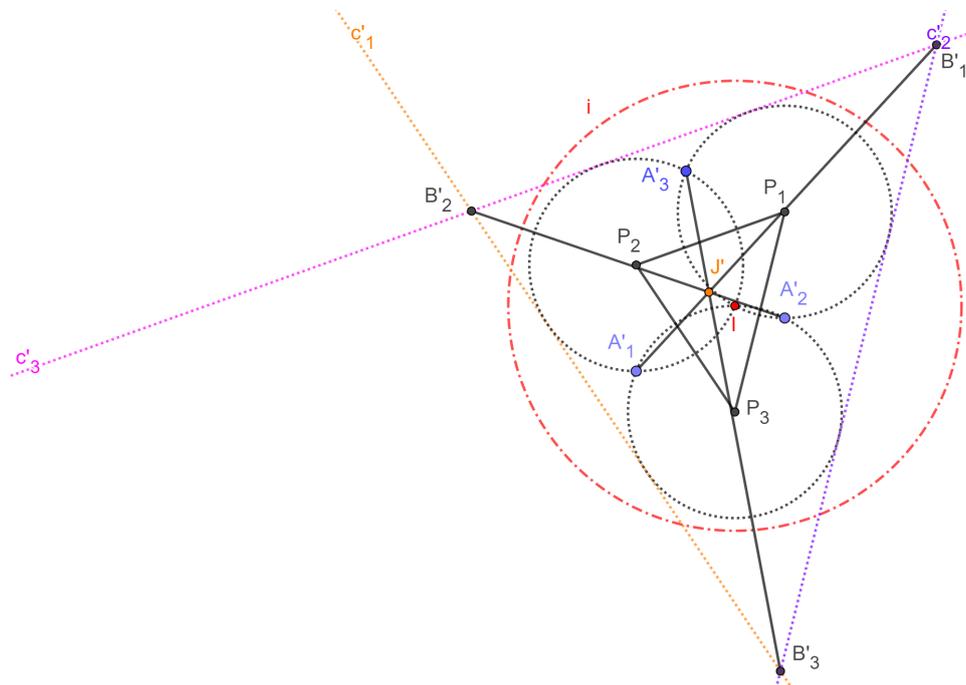


Fonte: O autor.

Constrói-se uma circunferência de inversão i de raio arbitrário, diferente de zero, e centro em I . Denota-se por X' o inverso de X . Como as circunferências c_i passam pelo centro de inversão I , suas inversas são as retas c'_i . Tem-se que $B'_i = c'_{i+1} \cap c'_{i+2}$ ou $c'_i = B'_{i+1}B'_{i+2}$. As inversas das retas A_iA_{i+1} , são as circunferências $A'_iA'_{i+1}I$, de mesmo raio, pois equidistam de I . A relação de tangência entre retas e circunferências é preservada após a inversão.

Seja P_i o centro da circunferência $A'_{i+1}A'_{i+2}I$. Devido a igualdade dos raios, nota-se que $P_iP_{i+1} \parallel B'_iB'_{i+1}$. Logo, o $\triangle P_1P_2P_3$ é homotético com o $\triangle B'_1B'_2B'_3$. A Figura 6.21 mostra uma construção geométrica somente dos elementos após inversão.

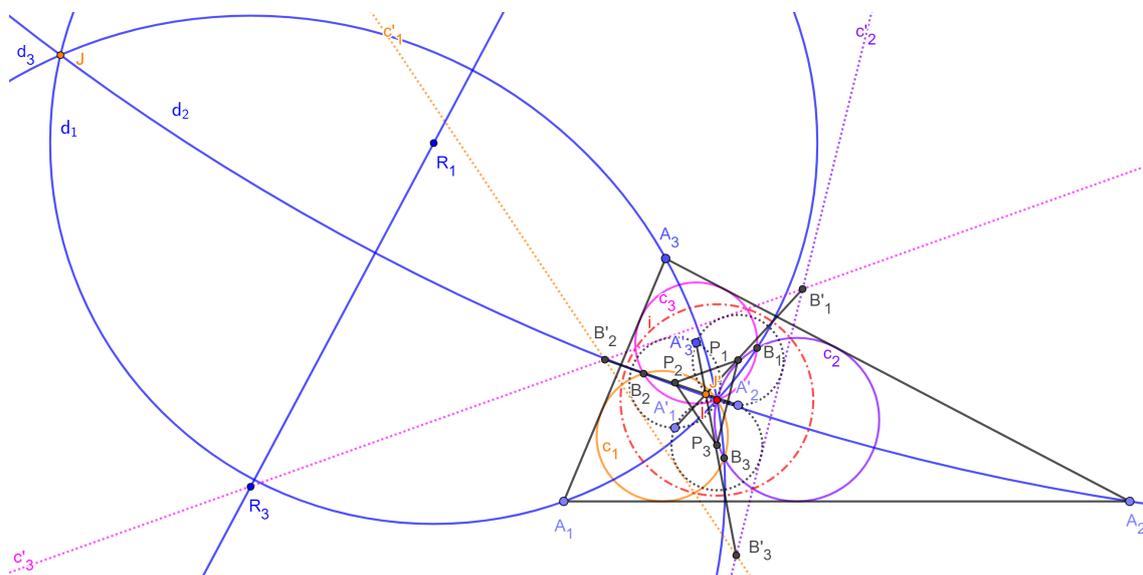
Figura 6.21: Construção geométrica somente dos elementos após inversão para o Problema 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Como A'_i e I são as interseções das circunferências $A'_i A'_{i+1} I$ e $A'_i A'_{i+2} I$, tem-se que A'_i e I são simétricos em relação ao segmento $P_{i+1} P_{i+2}$. Com isto, o $\triangle A'_1 A'_2 A'_3$ também é homotético com o $\triangle B'_1 B'_2 B'_3$. Conseqüentemente, $A'_1 B'_1$, $A'_2 B'_2$ e $A'_3 B'_3$ são concorrentes no centro de homotetia J' . Ou seja, as circunferências $A_i B_i I$, com $i = 1, 2, 3$, passam pelo ponto $J = Inv(J', i) \neq I$. A Figura 6.22 mostra uma construção geométrica com todos os elementos apresentados.

