

Geometria Olímpica com GeoGebra v. 2

Juan López Linares

João Paulo Martins dos Santos

Alessandro Firmiano de Jesus

JUAN LÓPEZ LINARES
JOÃO PAULO MARTINS DOS SANTOS
ALESSANDRO FIRMIANO DE JESUS

Geometria Olímpica com GeoGebra v.2

DOI: 10.11606/9786587023236

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2022

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-Reitora: Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

Diretor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Vice-Diretor: Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da
Universidade de São Paulo

L864g	López Linares, Juan Geometria olímpica com GeoGebra. v. 2 / Juan López Linares, João Paulo Martins dos Santos, Alessandro Firmiano de Jesus. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023236 1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino médio. 6. Formação de professores. I. Santos, João Paulo Martins dos. II. Jesus, Alessandro Firmiano de. III. Título.
-------	---

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



Dedicamos este livro a nossas famílias.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos Professores-Estudantes do curso de “Geometria Olímpica com GeoGebra” que motivaram a escrever este livro eletrônico.

Agradecemos a nossas famílias pelo incentivo e compreensão.

SOBRE OS AUTORES.

Prof Dr JUAN LÓPEZ LINARES: <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Professor Doutor do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Atualmente ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria olímpica com GeoGebra” para professores. Desenvolve projetos de pesquisa nas áreas de ensino de Cálculo e na resolução de problemas de Olimpíadas. Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela UFSCar em 2019. Textos completos e gratuitos das publicações do autor podem ser encontrados [aqui](#).

Prof Dr JOÃO PAULO MARTINS DOS SANTOS: <https://orcid.org/0000-0002-0957-7119>. Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2006), mestre em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2009) e Doutor em Ciências pela Escola de Engenharia de São Carlos - EESC-USP. É professor na Academia da Força Aérea em Pirassununga/SP. Tem experiência na área de Sistemas Dinâmicos não lineares e não ideais com pesquisa desenvolvida em métodos de perturbação. Tem experiência na área de Matemática e interesse nos seguintes temas: método numéricos para solução de equações diferenciais ordinárias e parciais, estimador de erro do tipo residual para a equação do transporte de poluentes, linguagem Python de programação, Computação Científica em Python e métodos numéricos para solução de sistemas lineares. Textos completos e gratuitos das publicações do autor podem ser encontrados [aqui](#).

Prof Dr ALESSANDRO FIRMIANO DE JESUS: <https://orcid.org/0000-0002-7073-2261>. Possui graduação em Matemática pela Universidade de São Paulo (1994), mestrado em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (1997), doutorado em Engenharia Hidráulica e Saneamento pela Universidade de São Paulo (2010) e pós doutorado pela Fachhochschule Köln - Cologne University of Applied Sciences (2014). Atualmente é regime jurídico único da AFA exercendo a função de Prof Assoc IV e a Coordenação da Área de Ciências Exatas no Curso de Formação de Oficiais da Aeronáutica. Possui experiência na área de Matemática, com ênfase em Modelagem Computacional e Análise Numérica, atuando principalmente nos seguintes temas: Modelos de advecção-difusão-reação, Método dos Elementos Finitos, Transporte de Contaminantes em Águas Subterrâneas e Geocomputação. Textos completos e gratuitos das publicações do autor podem ser encontrados [aqui](#).

Título

Geometria Olímpica com GeoGebra v.2

Prefácio

Este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 98 figuras que facilitam acompanhar a resolução. As figuras são acompanhadas, em geral, dos respectivos hyperlinks para acompanhamento online e interativo. Os recursos disponibilizados podem ser acessados, visualizados, estudados e compartilhados por meio da plataforma colaborativa do GeoGebra online. A discussão é organizada em 7 capítulos: Introdução; Congruência de triângulos e aplicações; Relações métricas no triângulo retângulo; Algumas construções envolvendo triângulos semelhantes e congruentes; Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicênicos; Cores Dinâmicas RGB no GeoGebra e, finalmente, as referências adotadas. O foco são as construções geométricas detalhadas com a apresentação passo a passo e o compartilhamento dos links interativos para que o leitor possa acompanhar o processo descrito. O diferencial está na utilização do GeoGebra, o qual tem disponibilidade gratuita tanto para utilização online como utilização em computadores ou aplicativos de celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica e é permitido que o leitor explore diversas configurações de um mesmo problema.

Palavras-chave: Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

Lista de Figuras

2.1	Guia para a construção. Disponível		17
2.2	Guia para a construção. Disponível		18
2.3	Guia para a construção. Disponível		19
2.4	Guia para a construção. Disponível		20
2.5	Guia para a construção. Disponível		21
2.6	Guia para a construção. Disponível		21
2.7	Guia para a construção. Disponível		22
2.8	Guia para a construção. Disponível		23
2.9	Guia para a construção. Disponível		24
2.10	Guia para a construção. Disponível		25
2.11	Guia para a construção. Disponível		26
2.12	Guia para a construção. Disponível		27
2.13	Guia para a construção. Disponível		27
2.14	Guia para a construção. Disponível		28
2.15	Guia para a construção. Disponível		29
2.16	Guia para a construção. Disponível		30
2.17	Guia para a construção. Disponível		31
2.18	Animação com rastro ativado e ponto sobre uma elipse. Disponível		31
2.19	Guia para a construção. Disponível		33
2.20	Guia para a construção. Disponível		34
2.21	Guia para a construção. Disponível		35
2.22	Guia para a construção. Disponível		36

2.23	Guia para a construção. Disponível		37
2.24	Guia para a construção. Disponível		37
2.25	Guia para a construção. Disponível		38
2.26	Guia para a construção. Disponível		38
2.27	Guia para a construção. Disponível		39
2.28	Guia para a construção. Disponível		40
2.29	Guia para a construção. Disponível		41
2.30	Guia para a construção. Disponível		42
2.31	Guia para a construção. Disponível		43
2.32	Guia para a construção. Disponível		44
2.33	Guia para a construção. Disponível		45
2.34	Guia para a construção. Disponível		45
2.35	Retas concorrentes com 5 circunferências tangentes. Disponível		46
2.36	Guia para construção das 5 circunferências tangentes. Disponível		47
3.1	Guia para a demonstração das semelhanças. Disponível		49
3.2	Guia para a demonstração da semelhança $\triangle ABC \sim \triangle DBA$. Disponível		50
3.3	Guia para a demonstração da semelhança $\triangle ABC \sim \triangle DAC$. Disponível		50
3.4	Guia para de que a mediana é metade da hipotenusa. Disponível		52
3.5	Guia para as relações trigonométricas elementares. Disponível		52
3.6	Guia para valores de seno e cosseno de ângulos notáveis. Disponível		54
3.7	Valores de seno e cosseno para ângulos notáveis. Disponível		55
3.8	Gráfico de cosseno. Disponível		55
3.9	Relações entre as funções trigonométricas. Disponível		57
3.10	Interpretação Geométrica do seno da soma $\text{sen}(\alpha + \beta)$. Disponível		58
3.11	Visualização gráfica dos pontos de seno, cosseno e tangente. Disponível		60
3.12	Gráfico de seno. Disponível		61
3.13	Gráfico de cosseno. Disponível		61
3.14	Gráfico de tangente. Disponível		62

3.15	Gráfico da função cossecante. Disponível		63
3.16	Gráfico da função secante. Disponível		64
3.17	Gráfico da função cotangente. Disponível		65
3.18	Relação fundamental em termos de áreas. Disponível		66
3.19	$\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2 \theta$ em termos de áreas. Disponível		66
4.1	Retas tangentes externas à duas circunferências. Disponível		68
4.2	Retas tangentes internas à duas circunferências. Disponível		69
4.3	Retas tangentes internas à duas circunferências. Disponível		70
4.4	Retas tangentes internas à duas circunferências. Disponível		71
4.5	Retas tangentes internas à duas circunferências. Disponível		72
4.6	Construção inicial para P1 NA IGO 2018. Disponível		72
4.7	Solução para P1 NA IGO 2018. Disponível		74
4.8	Modelo simplificado para a propagação retilínea da luz. Disponível		75
4.9	Modelo simplificado do Sistema Solar. Disponível		76
4.10	Modelo simplificado do Sistema Solar em 3D. Disponível		77
4.11	Modelo simplificado de deslocamento de um portão basculante. Disponível		79
4.12	Modelo simplificado para um portão basculante. Disponível		80
5.1	Exemplo de quadrilátero cíclico e bicêntrico. Disponível		82
5.2	Exemplo exploratório para quadriláteros cíclicos. Disponível		83
5.3	Guia para o Teorema 2. Disponível		84
5.4	Guia para a recíproca do Teorema 2. Disponível		85
5.5	Ilustração numérica do Teorema 3. Disponível		85
5.6	Guia para a recíproca da demonstração do Teorema 3. Disponível		86
5.7	Guia para a construção do exercício. Disponível		87
5.8	Guia para a solução do exercício. Disponível em		88
5.9	Guia para a demonstração da proposição.		90
5.10	Guia para a construção do quadrilátero bicêntrico.		91
5.11	Quadrilátero bicêntrico com retas tangentes e mediatrizes.		92

5.12	Triângulo pedal X no interior do triângulo ΔABC . Disponível 	93
5.13	Quadrilátero cíclico $APXN$ em círculo com diâmetro AX . Disponível 	94
5.14	Quadrilátero cíclico $ABYC$ em círculo com diâmetro AY . Disponível 	95
5.15	Reta de Simson-Wallace. Disponível 	97
5.16	Triângulo pedal para o ponto P sobre um círculo concêntrico ao ponto O .	97
5.17	Circunferência e tal que $S_{\Delta MNP} = \sigma_0$, com $4\sigma_0 > S_{\Delta ABC}$. Disponível 	98
5.18	Circunferência e tal que $S_{\Delta MNP} = \sigma_0$, com $4\sigma_0 < S_{\Delta ABC}$. Disponível 	99
6.1	Esquema de cores dinâmicas RGB aplicado a um ponto A . Disponível 	101
6.2	Cores dinâmicas em segmento paralelo ao eixo X . Disponível 	102
6.3	Cores dinâmicas $(R, G, B) = (FG - EixoX , 0, 0)$ em segmento. Disponível 	102
6.4	Cores dinâmicas $(R, G, B) = (x(F), y(F), x(F) \cdot y(F))$ em segmento.	103
6.5	Cores dinâmicas $(R, G, B) = (x(F), y(F), x(F) \cdot y(F))$. Disponível 	104
6.6	Um esquema descritivo para utilização das cores dinâmicas. Disponível 	105
6.7	Cores dinâmicas dadas pelas distâncias às retas. Disponível 	106
6.8	Delineamento para cores dinâmicas RGB em sequência de pontos do plano.	106
6.9	Cores dinâmicas RGB em sequência de pontos da Figura 6.8. Disponível 	107
6.10	Esquema de cores dinâmicas RGB similar ao da Figura 6.1. Disponível 	108
6.11	Construção e figura exploratória por meio de cores dinâmicas.	108
6.12	Figura exploratória por meio de cores dinâmicas.	109
6.13	Figura exploratória por meio de cores dinâmicas.	109

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	14
2	Congruência de Triângulos e Aplicações	16
2.1	Caso LLL	18
2.1.1	Solução	18
2.2	Caso LAL	19
2.2.1	Solução	19
2.3	Caso ALA	20
2.3.1	Solução	20
2.4	Caso LAAo	21
2.4.1	Solução	21
2.5	Caso CH	22
2.5.1	Solução	22
2.6	Caso LLAo não é caso de congruência	23
2.6.1	Solução	23
2.7	Caso AA não é caso de congruência	24
2.7.1	Solução	24
2.8	Arco Capaz	25
2.8.1	Solução	25
2.9	Retas tangentes a uma circunferência por um ponto	28
2.9.1	Solução	28
2.10	Retas tangentes a uma circunferência: animação	29
2.10.1	Solução	29
2.11	Teorema de Pitot	32
2.12	Construção quadrilátero inscrito	33
2.12.1	Solução	34
2.13	Exercício 01	35

2.13.1	Construção Inicial	35
2.13.2	Solução	36
2.14	Exercício 02	39
2.14.1	Construção inicial	39
2.14.2	Solução	40
2.15	Discussão adicional: Isometrias	41
2.15.1	Isometrias: translação I	41
2.15.1.1	Solução	41
2.15.2	Isometrias: Rotação I	43
2.15.2.1	Solução	44
2.15.3	Semelhança não é isometria	45
2.16	Desafios de construção: circunferências tangentes	46
2.16.1	Solução	47
3	Relações Métricas no triângulo retângulo	48
3.1	Relações métricas no triângulo retângulo	48
3.1.1	Semelhanças	49
3.1.2	Os catetos ao quadrado são iguais a hipotenusa vezes a sua projeção	51
3.1.3	A altura é a média geométrica das projeções dos catetos	51
3.1.4	A hipotenusa vezes a altura é igual ao produto dos catetos	51
3.1.5	A mediana relativa ao ângulo reto é metade da hipotenusa	51
3.2	Relações trigonométricas	52
3.3	Ângulos notáveis	53
3.4	Outras funções trigonométricas	55
3.5	Visualização das relações trigonométricas	57
3.6	Seno e cosseno da soma	57
3.7	Lei das tangentes	58
3.7.1	Solução	59
3.8	Em direção às funções seno, cosseno e tangente	60
3.9	Círculo unitário e função seno	60
3.10	Círculo unitário e função cosseno	61
3.11	Círculo unitário e função tangente	62
3.12	Visualização das outras funções trigonométricas	62
3.13	Interpretação Geométrica de algumas relações trigonométricas	65
4	Algumas construções envolvendo triângulos semelhantes e congruentes	67
4.1	Tangentes Externas a Duas Circunferências	67
4.1.1	Solução	67

4.2	Tangentes Internas a duas circunferências	68
4.2.1	Solução	68
4.3	Tangentes interna e externas II	70
4.3.1	Solução	70
4.3.2	P1 NA IGO 2018	71
4.3.3	Construção inicial	72
4.3.4	Solução	73
4.4	Modelo simplificado: propagação retilínea da luz	74
4.4.1	Solução	74
4.5	Modelo simplificado Sol-Terra-Lua	75
4.5.1	Solução	76
4.5.2	Modelo Simplificado do Sistema solar em 3D	77
4.5.3	Solução	77
4.6	Modelo de deslocamento de perfil de portão basculante	78
4.6.1	Solução	79
4.7	Modelo 3D de deslocamento de portão basculante	80
4.7.1	Solução	80
5	Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicêntricos	82
5.1	Quadrilátero inscritível	83
5.2	Exercício	86
5.2.1	Construção inicial	87
5.2.2	Solução	87
5.3	Quadriláteros bicêntricos	89
5.4	Construção quadrilátero bicêntrico	91
5.4.1	Construção de quadrilátero bicêntrico por retas tangentes	92
5.4.1.1	Solução:	92
5.5	Triângulo Pedal e a Fórmula de Euler	93
6	Cores Dinâmicas RGB no GeoGebra	100
6.1	Cores Dinâmicas em Segmentos	101
6.2	Cores Dinâmicas e Planilha de Cálculo	104
6.2.1	Explorações adicionais	108
7	Referências Bibliográficas	110

Capítulo 1

Introdução

O livro faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O mesmo aconteceu na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma de Cultura e Extensão da USP.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Rodrigo Pinheiro [38] e do Prof. Cícero Thiago [45]. Também serviram como referência os livros de Geometria [37] e Geometria Analítica [12] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e a dissertação de mestrado de Anderson Reis de Vargas [46]. Outras referências são apresentadas durante o texto.

O texto conta com 98 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, os links para os gráficos interativos são disponibilizados nas figuras. Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube.

A discussão é organizada em 5 capítulos: Congruência de triângulos e aplicações; Relações métricas no triângulo retângulo; Algumas construções envolvendo triângulos semelhantes e congruentes; Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicênicos; Cores Dinâmicas RGB no GeoGebra. Escolhemos apresentar alguns exercícios em cada caso, mas sem a pretensão de esgotar o tema.

O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa.

Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contrapartida, na versão impressa tradicional o aluno precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar

uma resolução.

O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movimentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes.

Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendizado e colaboração. Tanto os usuários avançados quanto os alunos podem disponibilizar construções, buscar outras construções, baixar e modificar com alteração e salvamento no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino e aprendizagem de Matemática.

Um dos autores também publicou quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [19], [20], [21] e [22]. Outros trabalhos da área de Matemática são [41], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [16], [30], [31], [32], [33], [34] e [29].

Capítulo 2

Congruência de Triângulos e Aplicações

É sabido que o termo "Congruência" segue associado com pelo menos dois significados:

- A Congruência Geométrica, que define duas figuras geometricamente congruentes quando existe uma transformação que preserva distâncias entre elas [11] e [47].
- A Congruência no sentido da Teoria dos Números, que define o número A congruente ao número B módulo m se $m|A - B$.

Considerando o primeiro significado, as transformações que preservam distâncias são chamadas de Isometrias e surgem como a base do conceito de Congruência. Neste sentido, duas figuras geométricas são ditas congruentes se, e somente se, uma pode ser transformada em outra por meio de uma isometria [11].

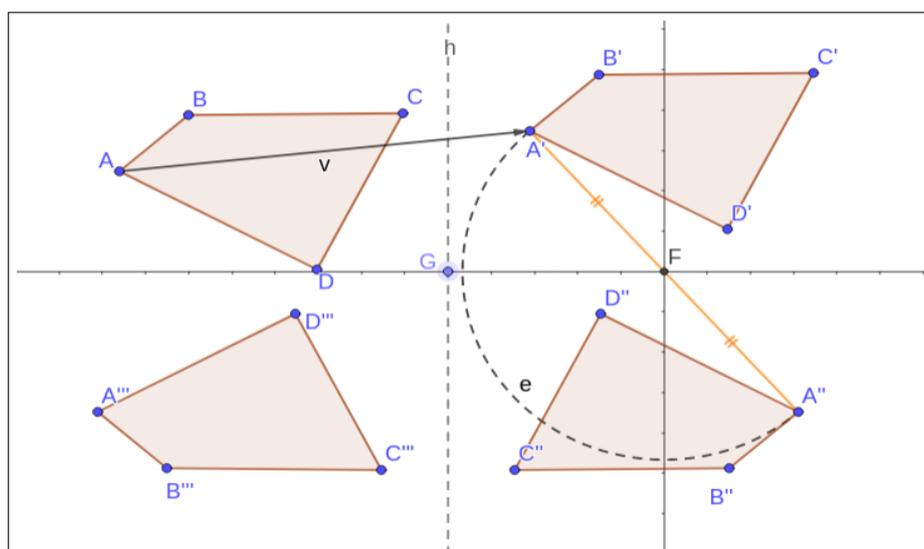
Segundo [43] uma congruência no plano é uma transformação que é igual a um número finito de transformações rígidas no plano. De forma geral, suponha que F e G são duas transformações no plano, então a composição pode ser definida por meio de $S \circ F$. Graficamente, uma composição de transformações é ilustrada na Figura 2.1, disponível no link , por meio de uma translação (T), uma rotação (G) em torno do ponto F e uma R reflexão em torno da reta h .

A translação aplicada ao quadrilátero $ABCD$ dá origem ao quadrilátero $A'B'C'D'$. Neste caso, um ponto P no quadrilátero é transformado em um ponto $T(P)$ no quadrilátero $A'B'C'D'$. Em particular, a transformação leva o vértice A em $A' = T(A)$.

A rotação G de ângulo π em torno do ponto F dá origem ao quadrilátero $A''B''C''D''$. Em particular, a rotação G transforma o vértice A' no vértice A'' de tal forma que a distância $A'F = A''F$ ou, de forma equivalente, o círculo de raio $A'F$ e centro F passa por A'' . A'' e A' são extremos do diâmetro do círculo c . De forma mais geral, todo ponto P' em $A'B'C'D'$ é transformado em ponto $G(P')$ em $A''B''C''D''$. A composição $H = F \circ G$ transforma o ponto P em $ABCD$ no ponto $H(P) = (F \circ G)(P) = F(G(P))$ de $A''B''C''D''$.

A reflexão em torno de h transforma o quadrilátero $A''B''C''D''$ no quadrilátero $A'''B'''C'''D'''$. Em particular, a distância entre C'' e h é idêntica a distância entre C''' e h . Neste caso h tem comportamento de um espelho plano. De forma geral, um ponto P'' em $A''B''C''D''$ é transformado em um ponto $R(P'')$ de $A'''B'''C'''D'''$.

Figura 2.1: Guia para a construção. Disponível .

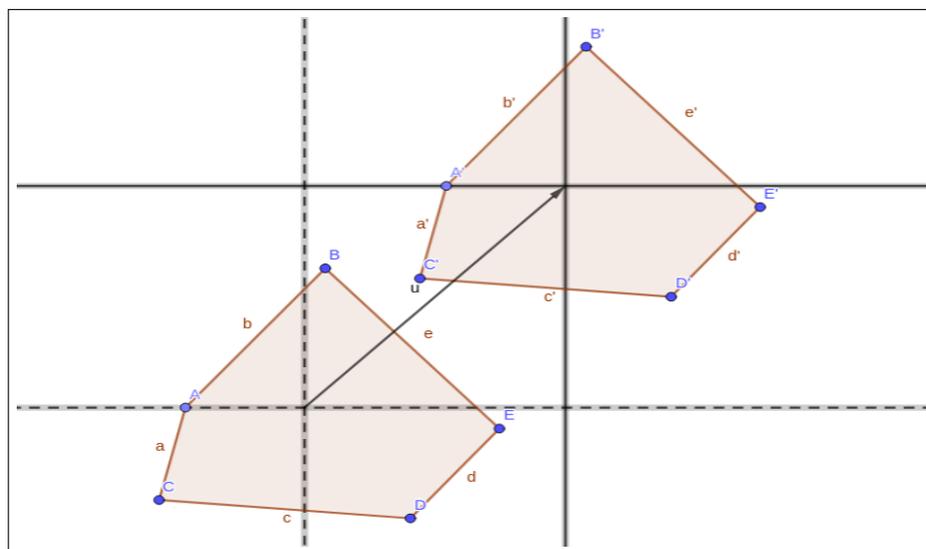


Fonte: Os autores.

Uma outra interpretação visual é pensar em isometria como uma transformação aplicada ao plano todo, ou seja, todos os objetos do plano são deslocados da posição original, mas não há mudança na magnitude dos objetos ou mudanças nas posições relativas. Veja a Figura 2.2, disponível no link  e note que os eixos do sistema de coordenadas e a respectiva figura são transformados por um deslocamento. Como a mudança ocorreu como um bloco compacto, então todas as posições relativas permanecem as mesmas. Por exemplo, a distância do vértice B ao centro do sistema de coordenadas é a mesma que a distância B' ao novo sistema de coordenadas; as áreas dos polígonos são idênticas, etc. Em resumo, tem-se uma congruência de figuras.

Os quatro processos de construções delineados a seguir ilustram os correspondentes casos de congruências de triângulos. Em cada caso é possível construir um, e somente, um triângulo associado com as hipóteses da construção. Caso, o processo possua mais que uma solução, então não é caso de congruência conforme será visto mais adiante. Os respectivos casos de congruência apresentados são os conhecidos lado-lado-lado (LLL), lado-ângulo-lado (LAL), ângulo-lado-ângulo (ALA), lado-ângulo-ângulo oposto (LAA_o) e o caso especial para triângulos retângulos cateto-hipotenusa (CH). Os casos que não produzem congruência são lado-lado-ângulo oposto (LLA_o) e ângulo-ângulo (AA).

Figura 2.2: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

2.1 Caso LLL

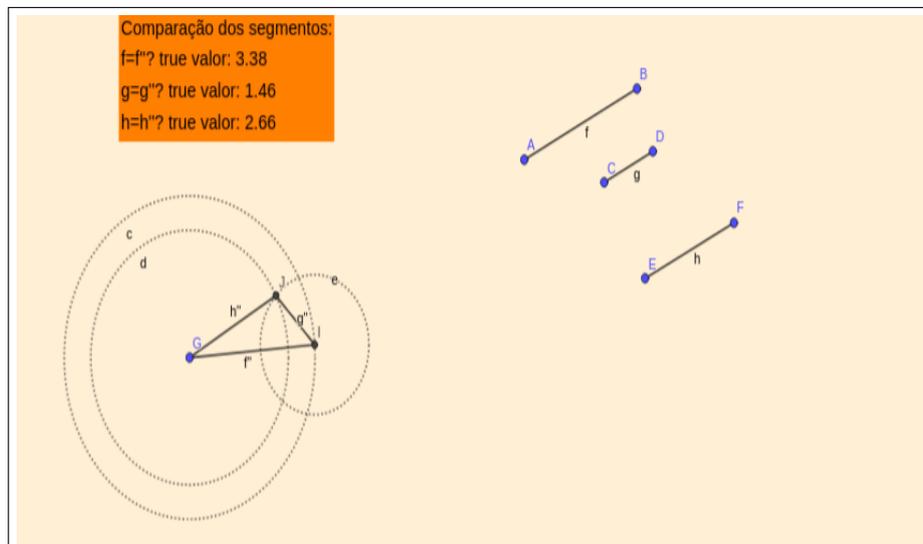
Exercício 1. *Construa um triângulo com os três lados dados.*

2.1.1 Solução

A Figura 2.3 serve de guia para o processo de construção. Neste caso, a desigualdade triangular é um elemento chave na discussão, pois só é possível construir um triângulo se a soma das medidas de quaisquer dois lados é maior que a medida do terceiro lado.

1. Anote 3 segmentos aleatórios determinados por pontos A, B, C, D, E, F . Use o ícone na barra de ferramentas.
2. Construa o ponto G . Utilize o ícone do compasso da barra de ferramentas e construa uma circunferência c de centro G e raio AB . Outra possibilidade é utilizar diretamente o comando $Círculo(G, Segmento(A, B))$ ou utilizar barra de ferramentas por meio do comando com ícone de círculo por ponto com raio dado e fornecer o segmento AB por meio de $Segmento(A, B)$.
3. Anote um ponto I sobre a circunferência c . Aqui, uma reta i arbitrária por G foi utilizada e a interseção I foi calculada. Com centro em I , construa a circunferência e de raio EF .
4. Construa a circunferência d de centro G e raio CD . Obtenha a interseção J (utilize o ícone da barra de ferramentas.)
5. O triângulo $\triangle GIJ$ possui os lados com mesma medida que os segmentos dados.

Figura 2.3: Guia para a construção. Disponível  .



Fonte: Os autores.

6. Utilize translação do segmento f com vetor $Vetor(A, B)$. Em seguida faça uma rotação de ângulo $\angle B'A'I$ em torno de G ou A' .
7. Repita o passo 6 com as devidas alterações no ângulo e no vetor de translação. A Figura 2.1 mostra os detalhes e o link de uma construção interativa.

A construção também pode ser feita utilizando outras ferramentas disponíveis na barra de ferramentas do GeoGebra. A utilização de translação e rotação tem um objetivo adicional de introduzir tanto o conceito geométrico de vetor como apresentar uma função um pouco menos comum para a visualização do caso L.L.L. A caixa de texto mostra os valores numéricos dos segmentos e dos respectivos segmentos após translação e rotação.

2.2 Caso LAL

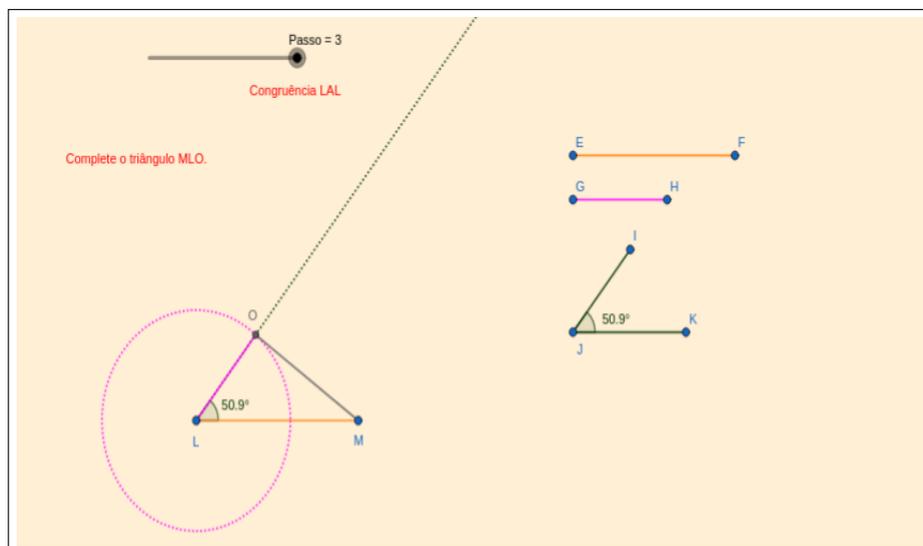
Exercício 2. *Dados dois segmentos e o ângulo formado entre eles, construa um triângulo.*

2.2.1 Solução

A Figura 2.4 abaixo serve de guia para a construção.

1. Dados os segmentos e o ângulo entre os segmentos.
2. Transporte o segmento EF utilizando o compasso.
3. Transporte o ângulo sobre o lado (escolhido convenientemente à esquerda).

Figura 2.4: Guia para a construção. Disponível  .



Fonte: Os autores.

- Utilizando o compasso construa a circunferência sobre o ponto final do segmento. A interseção fornece o ponto desejado.

2.3 Caso ALA

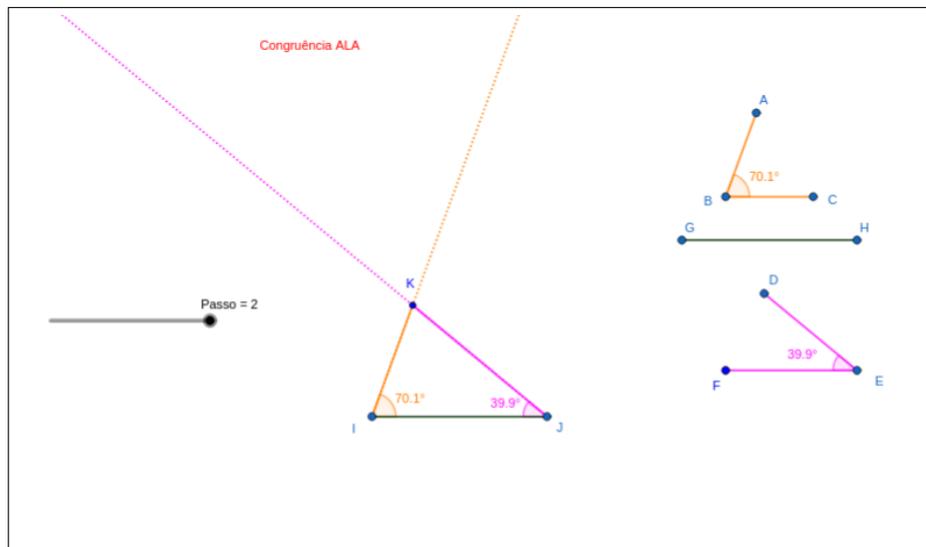
Exercício 3. *Dados dois ângulos e um segmento entre eles, construa um triângulo.*

2.3.1 Solução

A Figura 2.5 abaixo serve de guia para a construção.

- Dados dois ângulos e o segmento entre eles.
- Transporte o segmento dado.
- Transporte os ângulos para as extremidades do segmento.
- Prolongue os segmentos que definem os ângulos e encontre a interseção.

Figura 2.5: Guia para a construção. Disponível  .



Fonte: Os autores.

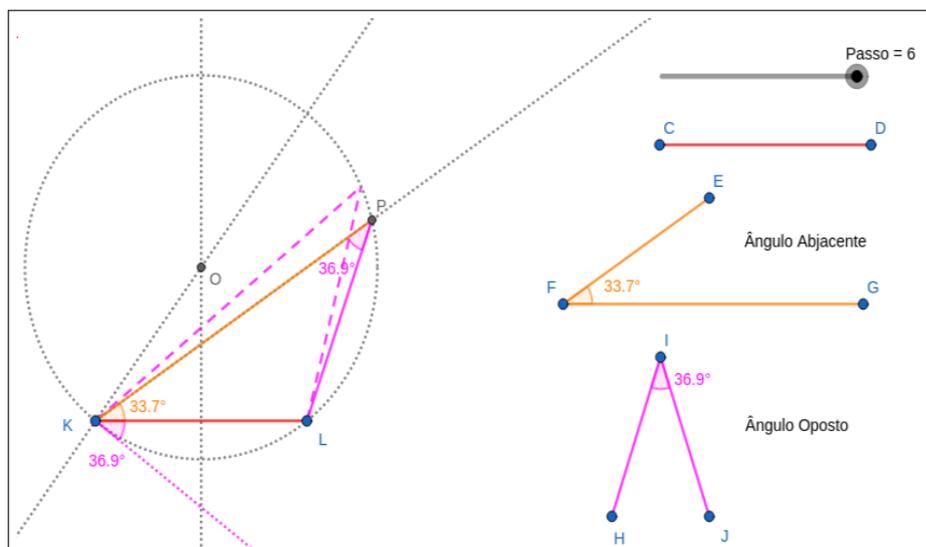
2.4 Caso LA Ao

Exercício 4. *Dados um segmento, um ângulo e o ângulo oposto ao segmento, construa um triângulo.*

2.4.1 Solução

A Figura 2.6 abaixo serve de guia para a construção.

Figura 2.6: Guia para a construção. Disponível  .



Fonte: Os autores.

1. Dados os lado, o ângulo e o respectivo ângulo oposto.
2. Construa o arco capaz sobre o lado dado.
3. A circunferência de centro O e que passa pelos extremos do lado, contém todos os triângulos com lado e ângulo oposto sob as hipóteses dadas.
4. Transporte o ângulo para o extremo do segmento. O respectivo prolongamento do lado que contém o ângulo adjacente fornece o triângulo procurado.

2.5 Caso CH

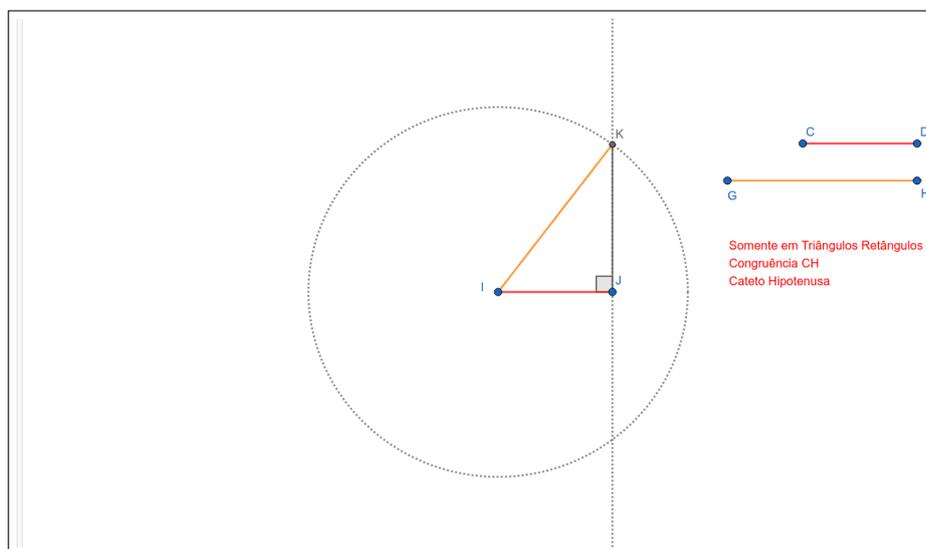
Exercício 5. *Dados o cateto e a hipotenusa, construa um triângulo.*

O caso de congruência do tipo cateto hipotenusa (CH) é um caso especial de congruência para triângulos retângulos.

2.5.1 Solução

A Figura 2.7 abaixo serve de guia para a construção.

Figura 2.7: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

1. Dado um triângulo retângulo com cateto e hipotenusa.
2. Construa a circunferência de medida da hipotenusa.
3. Trace um diâmetro.

4. Construa uma circunferência de mesmo centro e obtenha a interseção com o diâmetro.
5. Determine a perpendicular ao diâmetro pelo ponto do item anterior. A Figura 2.7 mostra os detalhes.

