

Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v. 3.

Prof. Dr. Juan López Linares

JUAN LÓPEZ LINARES

**Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas
Internacionais de Matemática. v. 3.**

DOI: 10.11606/9786587023144

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2021

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Vahan Agopyan

Vice-Reitor: Prof. Dr. Antonio Carlos Hernandes

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

Diretora: Profa. Dra. Elisabete Maria Macedo Viegas

Vice-Diretor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da
Universidade de São Paulo

L864g	López Linares, Juan Geometria: soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v. 3 / Juan López Linares. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023144 1. Olimpíadas Internacionais de Matemática. 2. Ensino Médio. 3. Ensino universitário. 4. Geometria Plana Euclidiana. 5. Problemas resolvidos. I. Título.
-------	---

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



Dedico este livro a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores-Estudantes do curso de “Geometria, com o uso do software gratuito Geogebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares” que me motivaram a escrever este livro eletrônico.

Agradeço aos Professores Doutores Alessandro Firmiano de Jesus e João Paulo Martins dos Santos, da Academia da Força Aérea de Pirassununga, pela revisão e comentários em vários problemas.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

AUTOR

Dr. JUAN LÓPEZ LINARES.

Professor Doutor 2 do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Atualmente ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria, com o uso do software gratuito Geogebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares” para professores. Desenvolve projetos de pesquisa nas áreas de ensino e resolução de problemas de Olimpíadas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela UFSCar em 2019. Segue link para uma lista de [publicações do autor](#).

Título Curto

Vinte Desafios de Geometria Plana Euclidiana III

Título Longo

Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v. 3.

Resumo

Este é o quarto livro eletrônico do autor dedicado a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática. Nos três anteriores foram discutidos desafios de Álgebra e Planimetria. Nesta oportunidade são apresentadas outras vinte questões de Geometria plana. O texto conta com 54 figuras que facilitam acompanhar as soluções. Muitos dos exercícios têm como complemento gráficos interativos no site do Geogebra e vídeos no YouTube. São discutidos assuntos como: quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, potência de um ponto relativo a uma circunferência, eixo e centro radical, teoremas de Pitot e Napoleão, retas de Euler e Simson-Wallace, relação de Stewart, máximos e mínimos usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, triangular e das médias, incírculos e excírculos, homotetia, trigonometria, pontos e quadriláteros notáveis, base média, semelhança e congruência de triângulos. Tipicamente cada questão usa conhecimentos ligados a mais de um ramo do conhecimento. A exposição procura que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que se preparam para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais e vestibulares. Se espera também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores do Ensino Médio que se aventuram em tópicos mais avançados. Em comparação com outras soluções disponíveis, as apresentadas neste texto usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem preenchidas pelo leitor.

Palavras-chave: Olimpíadas Internacionais de Matemática, Ensino Médio, Ensino Universitário, Geometria Plana Euclidiana, Problemas Resolvidos

Short Title

Twenty Euclidean Plane Geometry Challenges III

Long Title

Geometry: Detailed solutions to 20 problems in International Mathematical Olympiads. v. 3.

Abstract

This is the author's fourth e-book dedicated to solving problems of international math olympics. In the three previous ones, challenges of Algebra and Planimetry were discussed. In this opportunity, another twenty questions of plane geometry are presented. The text has 54 figures that make it easy to follow the solutions. Many of the exercises are complemented by interactive graphics on the Geogebra website and videos on YouTube. There are examined topics such as: inscribed and circumscribed quadrilaterals, power of a point relative to a circumference, axis and radical center, theorems of Pitot and Napoleon, Euler and Simson-Wallace lines, Stewart's relation, maxima and minima using Cauchy-Schwarz, triangular and averaging inequalities, incircles and excircles, homothety, trigonometry, notable points, mean base, similarity and congruence of triangles. Typically each question uses knowledge linked to more than one branch of knowledge. The exhibition seeks to ensure that the material can actually be read and studied by students who are preparing for the final stages of the national or international Olympics and entrance exams. It is also hoped that this approach will support secondary school teachers who venture into more advanced topics. In comparison with other available solutions, the ones presented in this text use less elaborate arguments and a smaller number of transitions to be completed by the reader.