Figura 6.22: Construção geométrica utilizando inversão para o Problema 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

6.8 Topologia. Inversão. P8 SL IMO 1999.

Problema 8. *Uma circunferência é chamada “Separadora” para um conjunto de cinco pontos num plano se passa por três deles, um quarto ponto está no seu interior e o quinto no exterior. Provar que todo conjunto de cinco pontos, que não tenha três colineares nem quatro concíclicos, tem exatamente quatro Separadoras.*

A IMO 1999 foi realizada na cidade de Bucareste, Romênia. Problema 8 da lista curta, proposto pela delegação do Japão [3].

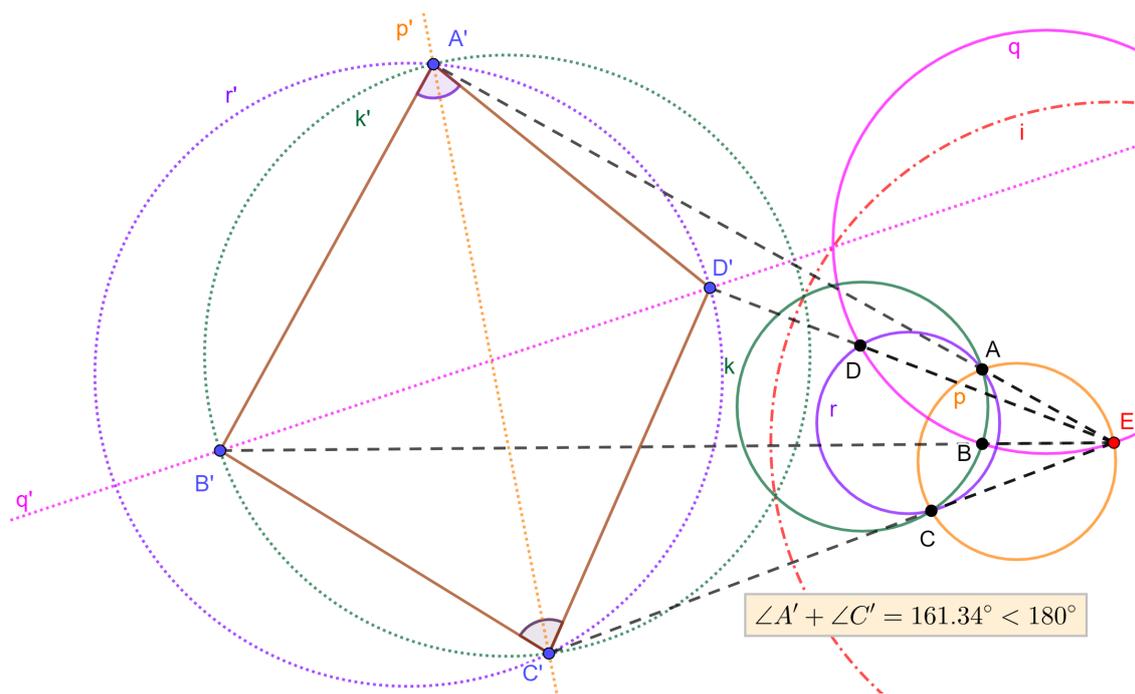
6.8.1 Resolução do Problema 8.

Sejam A, B, C, D e E os pontos e uma circunferência de inversão i com centro em E . Sejam A', B', C' e D' os inversos respeito a i . Uma circunferência Separadora que passa por E transforma-se numa reta, passando por dois pontos dentre A', B', C' e D' , e de forma que separa os outros dois inversos, um em cada lado da reta. Uma Separadora que não passa por E transforma-se em outra circunferência, passando por três pontos inversos e com o quarto ponto inverso no seu interior.