2.6 Caso LLAo não é caso de congruência

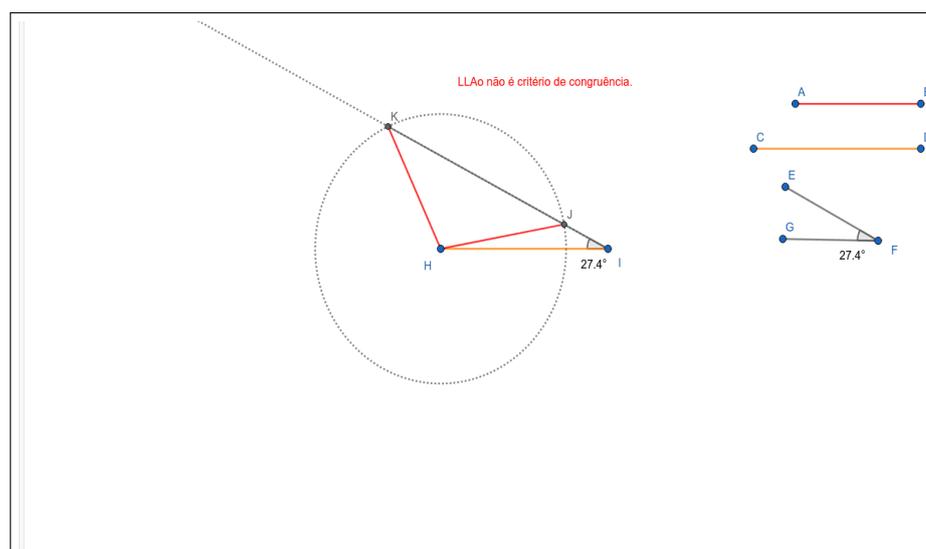
Exercício 6. *Dados dois lados e o ângulo oposto, construa um triângulo.*

O caso LLAo não é de caso congruência de triângulos, pois é possível gerar dois triângulos distintos com as hipóteses conforme apresentado a seguir. A Figura 2.8 serve de guia e mostra os detalhes.

2.6.1 Solução

1. Dados dois lados e o ângulo oposto a um dos lados.
2. Construa a circunferência de medida do maior lado.
3. Transfira o ângulo sobre o segmento do item anterior.
4. Trace a reta que contém o ângulo e calcule as interseções com a circunferência.
5. Note que é possível construir os triângulos $\triangle HIJ$ e $\triangle HIK$.

Figura 2.8: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

2.7 Caso AA não é caso de congruência

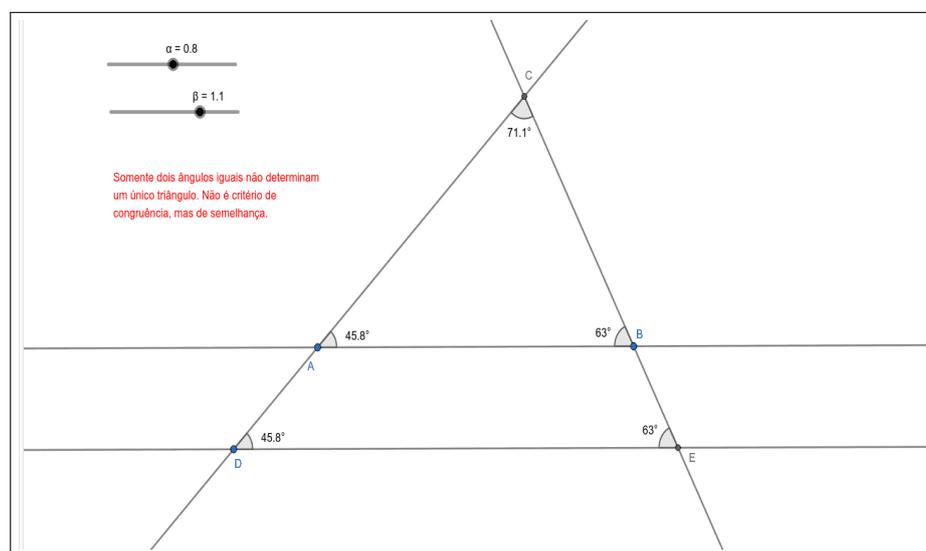
Exercício 7. *Dados dois ângulos, construa um triângulo.*

O caso AA não é de caso congruência de triângulos, pois é possível gerar um número infinito de triângulos distintos com as hipóteses conforme apresentado a seguir. A Figura 2.9 serve de guia.

2.7.1 Solução

1. Dados dois ângulos \hat{A} e \hat{B} , transporte-os para uma reta f suporte para os pontos A e B .
2. Construa as retas que são definidas pelos ângulos e passando por A e B .
3. Trace a reta g paralela a reta f .
4. Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ possuem os mesmos ângulos.

Figura 2.9: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

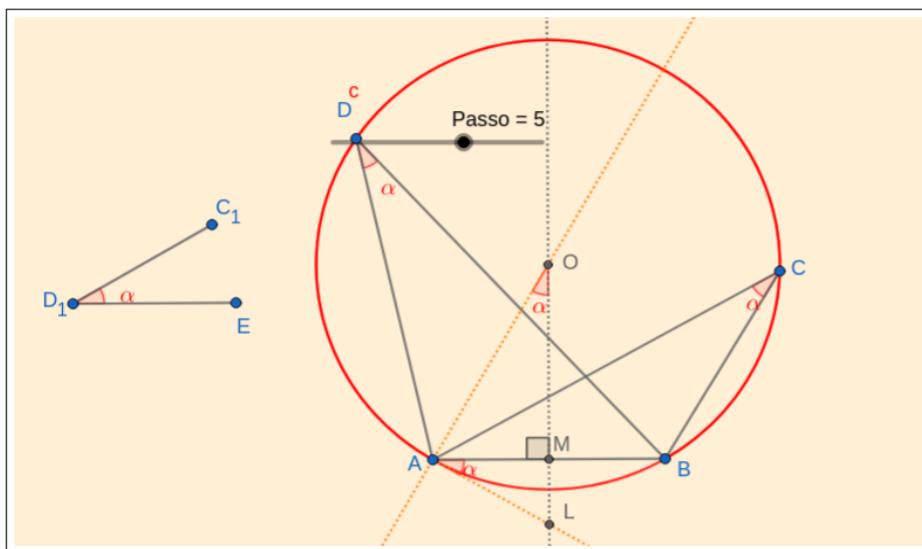
Nas próximas seções, construções adicionais são exploradas. Em resumo, são explorados o arco capaz, as retas tangentes a uma circunferência por um ponto, uma animação das retas tangentes a uma circunferência, o Teorema de Pitot, uma construção de um quadrilátero inscrito, exercícios e uma discussão adicional sobre isometrias.

2.8 Arco Capaz

Exercício 8. Construir o Arco Capaz sendo dados um segmento AB um ângulo α conforme mostrado na Figura 2.10.

Em outras palavras, encontrar todos os pontos P do plano tais que ângulo $\angle APB$ tenha mesmo ângulo. A construção inicial pode ser encontrada na guia de disponível .

Figura 2.10: Guia para a construção. Disponível .



Fontes: Os autores.

2.8.1 Solução

1. Dado um segmento AB e um ângulo $\angle C_1D_1E$. Ver Figura 2.10.
2. Transferir o ângulo C_1D_1E para o vértice A . Os triângulos D_1HG e AIJ são congruentes. Segue que $AI = AJ = D_1H = D_1G$ e $HG = IJ$. Ver a Figura 2.10 para ilustração.
3. Construir a mediatriz dos pontos A e B . Denotar por M o ponto médio entre A e B .
4. Construir uma perpendicular à reta AL . Marcar o ponto O , interseção desta com a mediatriz. Como $\angle LAB = \angle AOM$ e $\angle AML = \angle OMA = 90^\circ$, os triângulos $\triangle OMA$ e $\triangle AML$ são semelhantes.
5. Construir uma circunferência c com centro em O e raio OA .

Como O está na mediatriz de AB temos que $OA = OB$. Como consequência, a circunferência também passa por B .

O ângulo $\angle LAB$ é chamado de ângulo de segmento e a reta passando por L e A é tangente a circunferência.

Qualquer ponto C ou D no arco maior da corda AB (Arco Capaz) é visto com o mesmo ângulo conforme ilustrado na Figura 2.10. O ângulo $\angle AOB$ é chamado central e o ângulo $\angle AO_1B$ inscrito na circunferência.

Considere agora que o ângulo inscrito está entre as retas que definem o triângulo ΔAOB conforme ilustrado na Figura 2.11. Do triângulos ΔAO_1B e do processo de construção segue que:

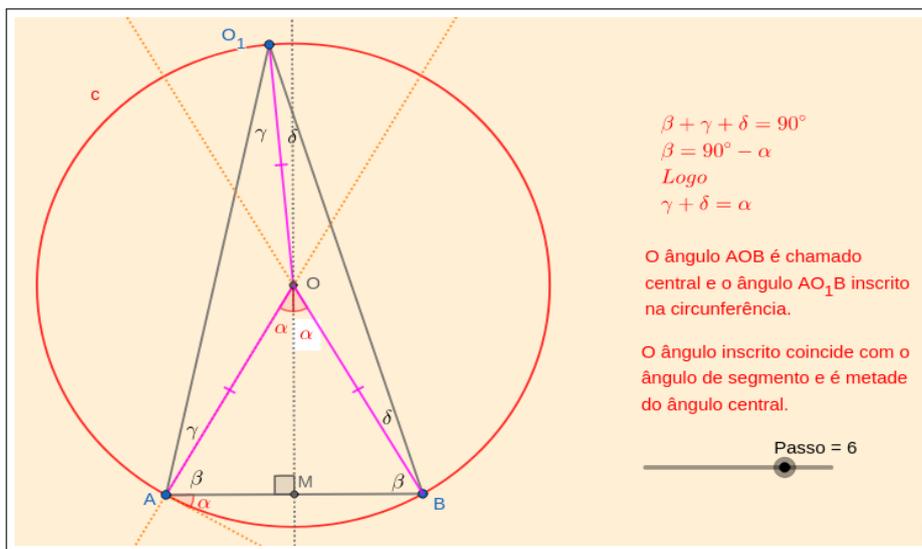
$$2\beta + 2\gamma + 2\delta = 90^\circ \quad \text{e} \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Logo,

$$\gamma + \delta = \alpha,$$

ou seja, o ângulo inscrito é metade do ângulo central que é 2α . Como consequência, o ângulo inscrito coincide com o ângulo de segmento e é metade do ângulo central.

Figura 2.11: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

Considere agora que o ângulo inscrito é tal que está situado conforme apontado na Figura 2.12, ou seja, no arco entre B e a reta suporte do lado AO do triângulo ΔAOB . Neste caso, o triângulo ΔAOR é isósceles de base AR e ângulo ϵ ; o triângulo ΔBOR é isósceles de base BR e ângulo θ . Logo, o ângulo $\angle ROB$ é tal que:

$$\angle ROB = 180 - 2\theta$$

Assim, o triângulo ΔAOR é tal que:

o segmento AB . Como consequência, os ângulos $\angle BSA$ e $\angle MOA$ são congruentes, pois são ângulos entre paralelas.

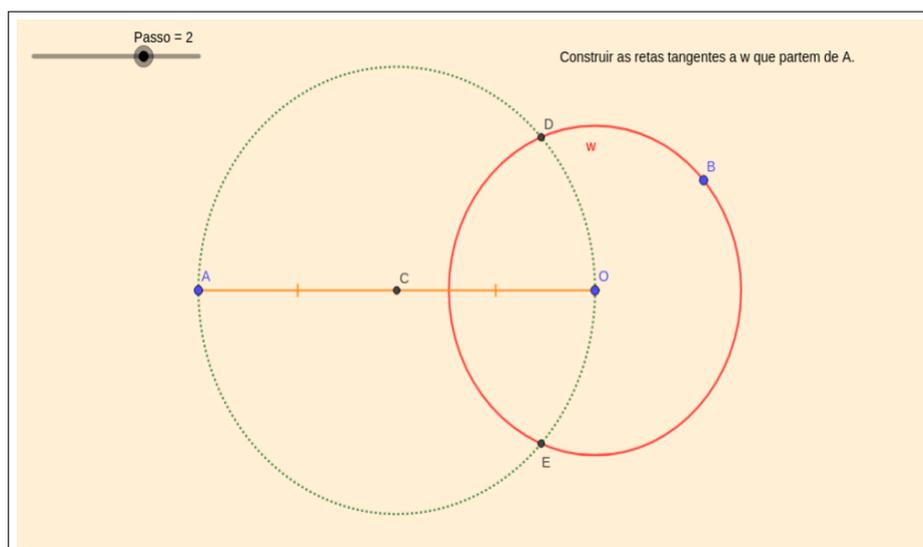
2.9 Retas tangentes a uma circunferência por um ponto

Exercício 9. *Dados uma circunferência w e um ponto A , construir as retas tangentes a w e que passam por A .*

2.9.1 Solução

O procedimento de construção pode ser acompanhado por meio da Figura 2.14 a seguir ou com link interativo .

Figura 2.14: Guia para a construção. Disponível .

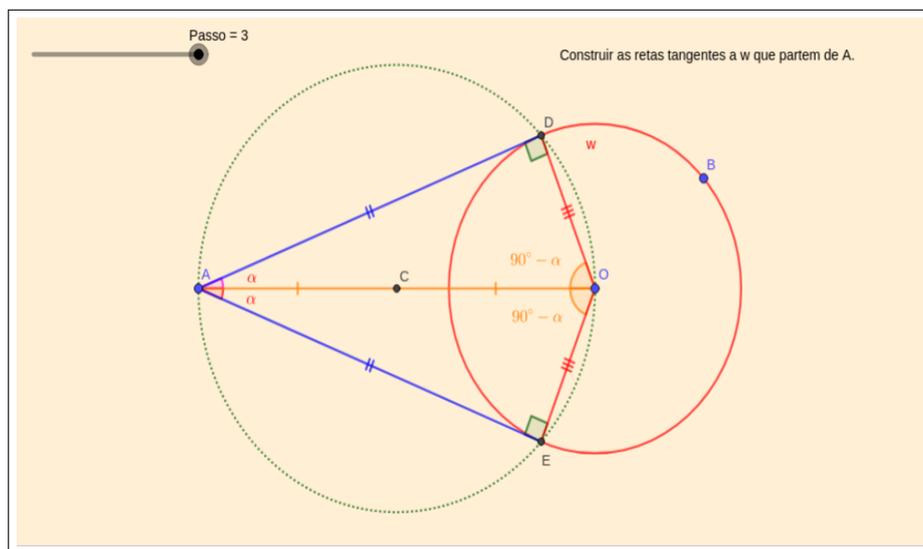


Fonte: Os autores.

1. Construa a circunferência w com centro O e raio $R = OB$ qualquer. Marque o ponto A no exterior de w conforme mostrado na Figura 2.14.
2. Determine o segmento AO e calcule o ponto médio C .
3. Construa a circunferência de centro C e raio CO . A interseção da circunferência e w produz os pontos D e E .
4. Construa as retas passando por A, D e A, E ou utilize segmentos de retas AD e AE . Ajuste os parâmetros de cor dos segmentos e estilo dos segmentos, assinale os ângulos entre os segmentos. Veja Figura 2.15.

Os triângulos $\triangle ADO$ e $\triangle AEO$ são retângulos em D e E , respectivamente, e, além disso são triângulos congruentes. De fato, os triângulos $\triangle ADO$ e $\triangle AEO$ são congruentes pelo caso CH, pois o lado AO é a hipotenusa comum e $OD = OE = R$.

Figura 2.15: Guia para a construção. Disponível  .



Fonte: Os autores.

2.10 Retas tangentes a uma circunferência: animação

Nesta seção, o objetivo principal é descrever o processo de construção de uma animação das retas tangentes da seção anterior. O ponto A desloca-se sobre uma elipse escolhida de forma arbitrária. O resultado é uma figura dinâmica com destaque à interatividade e apelo visual obtido por meio do esquema de cores dinâmicas. As Figuras 2.16, 2.17 e 2.18 podem ser observadas no *App*, disponível em  , e mostram os detalhes: comprimentos de alguns segmentos, raio da circunferência, ângulos entre as retas que passam pelo centro da circunferência e as retas que contêm os pontos de tangência.

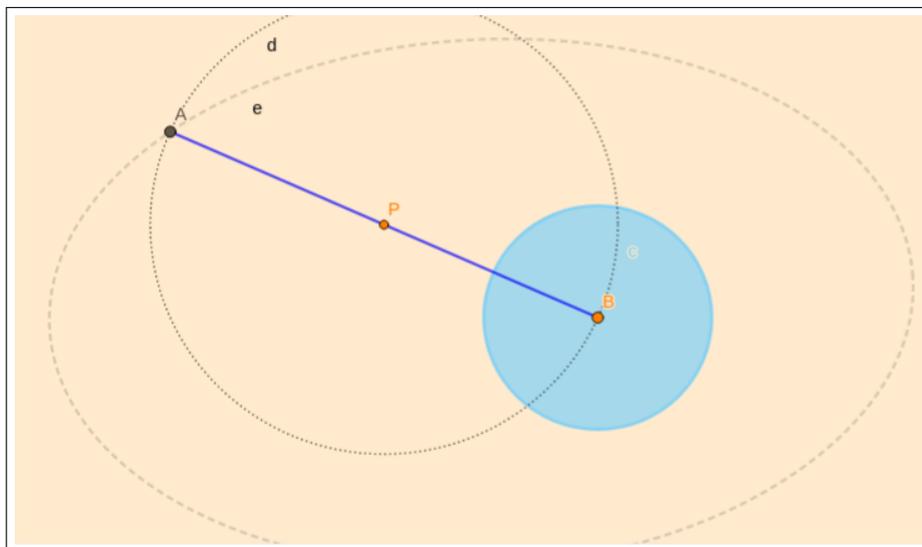
É importante ressaltar que a utilização de cores dinâmicas é discutida em mais detalhes no capítulo 6.

Exercício 10. *Dados uma circunferência w e um ponto A sobre uma elipse, construir as retas tangentes a w e que passam por A . Utilize o esquema de cores dinâmicas RGB para determinar a coloração dos triângulos congruentes.*

2.10.1 Solução

1. Construa uma elipse e . Neste caso utilizamos elipse com focos e ponto dado.

Figura 2.16: Guia para a construção. Disponível .

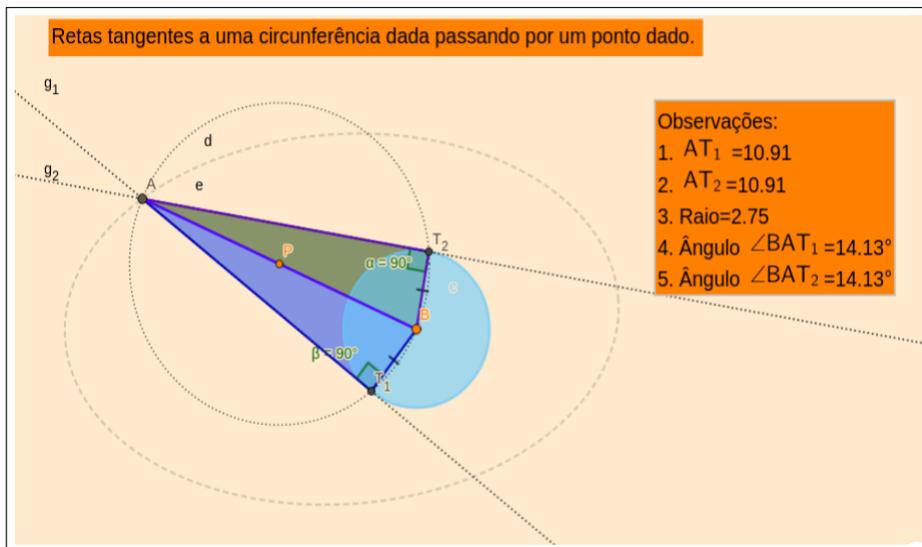


Fonte: Os autores.

2. Construa um ponto A sobre a elipse e um ponto B distante de A . Nota: por conveniência colocamos o ponto A mais à esquerda, aproximadamente, sobre o eixo maior.
3. Construa uma circunferência c de raio qualquer e centro em B . Nota: construímos a circunferência dentro da elipse por questão de conveniência.
4. Construa o segmento passando por A e B .
5. Marque o ponto médio P do segmento AB .
6. Construa a circunferência d de centro P e raio PB (ou PA).
7. Determine os pontos de interseção T_1 e T_2 entre as circunferências c e d .
8. Construa as retas f e g passando, respectivamente, por AT_1 e AT_2 .
9. Faça os ajustes que julgar convenientes para apresentação: cores, tipos de linhas, etc. A Figura 2.17 mostra o resultado final do processo de construção com texto inserido para mostrar a evolução dos comprimentos de AT_1 , AT_2 , o raio da circunferência e ângulos $\angle BAT_1$ e $\angle BAT_2$.

Ao adicionar um esquema de cores dinâmicas, com rastro ativado para o ponto A e os polígonos $t1 = \triangle AT_1B$ e $t2 = \triangle AT_2B$, a figura pode ilustrar diferentes aspectos tais como posição e área. Convenientemente, o esquema de cores RGB adotado para o ponto é dado pela trinca ordenada:

Figura 2.17: Guia para a construção. Disponível .



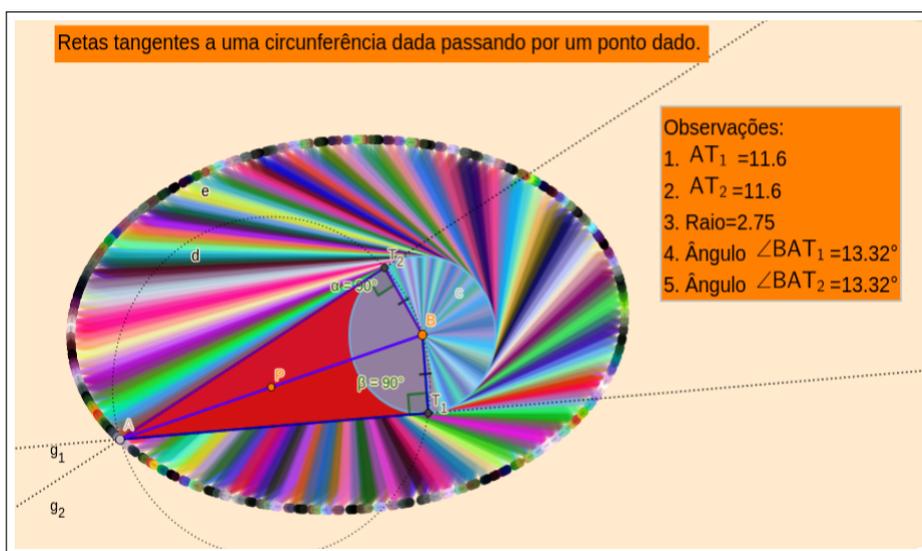
Fonte: Os autores.

$$(R, G, B) = (x(A), y(A), x(A) - y(A)),$$

em que $x(A)$, $y(A)$ e $x(A) - y(A)$ são, respectivamente, as abscissas dos pontos A , as ordenadas dos pontos A e as diferenças entre as abscissas e ordenadas de A .

Para a coloração dos polígonos, o terceiro valor da trinca RGB é substituído pela área do respectivo polígono com uma escolha aleatória da opacidade. O resultado é a Figura 2.18.

Figura 2.18: Animação com rastro ativado e ponto sobre uma elipse. Disponível .



Fonte: Os autores.

Uma nota interessante é que a elipse pode ser substituída por um segmento de reta, reta,

círculo ou qualquer outra figura que permita a variação do ponto e animação. Os polígonos $t1 = \Delta AT_1B$ e $t2 = \Delta AT_1B$ podem utilizar, por exemplo, os comprimentos dos lados dos triângulos para definir a tripla $(R, G, B) = (AB, AT_1, BT_1)$.

2.11 Teorema de Pitot

Dado um quadrilátero $ABCD$ com uma circunferência c inscrita, ou seja, tangente internamente aos seus quatro lados, então o Teorema de Pitot fornece uma relação entre os lados opostos do quadrilátero.

Teorema 1. *Teorema de Pitot: Um quadrilátero convexo pode ter um círculo inscrito se, e somente se, satisfaz a relação $AB + CD = BC + DA$. Ver [17] para maiores detalhes.*

O teorema é nomeado, segundo [18], em homenagem ao engenheiro Francês Henri Pitot (1695-1771) que demonstrou a condição necessária em 1725; a condição suficiente foi demonstrada pelo matemático Suíço Jakob Steiner (1796-1863) em 1846. Ainda, outros nomes são quadriláteros tangentes, quadrilátero circunscrito, quadrilátero circunscritível, quadrilátero inscritível e quadrilátero circunscritível [18].

Com o auxílio do GeoGebra, os resultados numéricos envolvendo o Teorema de Pitot podem ser verificadas imediatamente. Apesar de não servirem como prova, podem fornecer uma ilustração do tema.

Outros elementos que podem ser explorados são, por exemplo, a comparação das áreas dos triângulos $[\Delta BFG]$ e $[\Delta BEG]$ por meio de uma variável booleana; a apresentação do valor da área do polígono calculada pelo GeoGebra e a respectiva área do quadrilátero dada por

$$A_T = \frac{1}{2}p \cdot r,$$

em que r o raio da circunferência e p o perímetro do quadrilátero. Esta, por sua vez, deriva diretamente da congruência entre os triângulos com hipotenusas AG , BG , CG e DG pelo caso especial cateto-hipotenusa. Matematicamente:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta AEG} + S_{\Delta AKG} + S_{\Delta BEG} + S_{\Delta BFG} + S_{\Delta CFG} + S_{\Delta CIG} + S_{\Delta DIG} + S_{\Delta DKG}$$

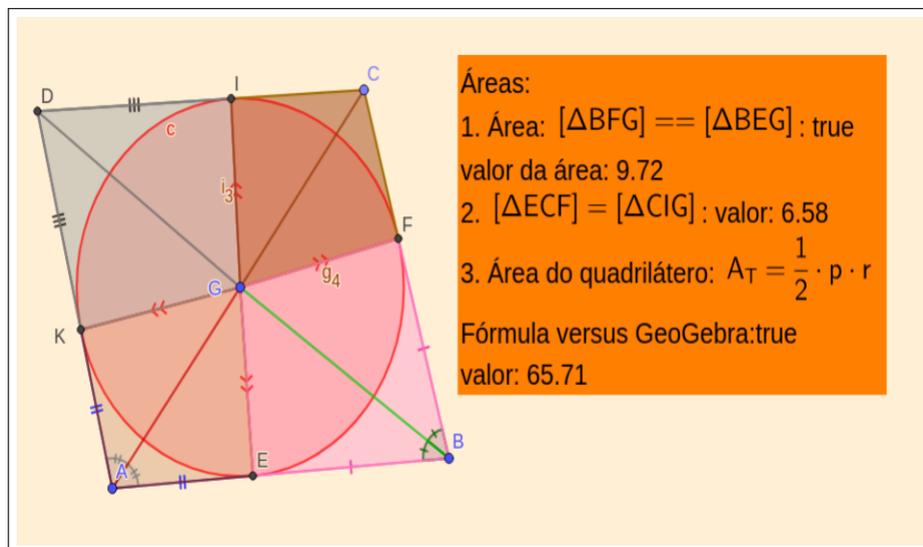
A somatória acima pode ser reescrita como:

$$S_{ABCD} = \frac{EG}{2}(AE + BE) + \frac{FG}{2}(BF + CF) + \frac{IG}{2}(CI + DI) + \frac{KG}{2}(DK + AK)$$

$$S_{ABCD} = \frac{r}{2}AB + \frac{r}{2}BC + \frac{r}{2}CD + \frac{r}{2}DA = \frac{r}{2}(AB + BC + CD + DA) = \frac{1}{2} \cdot p \cdot r$$

em que p , neste caso, denota o perímetro do quadrilátero.

Figura 2.19: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

É interessante notar que a afirmação anterior é uma relação que deriva diretamente da aplicação do conceito de retas tangentes à uma circunferência que, por sua vez, está associada à existência de triângulos retângulos congruentes. No entanto, o Teorema de Pitot é uma afirmação mais geral e é expresso por meio uma condição necessária e uma condição suficiente para a existência de quadrilátero convexo inscrito por uma circunferência.

Nosso objetivo no momento não é dissecar as demonstrações da prova direta e respectiva recíproca ou apresentar um trabalho de pesquisa sobre o assunto. Os autores sugerem as duas referências [17] e [18] para as respectivas demonstrações, comentários e referências adicionais.

2.12 Construção quadrilátero inscrito

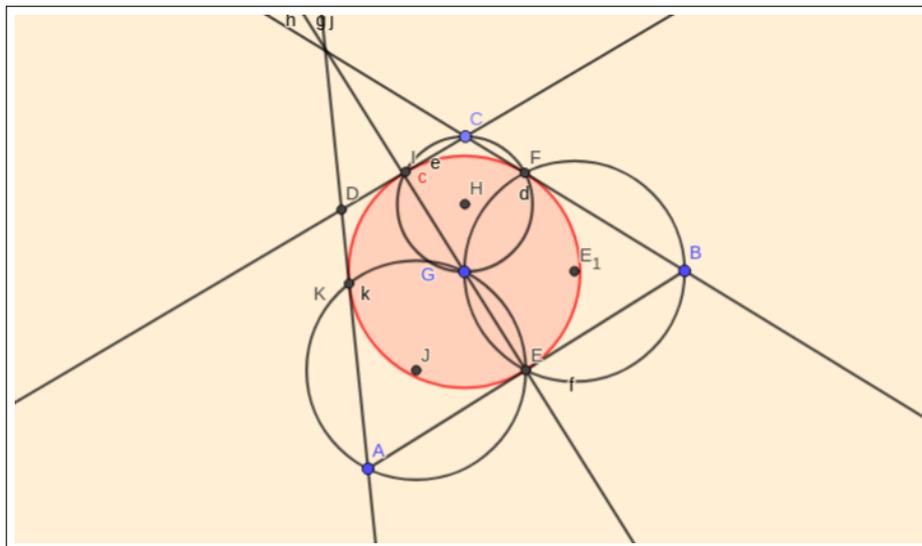
Uma questão interessante é o processo de construção de um quadrilátero convexo com uma circunferência inscrita por meio da utilização dos recursos das retas tangentes a circunferência passando por ponto dado. Neste caso, o procedimento é direto e executado sem lançar mão de resultados matemáticos mais sofisticados.

Exercício 11. *Construir um quadrilátero convexo com uma circunferência inscrita (todos os lados do quadrilátero são tangentes à circunferência).*

2.12.1 Solução

A Figura 2.20 serve de guia para os detalhes e o resultado final é aquele mostrado na Figura 2.19.

Figura 2.20: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

1. Construa um segmento de extremos A e B e Determine o ponto médio D .
2. Escolha um ponto G arbitrário não pertencente ao segmento AB . Construa a perpendicular g a AB passando por G . Encontre o ponto de intersecção E de g com AB .
3. Trace a circunferência c de centro G e raio GE .
4. Por B , construa a reta tangente à circunferência.
5. Construa o ponto C livre sobre a reta BF e determine I : o ponto de tangencia entre I e a circunferência c .
6. Construa a reta tangente a c por A . Determine o ponto K . A reta passando por K determina o ponto D . O quadrilátero construído tem a circunferência c tangente aos 4 lados.
7. Ajustar os elementos de interesse: inserção de texto e cores dos triângulos ou lados. A Figura 2.19 mostra um resultado final.

Os dois exercícios a seguir são provenientes da Olimpíada Iraniana de Geometria de 2014/2015 e ilustram aplicações das congruências para triângulos. A primeira Olimpíada Iraniana de Geometria (Iran's Geometry Problems, 2014-2015) foi realizada em Tehran e Isfahan em 4 de setembro de 2014. Ver [1] para mais informações.

2.13 Exercício 01

Exercício 12. (IGO 2014-2015) O círculo inscrito no $\triangle ABC$ é tangente a BC , AC e AB em D , E e F , respectivamente. Denote os pés das perpendiculares a BC e passando por F , E por K e L , respectivamente. A segunda interseção destas perpendiculares com o círculo inscrito é M , N , respectivamente. Mostre que:

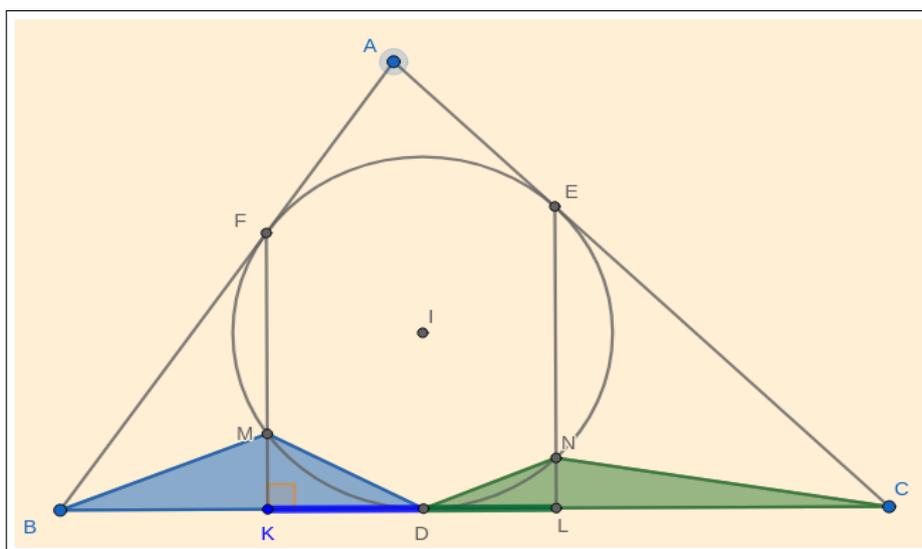
$$\frac{[\triangle BMD]}{[\triangle CND]} = \frac{DK}{DL}$$

A solução completa é dividida em duas partes: a construção inicial, a qual é a construção geométrica que contém as informações do problema proposto e a solução propriamente dita.

2.13.1 Construção Inicial

A Figura 2.21 fornece a construção inicial do problema.

Figura 2.21: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores

1. Traçar as bissetrizes dos ângulos $\angle C$ e $\angle B$. Calcular interseção I . Traçar perpendicular a BC passando por I . Obter interseção F . Traçar o círculo de raio FI e centro I . Obter interseções E e D . Construir os triângulos $\triangle BMD$ e $\triangle CND$.
2. Traçar as perpendiculares a BC passando por E e F . Obter as interseções M e N com a circunferência inscrita. Obter as interseções K e L .
3. Construir os triângulos $\triangle BMD$ e $\triangle CND$.

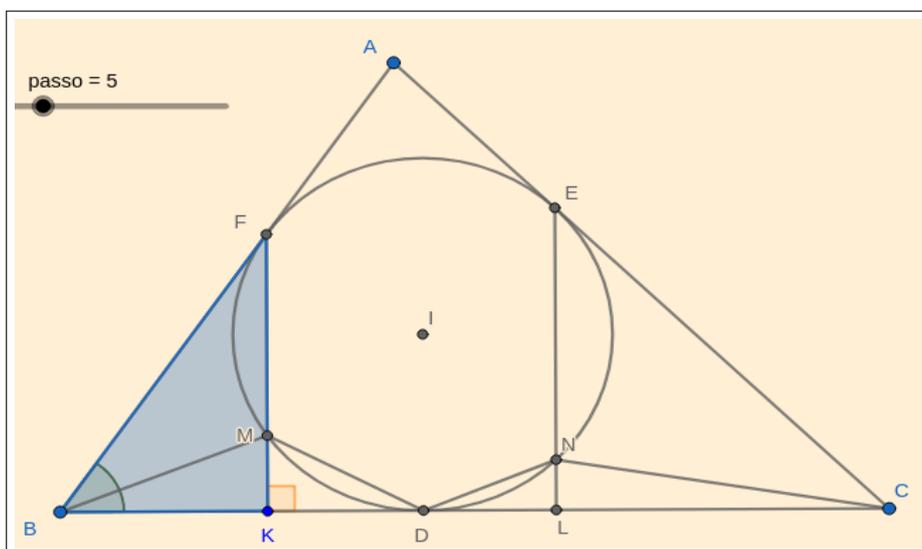
4. Marcar os segmentos DK e DL. A relação solicitada é aquela apresentada em destaque:

$$\frac{[\Delta BMD]}{[\Delta DNC]} = \frac{\frac{BD \cdot MK}{2}}{\frac{CD \cdot NL}{2}} = \frac{BD \cdot MK}{CD \cdot NL} = \frac{KD}{KL} \tag{2.13.1}$$

2.13.2 Solução

1. Traçar os segmentos FD e ED. Obter os triângulos ΔBFD e ΔDEC . Seja $\hat{B} = \angle DBF = \angle KBF$. O ângulo $\angle BFK = 90 - \hat{B}$, pois ΔBFK é retângulo. A Figura 2.22 mostra os detalhes da construção.