Keywords: International Mathematical Olympiads, High School Education, University Teaching, Euclidean Plane Geometry, Problems Solved

Sumário

Referências	
1 Introdução	10
1.1 Enunciados dos vinte problemas de olimpíadas internacionais	10
2 Quadriláteros Inscritíveis e Circunscritíveis	14
2.1 Introdução	14
2.2 Conceitos básicos	15
2.3 Quadriláteros cíclicos, triângulo circunscrito e desigualdades. P4 IMO 1967.	19
2.3.1 Resolução	19
2.4 Eixo e centro radical, quadriláteros cíclicos, ângulos. P5 IMO 1985.	21
2.4.1 Resolução do Problema 2.	21
2.5 Potência de ponto relativo a circunferência, base média, semelhança. P2 IMO 2009.	23
2.5.1 Resolução do Problema 3.	23
2.6 Quadrilátero circunscritível, Teorema de Pitot, incentro e ortocentro. P23 SL IMO 2009.	25
2.6.1 Resolução do Problema 4.	25
2.7 Quadriláteros cíclicos, ângulos na circunferência e triângulo isósceles. P1 NA IGO 2015.	27
2.7.1 Resolução	28
3 Baricentro	30
3.1 Introdução	30
3.2 Conceitos básicos	31
3.3 Baricentro, homotetia, quadriláteros cíclicos. P36-LL-IMO-1966.	34
3.3.1 Resolução do Problema 6.	34
3.4 Baricentro, áreas, desigualdade. P9-SL-IMO-1968.	37
3.4.1 Resolução do Problema 7.	37
3.5 Baricentro, lugar geométrico, circunferências. P27-LL-IMO-1974.	39

3.5.1	Ilustração da solução do Problema 8.	39
3.6	Baricentro, lugar geométrico, teorema de Napoleão. SL-P12-IMO-1987.	41
3.6.1	Considerações iniciais sobre o Problema 9.	42
3.6.2	Resolução do Problema 9.	43
3.7	Baricentro, Simson-Wallace, homotetia. P5 SL IMO 1998.	45
3.7.1	Considerações iniciais para o Problema 10.	45
3.7.2	Resolução do Problema 10.	46
4	Incírculos e exincírculos	48
4.1	Introdução	48
4.2	Conceitos básicos	49
4.3	Exincírculos, incentro, relação de Stewart. P1 IMO 1970.	54
4.3.1	Considerações iniciais para o Problema 11.	54
4.3.2	Resolução do Problema 11.	56
4.4	Exincírculo, incírculo, semelhança de triângulos. P4 IMO 1992.	57
4.4.1	Resolução do Problema 12.	57
4.5	Incírculo, exincírculo, potência de um ponto relativo a uma circunferência. P5 IMO 1999.	59
4.5.1	Resolução do Problema 13.	59
4.6	Bissetrizes, paralelogramo, semelhanças de triângulos. P16 SL IMO 2005.	62
4.6.1	Resolução do Problema 14.	62
4.7	Exincírculo, potência de um ponto relativo a uma circunferência, ângulos. P18 SL IMO 2006.	63
4.7.1	Resolução do Problema 15.	64
5	Extremos com desigualdades	66
5.1	Introdução	66
5.2	Conceitos básicos	66
5.3	Desigualdade triangular, desigualdade das médias, áreas. P1 IMO 1976.	70
5.3.1	Resolução do Problema 16.	70
5.4	Desigualdade de Cauchy-Schwarz, incentro, áreas. P1 IMO 1981.	72
5.4.1	Resolução do Problema 17.	73
5.5	Desigualdade de Cauchy-Schwarz, incírculo, tangentes. P6 IMO 1983.	74
5.5.1	Resolução do Problema 18.	74
5.6	Desigualdade triangular, bases médias e paralelogramo. P7 SL IMO 1999.	75
5.6.1	Resolução do Problema 19.	75
5.7	Desigualdade triangular, lei dos senos e trigonometria. P1 IMO 2001.	77
5.7.1	Resolução do Problema 20.	78