Seja M' a envoltória convexa de A', B', C' e D' . Há dois casos: i) M' é um quadrilátero ou ii) M' é um triângulo com o quarto ponto no interior.

i) M' é um quadrilátero, por exemplo $A'B'C'D'$. Neste caso duas das circunferências Separadoras (p e q) são inversas das diagonais $A'C'$ e $B'D'$. Se $\angle A' + \angle C' < 180^\circ$ as outras duas Separadoras (k e r) são as inversas das circunferências $A'B'C'$ e $A'D'C'$. Caso contrário, de $B'A'D'$ e $B'C'D'$. As inversas das outras 6 circunferências e retas utilizando A', B', C', D' e E não são Separadoras. A Figura 6.23 mostra uma construção geométrica neste caso.

Figura 6.23: Construção geométrica do Problema 8. Caso i) M' é um quadrilátero e $\angle A' + \angle C' < 180^\circ$. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

ii) M' é um triângulo, por exemplo, $A'B'C'$ com D' no interior. Neste caso as circunferências Separadoras são as inversas α, β, γ e δ das retas $D'A', D'B', D'C'$ e da circunferência $A'B'C'$. Nenhuma outra reta ou circunferência satisfaz as condições do problema. A Figura 6.24 mostra uma construção geométrica neste caso.

Capítulo 7

Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, TOM M. Ptolemy's Inequality and the Chordal Metric. **Mathematics Magazine**, v. 40, p. 233–235, 1967. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0025570X.1967.11975804>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 44)
- [2] DELGADO, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Página 14)
- [3] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009**. New York: Springer, 2011. (Página 70, 75, 78, 80, 83, 88, 91, 96)
- [4] FREITAS, V. P. **Alguns Teoremas Clássicos da Geometria Sintética e Aplicações**. 2013. 79 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013. (Página 46)
- [5] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: [10.22533/at.ed.24221310814](https://doi.org/10.22533/at.ed.24221310814). Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [6] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)

- [7] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [8] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [9] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [10] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023212>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [11] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [12] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra - v. 3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 91 p. ISBN 978-65-87023-24-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [13] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática**. 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São

- Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [14] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [15] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdv17ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [16] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdv18202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [17] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdv19202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [18] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22-40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdv20202123169664jlljpmsafj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15, 81)
- [19] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)

- [20] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15, 48, 81, 92)
- [21] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [22] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [23] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [24] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/matematicaestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [25] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, ISSN 2316-9664, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdv21202123169664jlljpmsafj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)
- [26] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Página 14)

LÓPEZ LINARES, J. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023250>.

- [27] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Apollonius of Perga**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2015. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Apollonius/>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 66)
- [28] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Girard Desargues**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2020. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Desargues/>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 93)
- [29] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Jakob Steiner**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2009. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Steiner/>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 59)
- [30] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Karl Wilhelm Feuerbach**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2010. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Feuerbach/>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 46)
- [31] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Pappus of Alexandria**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pappus/>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 62)
- [32] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Philippe de La Hire**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2008. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/La_Hire/. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 37)
- [33] PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Página 14)
- [34] SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em:

<https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 15)

- [35] SOUSA, C. B. **Inversão Geométrica Aplicada à Resolução dos Problemas de Apolônio**. 2014. 58 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 2014. Disponível em <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7570/2/arquivototal.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2022. (Página 66)
- [36] THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria-Nível 2, 2006. (Página 14)

Índice Remissivo

- Circuncentro, 91
Circuncírculo, 68, 78, 79
Circunferências concêntricas, 75
Circunferências Ortogonais, 30, 83
Circunferências tangentes a outras três, 63
Corrente de Pappus, 62
Corrente de Steiner, 59
Divisão harmônica, 31
Homotetia, 79
Incentro, 79, 91
Incírculo, 70, 78
Inversa de Lugar Geométrico, 24
Inversos de centros de circunferência, 32
Inversão, 22, 24, 70, 75, 78, 79, 83, 87, 91,
96
Inversão de ponto, 16
Lei dos Cossenos, 86, 87
Lei dos Senos, 87, 89
Mecanismo de Peaucellier–Lipkin, 42
Polo e Polar, 36
Pontos mágicos, 53–55, 57
Potência de ponto, 70
Primeiro ponto Isodinâmico, 66
Projeção Estereográfica, 40
Semelhança, 68, 83
Teorema da Bissetriz, 87, 88, 91
Teorema de Desargues, 91, 92
Teorema de Feuerbach, 46, 50, 51
Teorema de Pitágoras, 29, 43, 44, 75, 77
Teorema de Ptolomeu, 44
Topologia, 96
Triângulo Pedal, 87
Ângulos e inversão, 27