Figura 2.22: Guia para a construção. Disponível .

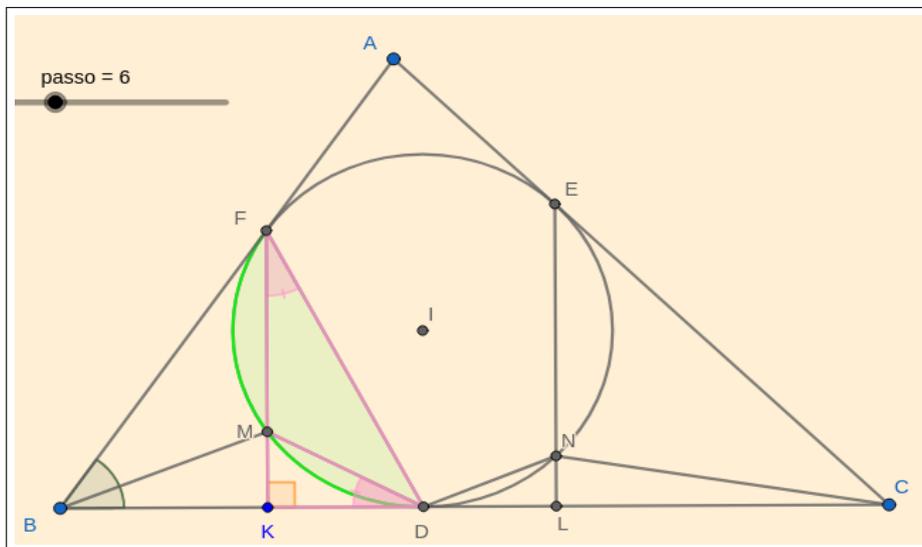


Fonte: Os autores.

2. Construa o lado FD. Observe o arco $\angle MD$ sobre o arco $\angle FD$. Os ângulos $\angle BFD$ e $\angle BDF$ são iguais pois enxergam o mesmo arco. $\angle BFD + \angle BDF + \hat{B} = 180 \Rightarrow \angle BFD = 90 - \frac{1}{2}\hat{B}$. Logo, o ângulo $\angle DFK = \angle BFD - \angle BFK = \frac{1}{2}\hat{B} = \angle DFM$ O ângulo $\angle MDK = \angle DFM = \angle DFK = \frac{1}{2}\hat{B}$ (Enxergam mesmo arco DM). A Figura 2.23 mostra os detalhes da construção.
3. Os triângulos ΔBID e ΔDMK são semelhantes. Construa os triângulos ΔBFI e ΔBID . Os ângulos $\angle IFB = \angle IDB = 90$ (tangentes). Os raios e as hipotenusas são idênticos. $\angle FBI = \angle DBI = \frac{\hat{B}}{2}$. $\angle BID = 90 - \frac{1}{2}\hat{B}$. A Figura 2.24 mostra os detalhes da construção.
4. ΔBID e ΔKDM são semelhantes conforme pode ser visualizado na Figura 2.25. Os ângulos $\angle BID = 90 - \frac{1}{2}\hat{B} = \angle KMD$ e $\angle KDM = \frac{1}{2}\hat{B} = \angle DBI$.

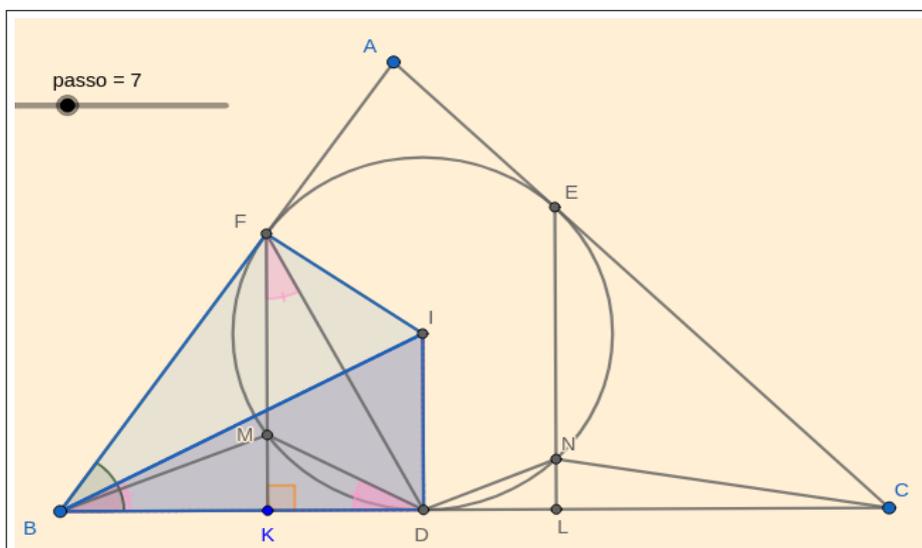
$$\therefore \frac{MK}{DK} = \frac{r}{BD} \Rightarrow r = \frac{MK \cdot BD}{DK} \tag{2.13.2}$$

Figura 2.23: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

Figura 2.24: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

5. Construa o lado DE (Ver Figura 2.26). Observe o arco $\angle ND$ sobre o arco $\angle ED$. Os ângulos $\angle CED$ e $\angle CDE$ são iguais pois enxergam o mesmo arco.

$$\angle CED + \angle CDE + \hat{C} = 180 \Rightarrow \angle CED = 90 - \frac{1}{2}\hat{C}$$

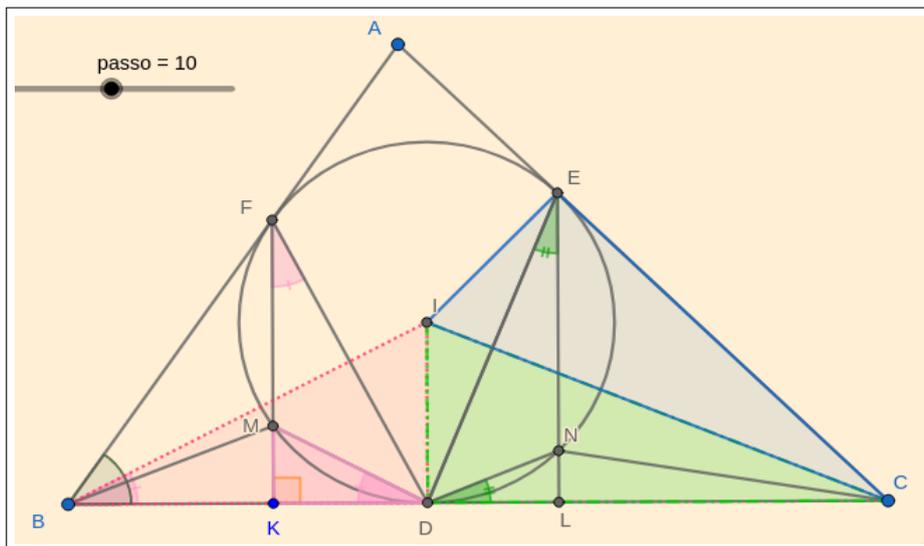
$$\angle DEL = \angle CED - \angle CEL = \frac{1}{2}\hat{C} = \angle DEN \tag{2.13.3}$$

$$\angle DEL = \angle NDL = \frac{1}{2}\hat{C}(\text{Enxergam mesmo arco DN})$$

Logo,

$$\frac{r}{CD} = \frac{NL}{DL} \Rightarrow r = \frac{NL \cdot CD}{DL} \tag{2.13.4}$$

Figura 2.27: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

8. Das fórmulas (2.13.2) e (2.13.4) obtém-se:

$$r = r \Rightarrow \frac{CD \cdot NL}{DL} = \frac{MK \cdot BD}{DK}$$

Logo, 2.13.1 pode ser escrita como segue:

$$\frac{[\Delta BMD]}{[\Delta DNC]} = \frac{\frac{BD \cdot MK}{2}}{\frac{CD \cdot NL}{2}} = \frac{BD \cdot MK}{CD \cdot NL} = \frac{KD}{KL}$$

2.14 Exercício 02

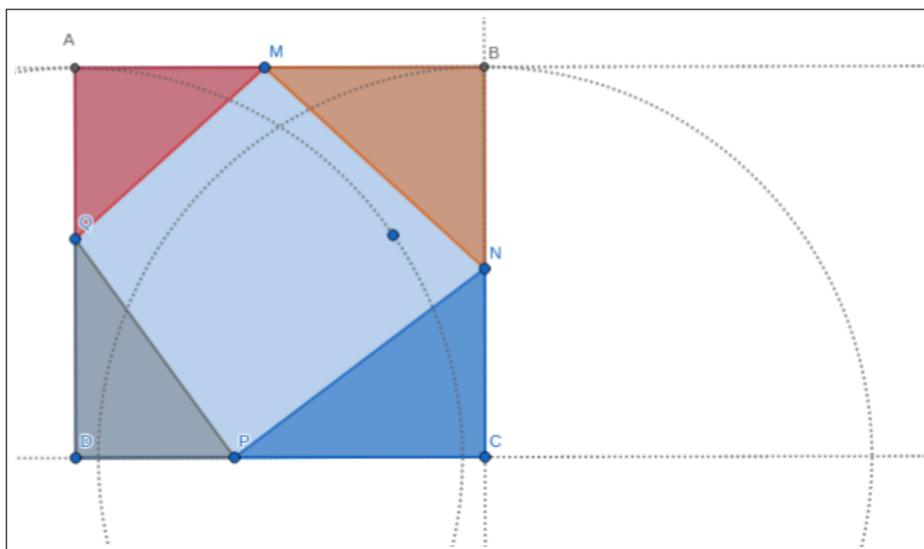
Exercício 13. (IGO 2014-2015) Em um retângulo $ABCD$, os pontos M, N, P, Q estão sobre os lados AB, BC, CD, DA , respectivamente, tal que a área dos triângulos $\Delta AQM, \Delta BMN, \Delta CNP, \Delta DPQ$ são iguais. Mostre que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

2.14.1 Construção inicial

1. Construa a circunferência de centro D e raio qualquer.
2. Construa a reta passando por O e escolha um ponto C .

3. Por C passe a perpendicular a reta anterior. Construa uma circunferência de centro C e raio idêntico da circunferência anterior.
4. Calcule a interseção B . Por B passe uma paralela a reta passando por O e determine o ponto A . O polígono $ABCD$ é um retângulo caso os raios das circunferências sejam distintos e um quadrado caso os raios sejam iguais. A Figura 2.28 mostra a construção.

Figura 2.28: Guia para a construção. Disponível .



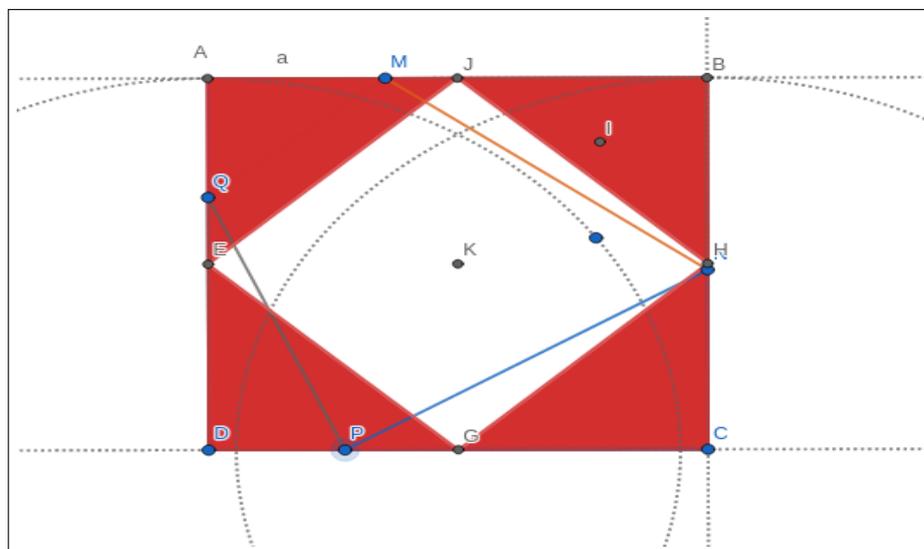
Fonte: Os autores.

2.14.2 Solução

1. $AB = CD$ e $AD = BC$ por hipótese. Suponha que $AM \neq PC$, então $AM > PC \Rightarrow -AM < -PC \Rightarrow AB - AM < AB - PC$.
2. $[\Delta AQM] = [\Delta PNC] \Rightarrow \frac{AQ \cdot AM}{2} = \frac{PC \cdot NC}{2} \stackrel{AM > PC}{\Rightarrow} AQ < NC \Rightarrow BC - NC < BC - AQ \Rightarrow BC - NC < BC - AQ$
 $[\Delta MBN] = (AB - AM) \cdot (BC - NC) < (AB - PC)(BC - AQ)$
 $= (CD - PC) \cdot (AD - AQ) = [\Delta NPC]$ (absurdo).

Portanto, $AM = PC$ e $AQ = NC$. Como consequência, os triângulos ΔAMQ e ΔCNP são congruentes (LLL). Da mesma forma $MN = PQ$. Conclusão: $MNPQ$ é paralelogramo conforme ilustrado na Figura 2.29. O link disponível .

Figura 2.29: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

2.15 Discussão adicional: Isometrias

Aqui, o objetivo é fazer uma discussão sucinta sobre o tema e ilustrar os elementos de isometria por meio do GeoGebra. O recurso dinâmico do GeoGebra é utilizado para ilustrar as translações, rotações e reflexões.

2.15.1 Isometrias: translação I

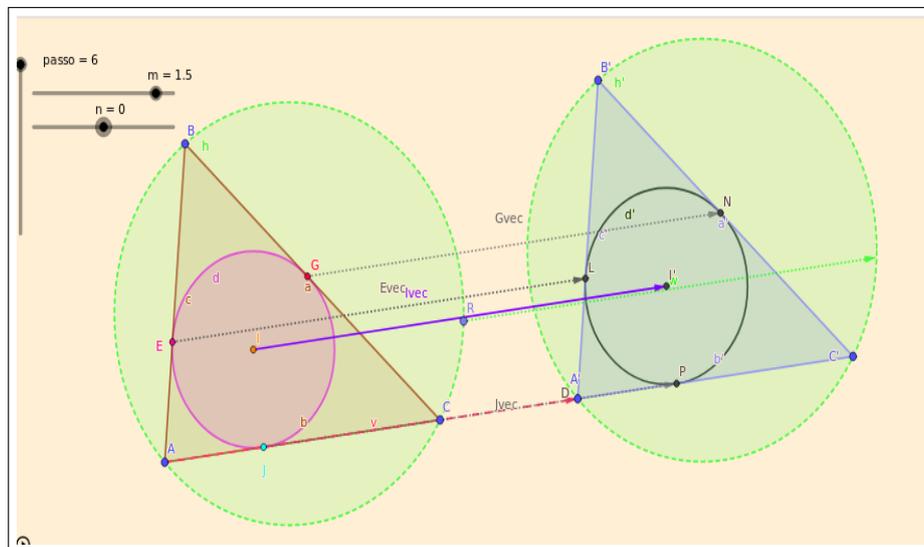
Este caso ilustra o processo de translação por meio do uso de vetores, ou seja, um deslocamento por uma quantidade fixa. No caso apresentado, disponível online e interativamente neste link , um triângulo é transladado em conjunto com alguns elementos tais como Incentro, círculo inscrito, círculo circunscrito, pontos médios dos lados, etc. A verificação numérica de igualdade de elementos associados ao triângulo é apresentada apenas por meio das ilustrações gráficas.

Exercício 14. *Dado um triângulo ΔABC , construir a respectiva translação utilizando um vetor $v = m \cdot \vec{AC} + n \cdot \vec{AB}$, com m, n Controles Deslizantes variando em um intervalo arbitrário. Adicionalmente, considere o incentro, o círculo inscrito, os pontos de tangencia do círculo inscrito e o círculo circunscrito para as translações por v .*

2.15.1.1 Solução

A Figura 2.30 serve de guia para a construção.

Figura 2.30: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

1. Construa os pontos A , B e C ; o triângulo ΔABC por meio da ferramenta polígono e os controles deslizantes m e n . Defina o vetor $u = m \cdot \text{Vetor}(A, C) + n \cdot \text{Vetor}(A, B)$. Defina o vetor $v = \text{Vetor}(A, A + u)$.
2. Translade o polígono $t1$ pelo vetor v . O resultado é o polígono $t1'$ que contém todas as medidas idênticas àquelas do polígono $t1$. Por exemplo, o segmento AB tem comprimento idêntico ao comprimento de $A'B'$, a área do triângulo ΔABC é idêntica a área do triângulo $\Delta A'B'C'$, os perímetros também são iguais.
3. Determine o círculo inscrito d em ABC ; faça translação por v e obtenha d' . Determine o Incentro do triângulo ABC e translade por v obtendo I' . Verifique que o incentro I' é o centro de $\Delta A'B'C'$ por meio de variável booleana $I' == S$, em que S é o centro do círculo inscrito de $A'B'C'$.
4. Anote o vetor $Ivec = I + v$. Observe que $Ivec$ aponta de I para I' .
5. Determine os pontos de tangência de d (círculo inscrito) com os lados do triângulo ΔABC e obtenha E , G e J . Faça translação de E , G e J por v . Anote os vetores

$$Evec = \text{Vetor}(E, E + v), \quad Gvec = \text{Vetor}(G, G + v), \quad \text{e} \quad Jvec = \text{Vetor}(J, J + v).$$

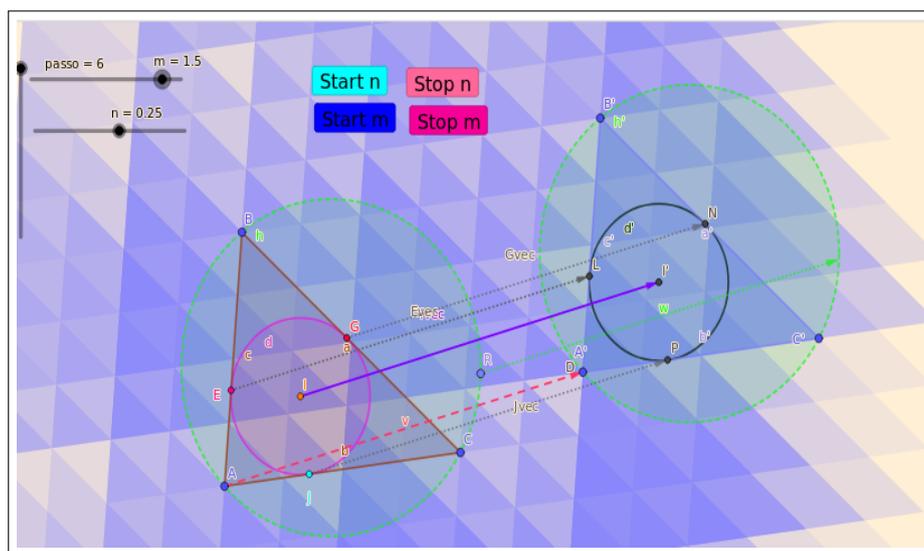
Observe que a translação transforma E , G e J em L , N e P , respectivamente.

6. Construa o círculo circunscrito h no triângulo ABC e faça uma translação v . Defina R um ponto em h e translade por v . Defina $w = \text{Vetor}(R, R + v)$. O ponto w é livre em h

e pode ser animado.

- Insira os botões *Start m*, *Stop m*, *Start n* e *Stop n*. Os botões não são estritamente necessários para a animação de v , pois basta utilizar o controle deslizante. A Figura 2.31 ilustra a solução em configuração distinta da Figura anterior obtida por meio de um ajuste dos valores de m e n e com rastro ativado para o triângulo transladado. A construção completa pode ser acessada em .

Figura 2.31: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

2.15.2 Isometrias: Rotação I

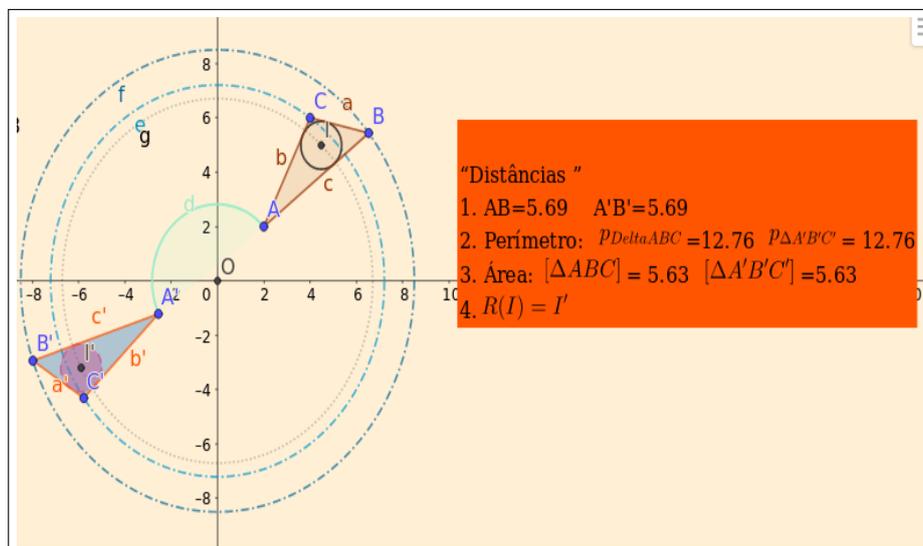
Da mesma forma que no caso anterior, a rotação é ilustrada por meio de uma construção.

A visualização, passo a passo, pode ser encontrada em . Note que a rotação também não insere novas informações no triângulo, ou seja, não há mudança de comprimento dos lados, perímetro, área, etc.

Exercício 15. Dado um triângulo ΔABC , construir a respectiva rotação em torno de um ponto para o ângulo α variando no intervalo $[0, 2\pi]$. Adicionalmente, considere o incentro, o círculo inscrito e um dos círculos ex-inscritos para as rotações por α .

A Figura 2.32 serve de guia para a construção e 2.33 mostra o resultado final do procedimento descrito a seguir.

Figura 2.32: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores.

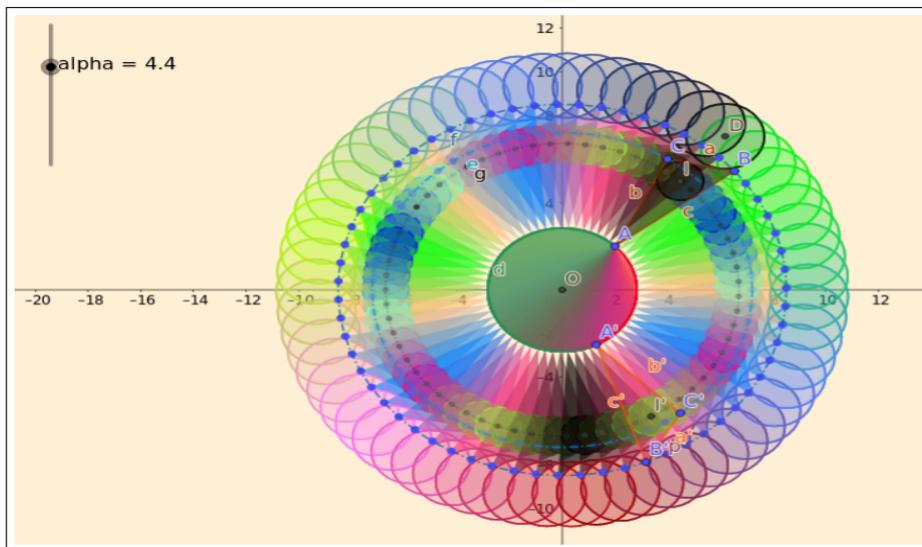
2.15.2.1 Solução

1. Construir o triângulo ABC ; o Controle Deslizante $\alpha \in [0, 2\pi]$ e o triângulo $\Delta A'B'C'$ por meio da ferramenta polígono, rotação do triângulo ΔABC em torno de O pelo ângulo α .
2. Construa o arco circular OAA' ; o círculo de centro O e raio igual a distância OC ; o círculo de centro O e raio igual a distância OB .
3. Construa o incentro I do triângulo ΔABC , o círculo inscrito h e o círculo de centro em O e raio OI .
4. Rotacione I e h por α em torno de O .
5. Insira uma caixa de texto contendo as medidas de AB , $A'B'$, os perímetros, áreas.
6. Construa o círculo ex-inscrito ao lado BC e rotacione pelo ângulo α .
7. Acione o rastro do polígono $\Delta A'B'C'$, do arco circular e do círculo ex-inscrito. Defina o esquema de cores dinâmicas como:

$$(R, G, B) = (\alpha, 2\alpha, \alpha/2), \quad (R, G, B) = (\alpha/2, \alpha/2, \alpha), \quad (R, G, B) = (2\alpha, \alpha/2, -\alpha)$$

para, respectivamente, o círculo inscrito, o círculo ex-inscrito e o polígono. A Figura 2.33 ilustra a construção.

Figura 2.33: Guia para a construção. Disponível .

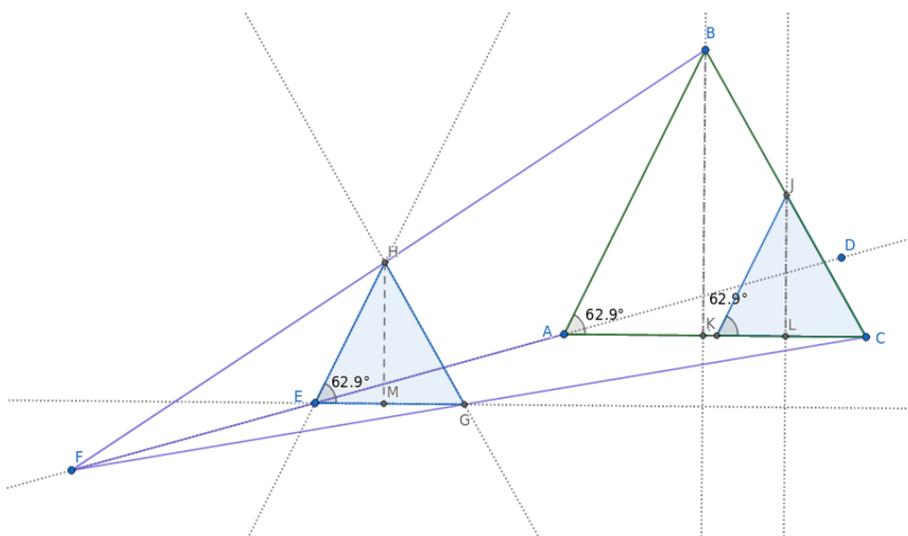


Fonte: Os autores.

2.15.3 Semelhança não é isometria

Para ilustrar a questão, observe a Figura 2.34. Neste caso, a construção mostra os triângulos semelhantes $\triangle ABC$ e $\triangle EHG$. O triângulo $\triangle IJC$ pode ser construído de forma que seja congruente ao triângulo $\triangle EHG$ por meio da transferência dos lados utilizando a ferramenta compasso.

Figura 2.34: Guia para a construção. Disponível .



Fonte: Os autores

Geometricamente, não há razão para afirmar que as áreas dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EHG$ são idênticas, pois os triângulos $\triangle EHG$ e $\triangle IJC$ são congruentes. Portanto, as áreas dos

triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EHG$ são distintas, exceto quando $\triangle EHG$ esta sobre $\triangle ABC$, ou seja, quando a razão de semelhança é igual a 1. Matematicamente, a relação entre as áreas de dois triângulos semelhantes decorrem diretamente da razão de semelhança. Neste caso:

$$k = \frac{AB}{EH} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{HG} = \frac{BK}{HM},$$

em que BK e HM são as respectivas alturas dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EHG$.

Dessa forma,

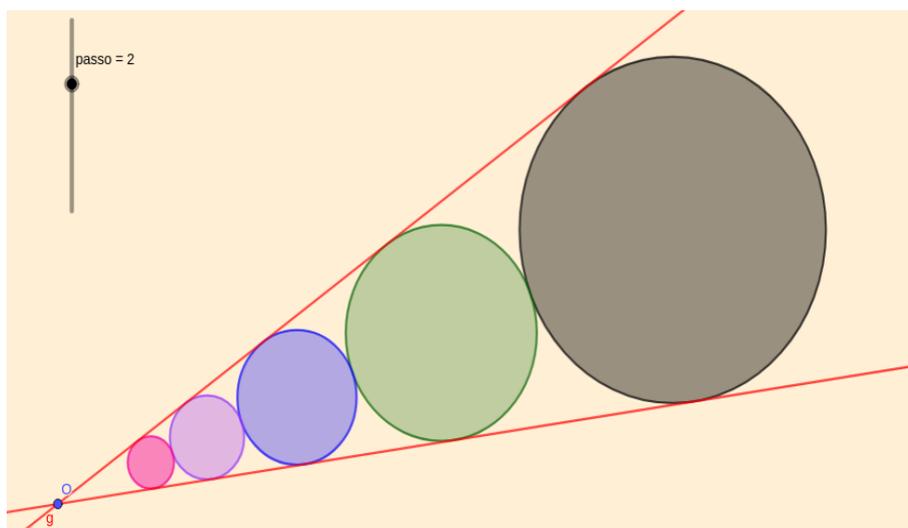
$$\frac{[\triangle ABC]}{[\triangle EHG]} = \frac{[\triangle ABC]}{[\triangle IJC]} = \frac{\frac{AC \cdot BK}{2}}{\frac{EG \cdot HM}{2}} = \frac{EG}{BK} \cdot \frac{BK}{HM} = k \cdot k = k^2$$

2.16 Desafios de construção: circunferências tangentes

Nesta parte, utiliza-se as construções e elementos geométricos para a construção de cinco circunferências tangentes a duas retas concorrentes. O problema de construção pode ser colocado na seguinte forma:

Exercício 16. *Dado um ângulo qualquer e um ponto D sobre a bissetriz interna do ângulo. Construir 5 circunferências tangentes às retas suportes do ângulo e com centro na bissetriz. As circunferências devem ser construídas no sentido de D para O . A Figura 2.35 ilustra o Desafio 03 de construção.*

Figura 2.35: Retas concorrentes com 5 circunferências tangentes. Disponível .



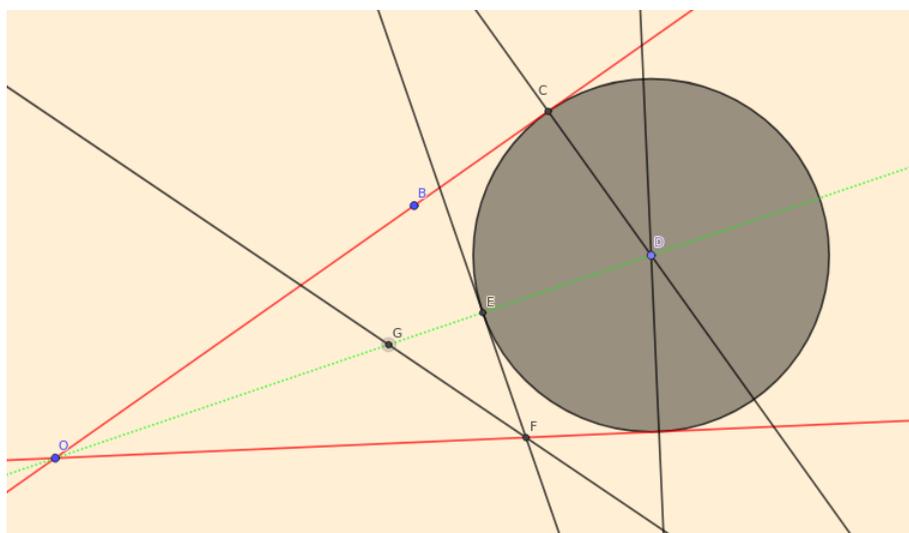
Fonte: Os autores.

2.16.1 Solução

A Figura 2.36 serve de guia para a construção.

1. Construa duas retas concorrentes em um ponto O formando um ângulo qualquer entre si.
2. Anote um ponto D sobre a bissetriz interna do ângulo entre as retas.
3. Por D , passe uma perpendicular à reta que passa por OA e OB .
4. Calcule a interseção C . A circunferência com centro em D e raio CD é tangente.
5. O ponto E é a interseção da circunferência com a bissetriz. A perpendicular à bissetriz por E determina o ponto F .
6. A interseção da bissetriz $\angle OFE$ com a bissetriz do ângulo $\angle AOB$ fornece o centro G da nova circunferência.
7. O procedimento pode ser repetido até atingir 5 circunferências tangentes conforme mostrado na Figura 2.35.

Figura 2.36: Guia para construção das 5 circunferências tangentes. Disponível .



Fonte: Os autores.

Capítulo 3

Relações Métricas no triângulo retângulo

O Teorema de Pitágoras é um dos teoremas mais conhecidos da Matemática. Cerca de 371 demonstrações são conhecidas, as quais incluem a demonstração de Einstein, Leonardo da Vinci e A. Garfield (Presidente dos Estados Unidos) [39]. Pitágoras foi imortalizado devido ao crédito da descoberta e prova do teorema que tem seu nome, mas não há evidências de tal descoberta ou prova. Há, no entanto, evidências de que a descoberta e prova estejam associadas aos matemáticos Babilônicos cerca de 1000 anos antes de Pitágoras. Ver [39] para mais detalhes e referências. A dedução do Teorema de Pitágoras apresentada aqui é baseada nas relações geométricas no triângulo retângulo.

3.1 Relações métricas no triângulo retângulo

Considere o triângulo $\triangle ABC$ retângulo mostrado na Figura 3.1 e sejam a , b e c as respectivas medidas dos lados. Seja D o ponto de interseção da altura h relativa ao lado BC . Por fim, considere que $BD = m$, $CD = n$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$. Determinemos todos os ângulos dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$.

No $\triangle ABC$ temos:

$$\alpha + \beta + 90 = 180 \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ.$$

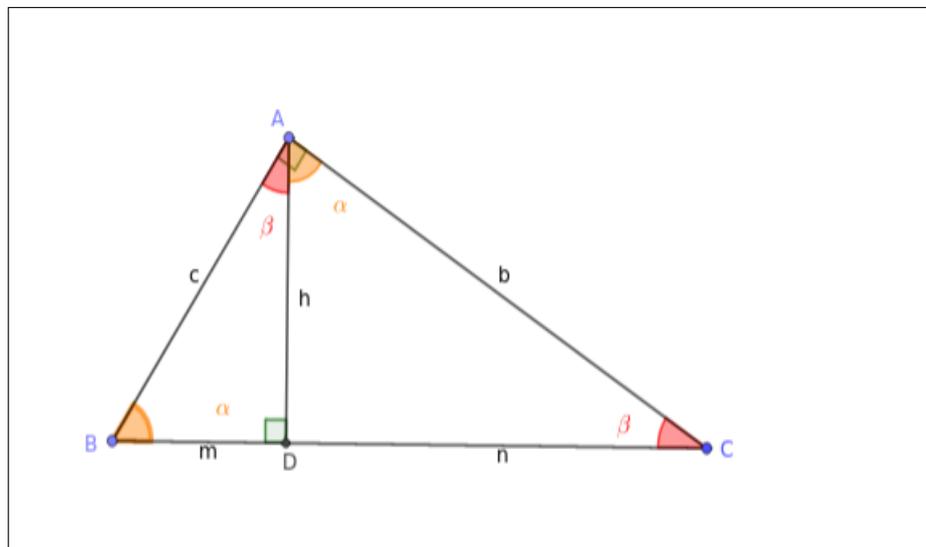
No $\triangle ABD$ temos:

$$\alpha + 90 + \angle BAD = 180 \Rightarrow \angle BAD = 90 - \alpha = \beta.$$

$$\therefore \angle DAC + \beta = 90 \Rightarrow \angle DAC = 90 - \beta = \alpha.$$

A seguir, estão apresentados algumas relações métricas no triângulo retângulo. As relações são baseadas nos conceitos de semelhança dos triângulos da Figura 3.1.