Capítulo 1

Introdução

Em dois e-books anteriores [1] e [2] apresentamos quarenta problemas de planimetria. Nesta oportunidade são discutidos outros vinte desafios de Geometria Plana Euclidiana. O texto conta com 54 figuras que facilitam acompanhar a resolução. A maior parte tem como complemento links para os gráficos interativos no site do Geogebra e, vários, a resolução em vídeo na playlist [Geometria com Geogebra](#) no YouTube.

Este livro faz parte de um projeto de longo prazo de resolução de problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemáticas. Outras publicações anteriores são [3], [4], [5], [6], [7], [8] e [9].

A Geometria é muito ampla. Escolhemos discutir alguns assuntos, mas sem a pretensão de esgotar o tema. Os problemas aparecem organizados em quatro capítulos. Porém, tipicamente cada desafio usa conhecimentos ligados a mais de uma área da Matemática.

As soluções apresentadas complementam algumas poucas disponíveis nos fóruns em língua inglesa e nas publicações das competições. Usando argumentos menos rebuscados, focamos na apresentação mais detalhada das transições, possibilitando que alunos e professores consigam acompanhar o desenvolvimento do problema.

Parte deste material didático também é usado durante algumas das aulas do curso “Geometria com Geogebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O mesmo acontece na modalidade EaD pela [plataforma](#) de Cultura e Extensão da USP.

1.1 Enunciados dos vinte problemas de olimpíadas internacionais

Primeiro tentar resolver sem consultar a solução. Para conferir, ou caso não conseguir avançar, clicar no link indicado pelo número do problema. Para outros conceitos básicos estudar o início do capítulo correspondente.

Problema 1 São dados dois triângulos acutângulos: $A_0B_0C_0$ e $A'B'C'$. Descrever como construir um $\triangle ABC$, semelhante ao $\triangle A'B'C'$ e circunscrito ao $\triangle A_0B_0C_0$. De tal forma que A , B e C correspondam a A' , B' e C' e AB passe por C_0 , BC por A_0 e CA por B_0 . Entre os $\triangle ABC$ possíveis, descrever e provar qual é o de área maior.

Problema 2 Um círculo de centro O passa pelos vértices A e C de um triângulo ABC e intersecta os segmentos AB e BC novamente em pontos distintos K e N , respectivamente. Os círculos circunscritos aos triângulos ABC e KBN se intersectam em exatamente 2 pontos distintos B e M . Provar que $\angle OMB = 90^\circ$.

Problema 3 Seja ABC um triângulo com circuncentro O . Sejam P e Q pontos no interior dos lados CA e AB , respectivamente. Sejam K , L e M os pontos médios dos segmentos BP , CQ e PQ , respectivamente, e seja Γ o círculo que passa por K , L e M . Se PQ é tangente a Γ , provar que $OP = OQ$.

Problema 4 Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Seja g uma reta que passa por A e encontra as retas BC e CD em M e N , respectivamente. Denotar por I_1 , I_2 , e I_3 os incentros dos $\triangle ABM$, $\triangle MNC$ e $\triangle NDA$, respectivamente. Mostrar que o ortocentro do $\triangle I_1I_2I_3$ está sobre g .

Problema 5 Dois círculos w_1 e w_2 (com centros O_1 e O_2 , respectivamente) se intersectam em A e B . O ponto $X \in w_2$. Seja $Y \in w_1$ tal que $\angle XBY = 90^\circ$. Seja X' o segundo ponto de interseção da reta O_1X e w_2 e K o segundo ponto de interseção de $X'Y$ e w_2 . Provar que X é o ponto médio do arco AK .

Problema 6 Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Mostrar que os baricentros dos triângulos ABC , BCD , CDA e DAB pertencem a uma mesma circunferência.