Figura 3.1: Guia para a demonstração das semelhanças. Disponível .



Fonte: Os autores.

Como todos os ângulos dos triângulos $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ e $\triangle BDC$ são conhecidos, então as relações de semelhança podem ser descritas como:

$$\begin{aligned} \triangle ABC &\sim \triangle DBA \quad (\text{I}) \\ \triangle ABC &\sim \triangle DAC \quad (\text{II}) \\ \triangle DBA &\sim \triangle DAC \quad (\text{III}) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

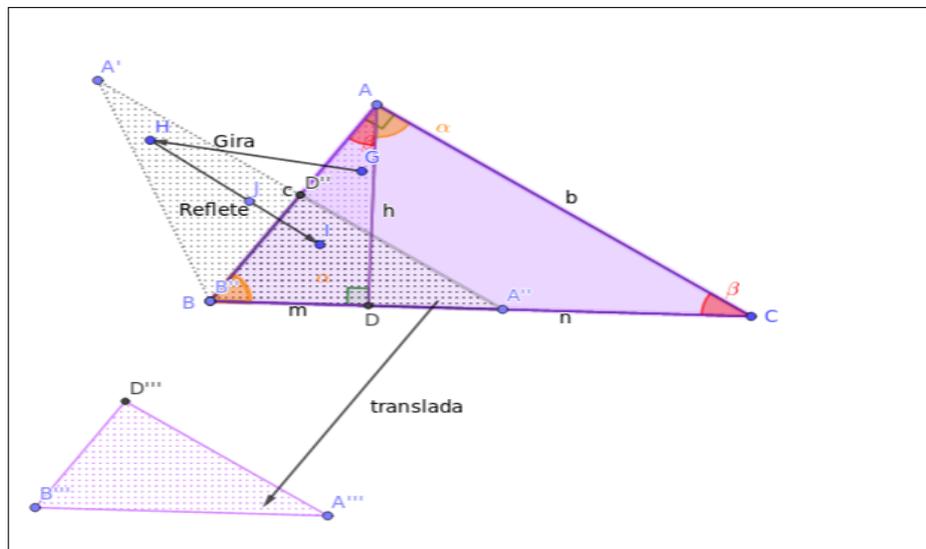
No entanto, antes da dedução das relações métricas, segue uma visualização das relações entre os ângulos obtida por meio de rotações, reflexões e translações.

3.1.1 Semelhanças

Considere verificar as relações derivadas da semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle DBA$. Neste caso, ao invés de estabelecer a relação direta entre lados dos triângulos, optamos por fazer uma rotação, reflexão e translação para a visualização mais direta das associações entre os ângulos e lados. A Figura 3.2 serve de guia.

Considere uma rotação do triângulo $\triangle ABD$ por um ângulo $\angle ABD$ em torno de B . Em seguida, faça uma reflexão de $\triangle A'B'D'$ em torno do segmento AB e, por fim, uma translação por um vetor v para obter o triângulo $\triangle A'''B'''D'''$. Como rotação e translação são isometrias, então os comprimentos dos lados e os ângulos são preservados. Assim, os valores para as razões para a semelhança $\triangle ABC \sim \triangle DBA$. podem ser observados diretamente nos triângulos $\triangle ABC \sim \triangle D'''B'''A'''$.

Figura 3.2: Guia para a demonstração da semelhança $\triangle ABC \sim \triangle DBA$. Disponível  .

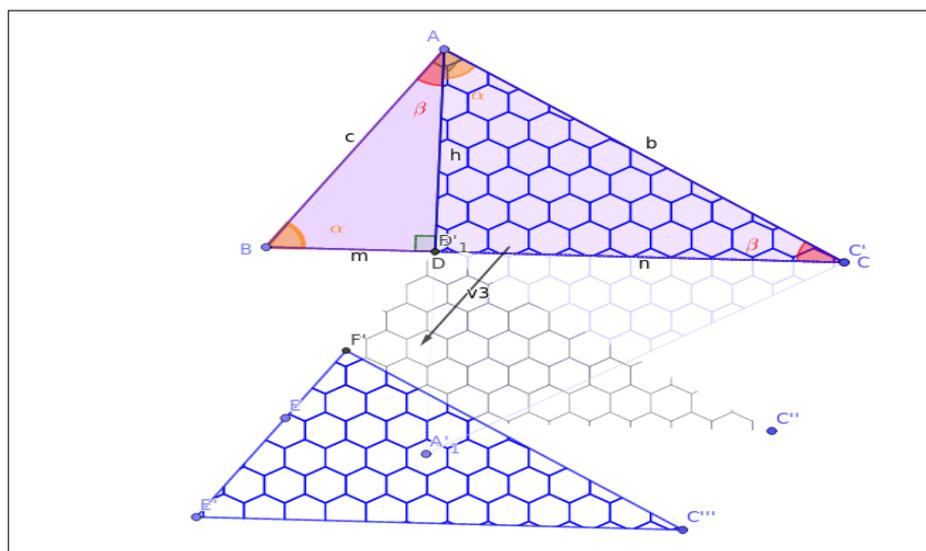


Fonte: Os autores.

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{h} = \frac{a}{c} \tag{3.1.2}$$

Analogamente ao caso anterior, é possível refletir, rotacionar e transladar o $\triangle ACD$ conforme mostrado na Figura 3.3.

Figura 3.3: Guia para a demonstração da semelhança $\triangle ABC \sim \triangle DAC$. Disponível  .



Fonte: Os autores.

Faça uma reflexão do triângulo $\triangle ACD$ em relação ao segmento CD e, em seguida, faça uma rotação de ângulo $\angle ACD$ em torno do ponto D . Finalmente, transladar o triângulo gerado por um vetor e obter o triângulo em destaque na Figura 3.3. Dessa forma valores para as razões

são dados por:

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{n} = \frac{a}{b} \quad (3.1.3)$$

No caso da semelhança dos triângulos $\triangle DBA \sim \triangle DAC$, a observação da relação de semelhança é direta e dadas por:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} = \frac{c}{b} \quad (3.1.4)$$

3.1.2 Os catetos ao quadrado são iguais a hipotenusa vezes a sua projeção

Das relações (3.1.2) e (3.1.3) segue:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{c}{m} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot m \\ \frac{b}{n} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot n \end{array} \right\} b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a \cdot \underbrace{(m + n)}_a = a^2$$

3.1.3 A altura é a média geométrica das projeções dos catetos

Da relação (3.1.4) segue:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \quad \text{ou} \quad h = \sqrt{m \cdot n}.$$

3.1.4 A hipotenusa vezes a altura é igual ao produto dos catetos

Da relação (3.1.2) segue:

$$\frac{b}{h} = \frac{a}{c} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c$$

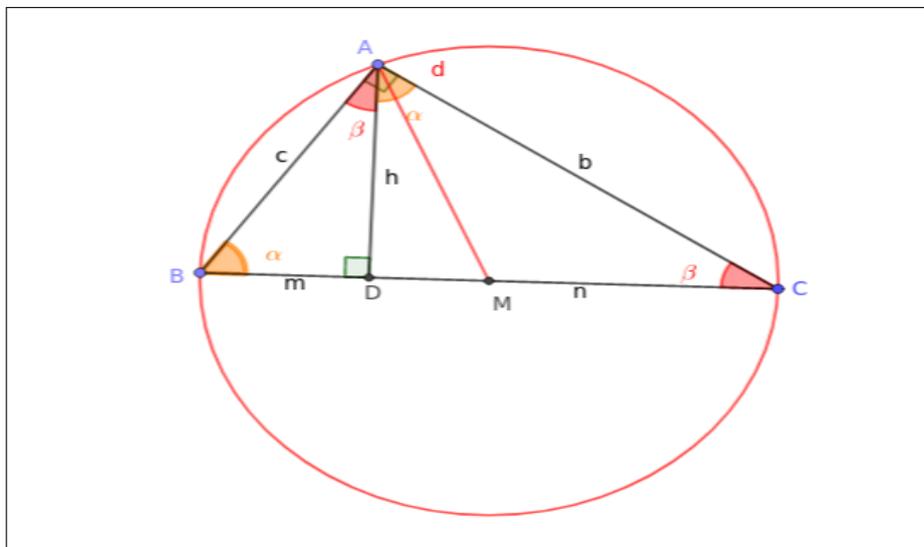
3.1.5 A mediana relativa ao ângulo reto é metade da hipotenusa

Seja a circunferência c circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$. Como o triângulo é retângulo, então o segmento BC é diâmetro. Logo:

$$BM = MC = \frac{a}{2} = AM,$$

em que M é o ponto médio da hipotenusa. A Figura 3.4 ilustra o resultado.

Figura 3.4: Guia para de que a mediana é metade da hipotenusa. Disponível .

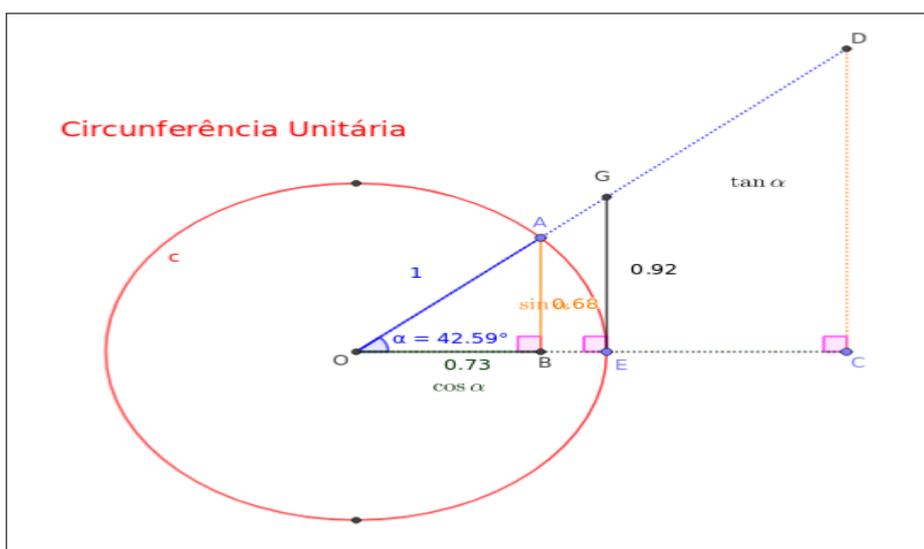


Fonte: Os autores.

3.2 Relações trigonométricas

Nesta parte, o seno, o cosseno e a tangente são discutidas por meio da utilização da circunferência unitária. A adoção da circunferência unitária se dá devido à semelhança entre os infinitos triângulos possíveis conforme pode ser observado na Figura 3.5.

Figura 3.5: Guia para as relações trigonométricas elementares. Disponível .



Fonte: Os autores.

$$\triangle DCO \sim \triangle GEO \sim \triangle ABO$$

$$\frac{DC}{DO} = \frac{GE}{GO} = \frac{AB}{AO} = \text{sen}\alpha = \frac{c.op.}{hip.}$$

Como $AO = 1$, então a medida do segmento AB é chamada seno de α e denotada por:

$$AB = \text{sen}\alpha.$$

A medida AB expressa a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer.

Analogamente, temos:

$$\frac{CO}{DO} = \frac{EO}{GO} = \frac{BO}{AO} = \text{cos}\alpha = \frac{c.abj.}{hip.}$$

e a respectiva medida do segmento BO é chamada cosseno de α e denotada por:

$$BO = \text{cos}\alpha.$$

A medida BO expressa a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer.

Segue, pela aplicação do Teorema de Pitágoras, que:

$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1.$$

Outra relação interessante é obtida ao fazer:

$$\frac{DC}{CO} = \frac{GE}{EO} = \frac{AB}{BO} = \text{tan}\alpha = \frac{c.op.}{c.abj.}$$

Portanto, a medida:

$$GE = \text{tan}\alpha.$$

A medida GE expressa a razão entre os catetos oposto e adjacente de um triângulo retângulo qualquer.

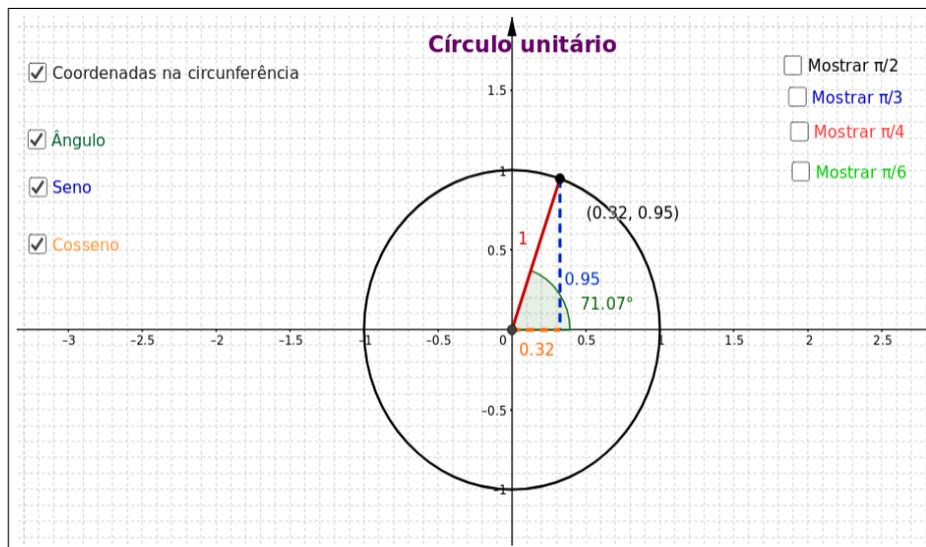
3.3 Ângulos notáveis

A Figura 3.6 mostra o círculo unitário com um ângulo α e respectivos valores de seno e cosseno. Neste caso, os valores de seno e cosseno são anotados como pares ordenados $(\text{cos}(\alpha), \text{sen}(\alpha))$. O *App* permite interagir e explorar os valores de ambos cosseno e seno, os quais incluem ângulos específicos múltiplos dos ângulos $\pi/2, \pi/3, \pi/4$ e $\pi/6$.

Por observação direta do ciclo trigonométrico, é possível induzir os valores de ambos seno

e cosseno para os ângulos $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ e 2π .

Figura 3.6: Guia para valores de seno e cosseno de ângulos notáveis. Disponível  .



Fonte: Adaptado de [40].

No caso dos ângulos de $\pi/6, \pi/4$ e $\pi/3$, pode ser necessário justificar geometricamente os valores numéricos mostrados no ciclo trigonométrico. Para isso considere um triângulo equilátero ΔABC de lado $l = 1$. Seja h a altura relativa ao lado AB com D o ponto de interseção. O segmento possui medida $AD = DB = 1/2$ e o ângulo $\angle ACD = \pi/3 = 30^\circ$, pois h também é bissetriz. Assim, obtém-se:

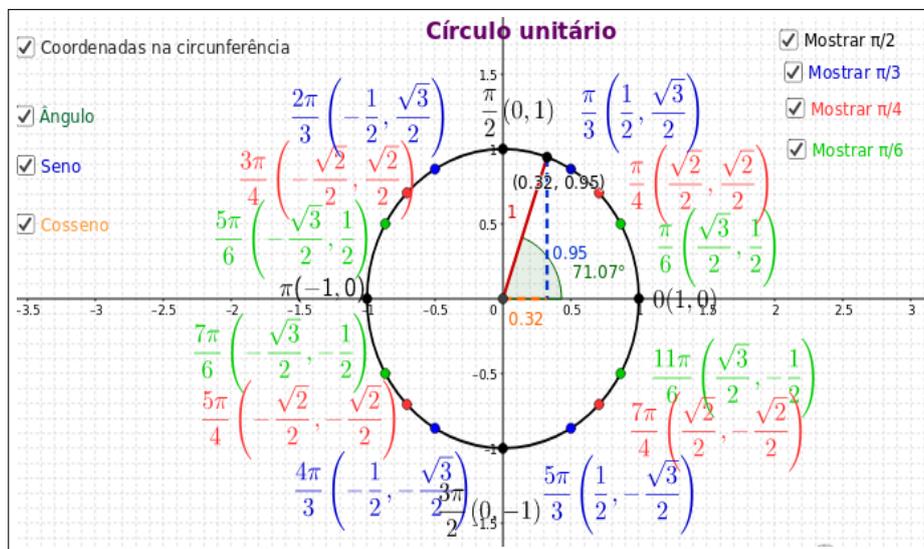
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{h}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}, & \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{h}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

No caso da justificativa geométrica para o seno e cosseno para o ângulo $\pi/4$, basta considerar um triângulo ΔABC , retângulo em A e com catetos iguais a unidade. Desse modo, a hipotenusa possui comprimento $a = \sqrt{2}$ e, portanto:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Os valores múltiplos nos quadrantes dois, três e quatro podem ser obtidos diretamente dos valores anteriores com observação dos sinais respectivos. A Figura 3.7 mostra os ângulos citados e respectivos valores de seno e cosseno.

Figura 3.7: Valores de seno e cosseno para ângulos notáveis. Disponível .

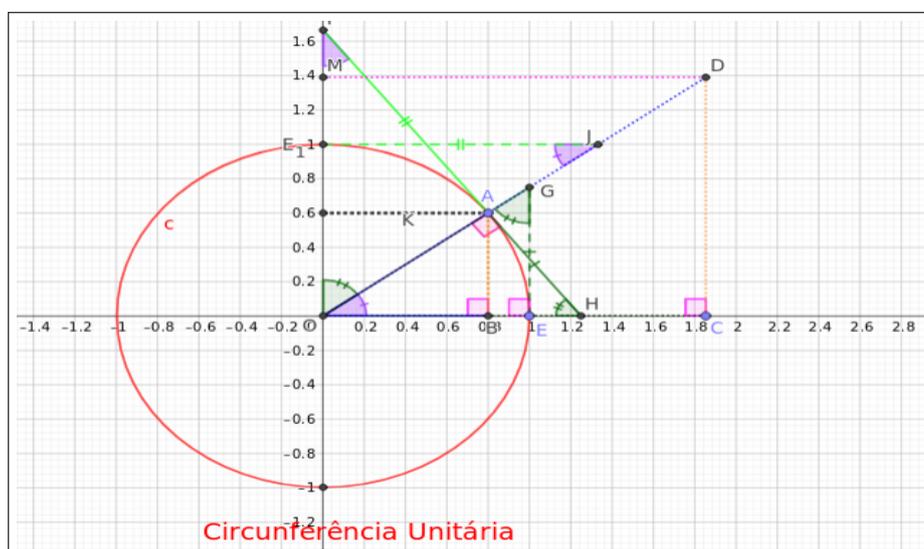


Fonte: Adaptado de [40].

3.4 Outras funções trigonométricas

Considere as construções da Figura 3.8.

Figura 3.8: Gráfico de cosseno. Disponível .



Fonte: Os autores.

Considere os triângulos semelhantes $\triangle DMO \sim \triangle JE_1O \sim \triangle AKO$ da Figura 3.8. Logo:

$$JE_1 = \frac{JE_1}{E_1O} = \frac{AK}{KO} = \cot \alpha = \frac{c.adj.}{c.op.}$$

Em palavras, a razão entre dois lados dos triângulos $\triangle DMO$ e $\triangle JE_1O$ é igual ao comprimento

do lado do $\triangle AKO$ que tem por lado o raio do ciclo unitário JE_1 .

Outra relação proveniente da análise dos triângulos semelhantes $\triangle DMO \sim \triangle JE_1O \sim \triangle AKO$ é :

$$OJ = \frac{OJ}{OE_1} = \frac{OA}{KO} = \frac{1}{KO} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{csc} \alpha$$

Em palavras, a razão entre a hipotenusa OA e o lado OK do triângulo $\triangle AKO$ no ciclo unitário é igual ao comprimento do segmento OJ . Da mesma forma, ao analisar novamente a semelhança entre os triângulos $\triangle OEG \sim \triangle OAB \sim \triangle OAB$ obtém-se:

$$OG = \frac{OG}{OE} = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{OB} = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{sec} \alpha$$

Portanto, dado um ângulo no ciclo trigonométrico, os comprimentos dos segmentos OB , AB , EG , JE_1 , OG e OJ representam, respectivamente valores constantes de razões de semelhança chamadas cosseno, seno, tangente, cotangente, secante e cossecante do ângulo dado. Pode ser notado que a manipulação interativa do *App* pode ocasionar alguma dificuldade para a visualização e definição clara das quantidades secante e cossecante, pois os pontos G e J estão sobre a mesma reta. Uma alternativa viável é construir uma reta perpendicular à OA pelo ponto A , cuja interseção com os eixos X e Y são, respectivamente, H e I conforme mostrados na Figura 3.8.

Os triângulos $\triangle OGE \cong \triangle OAH$. De fato, ambos são retângulos e $\angle GOE = \angle AOH$ e, portanto, segue que são semelhantes com razão de semelhança igual a unidade. Portanto, o segmento

$$OH = OG = \operatorname{sec}(\alpha), \quad AH = EG = \operatorname{tan}(\alpha).$$

De forma análoga temos que o segmento:

$$E_1J = IA = \operatorname{cot} \alpha, \quad OJ = IO = \operatorname{csc} \alpha.$$

Agora, do triângulo $\triangle OAH$ segue, por meio do Teorema de Pitágoras, segue que:

$$OA^2 + AH^2 = OH^2 \Rightarrow 1 + \operatorname{tan}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha.$$

E do triângulo $\triangle OAI$ segue, por meio do Teorema de Pitágoras, segue que:

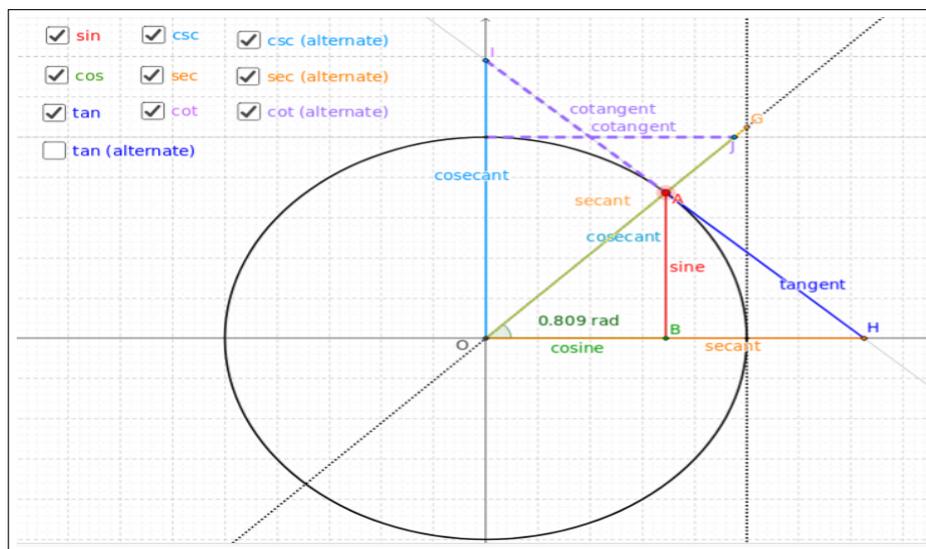
$$OA^2 + AI^2 = OI^2 \Rightarrow 1 + \operatorname{cot}^2 \alpha = \operatorname{csc}^2 \alpha.$$

Com os resultados acima, os valores para cosseno, seno, tangente, cotangente, secante e cossecante podem ser observados por meio de elementos associados à reta que passa por HA e tangente ao circunferência unitária em A .

3.5 Visualização das relações trigonométricas

Todas as relações trigonométricas podem ser visualizadas na Figura 3.9. A interatividade permite explorar as relações entre as relações trigonométricas e as diferentes visualizações para as funções tangente, cotangente, secante e cossecante. A ativação das características de rótulo e valor fornecem meios para uma exploração pontual e comparação de um ou mais elementos no gráfico.

Figura 3.9: Relações entre as funções trigonométricas. Disponível  .



Fonte: [?]

3.6 Seno e cosseno da soma

Nesta seção, o seno e o cosseno da soma de ângulos é mostrado por meio da utilização de um retângulo e o ciclo trigonométrico.

Considere o ciclo trigonométrico e os ângulos $\alpha < \pi/2$ e $\beta < \pi/2$ com $\alpha + \beta < \pi/2$. Construa o triângulo ΔOFH , o triângulo ΔOFC e os triângulo ΔCFI e ΔCGO conforme ilustrado na Figura 3.10.

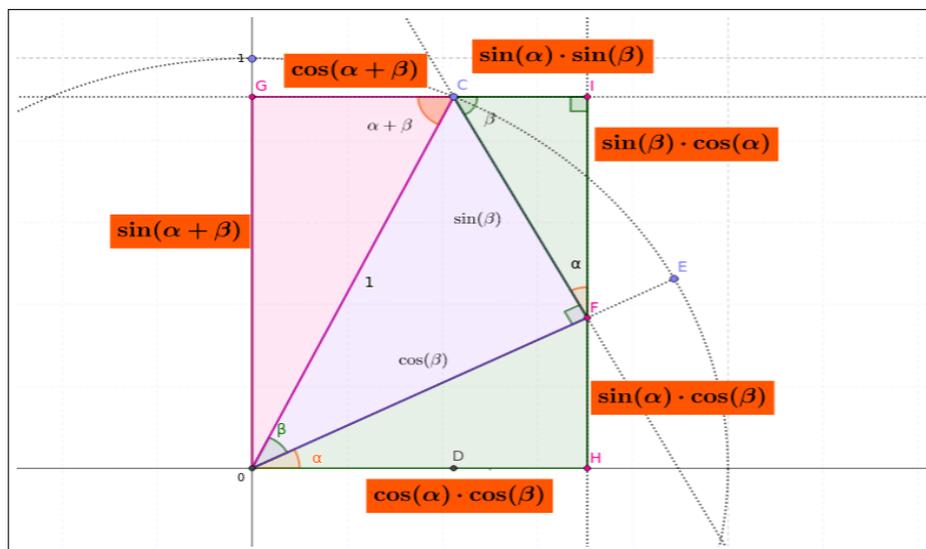
Como $OC = 1$, então:

$$OF = \cos(\beta) \quad \text{e} \quad FC = \text{sen}(\beta).$$

Como consequência,

$$FH = \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) \quad \text{e} \quad OH = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta).$$

Figura 3.10: Interpretação Geométrica do seno da soma $\text{sen}(\alpha + \beta)$. Disponível 



Fonte: Os autores

Como $\triangle OFC$ é retângulo em F, então $\angle CFI = \alpha$ e, por consequência, $\angle ICF = \beta$. Assim,

$$FI = \text{sen}(\beta) \cdot \cos(\alpha) \quad \text{e} \quad CI = \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta).$$

Por fim, a reta que passa por CI é paralela a reta OH e, portanto, $\alpha + \beta$ é igual ao ângulo $\angle GCO$. Portanto, segue que:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \text{sen}(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta)$$

3.7 Lei das tangentes

Exercício 17. Dado um triângulo $\triangle ABC$, demonstrar a Lei das tangentes:

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\tan\left(\frac{A - B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A + B}{2}\right)}, \quad \frac{b - c}{b + c} = \frac{\tan\left(\frac{B - C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B + C}{2}\right)}, \quad \frac{a - c}{a + c} = \frac{\tan\left(\frac{A - C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A + C}{2}\right)}$$

Este resultado pode ser encontrado, por exemplo, em [48].

3.7.1 Solução

A Lei dos Senos fornece:

$$\frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)} = 2R.$$

A fórmula para o seno da soma e diferença de ângulos fornecem:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha + \beta) &= \text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \text{sen}\beta \\ \text{sen}(\alpha - \beta) &= \text{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \text{sen}\beta \end{aligned} \Rightarrow \text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\text{sen}\beta \cos\alpha$$

Colocando, $\alpha + \beta = A$ e $\alpha - \beta = B$, obtém-se $\alpha = \frac{A+B}{2}$ e $\beta = \frac{A-B}{2}$. Assim, podemos escrever:

$$\text{sen}(A) - \text{sen}(B) = 2\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Logo,

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2r(\text{sen}A - \text{sen}B)}{2r(\text{sen}A + \text{sen}B)} = \frac{2\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{A-(-B)}{2}\right) \cos\left(\frac{A+(-B)}{2}\right)}$$

Assim,

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

Analogamente, temos:

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\text{sen}\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{A+C}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

e

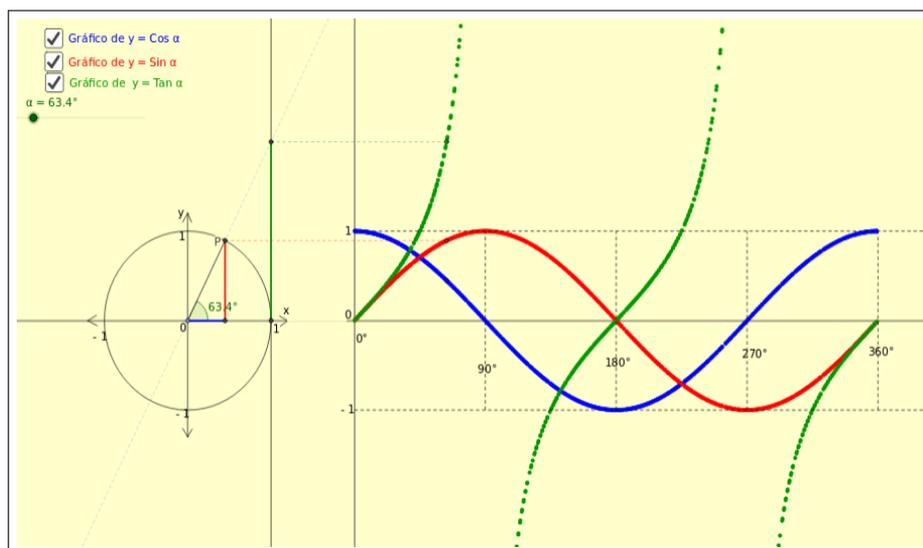
$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\text{sen}\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

3.8 Em direção às funções seno, cosseno e tangente

Na seção anterior, valores específicos de ângulo foram observados. Neste caso, os valores de seno, cosseno e tangente serão mostrados em forma gráfica para ângulo variando em um intervalo definido. O rastro dos pontos põe em evidência o comportamento distinto das funções seno, cosseno e tangente conforme pode ser observado na Figura 3.11.

Essa visualização pontual ainda pode ajudar na análise do quociente entre seno e cosseno que tem como consequência a assíntota vertical nos ângulo múltiplos de $\pi/2$. Observe que quando o ângulo tende a $\pi/2$ por valores menores que $\pi/2$, os valores de seno e cosseno tendem a unidade e zero, respectivamente. Logo, o quociente, tangente, cresce indefinidamente conforme pode ser observado na Figura 3.11. O mesmo efeito pode ser observado quando o ângulo tende a $3\pi/2$ por valores menores. Por outro lado, para ângulos quando o ângulo tende a $\pi/2$ ou $3\pi/2$ por valores maiores, então a razão entre seno e cosseno decresce indefinidamente.

Figura 3.11: Visualização gráfica dos pontos de seno, cosseno e tangente. Disponível .

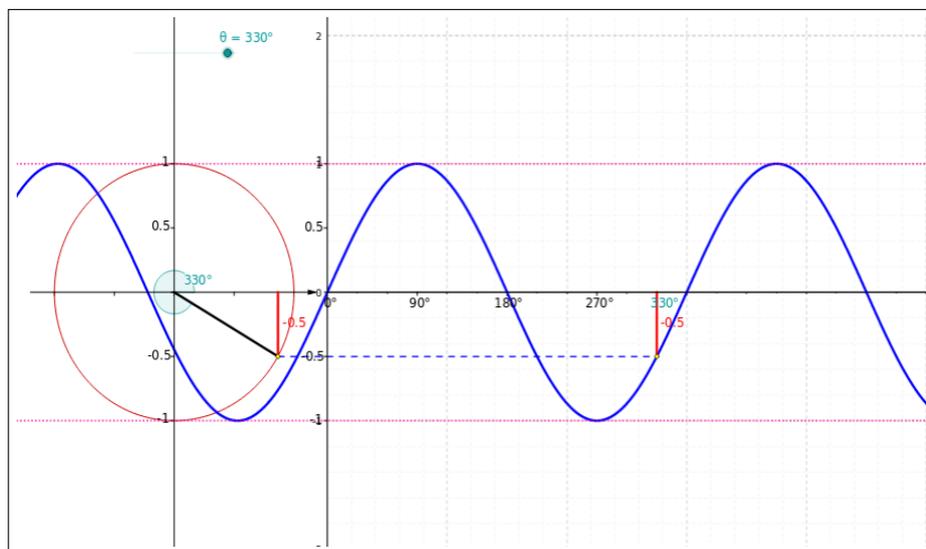


Fonte: Adaptado de [6].

3.9 Círculo unitário e função seno

Aqui, a função seno é apresentada de forma mais geral. Note que é permitido que o ângulo varie em um intervalo distinto daquele apresentado anteriormente. O conjunto de pontos é trocado por uma linha contínua e os valores do seno do ângulo são grafados continuamente.

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen}(x)$ é contínua.

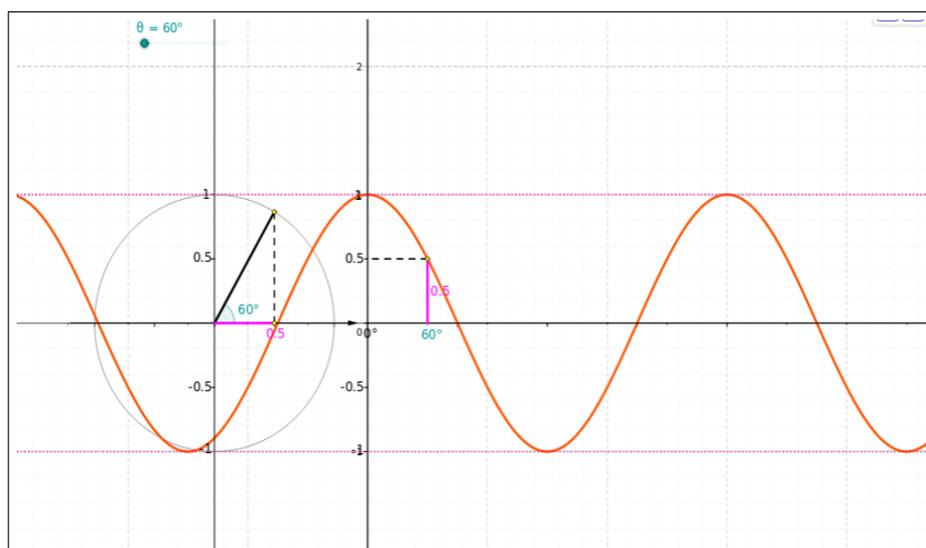
Figura 3.12: Gráfico de seno. Disponível  .


Fonte: [3].

3.10 Círculo unitário e função cosseno

Aqui, a função cosseno é apresentada de forma mais geral. Note que é permitido que o ângulo varie em um intervalo distinto daquele apresentado anteriormente. O conjunto de pontos é trocado por uma linha contínua e os valores do seno do ângulo são grafados continuamente.

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$ é contínua.

 Figura 3.13: Gráfico de cosseno. Disponível  .


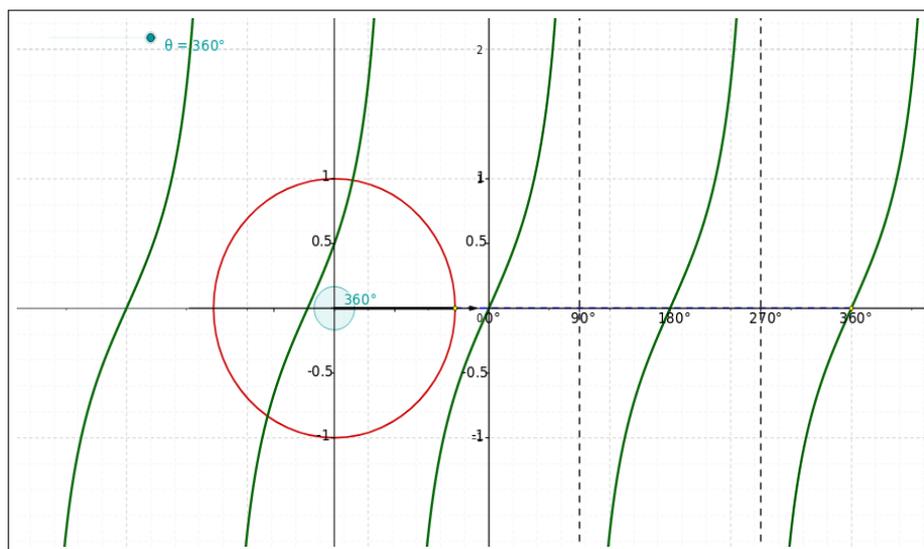
Fonte: [4].

3.11 Círculo unitário e função tangente

Aqui, a função tangente é apresentada de forma mais geral. Note que é permitido que o ângulo varie em um intervalo distinto daquele apresentado anteriormente. O conjunto de pontos é trocado por uma linha contínua e os valores do seno do ângulo são grafados continuamente.

A função $f : \mathbb{R} - \{x | \cos(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan(x)$ é contínua no domínio, que pode ser reescrito como $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$.

Figura 3.14: Gráfico de tangente. Disponível .



Fonte: [5].

Antes de iniciar outras discussões relacionadas, retomemos às definições e exploração de outras relações trigonométricas no triângulo retângulo. Em princípio não há motivo para que as quantidades seno, cosseno e tangente sejam as únicas quantidades calculadas. Dessa forma, podem ser relacionadas as quantidades cotangente, secante e cossecante. Cada uma delas representa quocientes específicos de quantidades geométricas relacionadas às semelhanças de triângulos.

3.12 Visualização das outras funções trigonométricas

Todas as funções trigonométricas podem ser visualizadas na link apresentado Figura 3.15. A interatividade permite explorar as relações entre as funções trigonométricas e as diferentes visualizações para as funções tangente, cotangente, secante e cossecante. No entanto, o foco ficará nas funções secante, cossecante e cotangente.

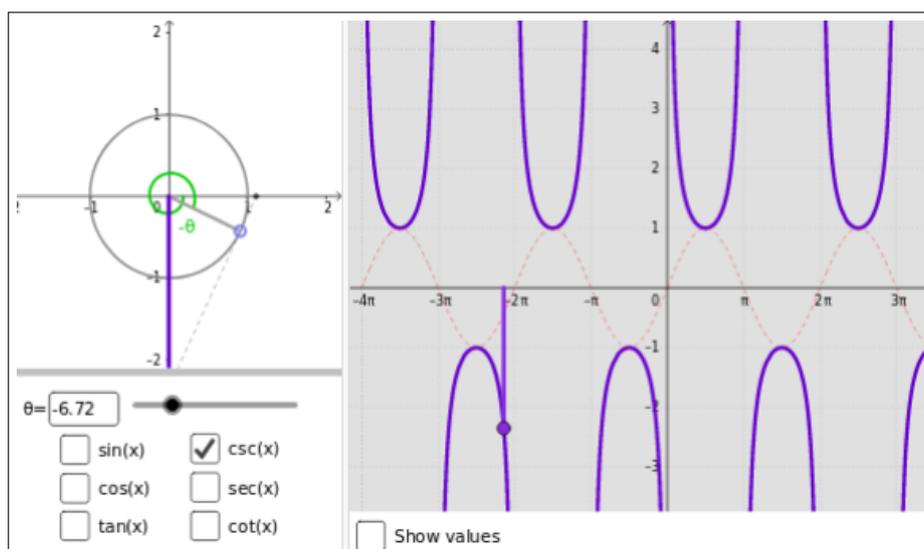
A Figura 3.15 mostra a função $f(x) = \csc(x)$, em que x é um ângulo no ciclo trigonométrico e grafado no eixo das abscissas. Graficamente, a função cossecante possui comportamento

cíclico, ou seja, ora a concavidade para cima e ora concavidade para baixo. O comportamento da função pode ser analisado do ponto de vista da definição, pois o quociente

$$\csc(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

terá o sinal do seno. Portanto, o sinal do seno fornece o sinal da função cossecante. No intervalo em que seno é positivo, então cossecante é positiva e com valor mínimo 1, atingido quando cosseno é igual a 1. Por outro lado, no intervalo que a função seno é negativa, então os valores de cossecante são negativos com valor máximo -1, que é onde o cosseno atinge valor -1 também. Dessa forma, fica estabelecido indutivamente a característica apresentada no gráfico de que a função cossecante ora é tangente ao gráfico do seno no ponto de máximo ora é tangente ao gráfico do seno no ponto de mínimo.

Figura 3.15: Gráfico da função cossecante. Disponível .



Fonte: [10]

A Figura 3.16 mostra a função

$$f(x) = \sec(x),$$

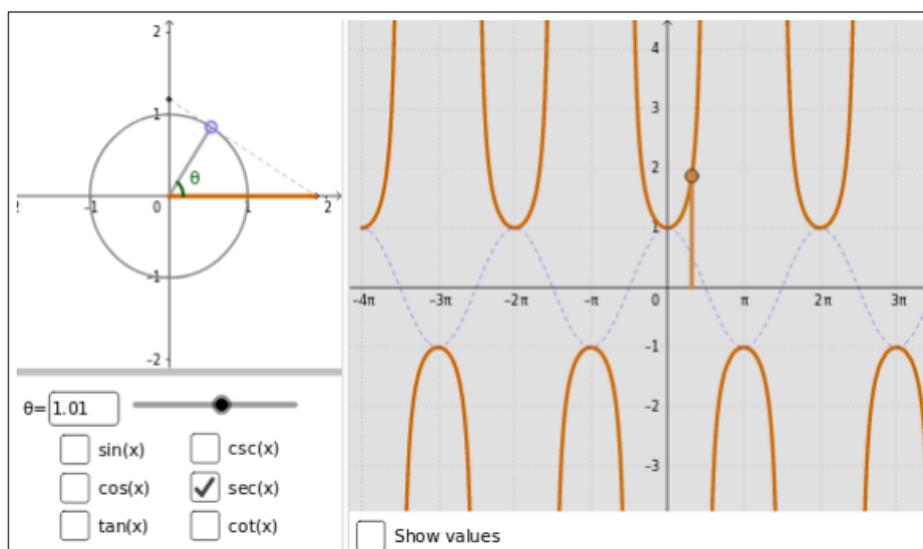
em que x é um ângulo no ciclo trigonométrico e grafado no eixo das abscissas. Graficamente, a função secante possui comportamento cíclico, ou seja, ora a concavidade para cima e ora concavidade para baixo. O comportamento da função pode ser analisado do ponto de vista da definição, pois o quociente

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

terá o sinal do cosseno. Portanto, o sinal do cosseno fornece o sinal da função cossecante. No

intervalo em que cosseno é positivo, então cossecante é positiva e com valor mínimo 1, atingido quando cosseno é igual a 1. Por outro lado, no intervalo que a função cosseno é negativa, então os valores de cossecante são negativos com valor máximo -1, que é onde o cosseno atinge valor -1 também. Dessa forma, também fica estabelecido indutivamente a característica apresentada na Figura 3.16 de que a função cossecante ora toca o gráfico do seno no ponto de máximo ora toca o gráfico do seno no ponto de mínimo.

Figura 3.16: Gráfico da função secante. Disponível .



Fonte: [10]

A Figura 3.17 mostra a função

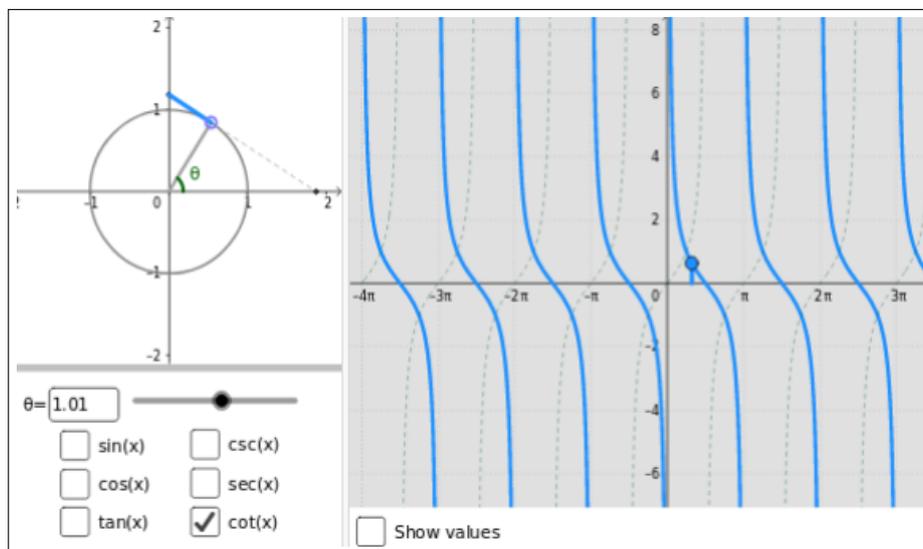
$$f(x) = \cot(x),$$

em que x é um ângulo no ciclo trigonométrico e grafado no eixo das abscissas. Graficamente, a função tangente possui um comportamento cíclico análogo ao da função tangente. Um detalhe importante, é que a função cotangente pode ser vista como uma reflexão da função tangente em relação aos pontos em que o seno é nulo. O Comportamento da função pode ser analisado do ponto de vista da definição, pois o quociente

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

terá o sinal resultante da regra dos sinais. As assíntotas verticais ocorrem nos pontos em que $\sin(x) = 0$, ou seja, em pontos da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Figura 3.17: Gráfico da função cotangente. Disponível .



Fonte: [10]

3.13 Interpretação Geométrica de algumas relações trigonométricas

A relação fundamental da trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

pode ser interpretada geometricamente em termos de áreas conforme apresentado na Figura 3.18. Neste caso, os quadrados de áreas:

$$S_{\text{Quad1}} \cos^2 \theta \quad S_{\text{Quad2}} = \operatorname{sen}^2 \theta$$

são deformados em retângulos de lado 1 com altura tal que a área seja preservada. Ambas as áreas são levadas no quadrado de lado 1.

A relação

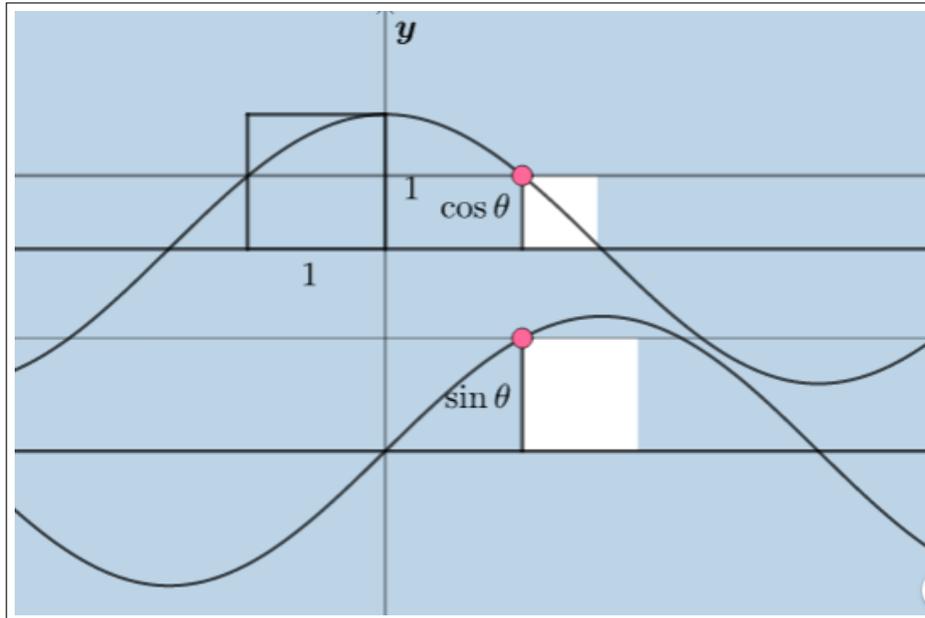
$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

pode ser interpretada geometricamente em termos de áreas conforme apresentado na Figura 3.19. Neste caso, a função secante é sempre maior que a função tangente e, portanto, os quadrados de áreas:

$$S_{\text{Quad1}} = \tan^2 \theta \quad = S_{\text{Quad2}} = \sec^2 \theta$$

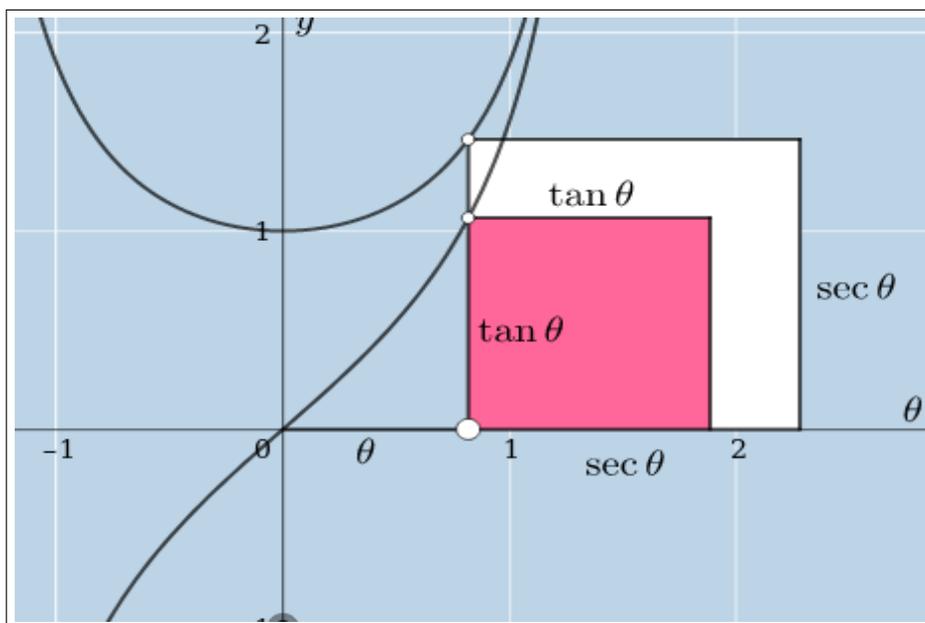
diferem por uma unidade. A região na cor branca pode ser deformada em de forma a preencher um quadrado unitário.

Figura 3.18: Relação fundamental em termos de áreas. Disponível .



Fonte: Adaptado de [7].

Figura 3.19: $\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2 \theta$ em termos de áreas. Disponível .



Fonte: Adaptado de [8].

Capítulo 4

Algumas construções envolvendo triângulos semelhantes e congruentes

Neste capítulo, o foco está na construção das tangentes internas, construção e externas a duas circunferências e na apresentação da solução de um exercício de olimpíada. Por fim, alguns modelos simplificados para ilustrar a translação da lua e terra e dois modelos de deslizamento de uma estrutura de um portão basculante serão apresentados. É necessário ressaltar que o objetivo é apresentar as potencialidades do GeoGebra para exploração de assuntos diversos com foco na questão interativa e computacional.

4.1 Tangentes Externas a Duas Circunferências

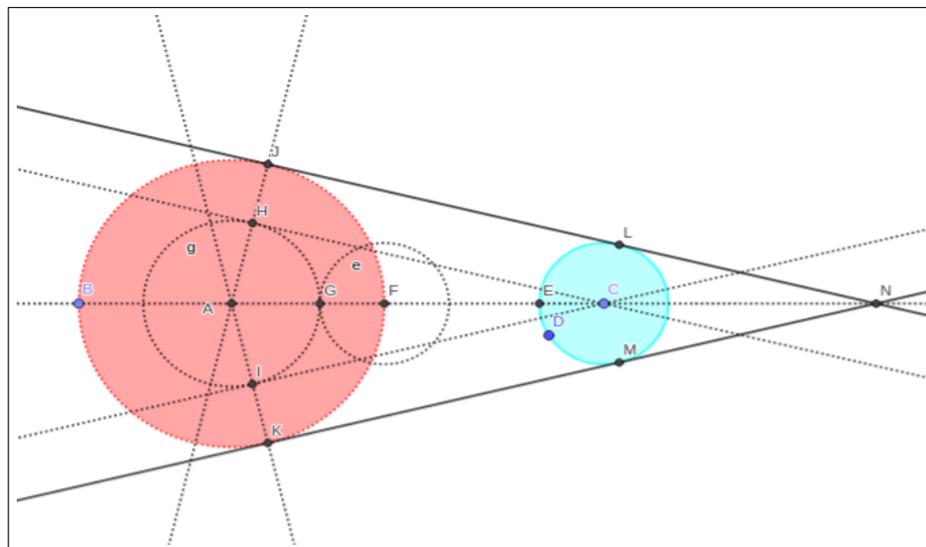
Exercício 18. *Considere duas circunferências quaisquer e faça a construção das retas tangentes externas à duas circunferências dadas.*

4.1.1 Solução

A Figura 4.1 serve de guia para a construção.

1. Construa as duas circunferências c e d com centros A e B e raios AC e BD , respectivamente. Utilize, por exemplo, circunferência por dois pontos dados.
2. Construa a reta f passando por A e B e que intersecta c e d em E e F , respectivamente.
3. Construa uma circunferência e de centro F e raio BD (transporte a circunferência d para o ponto F utilizando o compasso.
4. Determine os pontos de interseção G entre a circunferência anterior e a reta f . O ponto G é o ponto mais interno e próximo ao centro A .

Figura 4.1: Retas tangentes externas à duas circunferências. Disponível .



Fonte: Os autores.

5. Construir a circunferência g centrada em A e raio AG .
6. Construir as retas tangentes h e i passando por pelos pontos C, H e C, I respectivamente. Calcular os pontos de interseção H e I , respectivamente.
7. Construa as retas k e j : retas passando pelos pontos A, H e A, I , respectivamente. Determine os pontos de interseção K e J das retas k e j com a circunferência c .
8. Construa as retas paralelas as retas h e i e que passam por K e J .
9. Determine os pontos de tangência L e M a circunferência d e o ponto de interseção das retas do item anterior.

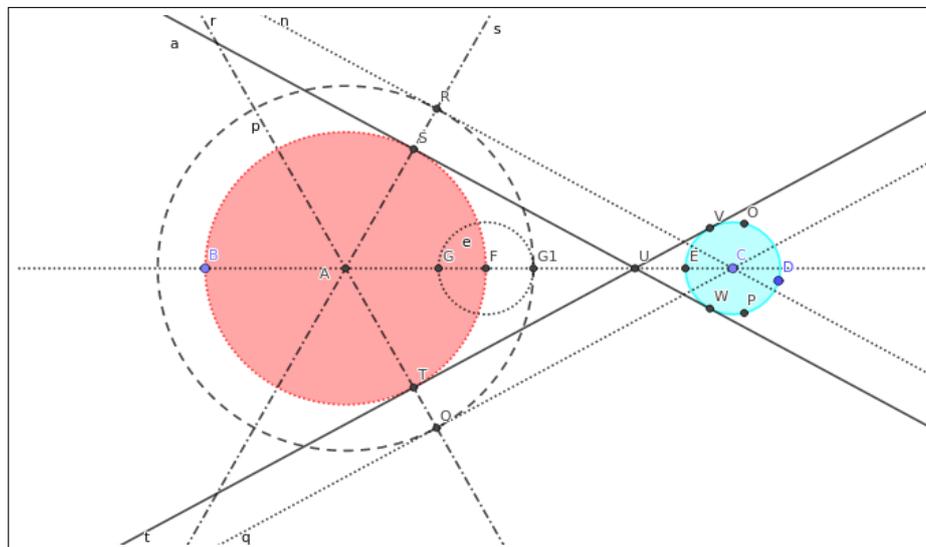
4.2 Tangentes Internas a duas circunferências

Exercício 19. *Considere duas circunferências quaisquer e faça a construção das retas tangentes internas à duas circunferências dadas.*

4.2.1 Solução

1. Construa as duas circunferências c e d com centros A e B e raios AC e BD , respectivamente.
2. Construa a reta f passando por A e B e que intersecta c e d em E e F , respectivamente.
3. Construa uma circunferência e de centro F e raio BD .

Figura 4.2: Retas tangentes internas à duas circunferências. Disponível .

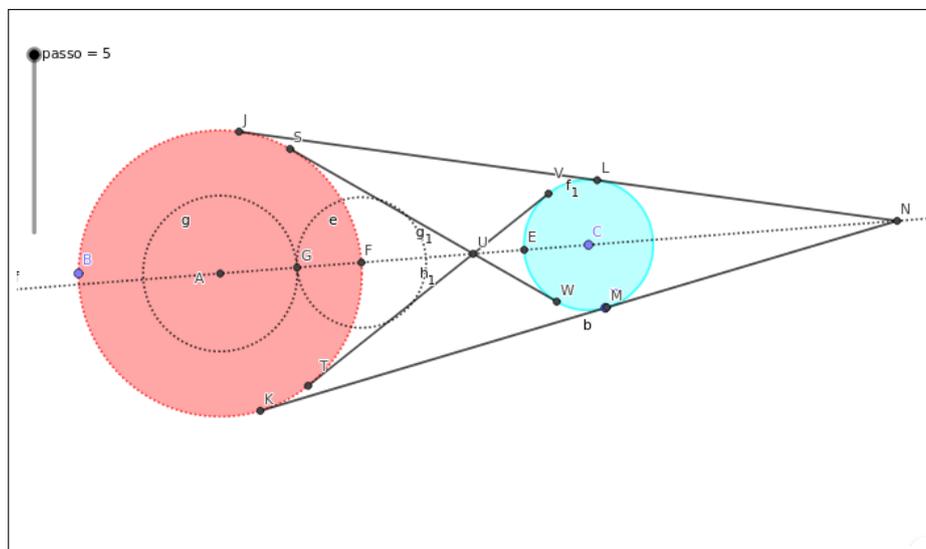


Fonte: Os autores.

4. Determine o ponto de interseção G e $G1$ entre a circunferência anterior e a reta f . O ponto G é o ponto mais interno e próximo ao centro A , enquanto que $G1$ é o ponto mais externo e distante do centro A .
5. Construir a circunferência p centrada em A e raio $AG1$.
6. Construir as retas tangentes n e q passando por pelo ponto S, C e O, C .
7. Calcular os pontos de interseção R e Q , respectivamente.
8. Construa as retas a e s : retas passando pelos pontos A, R e A, Q , respectivamente.
9. Determine os pontos de interseção S e T das retas a e s com a circunferência c .
10. Construa as retas paralelas às retas n e q e que passam por S e T .
11. Determine os pontos de tangência V e W a circunferência d e o ponto de interseção das retas do item anterior.

As tangentes internas e externas são apresentadas em conjunto na Figura 4.3. Note que o processo de construção pode ser executado para duas circunferências quaisquer tais que a distância entre os centros das circunferências seja maior que a soma dos comprimentos dos raios.

Figura 4.3: Retas tangentes internas às duas circunferências. Disponível .



Fonte: Os autores.

4.3 Tangentes interna e externas II

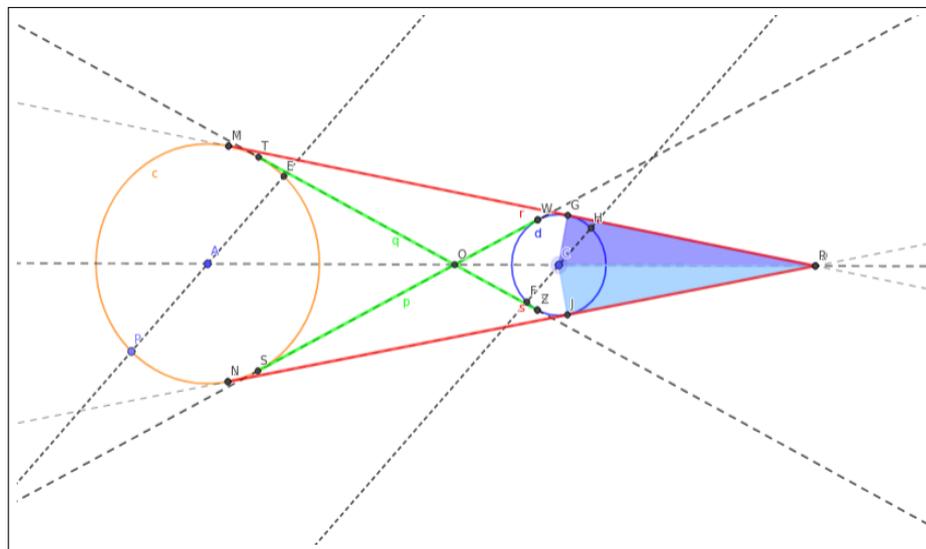
Nesta seção um procedimento alternativo para o cálculo das tangentes internas e externas é apresentado. A Figura 4.4 serve de guia para o procedimento.

Exercício 20. *Considere duas circunferências quaisquer e faça a construção das retas tangentes internas às duas circunferências dadas.*

4.3.1 Solução

1. Construa duas circunferências quaisquer c e d com centros A e C , respectivamente.
2. Trace a reta f passando por A e C .
3. Determine um ponto P qualquer sobre c .
4. Construa a reta g passando por P e A .
5. Determine a reta h , paralela à reta g , passando por C .
6. Calcule os pontos de interseção da reta g com a circunferência c e da reta h com a circunferência d . Considere que E , F e H sejam tais pontos.
7. A reta i passando por E e H determina o ponto I (interseção de g e i).
8. Ative o rastro para as construções do item anterior.

Figura 4.4: Retas tangentes internas à duas circunferências. Disponível .



Fonte: Os autores.

9. O ponto I determina as tangentes externas à ambas as circunferências c e d com pontos de interseção G , J , M e N .
10. Apenas por ilustração, construa os polígonos CGI e CJI .
11. Construa a reta i passando por E e F . Ative o rastro.
12. A interseção da reta i com a reta f dá origem ao ponto O .
13. Calcule as tangentes a uma das duas circunferências a partir do ponto O . Estas serão tangentes à outra circunferência. Os pontos de tangencia são S , T , U e V .

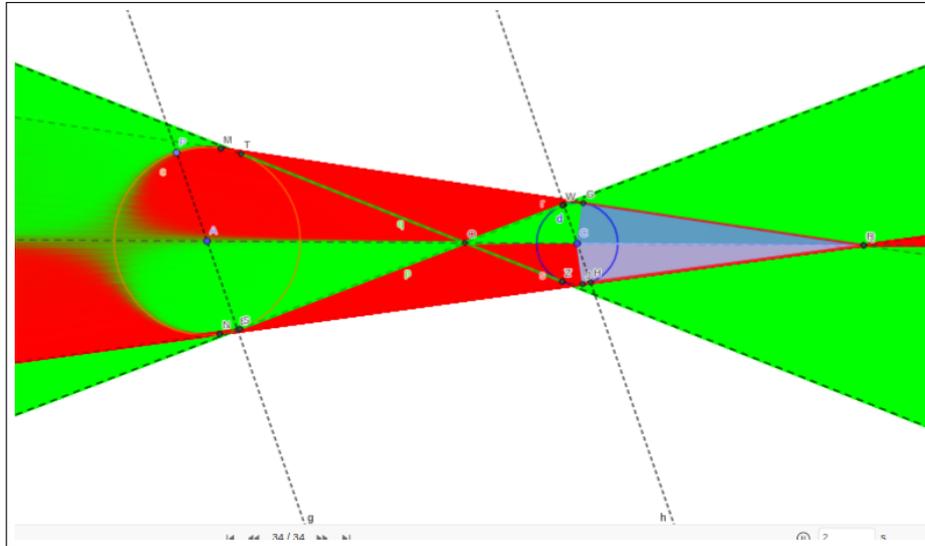
Um elemento exploratório interessante é que as retas i (reta que passa por E e H) e l (reta que passa por E e O) possuem comportamento dinâmico relacionado ao ponto P . Ou seja, ao animar P , com rastro ativado para as retas, obtém-se a Figura 4.5. É conveniente observar que a coloração da figura aqui obtida é devido ao rastro dos elementos.

A seguir, um problema da Olimpíada de Matemática é apresentado.

4.3.2 P1 NA IGO 2018

Exercício 21. *P1 NA IGO 2018 - Duas circunferências w_1 , w_2 se intersectam nos pontos A e B . Sejam PQ uma linha tangente comum aos dois círculos com $P \in w_1$ e $Q \in w_2$ e um ponto arbitrário $X \in w_1$. A linha AX intersecta w_2 pela segunda vez em Y . Os pontos $Y' \neq Y$ estão em w_2 de tal forma que $QY = QY'$. A linha $Y'B$ intersecta w_1 pela segunda vez em X' . Provar que $PX = PX'$.*

Figura 4.5: Retas tangentes internas à duas circunferências. Disponível 



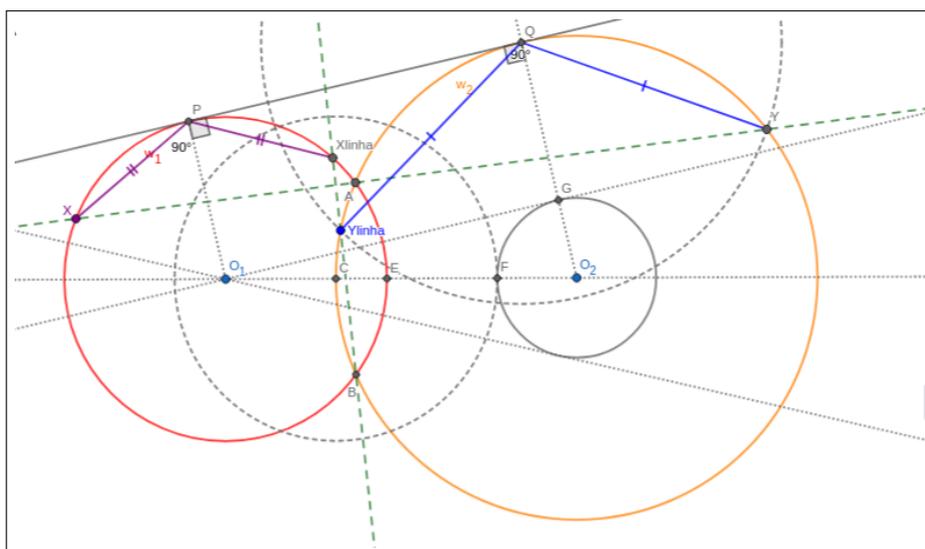
Fonte: Os autores.

A solução do problema é dividida entre o processo de construção inicial e a solução do problema.

4.3.3 Construção inicial

A Figura 4.6 fornece a guia para para a construção. O App interativo está disponível 

Figura 4.6: Construção inicial para P1 NA IGO 2018. Disponível 



Fonte: Os autores.

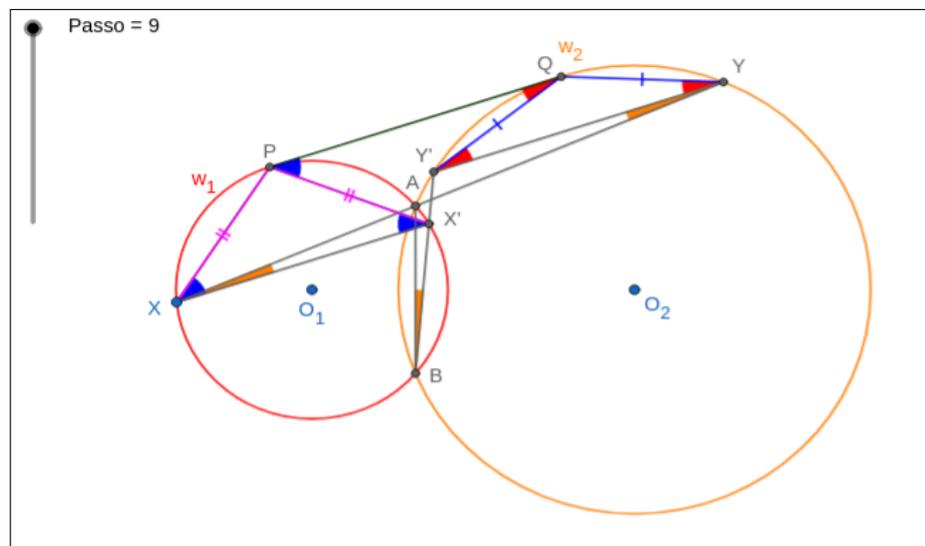
1. Construa as duas circunferências w_1 e w_2 de centros O_1 e O_2 , respectivamente. Sejam A e B os respectivos pontos de interseção entre ambas.
2. Construa a reta tangente, a ambas nos pontos P e Q , respectivamente. O procedimento de construção de tangente externa é idêntico ao anteriormente apresentado e consiste em:
 - traçar a circunferência de centro em C e raio O_1E ;
 - determinar a interseção F com a reta que contém O_1 e O_2 ;
 - construir a circunferência de centro O_2 e raio O_2F ;
 - calcular as retas tangentes da circunferência anterior passando por O_2 ;
 - determinar a interseção G de uma das retas com a circunferência w_2 e determinar a interseção Q ;
 - finalmente, traçar uma paralela à tangente passando por Q e determinar o ponto P (interseção da reta com w_1 .)
3. Marcar um ponto X arbitrário (Utilize Ponto(w_1)).
4. Traçar a reta por X e A e determinar Y ;
5. Traçar a circunferência de centro em Q e raio QY e determinar $X' = Xlinha$ (a outra interseção das circunferências); construir os segmentos e adotar o estilo desejado;
6. Traçar a reta passando por $Ylinha$ e B com interseção em $Xlinha = X'$. Construir os segmentos e adotar o estilo desejado.

4.3.4 Solução

A Figura 4.7 é uma guia para a solução. O Link interativo está disponível .

Como $QY = QY' \Rightarrow \angle QYY' = \angle QY'Y$. Em w_2 temos $\angle QYY' = \angle Y'QP$ por serem ângulos inscritos e de segmento relativos a corda QY' e com ângulo central $\angle QO_2Y'$. Ainda em w_2 temos $\angle Y'YA = \angle Y'BA$, pois enxergam a mesma corda $Y'A$ e possuem ângulo central $Y'O_2A$. Em w_1 temos $\angle ABX' = \angle AX'X$, pois enxergam a mesma corda AX' e possuem ângulo central AO_1X . Portanto, pode ser concluído que $XX' \parallel Y'Y \parallel PQ$. Além disso, $\angle PXX' = \angle X'PQ$, pois são ângulos inscritos e de segmento relativos a corda PX' de w_1 com ângulo central $\angle PO_1A$. Logo, o $\angle X'PQ = \angle PX'X$ pois $XX' \parallel PQ$ e, portanto, o triângulo $\Delta PXX'$ é isósceles.

Figura 4.7: Solução para P1 NA IGO 2018. Disponível .



Fonte: Os autores.

4.4 Modelo simplificado: propagação retilínea da luz

Modelo simplificado da propagação retilínea da luz para esclarecer a geração de zonas de escuridão. Neste caso, o Sol e a Terra são considerados para ilustração da propagação retilínea da luz. Deve ser notado que não há interesse em uma discussão com caráter físico sobre o problema de gravitação. Também é importante salientar que o movimento de translação da lua em torno da terra ocorre em espaço 3D. Além disso, para um modelo mais realista há necessidade de considerar a rotação e translação da terra, a sincronização de movimento da lua em relação a terra, o movimento do sol, o movimento de rotação da lua, entre outros. Uma discussão pode ser encontrada, por exemplo, em [36]. Discussões relacionadas ao assunto podem ser encontradas em [44] e [9], por exemplo.