Problema 7 Seja ABC um triângulo arbitrário e M um ponto no interior deste. Sejam d_a , d_b , e d_c as distâncias de M aos lados BC , CA , e AB ; e a , b , c a medida dos lados, respectivamente. Seja S a área do $\triangle ABC$. Provar que

$$abd_a d_b + bcd_b d_c + cad_c d_a \leq \frac{4S^2}{3}.$$

Provar que a igualdade acontece quando M é o baricentro.

Problema 8 a) Sejam C_1 e C_2 circunferências no mesmo plano, P_1 e P_2 pontos arbitrários sobre C_1 e C_2 , respectivamente, e M_{12} o ponto médio do segmento P_1P_2 . Encontrar o lugar geométrico dos pontos M_{12} quando P_1 e P_2 passam por todas as posições possíveis. b) Sejam C_1 , C_2 e C_3 três circunferências no mesmo plano. Encontrar o lugar geométrico dos baricentros dos triângulos $P_1P_2P_3$ quando $P_1 \in C_1$, $P_2 \in C_2$ e $P_3 \in C_3$ passam por todas as posições possíveis.

Problema 9 Dado um triângulo não equilátero ABC , com os vértices listados em sentido anti-horário, encontrar o lugar geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$

(vértices listados em sentido anti-horário) para os quais as triplas de pontos A', C, B' ; B', A, C' e C', B, A' são colineares.

Problema 10 Seja ABC um triângulo, H seu ortocentro, O seu circuncentro, e R seu circunraio. Seja D a reflexão de A em BC , E de B em CA , e F de C em AB . Provar que D , E e F são colineares se, e somente se, $OH = 2R$.

Problema 11 Dado um ponto M no lado AB do triângulo ABC , sejam r_1 e r_2 raios dos círculos inscritos nos triângulos ACM e BCM , respectivamente e sejam ρ_1 e ρ_2 os raios dos exincírculos dos triângulos ACM e BCM nos lados AM e BM , respectivamente. Sejam r e ρ os raios do círculo inscrito e do exincírculo no lado AB do $\triangle ABC$, respectivamente. Provar que

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r}{\rho}.$$

Problema 12 No plano, sejam dadas uma circunferência c , uma reta l tangente a c , e um ponto M sobre l . Encontrar o lugar geométrico dos pontos P que têm a seguinte propriedade: Existem dois pontos Q e R sobre l tais que M é o ponto médio de QR e c é o incírculo de PQR .

Problema 13 Sejam duas circunferências k_1 e k_2 que se intersectam nos pontos X e Y e são tangentes internamente a circunferência k nos pontos M e N , respectivamente. Adicionalmente, o centro de k_2 está sobre k_1 . Sejam A e B os pontos de interseção da reta XY com k . As retas MA e MB intersectam k_1 em C e D , respectivamente. Provar que k_2 é tangente a CD .

Problema 14 Seja $ABCD$ um paralelogramo. Uma linha variável l passa pelo ponto A e intersecta as retas BC e DC nos pontos X e Y , respectivamente. Sejam K e L os centros dos exincírculos dos triângulos ABX e ADY , que tocam os lados BX e DY , respectivamente. Provar que a medida do ângulo KCL não depende da escolha da linha l .

Problema 15 Num triângulo ABC , seja J o centro do exincírculo tangente ao lado BC em A_1 e as extensões dos lados AC e AB em B_1 e C_1 , respectivamente. Supor que a reta A_1B_1 e AB são perpendiculares e se intersectam em D . Seja E o pé da perpendicular de C_1 até o segmento DJ . Determinar os ângulos BEA_1 e AEB_1 .

Problema 16 Num quadrângulo convexo com área 32 cm^2 , a soma dos comprimentos de dois lados não adjacentes e uma diagonal é igual a 16 cm . a) Qual é o comprimento da outra diagonal? b) Quais são os comprimentos dos lados do quadrângulo se o perímetro é um mínimo? c) Será possível escolher os lados para que o perímetro seja um máximo?