O objetivo da construção da Figura 4.8 é uma ilustração geométrica no espaço 2D de um fenômeno que ocorre no espaço 3D por meio do GeoGebra e, portanto, possui um caráter mais exploratório da ferramenta.

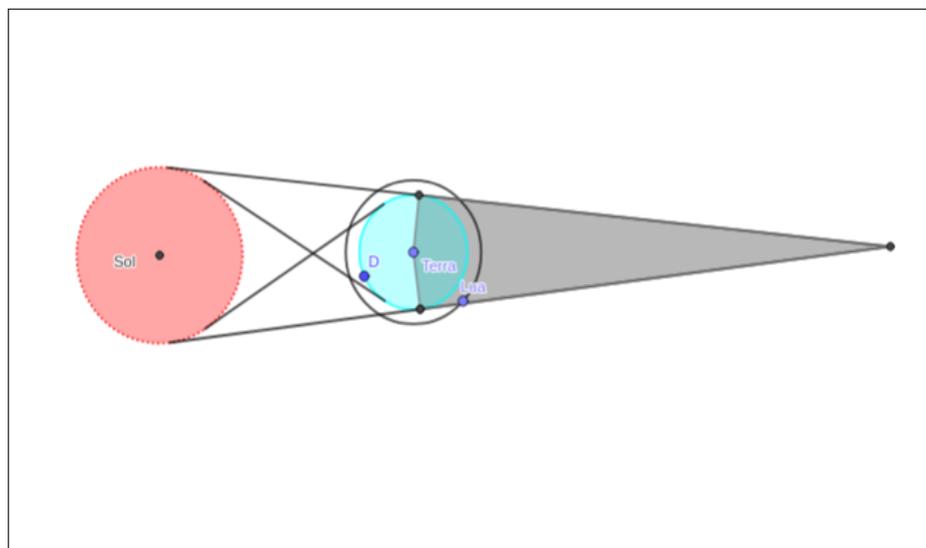
Exercício 22. *Construir um modelo bidimensional, sem escala, envolvendo a Terra e o Sol para ilustrar a propagação retilínea da luz.*

4.4.1 Solução

1. Construir duas circunferências de raios distintos. Ambos, sol (imaginário) e terra(imaginária) podem ser deslocadas devido possibilidade de movimentação de pontos do GeoGebra.
2. Traçar as tangentes internas e externas.

3. Construir um polígono entre os pontos de tangência da Terra.

Figura 4.8: Modelo simplificado para a propagação retilínea da luz. Disponível .



Fonte: Os autores.

4.5 Modelo simplificado Sol-Terra-Lua

Modelo simplificado, fora de escala, da translação da lua em torno da terra e de translação da terra em torno do sol. Neste caso, apenas os movimentos de rotação foram considerados. O objetivo da construção é fornecer uma ilustração geométrica simplificada no espaço 2D de um fenômeno que ocorre no espaço 3D por meio do GeoGebra para suscitar discussões adicionais. Os autores sugerem adotar referências específicas para tal assunto. Ver, por exemplo, [36], [44], [9] e referências para maiores detalhes.

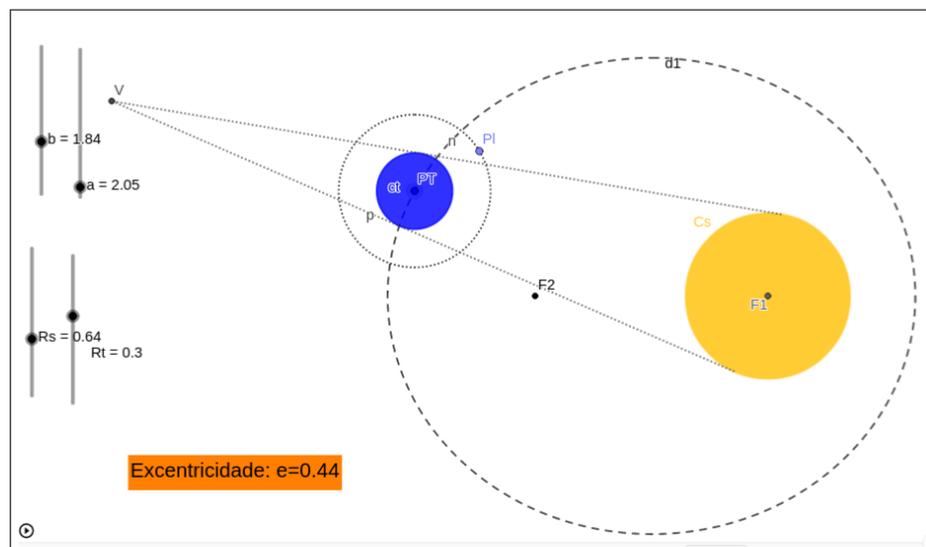
Exercício 23. *Construa um modelo bidimensional para o sistema Sol, Terra e Lua e ilustre a propagação retilínea da luz do item anterior. Considere as seguintes informações:*

1. O sol (imaginário) está localizado em um dos focos de uma elipse.
2. A terra (imaginária) movimenta-se sobre a elipse do item anterior.
3. Os objetos não estão em escala.
4. Os parâmetros do problema podem ser variados via Controle Deslizante.
5. A elipse é variável com os valores dos eixos maiores e menores.

4.5.1 Solução

A Figura 4.9 serve de guia para a construção.

Figura 4.9: Modelo simplificado do Sistema Solar. Disponível  .



Fonte: Os autores.

1. Defina os controles deslizantes para a (eixo maior) e b (eixo menor) da elipse.
2. Determine $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Defina os focos $F1 = (c, 0)$ e $F2 = (-c, 0)$.
3. Defina um controle deslizante para o raio do sol R_s . Construa um círculo de centro $F1$ e raio R_s .
4. Construa a elipse $d1$ com o comando:

$$d1 = \text{Curva}(a \cdot \text{sen}(u), b \cdot \text{cos}(u), u, 0, 2\pi),$$

e escolha um ponto PT sobre $d1$ (use $\text{Ponto}(d1)$).

5. Construa a elipse e de centro em PT e eixos iguais a $2R_t$. Escolha o ponto representante da lua (Pl) sobre e .
6. Execute o procedimento de construção das tangentes externas conforme apresentado anteriormente. Note que construção das tangentes internas não foram feitas, pois o objetivo é a apresentação do processo dinâmico baseado no GeoGebra. Os detalhes da construção podem ser obtidos em  .

4.5.2 Modelo Simplificado do Sistema solar em 3D

Modelo 3D simplificado da translação da lua em torno da terra e de translação da terra em torno do sol. O objetivo da construção a seguir é uma ilustração geométrica no espaço 3D por meio do GeoGebra.

Exercício 24. *Construa um modelo 3D para o sistema Sol, Terra e Lua. Faça duas construções para o movimento da lua sendo que uma delas deve ser inclinada em relação ao plano horizontal.*

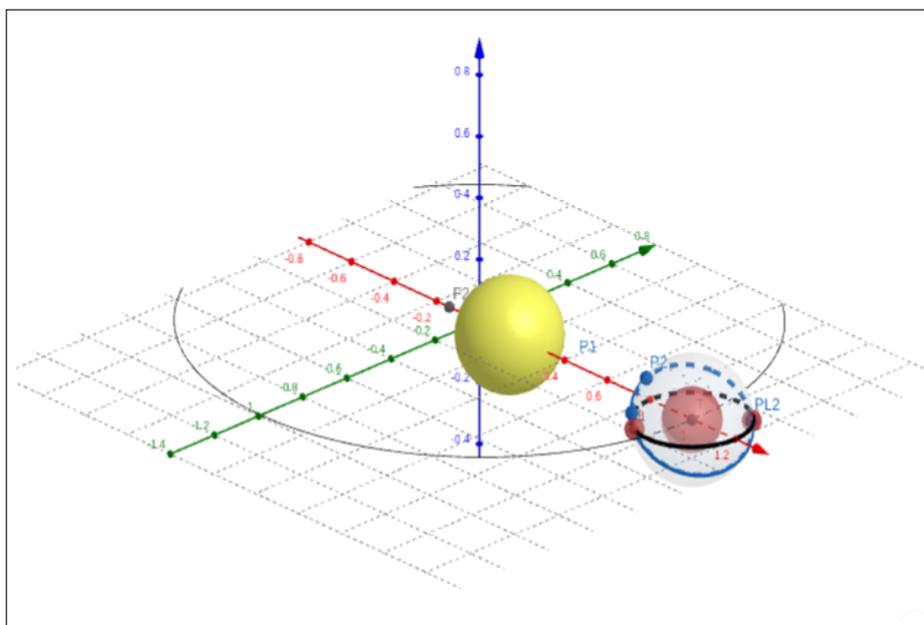
1. O sol (imaginário) está localizado em um dos focos de uma elipse.
2. A terra (imaginária) movimenta-se sobre a elipse do item anterior.
3. Os objetos não estão em escala.
4. Os parâmetros do problema podem ser variados via Controle Deslizante.
5. A elipse é variável com os valores dos eixos maiores e menores.

4.5.3 Solução

Neste caso o processo de construção é análogo ao anterior e a Figura 4.10 é ilustrativa.

Link interativo disponível  .

Figura 4.10: Modelo simplificado do Sistema Solar em 3D. Disponível  .



Fonte: Os autores.

1. Defina os controles deslizantes para a (eixo maior) e b (eixo menor) da elipse.

2. Determine o valor de c e defina os focos como na seção anterior.
3. Defina um controle deslizante para o raio do sol Rs . Construa a esfera cs de centro $F1$ e raio Rs .
4. Construa a elipse $e1$ com eixo maior a e eixo menor b . Crie um controle deslizante $pvalor1$ para intervalo de 0 a 2π . Escolha um ponto $T = e1(pvalor1)$.
5. Construa o controle deslizante Rt para o raio da terra. Defina a esfera Ct de centro em T e raio Rt .
6. Construa a esfera cl de centro em T e raio $2Rt$. Defina a curva $clua$ por meio de uma elipse de centro em T e eixos maior e menor de raios $2Rt$.
7. Defina o controle deslizante $pvalor2$ e defina $L = clua(pvalor2)$. Defina Lua como esfera de centro L e raio $Rt/3$.
8. Determine pontos $P1$ e $P2$ em cl . Construa um plano p por $P1$, $P2$ e T .
9. A interseção de cl com o plano p fornece uma curva d .
10. Construa um ponto $PL2$ em d . Construa uma esfera em de centro $PL2$ e raio $Rt/3$.

Note que há duas construções para a lua: a primeira, o movimento ocorre no plano XY , enquanto que na segunda o movimento ocorre com uma certa inclinação em relação ao plano XY . Esse movimento inclinado em relação ao plano XY é uma melhor representação do movimento real em relação ao movimento no plano XY .

4.6 Modelo de deslocamento de perfil de portão basculante

Nesta seção, a construção de um modelo 2D para o deslocamento do perfil de um portão basculante é considerado. Na próxima seção, o modelo 3D é considerado.

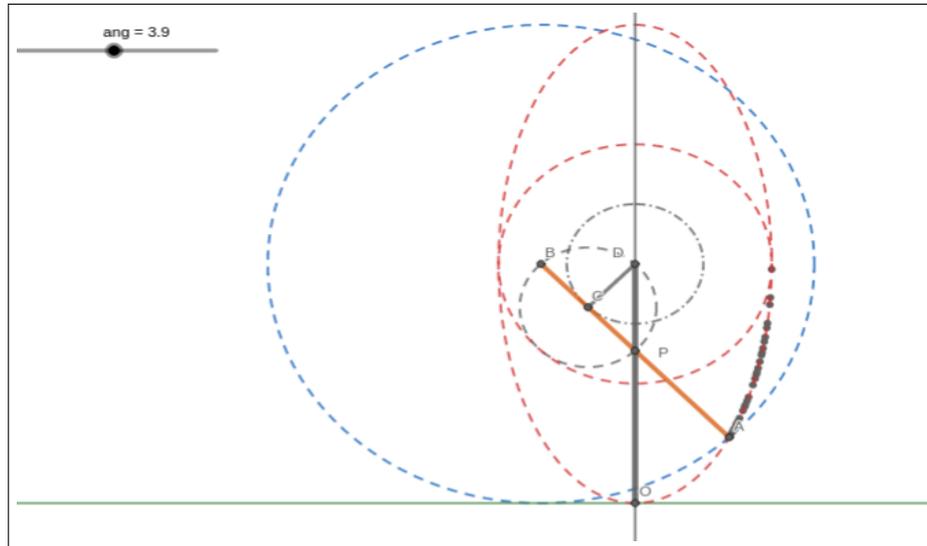
Exercício 25. *Construa o perfil de deslocamento da estrutura de um portão basculante utilizando geometria plana com GeoGebra.*

De modo simples é uma estrutura rígida com um ponto que se desloca sobre uma superfície vertical com um braço fixo na porção superior. A Figura 4.12 ilustra o objeto 3D caso o leitor desconheça tal objeto. Também pode ser facilmente encontrado em figuras por meio de um buscador.

4.6.1 Solução

Neste caso, apenas o perfil de deslizamento é solicitado. A Figura 4.11 serve de guia para o processo de construção.

Figura 4.11: Modelo simplificado de deslocamento de um portão basculante. Disponível .



Fontes: Os autores.

1. Construa os eixos $Y(e1)$ e $X(e2)$, respectivamente. Coloque o pé do perfil do portão sobre a origem do sistema de coordenadas. Note que folgas e espaçamentos não são considerados.
2. Construa o Controle Deslizante AB para determinar a altura da barra vertical de sustentação. Determine o ponto $D = (0, AB)$.
3. Construa o controle deslizante $ang \in [\pi, 3 \cdot \pi/2]$.
4. Construa o círculo $c11$ de centro em D e raio $AB/4$ utilizando a função curva (função paramétrica) com argumento $(x(D) + AB/4 \cdot \text{sen}(u), y(D) + AB/4 \cdot \text{cos}(u))$ no intervalo $[0, 2\pi]$.
5. Construa o ponto $C = c11(ang)$. Construa o círculo $c2$ de centro C e raio $AB/4$. Determine a interseção P de $c2$ com o eixo Y .
6. A reta $l1$ por C e P intersecta $c2$ em B . O círculo de centro em B e raio AB intersecta a reta $l1$ em B . Delimite o segmento AB e o segmento CD .
7. Construa o círculo de centro em D e raio $AB/2$. Construa a elipse $(x(D) + AB/2 \cdot \text{sen}(u), y(D) + AB/2 \cdot \text{cos}(u))$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

4.7 Modelo 3D de deslocamento de portão basculante

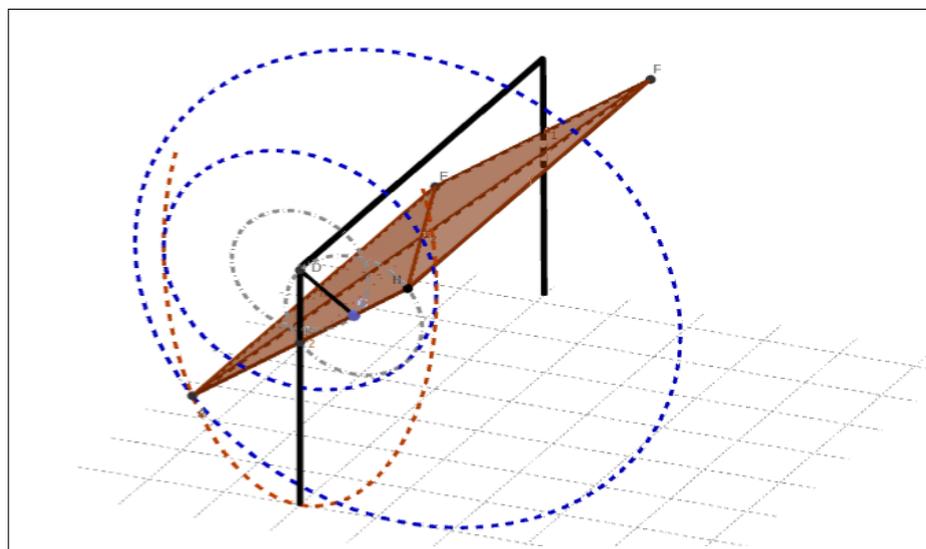
Nesta seção, o modelo 3D é considerado. O perfil de deslocamento é idêntico ao anterior, mas é necessário inserir algumas modificações para englobar a coordenada espacial. Além disso, acrescenta-se os detalhes do restante do objeto.

Exercício 26. *Construa um modelo 3D para o deslocamento da estrutura de um portão basculante utilizando geometria plana com GeoGebra.*

4.7.1 Solução

A Figura 4.12 serve de guia para a construção.

Figura 4.12: Modelo simplificado para um portão basculante. Disponível  .



Fonte: Os autores.

1. Construa os controles deslizantes AB e ang análogos da seção anterior. Defina o ponto $D = (0, 0, AB)$.
2. Construa o círculo $c11$ de centro em D e raio $AB/4$ utilizando a função curva (função paramétrica) com argumento:

$$(0, x(D) + AB/4 \text{sen}(u), z(D) + AB/4 \text{cos}(u)),$$

no intervalo $[0, 2\pi]$.

3. Construa o ponto $C = c11(ang)$. Construa o círculo $c2$ de centro C e raio $AB/4$. Determine a interseção P de $c2$ com o segmento AD .

4. A reta l_1 por C e P intersecta c_2 em B . O círculo de centro em B , raio AB e na direção de c_2 intersecta a reta l_1 em B . Delimite o segmento AB e o segmento CD .

5. Construa o conjunto de segmentos:

- o segmento de A até $A + (2AB, 0, 0)$;
- o segmento de B a $B + (2AB, 0, 0)$;
- o segmento $A + (2AB, 0, 0)$ até $B + (2AB, 0, 0)$;
- o segmento $(1.01D$ até $1.01D + (2AB, 0, 0)$;
- o segmento de $1.01D + (2AB, 0, 0)$ até $2.01D + (2AB, 0, 0)$.

6. Construa o círculo de centro em D e raio $AB/2$ na direção de c_2 . Construa a elipse

$$(0, x(D) + AB/2 \cdot \text{sen}(u), z(D) + AB/2 \cdot \text{cos}(u),$$

no intervalo $[0, 2\pi]$.

7. Adicione dois polígonos ao retângulo gerado pelos segmentos.

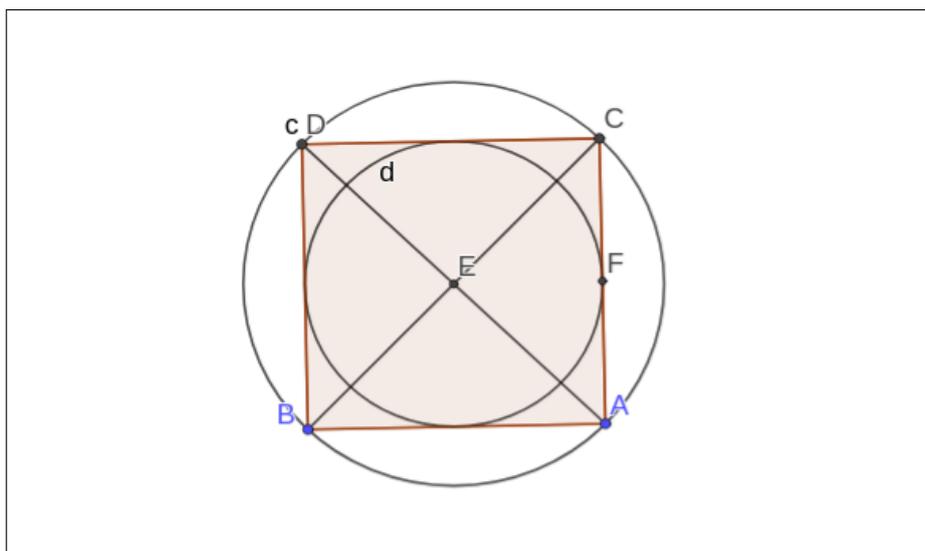
Capítulo 5

Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicênicos

Neste capítulo, os quadriláteros inscritíveis serão considerados. Um caso especial é o quadrilátero bicêntrico, o qual admite um quadrilátero inscrito e um quadrilátero circunscrito. Alguns resultados e respectivas demonstrações são apresentados tanto para os quadriláteros inscritíveis quanto para os quadriláteros bicênicos. Também são apresentados um caso particular e um caso geral para construção de quadriláteros bicênicos.

A Figura 5.1 mostra um quadrado que é um exemplo de quadrilátero bicêntrico. É cíclico pois é possível construir uma circunferência que contenha seus respectivos vértices. É bicêntrico pois é possível inscrever um círculo tangente a todos os respectivos lados.

Figura 5.1: Exemplo de quadrilátero cíclico e bicêntrico. Disponível .



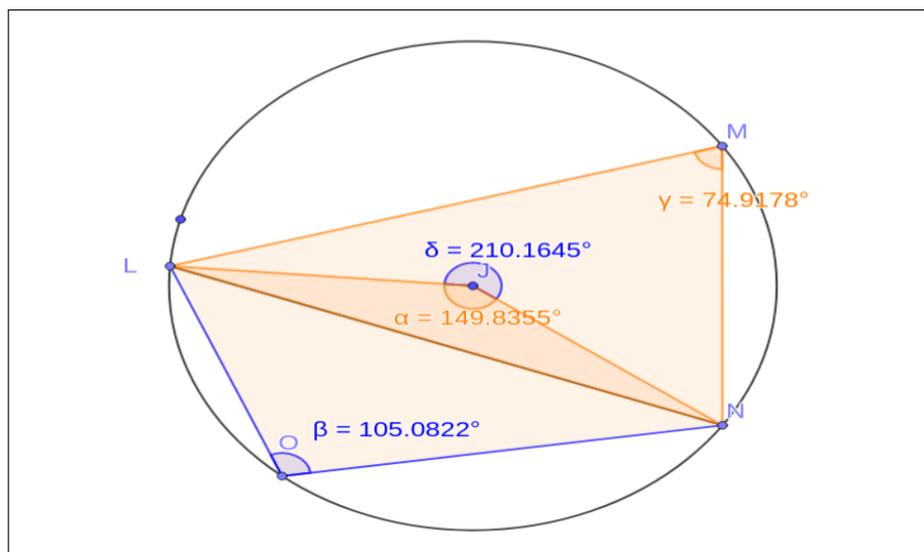
Fonte: Os autores.

5.1 Quadrilátero inscrito

Uma noção introdutória e exploratória sobre os quadriláteros inscritíveis pode ser obtida por meio da manipulação dos elementos mostrados na Figura 5.2, os quais podem ser acessados

no link .

Figura 5.2: Exemplo exploratório para quadriláteros cíclicos. Disponível .



Fonte: Os autores.

Definição 1. Um quadrilátero cíclico é um quadrilátero no qual um círculo pode ser circunscrito de tal forma que cada vértice do polígono pertence ao círculo.

Teorema 2. Um quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, a soma dos ângulos opostos é 180° , ou seja, $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ e $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.

A Figura 5.3 serve de guia para a demonstração.

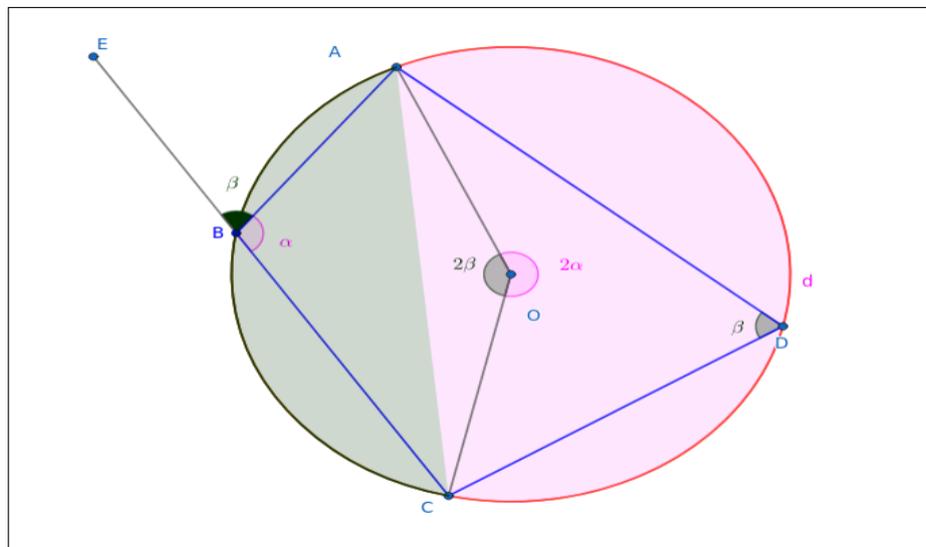
Demonstração. (\Rightarrow) Suponhamos que $ABCD$ seja inscritível na circunferência de centro O . Consideramos o arco \widehat{ADC} de medida 2α . Um ângulo inscrito correspondente ao mesmo é $\angle ABC = \alpha$. Por outro lado, seja o arco \widehat{ABC} de medida 2β . Um ângulo inscrito correspondente será $\angle ADC = \beta$. Logo, uma volta completa em torno de O permite calcular:

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ.$$

Isto é,

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ.$$

Figura 5.3: Guia para o Teorema 2. Disponível 



Fonte: Os autores.

Analogamente, considere o arco \widehat{BAC} de medida $2\alpha'$. Um ângulo inscrito correspondente ao mesmo é $\angle BAC = \alpha'$. O arco \widehat{BCD} de medida $2\beta'$, então um ângulo inscrito correspondente será $\angle BCD = \beta'$. Logo, uma volta completa em torno de O permite calcular:

$$2\alpha' + 2\beta' = 360^\circ \Rightarrow \alpha' + \beta' = 180^\circ.$$

Isto é,

$$\angle BAC + \angle BCD = 180^\circ.$$

(\Leftrightarrow) A Figura 5.4 serve de guia para a demonstração. Por hipótese temos que a soma dos ângulos opostos no quadrilátero convexo $ABCD$ é 180° :

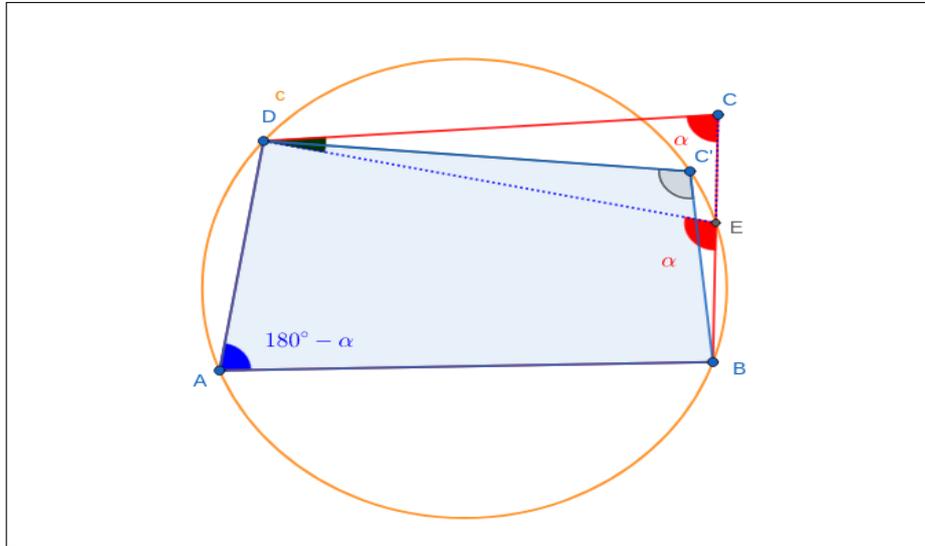
$$\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ \quad \text{e} \quad \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$$

Seja $\angle DCB = \alpha$, logo $\angle DAB = 180^\circ - \alpha$. Suponha, por absurdo, que $ABCD$ não seja inscritível. Traçamos a reta CB e marcamos o ponto E na interseção com a circunferência. Por construção, $ABED$ é inscritível e, portanto, $\angle DAB + \angle DEB = 180^\circ$. Logo, $\angle DEB = \angle DCB = \alpha$ que é uma contradição, pois E , é o ângulo externo do $\triangle DCE$, e, portanto: $\angle DEB = \angle DCB + \angle EDC \Rightarrow \alpha = \alpha + \angle DCB > \alpha$.

A mesma argumentação pode ser utilizada ao supor que C pertença ao interior da circunferência determinada por ABD .

□

Figura 5.4: Guia para a recíproca do Teorema 2. Disponível .

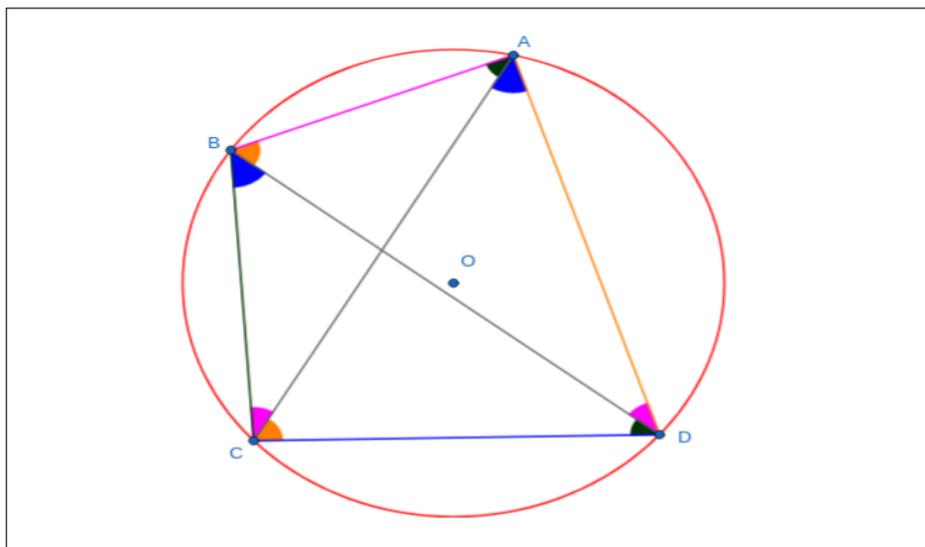


Fonte: Os autores.

Teorema 3. *Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.*

O resultado expresso no teorema anterior pode ser explorado numericamente por meio da manipulação interativa utilizando o GeoGebra de forma interativa , cuja versão estática é mostrada na Figura 5.5.

Figura 5.5: Ilustração numérica do Teorema 3. Disponível .



Fonte: Os autores.

Note que os ângulos $\angle CBD$ e $\angle CAD$, juntamente com o segmento CD e a circunferência c com centro em O remetem às construções do arco capaz e respectivas conclusões sobre a

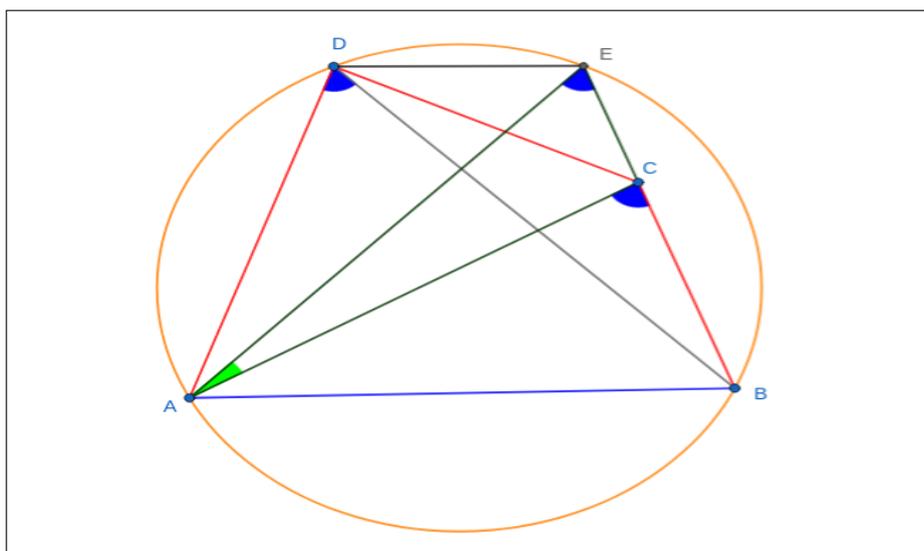
igualdade dos ângulos. Para a demonstração do teorema, a Figura 5.6 serve de guia para a demonstração.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que o quadrilátero $ABCD$ seja inscritível. Seja o arco $\widehat{CD} = 2\alpha$, então $\angle CBD = \angle CAD = \alpha/2$. De forma análoga, podemos concluir que $\angle ACD = \angle ABD$ e $\angle BAC = \angle CDB$.

(\Leftarrow) A Figura 5.6 serve de guia para a recíproca do teorema. Seja o quadrilátero $ABCD$. Por hipótese, vale que $\angle ADB = \angle ACB$. Suponha, por absurdo, que $ABCD$ não é inscritível, ou seja, suponha que C seja o ponto tal que não pertença à circunferência passando por A , B e D . Construa o ponto E , interseção do prolongamento do segmento BC com a circunferência passando por ABD . Por construção, $ABED$ é inscritível. Logo $\angle ADB = \angle AEB$. Segue que $\angle ACB = \angle AEB$. Absurdo, pois $\angle ACB$ é ângulo externo do $\triangle ACE$ e vale que:

$$\angle ACB = \angle AEB + \angle EAC > \angle AEB.$$

Figura 5.6: Guia para a recíproca da demonstração do Teorema 3. Disponível .



Fonte: Os autores.

□

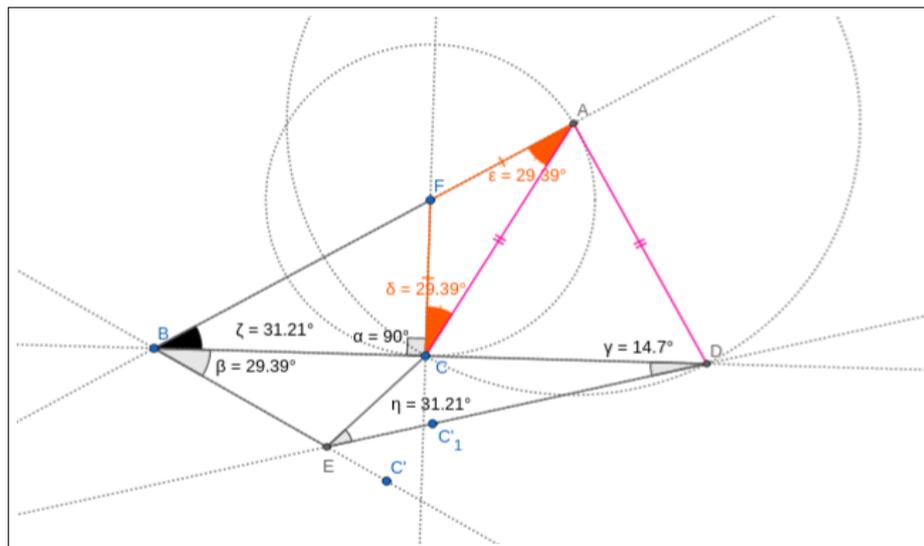
5.2 Exercício

Exercício 27. IGO 2014. Proposto por Morteza Saghafian. Em um triângulo ABC temos $\angle C = \angle A + 90^\circ$. O ponto D na continuação de BC é tal que $AC = AD$. O ponto E está no lado de BC que não contém A e deve satisfazer que $\angle EBC = \angle A$ e $\angle EDC = \frac{1}{2}\angle A$. Provar que $\angle CED = \angle ABC$.

5.2.1 Construção inicial

Utilize a Figura 5.7 como guia para a construção inicial, a qual contém as informações do problema.

Figura 5.7: Guia para a construção do exercício. Disponível .



Fonte: Os autores.