Problema 17 Encontrar o ponto P no interior de um $\triangle ABC$ para o qual a soma

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

é mínima, onde PD , PE e PF são as perpendiculares de P a BC , CA e AB , respectivamente.

Problema 18 Se a , b e c são lados de um triângulo, provar que

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Determinar quando vale a igualdade.

Problema 19 Seja ABC um triângulo e M um ponto em seu interior. Provar que

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + BC + CA.$$

Problema 20 Num triângulo acutângulo ABC com circuncentro O e altura AP , $\angle C \geq \angle B + 30^\circ$. Provar que

$$\angle A + \angle COP < 90^\circ.$$

Capítulo 2

Quadriláteros Inscritíveis e Circunscritíveis

2.1 Introdução

No Problema 1, P4 da IMO 1967, são dados dois triângulos acutângulos e se pede descrever a construção de um terceiro semelhante ao segundo e circunscrito no primeiro. Ainda se solicita indicar e justificar qual desses triângulos possíveis é o de maior área. O uso do conceito de arco capaz, quadriláteros inscritíveis e projeções soluciona o desafio.

O Problema 2, P5 da IMO 1985, inicia com a construção de três circunferências e requer determinar um ângulo. São usadas as definições de eixo e centro radical e quadriláteros cíclicos.

No Problema 3, P2 da IMO 2009, um conjunto de construções são feitas em um triângulo e se pede provar que a tangência a uma circunferência implica na igualdade de dois segmentos. São usados na resolução a potência de ponto, o teorema da base média e semelhança.

O Problema 4, P23 da lista curta da IMO 2009, parte de um quadrilátero circunscritível e os incentros de três triângulos. Se solicita provar uma propriedade do ortocentro do triângulo formado pelos incentros. Para a solução deve-se usar o Teorema de Pitot.

No Problema 5, P1 do nível avançado da IGO 2015, uma construção geométrica com duas circunferências é dada e se pede provar que determinado ponto divide um arco a metade. São usadas as propriedades de quadriláteros cíclicos, ângulos na circunferência e triângulos isósceles.

Iniciamos com uma introdução dos conceitos básicos sobre quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis.

2.2 Conceitos básicos

Definição 1. Um quadrilátero é chamado *inscritível* ou *cíclico* quando todos seus vértices pertencem a uma mesma circunferência.

Proposição 1. Um quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, a soma dos ângulos opostos é 180° :

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ.$$

Demonstração. A Figura 2.2.1 permite acompanhar a prova da primeira parte. Suponhamos que o quadrilátero $ABCD$ seja inscritível na circunferência de centro O . Consideramos o arco \widehat{ADC} de medida 2α . Um ângulo inscrito correspondente ao mesmo é $\angle ABC = \alpha$. Por outro lado, seja o arco \widehat{ABC} de medida 2β . Um ângulo inscrito correspondente será $\angle ADC = \beta$.

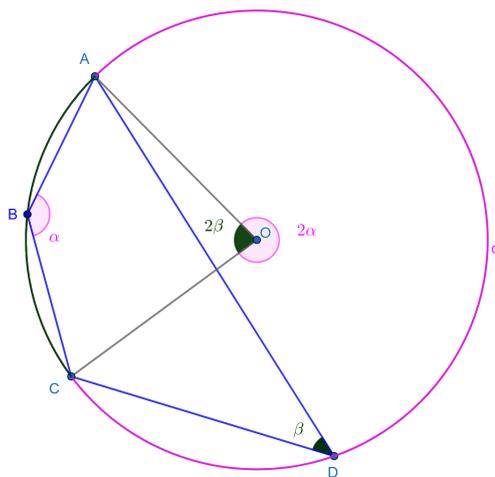
Logo, uma volta completa em torno de O permite calcular

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ,$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Isto é, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. Analogamente se mostra que $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$.