1. Considere os pontos B e C . Anote um ponto F sobre a reta perpendicular à reta que contém BC . Determine a circunferência de centro F e raio FC . Determine o ponto A , interseção da reta que passa por B e F .
2. A circunferência de centro em A e raio AC determina o ponto D , interseção com a reta que passa por BC .
3. O ponto C' é a rotação do ponto C pelo ângulo $\angle FAC$ em torno do ponto B .
4. O ponto C'_1 é a rotação do ponto C pelo ângulo $\angle FAC/2$ em torno do ponto D .
5. Seja E o ponto de interseção das retas por AC' e AC'_1 , respectivamente. Observa a Figura 5.7 para mais detalhes.

5.2.2 Solução

A Figura 5.8 serve de guia para a solução do exercício.

1. Seja M o ponto médio CD . Como o triângulo ΔACD é isósceles, então AM está sobre a mediatriz de CD .

8. Como $\angle CPE = \angle CQE$, então o quadrilátero $CPQE$ é cíclico. Construa a circunferência por $CPQE$.

9. Do $\triangle AMB$ temos:

$$90 - 2\alpha + 90 + \alpha + \angle CAM = 180.$$

Logo, $\angle CAM = \alpha$. De $\triangle HQA$ segue:

$$90 + 2\alpha + \angle HQA = 180.$$

Logo, $\angle HQA = 90^\circ - 2\alpha$.

10. Como o quadrilátero $CPQE$ é cíclico, então $\angle CEP = \angle CQP$, pois enxergam a mesma corda CP e, por consequência, definidos pelo mesmo ângulo inscrito. $\therefore \angle CED = \angle CQP = \angle ABC$, como queríamos provar.

5.3 Quadriláteros bicêntricos

Definição 2. Um quadrilátero $ABCD$ é chamado bicêntrico se é inscritível e circunscritível simultaneamente [47].

Um exemplo de quadrilátero bicêntrico foi apresentado na Figura 5.1. Obter um quadrilátero bicêntrico parece uma tarefa simples à primeira vista, mas sem a utilização de um resultado matemático pode ser um problema um pouco mais exigente. No entanto, o seguinte resultado é útil para a determinação de um quadrilátero bicêntrico.

Proposição 4. O quadrilátero $ABCD$, circunscrito a circunferência c , com pontos de tangência $P \in DA$, $Q \in AB$, $R \in BC$ e $S \in CD$, é bicêntrico se, e somente se, os segmentos PR e QS são perpendiculares.

Demonstração. A Figura 5.9 serve de guia para a demonstração.

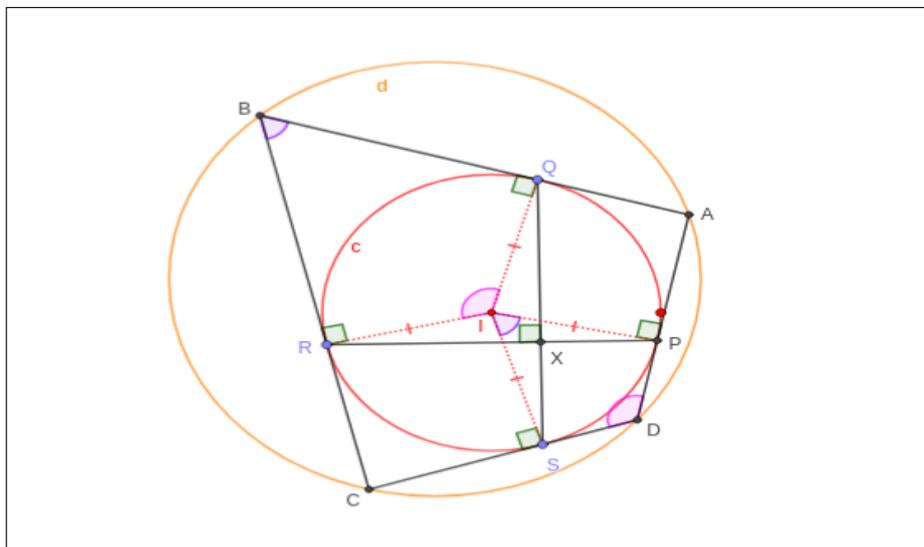
(\Rightarrow) Suponha que $ABCD$ é bicêntrico e sejam P , Q , R e S os pontos de tangência da circunferência inscrita c com centro em I . Como o quadrilátero $ABCD$ está inscrito em uma d então $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.

Ao considerar o quadrilátero $QBRI$, observe que Q e R são pontos de tangência e, portanto, $\angle IRB = \angle IQB = 90$. Como consequência, o quadrilátero $QBRI$ também é inscritível vale que:

$$\underbrace{\angle ABC}_{\angle QBR} + \angle QIR = 180^\circ.$$

Como $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, segue que $\angle ADC = \angle QIR$.

Figura 5.9: Guia para a demonstração da proposição. 



Fonte: Os autores.

Utilizando o mesmo argumento anterior, o quadrilátero $PISD$ é inscritível e, portanto, vale que:

$$\underbrace{\angle ADC}_{\angle PDS} + \angle PIS = 180^\circ.$$

Como $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, segue que $\angle PIS = \angle ABC$. Logo:

$$\angle ADC + \angle ABC = \angle QIR + \angle PIS = 180^\circ.$$

Notamos agora que X é o ângulo excêntrico interior de c e, portanto:

$$\angle QXR = \frac{\widehat{QR} + \widehat{PS}}{2} = \frac{\angle QIR + \angle PIS}{2} = 90^\circ.$$

(\Leftrightarrow) Sejam P, Q, R e S os pontos de tangência da circunferência inscrita no quadrilátero $ABCD$ com ângulo entre os segmentos PR e QS um ângulo reto. Provemos que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível.

$$\angle QXR = \frac{\angle QIR + \angle PIS}{2} = 90^\circ \Rightarrow \angle QIR + \angle PIS = 180^\circ.$$

Como o quadrilátero $PISD$ é cíclico, então $\angle PIS + \angle ADC = 180^\circ$, então $\angle ADC = \angle QIR$. Analogamente, conclui-se que $\angle PIS = \angle ABC$ e, portanto, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.

Isto é, $ABCD$ também é cíclico e logo bicêntrico.

□

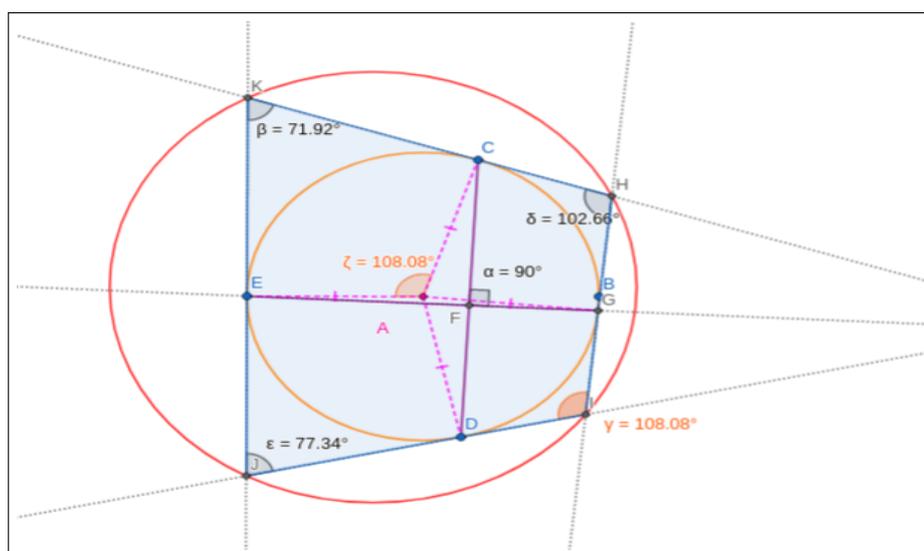
5.4 Construção quadrilátero bicêntrico

Proposição 5. *Construir o quadrilátero bicêntrico utilizando a proposição anterior.*

O processo de construção utiliza o resultado da proposição diretamente e facilita a obtenção de um quadrilátero bicêntrico. A Figura 5.10 serve de guia e o link interativo pode ser obtido .

1. Construa o círculo c de centro A e que passa por um ponto B arbitrário.
2. Marque os pontos C e D sobre c . Construa o segmento CD .
3. Por um ponto E em c , trace uma reta perpendicular ao segmento CD . Obtenha os pontos F e G conforme apontado na Figura 5.10.
4. Construa os segmentos AG , AC , AD , e AE .
5. Construa perpendiculares aos segmentos AG , AC , AD e AE passando pelos pontos G , C , D e E .
6. Determine as interseções H , K , J e I .
7. Pela proposição anterior, o quadrilátero $HKJI$ é cíclico.
8. Ajuste outros elementos de interesse.

Figura 5.10: Guia para a construção do quadrilátero bicêntrico. .



Fonte: Os autores.

5.4.1 Construção de quadrilátero bicêntrico por retas tangentes

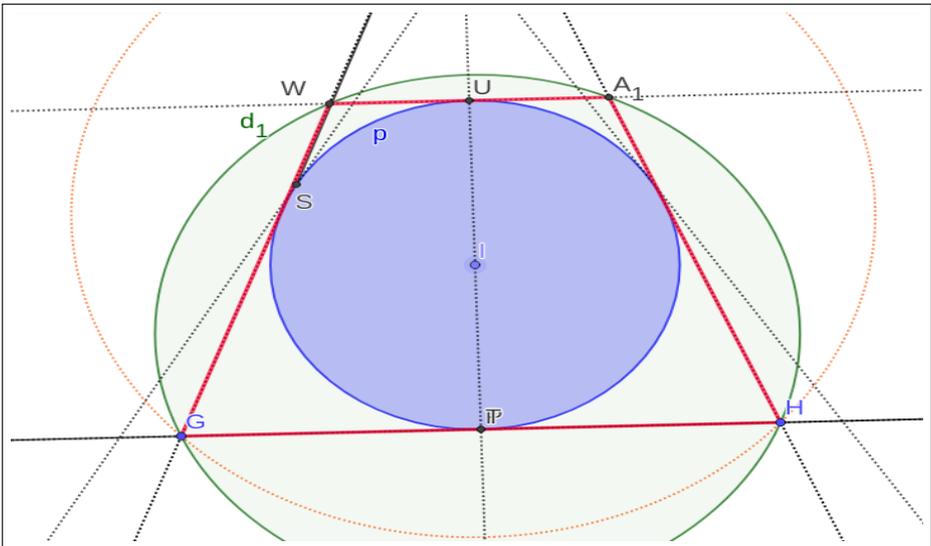
A construção de um tipo específico de quadrilátero bicêntrico pode ser feita por meio da utilização de retas tangentes. É necessário ressaltar que a construção geométrica por meio da proposição é mais simples e direta.

Exercício 28. *Construir um quadrilátero bicêntrico utilizando retas tangentes a uma circunferência por um ponto.*

5.4.1.1 Solução:

A Figura 5.11 serve de guia para a construção proposta.

1. Construa o segmento GH . Obtenha a mediatriz do segmento GH . Construa a circunferência de centro I sobre a mediatriz e tangente ao segmento GH .
2. Obtenha a interseção U da mediatriz com a circunferência. Trace a reta perpendicular à mediatriz passando por U .
3. Trace as retas tangentes à circunferência pelos pontos G e H .
4. Os pontos de interseções, por construção, geram o quadrilátero bicêntrico.

Figura 5.11: Quadrilátero bicêntrico com retas tangentes e mediatrizes. 

Fonte: Os autores.

5.5 Triângulo Pedal e a Fórmula de Euler

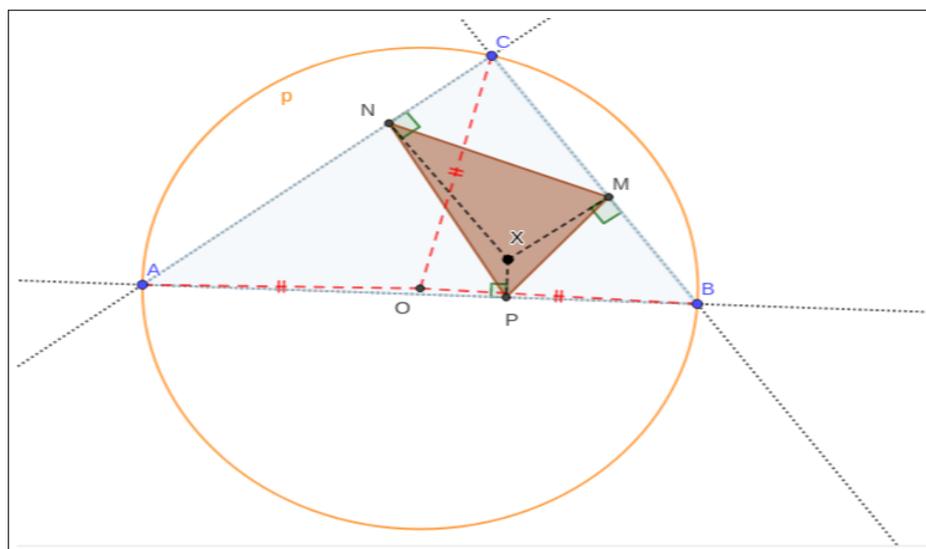
Esta seção mostra finaliza o capítulo com a fórmula de Euler para a área do triângulo pedal, cuja demonstração é baseada na apresentação proveniente de [2, pg. 74].

Teorema 6. *Seja ΔABC um triângulo acutângulo e seja um ponto X no interior de um triângulo ΔABC . Sejam P , M e N as projeções ortogonais. Mostre que a área do ΔMNP é máxima [2].*

Demonstração. Inicialmente, considere um triângulo acutângulo ΔABC e seja X um ponto no interior de ΔABC com projeções ortogonais, sobre os lados AB , AC e BC dadas por P , N e M , respectivamente. A Figura 5.12 mostra o triângulo ΔABC e o triângulo ΔMNP . Adicionalmente, considere que a área do ΔABC seja denotada por S , σ denote a área do triângulo ΔMNP , R e O o raio e centro do círculo circunscrito, respectivamente.

O triângulo ΔMNP é denominado triângulo pedal do triângulo ΔABC . É necessário observar que o triângulo pedal é uma construção mais geral e pode ser construído para qualquer ponto X no interior ou exterior do triângulo ΔABC .

Figura 5.12: Triângulo pedal X no interior do triângulo ΔABC . Disponível .



Fonte: Os autores.

A demonstração de que a área σ do triângulo pedal é máxima é baseada na chamada fórmula de Euler (Ver [2]). A área do triângulo pedal relaciona-se de modo natural ao triângulo original por meio de uma relação compacta entre a distância do ponto X ao centro do círculo circunscrito ao triângulo ΔABC e o respectivo raio R [42]. Matematicamente, a equação é:

$$\sigma = \left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right) \cdot \frac{S}{4}$$

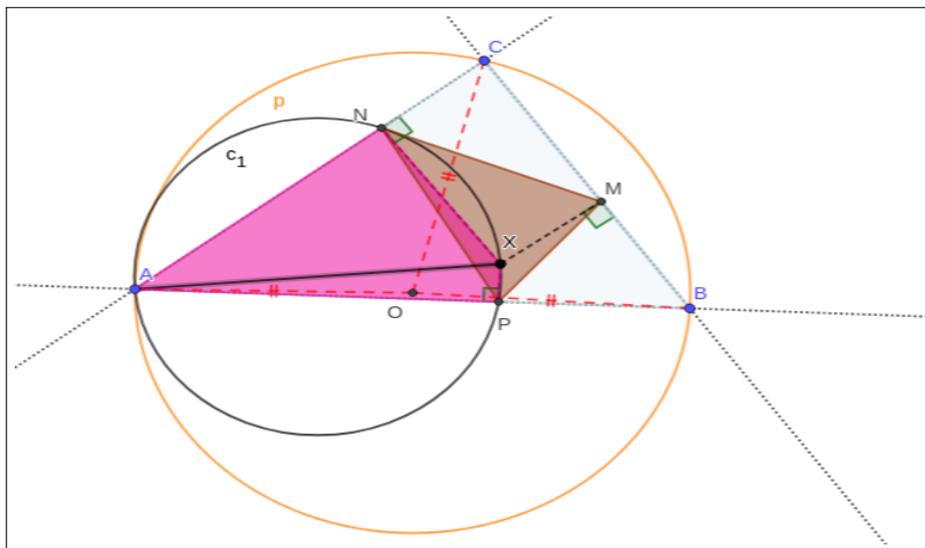
com $d = OX$ a distância entre o centro do círculo circunscrito e o ponto X .

Primeiramente, observe que a área do triângulo ΔMNP pode ser escrita em termos de dois lados e do ângulo formado entre os lados. Logo:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot NP \cdot \text{sen}(\angle MNP)$$

Sejam $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ e $\gamma = \angle BCA$ os ângulos do triângulo ΔABC . O quadrilátero $APXN$ é cíclico, pois os ângulos $\angle XPA$ e $\angle XNA$ são retos e, portanto, $\angle XPA + \angle XNA = 180^\circ$. A Figura 5.13 mostra os detalhes.

Figura 5.13: Quadrilátero cíclico $APXN$ em círculo com diâmetro AX . Disponível .



Fonte: Os autores.

Por meio da aplicação da *Lei dos Senos* ao triângulo ΔANP obtém-se:

$$\frac{PN}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{AN}{\text{sen}(\beta)} = \frac{AP}{\text{sen}(\gamma)} = AX$$

Da equação anterior, segue que: $NP = AX \cdot \text{sen}(\alpha)$. De modo análogo, o quadrilátero $CNXM$ também é cíclico e, portanto, $MN = CX \cdot \text{sen}(\gamma)$. Dessa forma, σ pode ser reescrita como:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot AX \cdot CX \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\gamma) \cdot \text{sen}(\angle MNP)$$

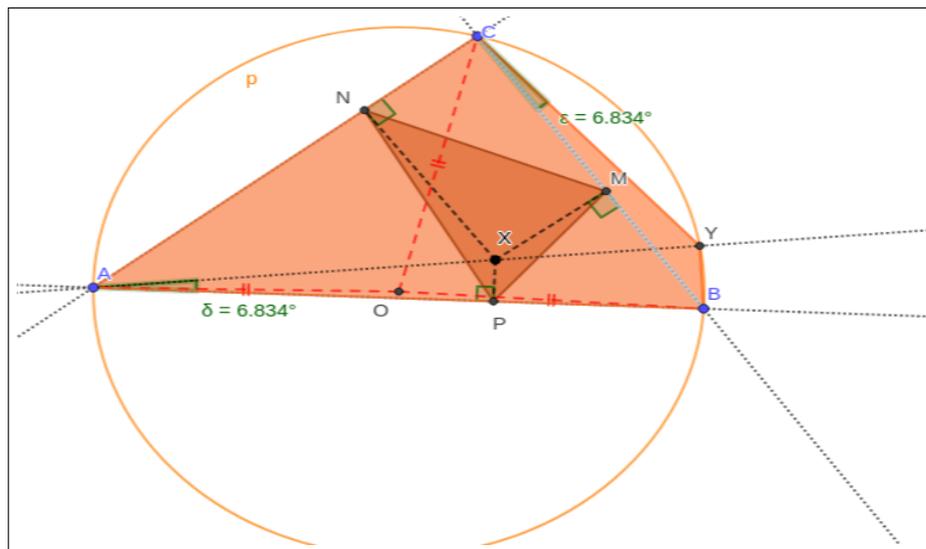
Como o quadrilátero $APXN$ é cíclico, então os ângulos $\angle XNP = \angle XAP$. Seja Y a interseção do prolongamento de AX com o circuncírculo do triângulo ΔABC , então $ABYC$ é

um quadrilátero cíclico por construção. Agora, observe que:

$$\angle XAP = \angle YAB = \angle YCB.$$

A Figura 5.14 ilustrativa a igualdade dos ângulos no caso específico considerado.

Figura 5.14: Quadrilátero cíclico $ABYC$ em círculo com diâmetro AY . Disponível .



Fonte: Os autores.

Agora, quadrilátero cíclico $CNXM$ fornece diretamente que $\angle XNM = \angle XCM$. Portanto,

$$\angle MNP = \angle MNX + \angle XNP = \angle XCM + \angle YCB = \angle XCY.$$

Observe que:

$$\angle XYC = \angle AYC = \beta = \angle ABC,$$

em que a última igualdade decorre diretamente do fato dos ângulos β e $\angle AYC$ enxergarem o mesmo segmento AC . Logo, a *Lei dos Senos* aplicada ao triângulo ΔCXY e combinada com os resultados anteriores fornece:

$$\frac{XY}{\underbrace{\text{sen}(\angle XCY)}_{\angle MNP}} = \frac{CX}{\underbrace{\text{sen}(\angle XYC)}_{\beta}} \Rightarrow \frac{CX}{XY} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\angle MNP)}$$

a qual produz $CX \cdot \text{sen}(\angle MNP) = XY \cdot \text{sen}(\beta)$.

Agora, substituindo em σ temos:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot AX \cdot CX \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\gamma) \cdot \text{sen}(\angle MNP) = \frac{1}{2} \cdot AX \cdot XY \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma)$$

Considere que X_1 e X_2 forma um diâmetro qualquer do círculo circunscrito ao triângulo $\triangle ABC$ que contenha o ponto O . Assuma que O está entre X_1 e X , então o segmento $X_1X = R + d$ e o segmento $XX_2 = R - d$. Como as cordas AY e X_1X_2 tem o ponto de interseção X , então:

$$AX \cdot XY = X_1X \cdot XX_2 = (R + d) \cdot (R - d) = R^2 - d^2$$

Agora σ pode ser reescrita como:

$$\sigma = \frac{R^2 - d^2}{2} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma)$$

Por outro lado a área do triângulo $\triangle ABC$ é:

$$S = \frac{1}{2} ab \text{sen}(\gamma) = \frac{1}{2} (2R \text{sen}(\alpha))(2R \text{sen}(\beta)) = 2R^2 \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma)$$

Dessa forma, o resultado segue:

$$\sigma = \left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right) \cdot \frac{S}{4}$$

A área $\sigma = \sigma(d)$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo da posição do ponto X e possui máximo quando $d = 0$, ou seja, quando $X = O$. \square

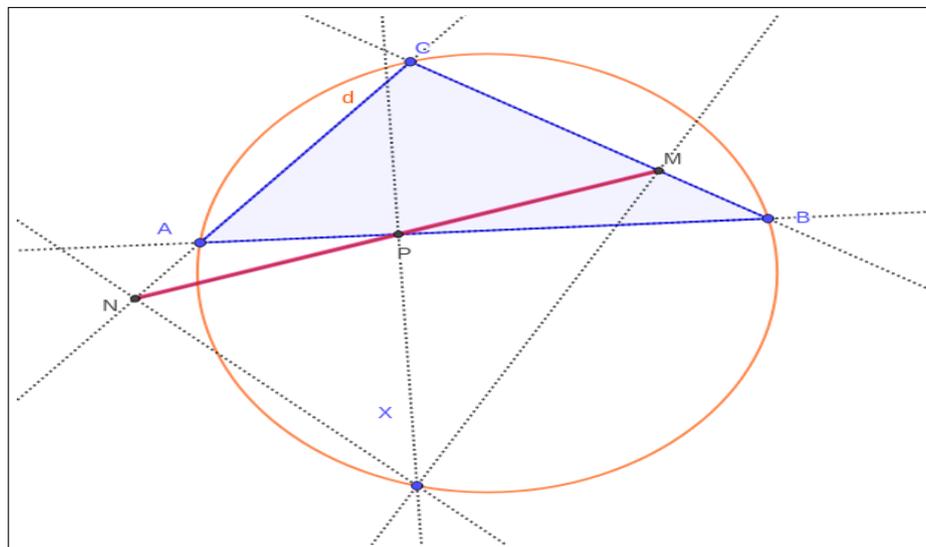
Segundo [2], a fórmula anterior pode ser generalizada para X :

$$\sigma = \pm \left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right) \cdot \frac{S}{4}$$

em que o sinal $+$ corresponde ao caso em que X está no interior do circuncírculo e o sinal $-$ corresponde ao caso em que X está fora do circuncírculo.

Um corolário da fórmula de Euler é o *Teorema de Simson-Wallace*, o qual afirma que os pés das perpendiculares de um ponto X localizado sobre o circuncírculo estão sobre uma reta. De fato, pela Fórmula de Euler, a área do triângulo pedal é nula para todo ponto sobre o círculo circunscrito ao triângulo e, portanto, é equivalente a afirmar que os vértices do triângulo pedal pertencem a uma reta [42]. A figura 5.15 ilustra a reta de Simson-Wallace para um ponto X sobre o circuncírculo. O App interativo está disponível em  .

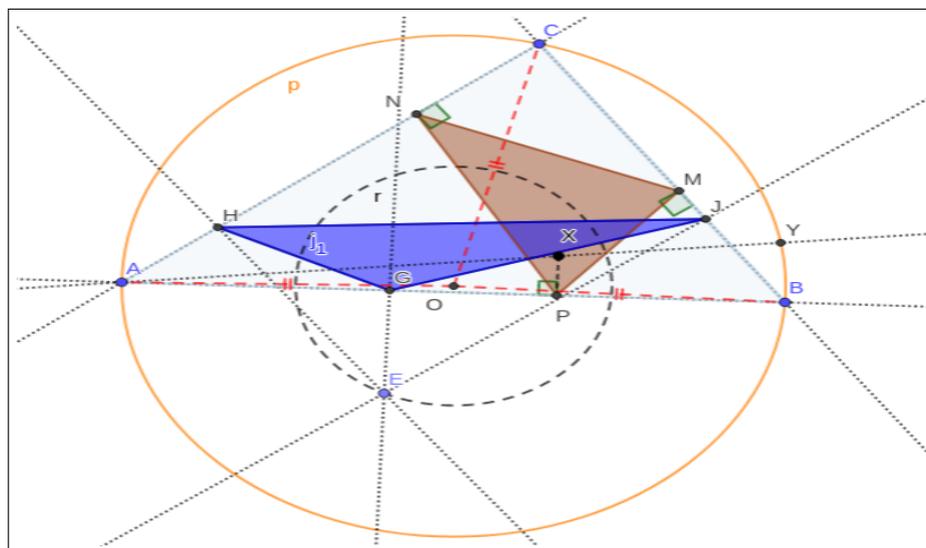
Figura 5.15: Reta de Simson-Wallace. Disponível .



Fonte: Os autores.

Da fórmula de Euler também segue que áreas idênticas são obtidas para pontos P sobre uma mesma circunferência de raio r qualquer. O resultado pode ser visualizado na Figura 5.16, a qual mostra os triângulos pedais (em azul) gerados quando um ponto P percorre a circunferência de raio r governado por um controle deslizante.

Figura 5.16: Triângulo pedal para o ponto P sobre um círculo concêntrico ao ponto O .



Fonte: Os autores.

Um outro elemento interessante da fórmula de Euler é obtido ao considerar um valor de área σ_0 para o triângulo pedal. Nesse caso, o conjunto dos pontos X do plano tais que a área $\sigma = \sigma_0$ são dois círculos concêntricos tais que:

- $R\sqrt{1 + \frac{4\sigma_0}{S}}$ se $4\sigma_0 > S$
- $R\sqrt{1 - \frac{4\sigma_0}{S}}$ se $4\sigma_0 \leq S$

De fato, ao impor a igualdade entre a fórmula de Euler, obtém-se a equação:

$$\sigma_0 = \pm \left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right) \cdot \frac{S}{4}.$$

Logo,

$$\frac{d^2}{R^2} = 1 \pm \frac{4\sigma_0}{S} \Rightarrow d = \left| R\sqrt{1 \pm \frac{4\sigma_0}{S}} \right| = R\sqrt{1 \pm \frac{4\sigma_0}{S}},$$

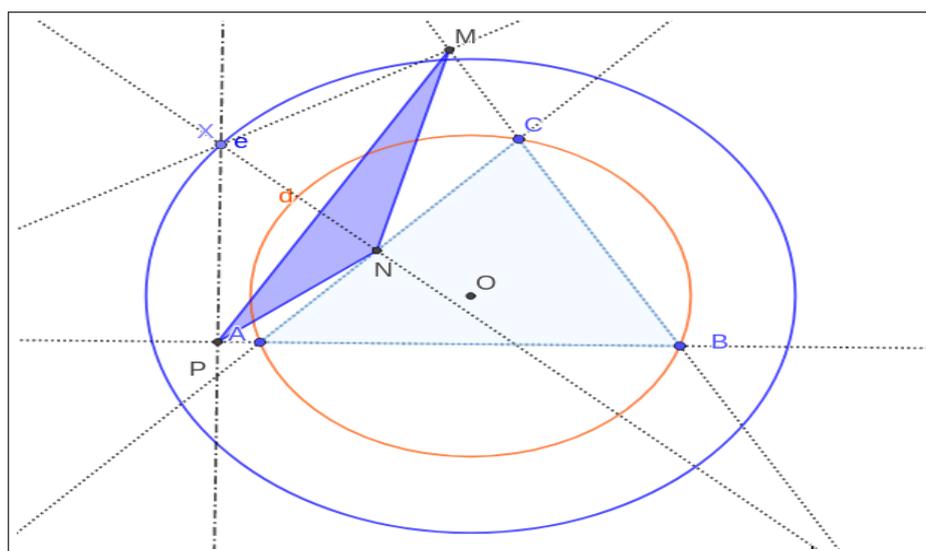
o qual implica que a d deve ser constante. Em coordenadas cartesianas, se $X = (x, y)$, então

$$d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \left(1 \pm \frac{4\sigma_0}{S}\right),$$

fornece as equações de dois círculos concêntricos ao circuncírculo de centro $O = (x_0, y_0)$.

A Figura 5.17 mostra a construção do triângulo pedal com área σ_0 dada. O *App* interativo, disponível  permite explorar em detalhes a construção. Neste caso, todos os triângulos pedais ΔMPN , com X um ponto qualquer do círculo e , possuem mesma área σ_0 com a condição $4\sigma_0 > S$ satisfeita.

Figura 5.17: Circunferência e tal que $S_{\Delta MNP} = \sigma_0$, com $4\sigma_0 > S_{\Delta ABC}$. Disponível .

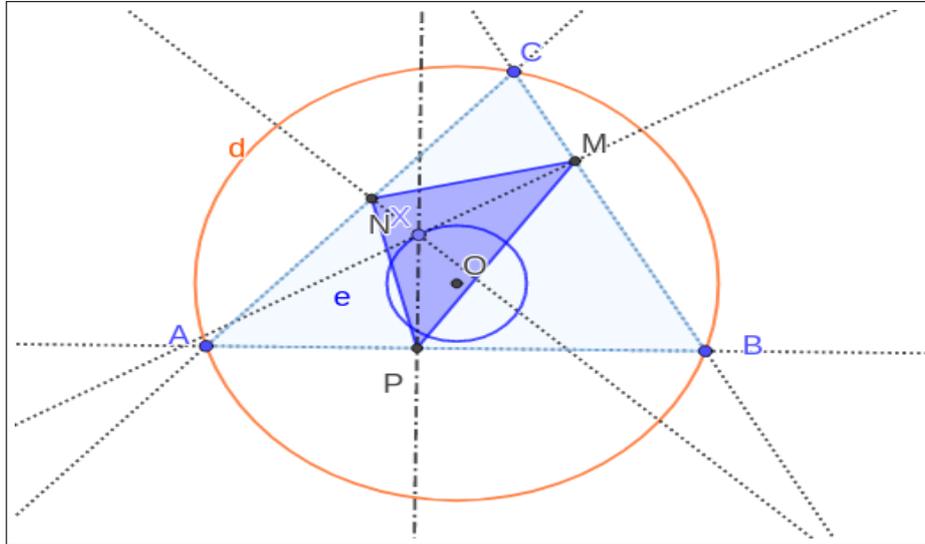


Fonte: Os autores.

De forma análoga, a Figura 5.18 mostra o caso do triângulo pedal para $4\sigma_0 < S$. Neste caso, o conjunto dos pontos X tais que os respectivos triângulos pedais possuem mesma área é

o círculo e no interior do círculo circunscrito ao triângulo ΔABC .

Figura 5.18: Circunferência e tal que $S_{\Delta MNP} = \sigma_0$, com $4\sigma_0 < S_{\Delta ABC}$. Disponível .



Fonte: Os autores.

Capítulo 6

Cores Dinâmicas RGB no GeoGebra

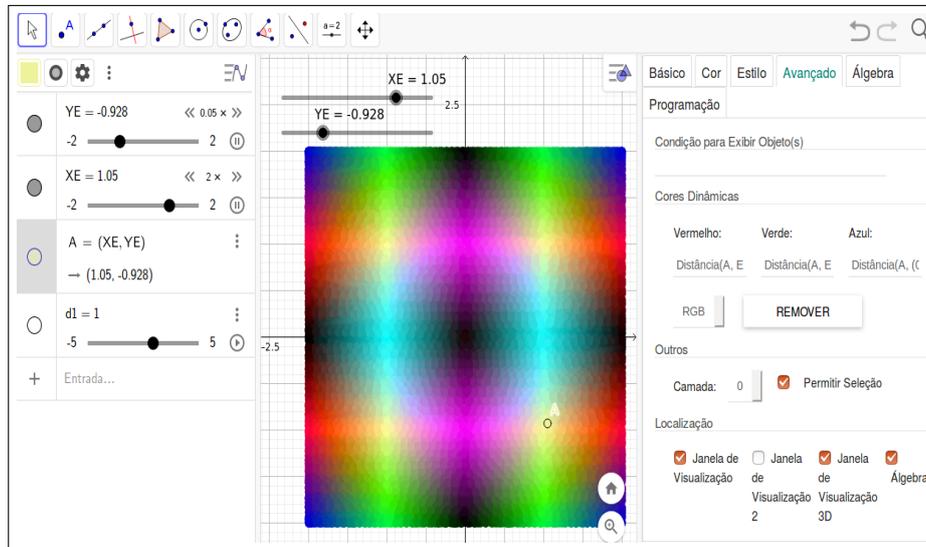
Dado um figura construída no GeoGebra, as respectivas cores podem ser atribuídas via paleta de cores. No entanto, há possibilidade de modificação das cores de acordo com alguma função específica ou parâmetro. Neste capítulo, o interesse é a exploração do esquema de cores dinâmicas baseado no esquema de cores denominado RGB, o qual denota as cores vermelho R , verde G e azul B . As referências bases utilizadas para a discussão neste texto são [35], [13] e [14]. Resultados acionais podem ser encontrados em [15] e [41].

Primeiramente, considere dois controles deslizantes XE e YE , ambos no intervalo $[0, 2]$. Defina o ponto $A = (XE, YE)$ que associa os controles deslizantes e, dessa forma, pode ser alterado por meio de animação. Ao invés de definir a cor do ponto A por meio da paleta de cores, defina a cor por meio da aba de propriedades e escalas de cores Vermelho (R), Verde (G) e Azul (B). A Figura 6.1 mostra um exemplo de coloração aplicada ao ponto A , movimentado por meio dos botões de animação dos controles deslizantes, com ativação do rastro do ponto A .

Ao escolher um valor fixo no intervalo $[0, 1]$ para os canais R , G e B obtém-se a coloração do ponto que é similar à escolha de uma cor específica na paleta de cores. Por exemplo, os valores $R = 1$, $G = 0$ e $B = 0$ fornecem um ponto vermelho. No entanto, pode ser conveniente associar ao ponto uma função ou controle deslizante que controla os valores de R , G e B para o ponto A . Neste caso, uma fórmula foi passada para cada canal RGB. O resultado é a modificação da cor do ponto de forma interativa e feita a medida que o ponto movimenta-se pela janela gráfica. A ativação do rastro permite visualizar o caminho percorrido pelo ponto A e respectivas mudanças de cores. No caso da Figura 6.1, as triplas ordenadas para os canais RGB receberam valores determinados por funções matemáticas escolhidas arbitrariamente e dadas por:

- R =distância do ponto A ao Eixo X.
- G =distância do ponto A ao Eixo Y.
- B =distância do ponto A ao centro do sistema de coordenadas.

Figura 6.1: Esquema de cores dinâmicas RGB aplicado a um ponto A . Disponível .



Fonte: Os autores.

Não há necessidade de escrever os valores para os canais RGB em termos de coordenadas cartesianas, pois o GeoGebra possui funções para o cálculo de distâncias implementadas. Estas, por sua vez, podem ser utilizadas diretamente na definição dos canais RGB conforme mostrado na Figura 6.1. Em detalhes as fórmulas, utilizando o GeoGebra, são:

$$\begin{cases} R = \text{Distância}(A, \text{Eixo}X) \\ G = \text{Distância}(A, \text{Eixo}Y) \\ B = \text{Distância}(A, (0, 0)) \end{cases}$$

É interessante ressaltar a Figura 6.1 foi obtida por meio de ajustes manuais das velocidades dos controles deslizantes. É um procedimento um pouco demorado até com poucos pontos e requer um certo nível de dedicação para que a figura fique adequada. A seção 6.2 apresenta um procedimento mais eficiente que utiliza a planilha de cálculo e executa a varredura de pontos em um retângulo ao invés pontos governados por controles deslizantes.

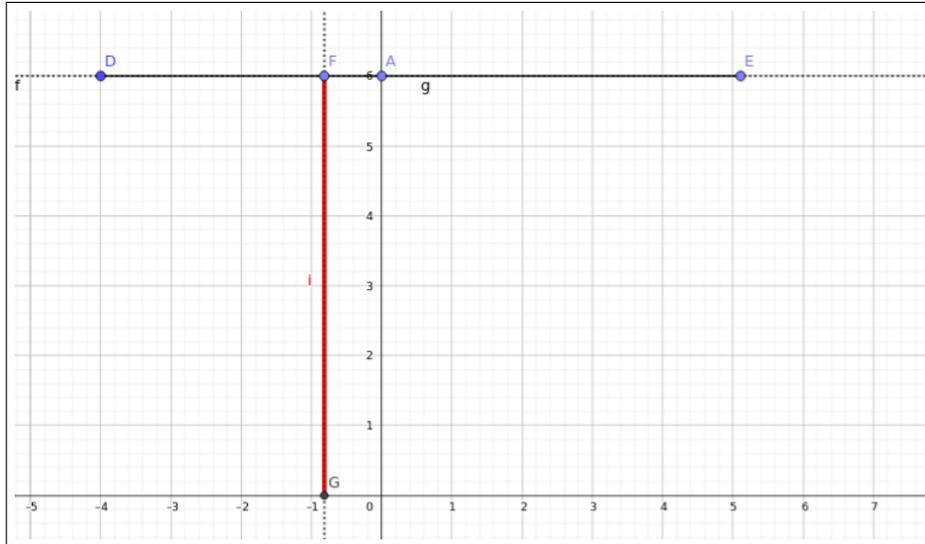
6.1 Cores Dinâmicas em Segmentos

O exemplo anterior utiliza pontos com movimentação governada por dois controles deslizantes. Aqui, são considerados segmentos com movimentos restritos por pontos. É uma questão análoga ao caso anterior, porém o segmento é colorido por uma única cor RGB.

Considere um segmento paralelo ao Eixo Y que se movimenta com pontos extremos em uma reta paralela ao Eixo X e no Eixo X conforme mostrado na Figura 6.2. A construção inicia-se no ponto A , seguida de reta paralela ao Eixo X , os pontos D e E definem o segmento

DE , anota-se um ponto F sobre o segmento DE . Finalmente, uma perpendicular ao segmento é utilizada para definir o ponto G e o segmento FG .

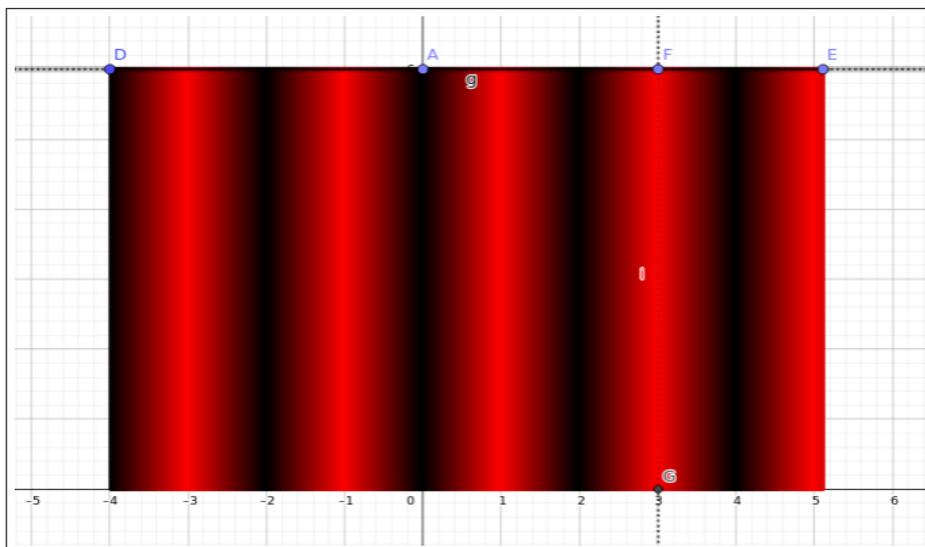
Figura 6.2: Cores dinâmicas em segmento paralelo ao eixo X. Disponível .



Fonte: Os autores.

Neste caso, o esquema de cores dinâmicas escolhido foi a distância do segmento FG ao Eixo Y para o canal R e valores nulos para os canais G e B (R, G, B) = ($Distância(FG, EixoX)$, 0, 0) e o resultado é a Figura 6.3. Note que neste caso, todo o segmento FG possui a mesma cor e se comporta como o ponto do caso anterior. No entanto, agora o movimento é mais estruturado devido às características da construção.

Figura 6.3: Cores dinâmicas $(R, G, B) = (|FG - EixoX|, 0, 0)$ em segmento. Disponível .



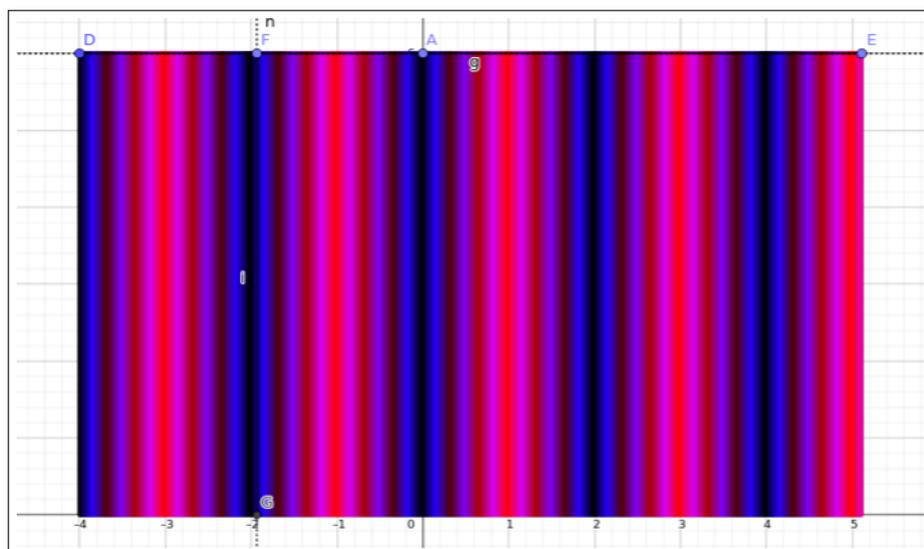
Fonte: Os autores.

Modificações no esquema de cores dinâmicas ocasionam padrões distintos de cores. A Figura 6.4 mostra os resultados para um esquema RGB definido por

$$(R, G, B) = (x(F), y(F), x(F) \cdot y(F)),$$

em que $x(\cdot)$ é a abscissa do ponto. Note que não há mudança de cores na direção vertical, pois o segmento todo é definido pelo mesmo valor.

Figura 6.4: Cores dinâmicas $(R, G, B) = (x(F), y(F), x(F) \cdot y(F))$ em segmento.



Fonte: Os autores.

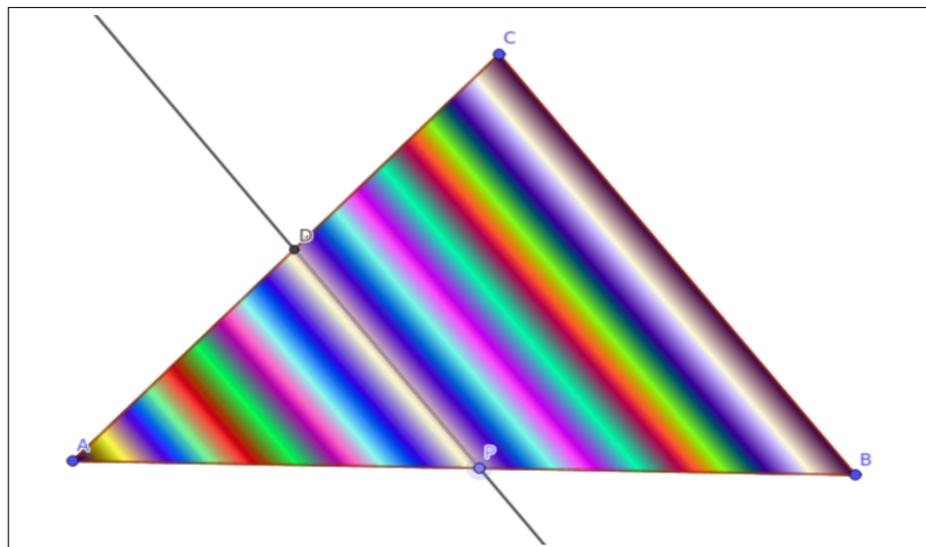
Uma observação interessante é o padrão de repetição das escalas de cores. Isso se deve ao fato de que cada canal RGB é um valor numérico no intervalo fechado $[0, 1]$. Valores α fora do intervalo são convertidos de forma automática pelo GeoGebra utilizando a fórmula:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left| \frac{\alpha}{2} - \text{round} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right|.$$

Uma aplicação interessante do esquema de cores dinâmicas é a possibilidade de preenchimento dos triângulos com cores personalizadas de acordo com algum critério particular. Este adiciona possibilidades adicionais de preenchimento das figuras além daquelas existentes no GeoGebra. A Figura 6.5 é um exemplo de triângulo $\triangle ABC$ com segmento paralelo a um dos lados e cor determinada pelo esquema de cores dinâmicas. Cada canal de cor é definido de acordo com as distâncias entre os pontos P, D, B e C conforme dado a seguir por meio das funções do GeoGebra:

$$\begin{cases} R = \text{Distância}(P, D) \\ G = \text{Distância}(P, B) \\ B = \text{Distância}(P, C) \end{cases}$$

Figura 6.5: Cores dinâmicas $(R, G, B) = (x(F), y(F), x(F) \cdot y(F))$. Disponível .



Fonte: Os autores.

6.2 Cores Dinâmicas e Planilha de Cálculo

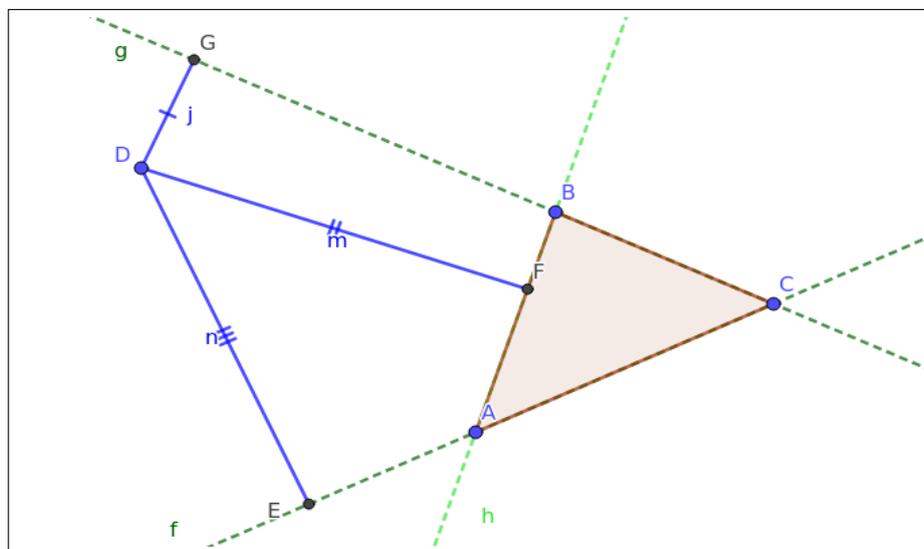
Uma possibilidade adicional para adicionar maior versatilidade aos esquemas de cores dinâmicas é a utilização conjugada da janela de álgebra e a planilha de cálculos. Neste caso, as construções iniciais são realizadas na janela gráfica utilizando a janela de álgebra, mas os pontos são coloridos por meio da utilização da planilha de cálculos.

Considere um triângulo $\triangle ABC$ e um ponto $D(x, y)$ conforme representado na Figura 6.6. O objetivo é utilizar o esquema RGB para colorir os pontos de plano de acordo com a distância às retas f, g e h , respectivamente.

O processo de construção é o seguinte:

1. Construa o triângulo $\triangle ABC$.
2. Construa as retas f, g e h passando pelos pontos A e C , B e C , A e B , respectivamente.
3. Escolha um ponto D arbitrário.
4. Trace perpendiculares às retas f, g e h passando por D .
5. Determine os pontos E, F e G .
6. Construa os segmentos DE, DF e DG .

Figura 6.6: Um esquema descritivo para utilização das cores dinâmicas. Disponível .



Fonte: Os autores.

A aplicação do esquema RGB ao ponto D pode ser feita da mesma forma que na seção anterior. Ou seja, basta abrir as propriedades do objeto, ativar o rastro e definir o esquema RGB como:

$$\begin{cases} R = \text{Distância}(D, f) \\ G = \text{Distância}(D, g) \\ B = \text{Distância}(D, h) \end{cases} .$$

Para observar o resultado similar ao apresentado na Figura 6.7 basta arrastar o ponto sobre a janela gráfica. Observe que a cor de cada ponto é uma combinação de cores provenientes dos comprimentos dos segmentos DE , DF e DG .

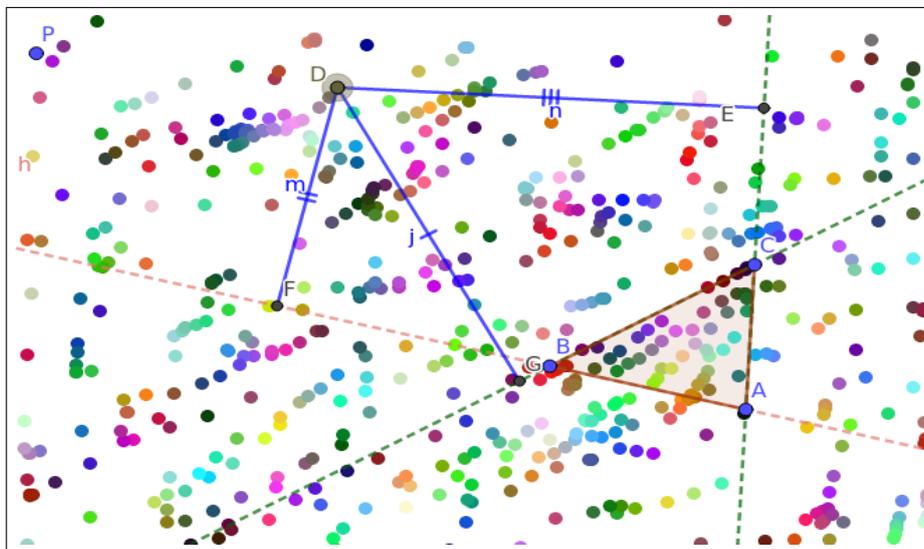
O processo de construção anterior é interessante e ilustrativo. Porém, para produzir uma figura mais rica em detalhes, como mostrado na Figura 6.9, é necessário modificar a abordagem, pois o processo manual é impreciso e ineficiente. A seção anterior mostrou um procedimento alternativo, o qual é baseado na sequência de pontos associada à controles deslizantes. Neste caso, o processo é mais eficiente, mas ainda requer observação e ajustes detalhados para obter uma figura completa.

Uma alternativa viável às abordagens anteriores é criar uma sequência vertical ou horizontal de pontos regularmente espaçados. A figura é obtida por um processo de varredura similar ao escaneamento de uma imagem [35]. A Figura 6.8 mostra as três janelas necessárias, além da janela de álgebra, para o processo de construção.

O procedimento pode ser resumido como segue:

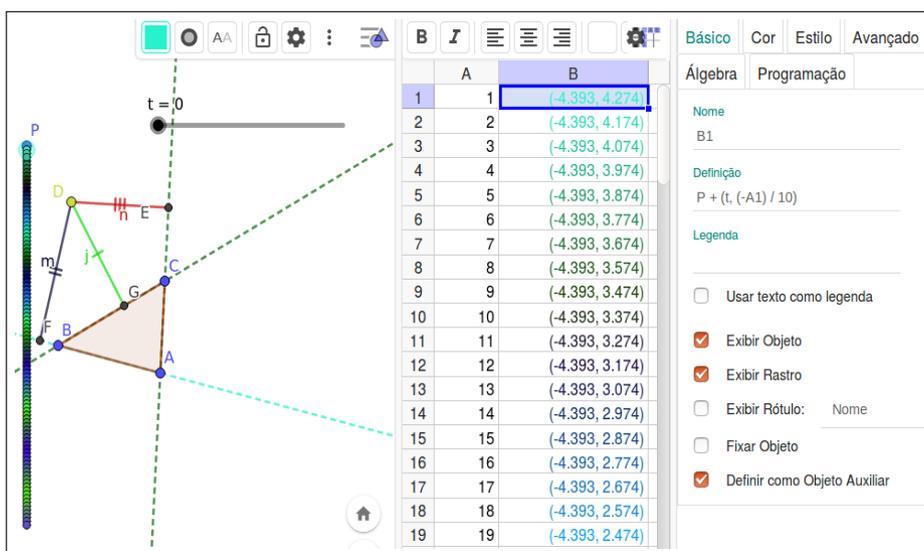
1. Defina o ponto P arbitrário e construa o controle deslizante t em um intervalo especificado.

Figura 6.7: Cores dinâmicas dadas pelas distâncias às retas. Disponível .



Fonte: Os autores.

Figura 6.8: Delineamento para cores dinâmicas RGB em sequência de pontos do plano.



Fonte: Os autores.

2. Na planilha de cálculo, preencha a coluna A com valores $1, 2, \dots, N$, em que N é o número de pontos escolhido. N deve ser ajustado aos propósitos da construção. Na construção em questão, $N = 100$ foi utilizado.
3. Em B1 construa o ponto imediatamente abaixo de P por meio de $P + (-t, A_1/K)$, em que K é um número arbitrário. O valor K controla o espaçamento entre os pontos da coluna B. Na construção $K = 10$ foi utilizado.
4. Altere as propriedades avançadas de B₁ para englobar o esquema de cores dinâmicas

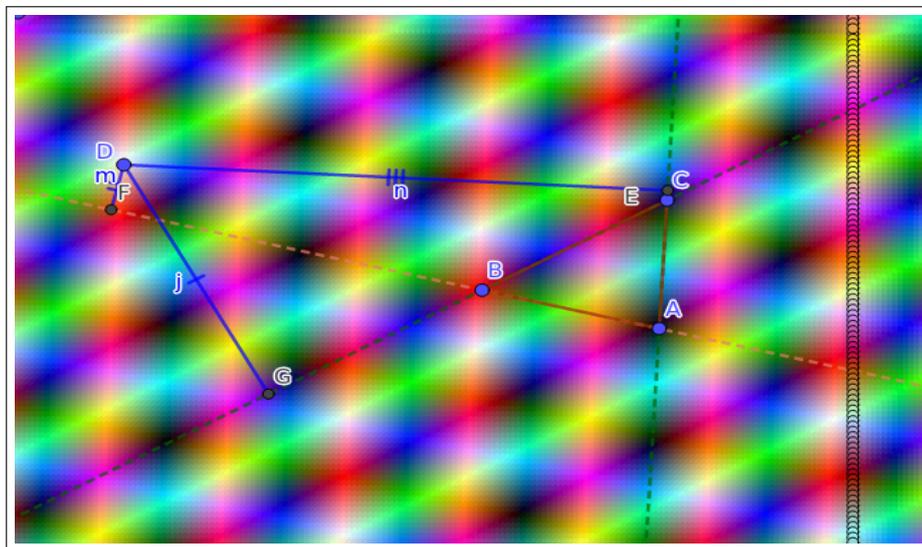
analogamente aos casos anteriores. Utilize

$$(R, G, B) = (\text{Distância}(B_1, f), \text{Distância}(B_1, g), \text{Distância}(B_1, h)).$$

5. Acione o rastro para a célula do item anterior.
6. Utilize a similaridade da planilha de cálculo com as outras planilhas disponíveis no mercado (clique e arraste a fórmula) e preencha os demais elementos $B_i, i = 2, \dots, N$.
7. Acione o controle deslizante com adequação da velocidade de avanço. O resultado final pode ser observado na Figura 6.9.

Note que algumas retas parecem destacadas na figura. É possível observar a combinação dos elementos de cores para formar o padrão da figura. Note que pontos em uma reta paralela ao lado AC , por exemplo, fornecerá um mesmo valor numérico para o canal R. Analogamente, retas paralelas aos lados BC e AC fornecerão, respectivamente, mesmos valores para os canais G e B . As retas em vermelho, verde e azul podem ser observadas regularmente espaçadas. A interação entre os três canais produz regiões as diferentes cores observadas na figura.

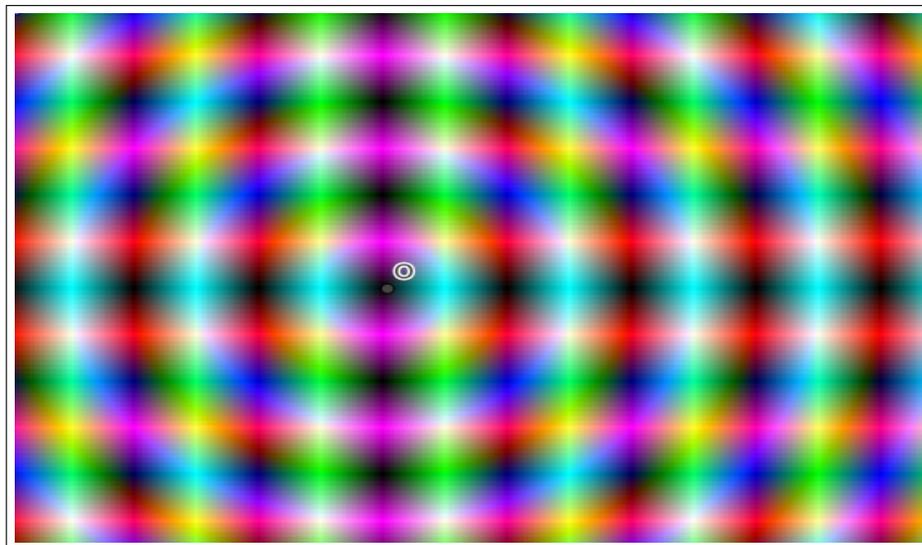
Figura 6.9: Cores dinâmicas RGB em sequência de pontos da Figura 6.8. Disponível .



Fonte: Os autores.

Ao aplicar a técnica de varredura com canais de cores idênticos àqueles utilizados na Figura 6.1, obtém-se a Figura 6.10. Note que, diferentemente daquele resultado, há suavidade na transição de cores com incremento na qualidade da imagem. Por fim, é necessário observar que um menor tempo e dedicação são requeridos do usuário.

Figura 6.10: Esquema de cores dinâmicas RGB similar ao da Figura 6.1. Disponível .

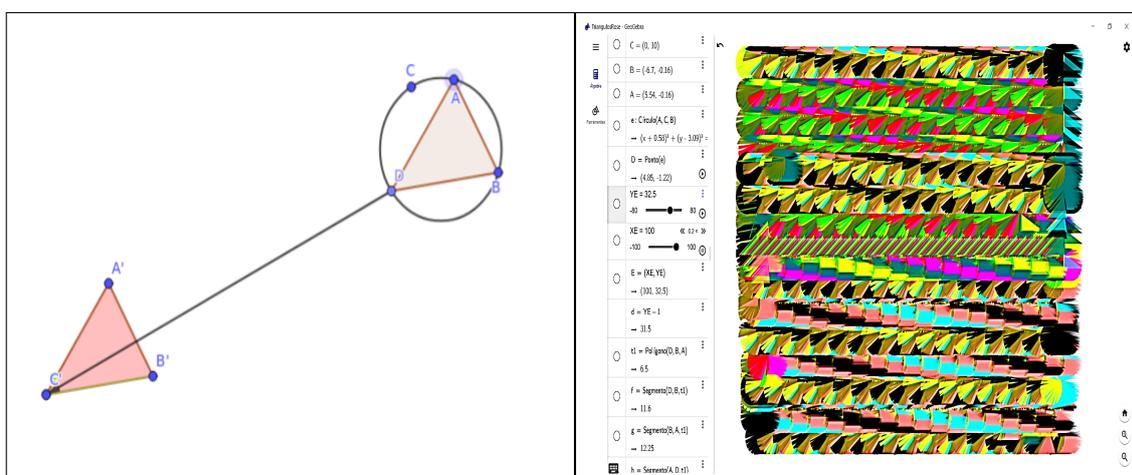


Fonte: Os autores.

6.2.1 Explorações adicionais

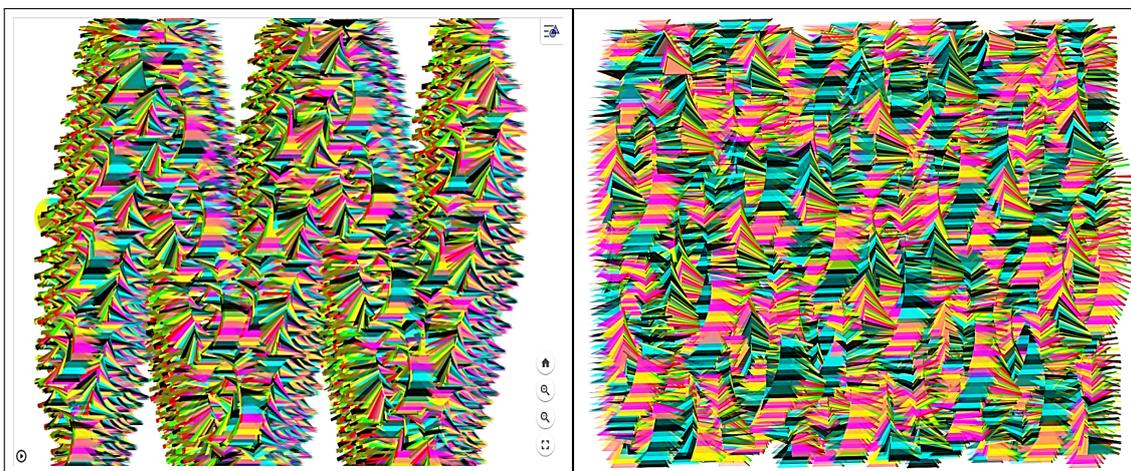
Outra possibilidade de exploração de cores dinâmicas é a utilização combinada com a construção de triângulos, rotações e translações, etc. A Figura 6.11-a mostra um triângulo ΔABC , em que o ponto C percorre um círculo de raio R . Em seguida uma translação é efetuada e as cores RGB são definidas para o polígono $\Delta A'B'C$, a translação de ΔABC por um vetor. Link disponível . Os resultados da exploração mencionada são apresentados nas Figuras 6.11-b, 6.12 e 6.13.

Figura 6.11: Construção e figura exploratória por meio de cores dinâmicas.



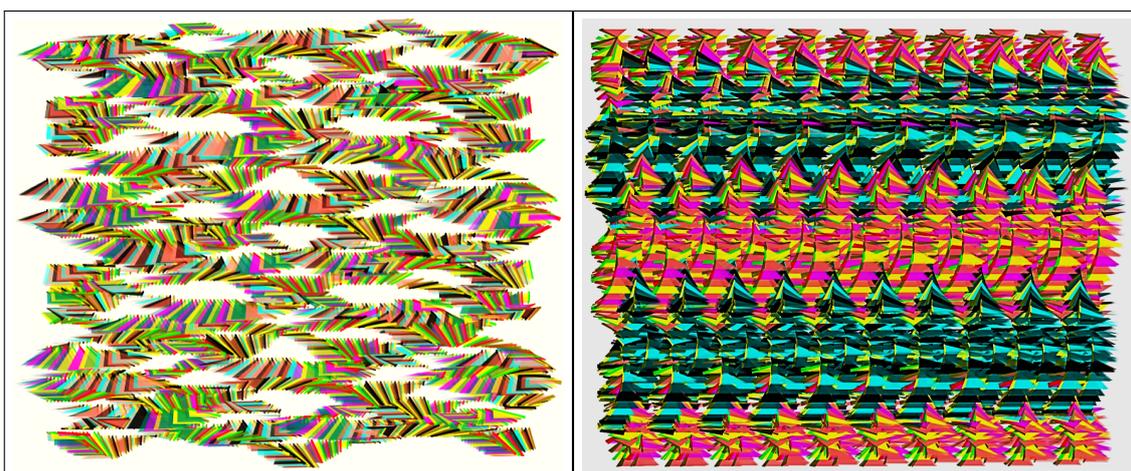
Fonte: Os autores.

Figura 6.12: Figura exploratória por meio de cores dinâmicas.



Fonte: Os autores.

Figura 6.13: Figura exploratória por meio de cores dinâmicas.



Fonte: Os autores.

Capítulo 7

Referências Bibliográficas

- [1] AALIPANAH, H.; MAGHSOUDI, I. **Iran's Geometry Problems: Problems and Solutions from Contests 2014-2015**. Disponível em: <https://imogeometry.blogspot.com/p/iranian-geometry-olympiad.html>. Acesso 08 abr. 2022. (Seção 2.12.1)
- [2] ANDRESCU, T., Mushkarov, O., Stoyanov, L. *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhauser, 2006. (Seção 5.5, 6, 5.5, 5.5)
- [3] ANTONY OR. **Unit Circle and Sine Graph**. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/S2gMrkbD>. Acesso 20 jan. de 2022. (Seção 3.12)
- [4] ANTONY OR. S.I. **Unit Circle and Cosine Graph**. Disponível <https://www.geogebra.org/m/MjFgAfBv>. Acesso 20 de jan. 2022. (Seção 3.13)
- [5] ANTONY OR. S.I. **Unit Circle and Tangent Graph**. Disponível <https://www.geogebra.org/m/cf6KYJeb>. Acesso 03 mai. 2022. (Seção 3.14)
- [6] AYOOB. S.I., **Unit Circle and the Trigonometric Functions**. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/UjjwuM8p>. Acesso 20 de jan. de 2022. (Seção 3.11)
- [7] BRZEZINSKI, TIM. **Trig Identity via Areas: Dynamic Illustrator**. Disponível <https://www.geogebra.org/m/DxAcj8E2#material/rcqnksr>. Acesso 20 jan. 2022. (Seção 3.18)
- [8] BRZEZINSKI, TIM. Trig Identity via Areas (02): Dynamic Illustrator. <https://www.geogebra.org/m/DxAcj8E2#material/xmhyypn>. Acesso 20 de jan. 2022. (Seção 3.19)
- [9] BU, LINGGUO. Modeling a total solar eclipse using GeoGebra, **North American GeoGebra Journal**, v. 5, n.1, ISSN 2162-3856. (Seção 4.4, 4.5)

- [10] CAMPUZANO, JUAN C. PONCE. **Trigonometric functions**. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/mhEfHN53>. Acesso 20 de jan. de 2022. (Seção 3.15, 3.16, 3.17)
- [11] COXETER, H. S.M.; GREITZER, S. L. **Geometry Revisited**, The Mathematical Association of America, 1967. (Seção 2)
- [12] DELGADO, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Seção 1)
- [13] GEOGEBRA TEAM, *GeoGebra Manual (Official): SetColor Command*. Disponível em: https://wiki.geogebra.org/en/SetColor_Command. Acesso 11 de fev. 2021. (Seção 6)
- [14] GEOGEBRA TEAM, *GeoGebra Classic Manual*. Disponível em: <https://wiki.geogebra.org/en/Manual>. Acesso 02 set. 2021. (Seção 6)
- [15] HALL, J.; LINGEFJ ärd, T. **Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra**, New Jersey: John Wiley&Sons, 2017. (Seção 6)
- [16] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: [10.22533/at.ed.24221310814](https://doi.org/10.22533/at.ed.24221310814). Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [17] JOSEFSSON, M. On Pitot's theorem. **The Mathematical Gazette**, v. 103, n. 557, p. 333–337 (2019). doi:10.1017/mag.2019.70 (Seção 1, 2.11)
- [18] JOSEFSSON, M. Characterizations of Tangential Quadrilaterals, **Forum Geometricorum**, v.11, p. 65–82 (2011). ISSN 1534-1178. Disponível em: <https://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FGvolume11.pdf#page=69>. Acesso 08 abr. 2022. (Seção 2.11, 2.11)
- [19] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [20] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN

- 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [21] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [22] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [23] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática.** 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [24] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [25] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvoll7ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [26] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdvoll8202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)

- [27] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdv19202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [28] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22–40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdv20202123169664jlljpmsafj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [29] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [30] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [31] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [32] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [33] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)

- [34] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, ISSN 2316-9664, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdv21202123169664jlljpmsafj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [35] LOSADA, R. El color dinámico de GeoGebra, **La Gaceta de la RSME**, v. 17, n. 3, p. 525-547 (2014). (Seção 6, 6.2)
- [36] NASA SCIENCE SOLAR SYSTEM EXPLORATION, **Basics of Space Flight**. Disponível em <https://solarsystem.nasa.gov/basics/>. Acesso 14 jan. 2022. (Seção 4.4, 4.5)
- [37] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Seção 1)
- [38] PINHEIRO, R., Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Seção 1)
- [39] RATNER, BRUCE. Pythagoras: Everyone knows his famous theorem, but not who discovered it 1000 years before him, **Journal of Targeting, Measurement and Analysis for Marketing**, v. 17, p. 229-242(2009). DOI: <https://doi.org/10.1057/jt.2009.16> (Seção 3)
- [40] ROTHMAN, J., **Interactive Unit Circle**. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/nv9vex3X>. Acesso 20 jan. 2022. (Seção 3.6, 3.7)
- [41] SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, ISSN: 2237-9657, v. 10, n. 2, p. 026–039, 2021. Doi.org/10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039 (Seção 1, 6)
- [42] SHIALI, SHAILESH. How to prove it: Euler’s formula for the area of a pedal triangle. **At Right Angles**, v. 7, n. 2, p. 95-100 (2018). ISSN 2582-1873. Disponível em <http://www.teachersofindia.org/en/periodicals/at-right-angles?page=1>. Acesso 24 mar. 2022. (Seção 5.5, 5.5)
- [43] SUNIL, M.; KOSAWATTA, R. **CliffsNotes Geometry Common Core Quick Review**, HMH Books, p. 224, 2017. (Seção 2)

- [44] TAN, A.; ALOMARI, A.; SCHMSCHULA, M. A Mathematical Treatment of Solar Eclipse Formation, **International Journal of Mathematical Education**, v. 6, n. 1, pp. 11-17(2016). ISSN 0973-6948. Disponível em: https://www.ripublication.com/ijome16/ijomev6n1_02.pdf. Acesso 08 abr. 2022. (Seção 4.4, 4.5)
- [45] THIAGO, C., Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Seção 1)
- [46] VARGAS, A.R. **O teorema de Miquel revisitado por Clifford**. 2016. 64 f. Dissertação (mestrado)-Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/27550/27550.PDF>. Acesso 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [47] WEISSTEIN, ERIC W. Geometric Congruence, **From MathWorld—A Wolfram Web Resource**. Disponível em <https://mathworld.wolfram.com/GeometricCongruence.html>. Acesso 11 de out. 2021. (Seção 2, 2)
- [48] WEISSTEIN, ERIC W. Law of Tangents, **From MathWorld—A Wolfram Web Resource**. Disponível em <https://mathworld.wolfram.com/LawofTangents.html>. Acesso 11 de out. 2021. (Seção 3.7)