Figura 2.2.1: Guia para a demonstração da Proposição 1. Prova da primeira parte. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

A Figura 2.2.2 permite acompanhar a prova da segunda parte. Por hipótese temos que a

soma dos ângulos opostos no quadrilátero convexo $ABCD$ é 180° . Por exemplo,

$$\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ.$$

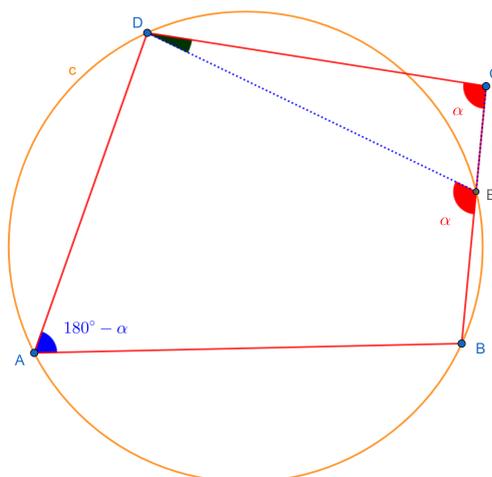
Supomos, por absurdo, que $ABCD$ não seja inscritível. Isto é, o ponto C não pertence a circunferência c circunscrita ao $\triangle ABD$. Traçamos a reta CB e marcamos o ponto E na interseção de CB com c . Por construção, $ABED$ é inscritível e segue, pela primeira parte da demonstração, que

$$\angle DAB + \angle DEB = 180^\circ.$$

Logo, $\angle DEB = \angle DCB = \alpha$. Contradição, pois o ângulo externo em E , do $\triangle DCE$, pode ser escrito como

$$\angle DEB = \angle DCB + \angle EDC.$$

Figura 2.2.2: Guia para a demonstração da Proposição 1. Prova da segunda parte. Versão interativa [aqui](#).

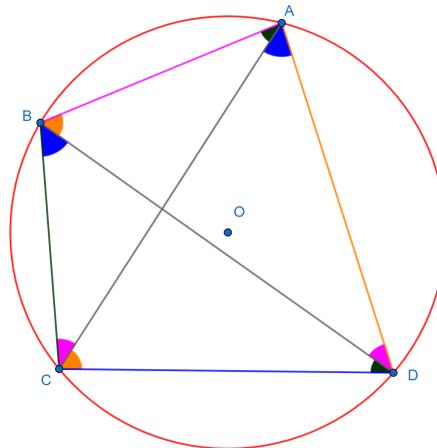


Fonte: O autor.

□

Proposição 2. *Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.*

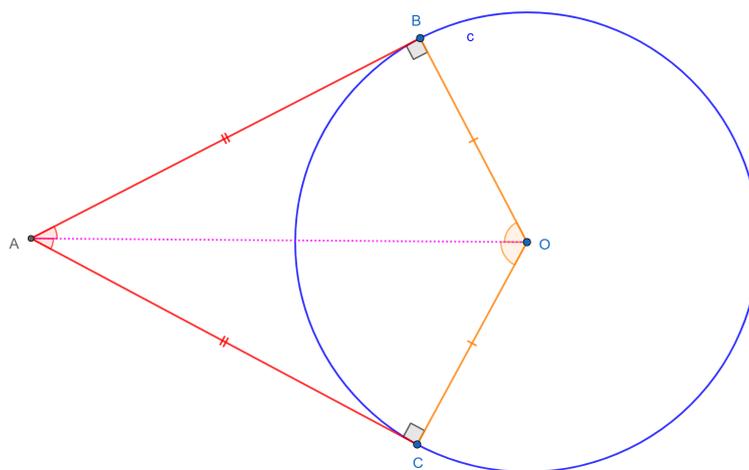
A Figura 2.2.3 ilustra as igualdades de pares de ângulos devidos a Proposição 2.

Figura 2.2.3: Ilustração da Proposição 2. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Proposição 3 (Igualdade de segmentos tangentes). *Se os segmentos AB e AC são tangentes à circunferência c , de centro O , então vale que $AB = AC$.*

Demonstração. A Figura 2.2.4 ilustra a prova. Pela tangência de AC e AB com c temos $\angle ACO = \angle ABO = 90^\circ$. Adicionalmente, $BO = CO$ são raios de c e AO é um lado comum. Pelo critério de congruência cateto hipotenusa temos $\triangle ACO \equiv \triangle ABO$. Segue que $AB = AC$. \square

Figura 2.2.4: Guia para a demonstração da Proposição 3. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Definição 2. Um quadrilátero $ABCD$ é chamado *circunscritível* quando todos seus lados (ou as extensões dos lados) são tangentes externamente a uma circunferência c . Isto é, c é dita inscrita no quadrilátero e $ABCD$ circunscrito à c .

Teorema 4 (Teorema de Pitot). Um quadrilátero $ABCD$ é circunscritível se, e somente se, vale que

$$AB + CD = AD + BC.$$

Alternativamente, sejam $J = AB \cap CD$ e $I = BC \cap AD$. Um quadrilátero $AJCI$ é circunscritível se, e somente se,

$$AJ + CI = AI + JC.$$

Demonstração. A Figura 2.2.5 permite acompanhar a prova da ida. Por hipótese temos um quadrilátero $ABCD$ circunscrito a uma circunferência c . Sejam G, F, E e H os pontos de tangência de c com os lados AB, BC, CD e DA , respectivamente. Temos:

$$AB + CD = (AG + GB) + (CE + ED).$$

Da Proposição 3, usando a igualdade dos segmentos tangentes $AG = AH, GB = BF, FC = CE$ e $ED = DH$, encontramos

$$AB + CD = (HA + BF) + (FC + DH)$$

$$AB + CD = (BF + FC) + (DH + HA),$$

$$AB + CD = BC + AD.$$

Analogamente,

$$AJ + CI = (AG + GJ) + (IF - FC).$$

Da Proposição 3 também temos $JG = JE$ e $IF = IH$. Logo

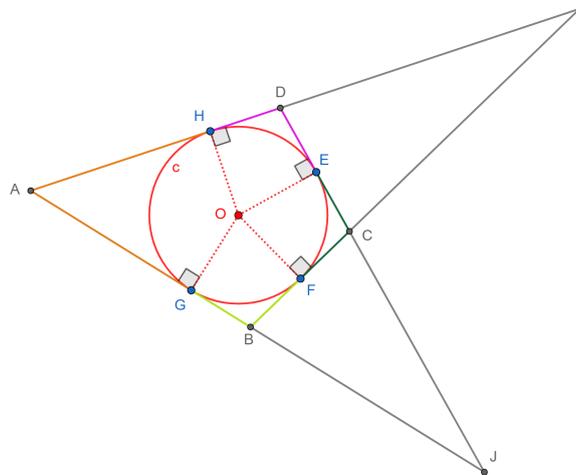
$$AJ + CI = (AH + JE) + (HI - EC),$$

$$AJ + CI = (AH + HI) + (JE - EC),$$

$$AJ + CI = AI + JC.$$

A recíproca é provada usando a redução ao absurdo. □

Figura 2.2.5: Guia para a demonstração do Teorema 4. Prova da ida. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

2.3 Quadriláteros cíclicos, triângulo circunscrito e desigualdades. P4 IMO 1967.

Problema 1. *São dados dois triângulos acutângulos: $A_0B_0C_0$ e $A'B'C'$. Descrever como construir um $\triangle ABC$, semelhante ao $\triangle A'B'C'$ e circunscrito ao $\triangle A_0B_0C_0$. De tal forma que A, B e C correspondam a A', B' e C' e AB passe por C_0 , BC por A_0 e CA por B_0 . Entre os $\triangle ABC$ possíveis, descrever e provar qual é o de área maior.*

A IMO 1967 foi realizada na cidade de Cetinje, Montenegro (Antiga Iugoslávia) [10]. Problema 29 da lista longa e escolhido como P4 da competição, proposto pela delegação da Itália [11].

2.3.1 Resolução

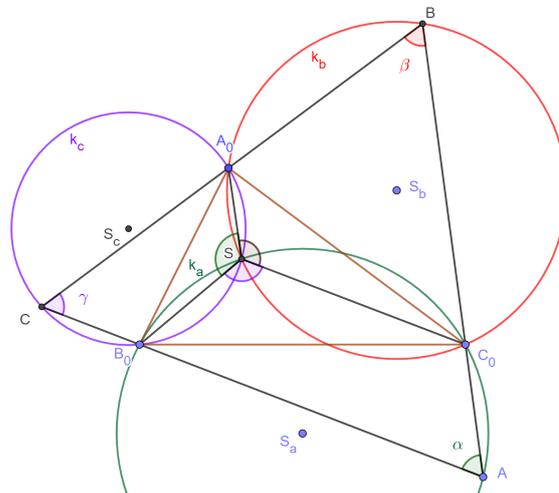
Construir o arco capaz l_a do $\angle A' = \alpha$ no lado de B_0C_0 oposto com A_0 . Seja S_a o centro da circunferência k_a , do qual o arco l_a faz parte. Isto é, $l_a \subset k_a$. Analogamente, construir os arcos capazes l_b e l_c dos $\angle B' = \beta$ e $\angle C' = \gamma$ no lado de C_0A_0 oposto com B_0 e no lado de A_0B_0 oposto com C_0 . Sejam S_b e S_c os centros das circunferências k_b e k_c , dos quais os arcos l_b e l_c fazem parte. Ou seja, $l_b \subset k_b$ e $l_c \subset k_c$.

Posicionar $A \in l_a$, construir as semirretas AC_0 e AB_0 e marcar os pontos $B = AC_0 \cap l_b$ e $C = AB_0 \cap l_c$. Por ângulo-ângulo $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ e $C_0 \in AB$, $A_0 \in BC$ e $B_0 \in CA$.

Seja o ponto $S = k_a \cap k_b \neq C_0$. Temos $\angle B_0AC_0 = \alpha$, $\angle C_0BA_0 = \beta$ e $\angle A_0CB_0 = \gamma$. Dos quadriláteros B_0AC_0S e C_0BA_0S serem inscritíveis encontramos que $\angle B_0SC_0 = 180^\circ - \alpha$ e

$\angle C_0SA_0 = 180^\circ - \beta$. Logo, $\angle A_0SB_0 = \alpha + \beta$. Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ segue que o quadrilátero A_0CB_0S é cíclico e $S \in k_c$. A Figura 2.3.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 2.3.1: Uma construção geométrica inicial para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



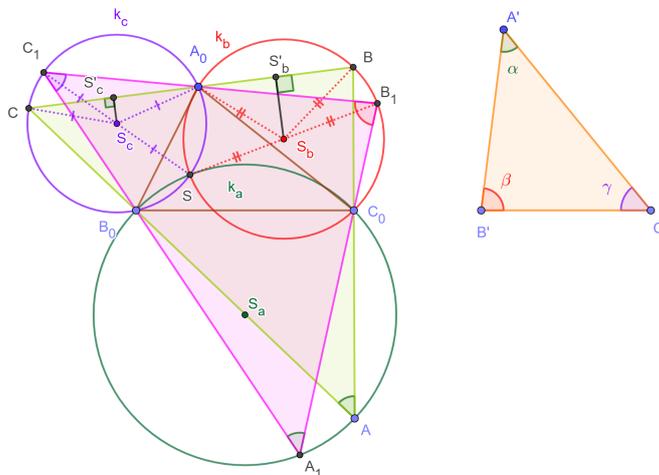
Fonte: O autor.

Construir os pontos simétricos de S respeito a S_a , S_b e S_c e chama-los de A_1 , B_1 e C_1 , respectivamente. Iremos provar que entre os $\triangle ABC$ o $\triangle A_1B_1C_1$ é o de maior área.

Mostraremos primeiro que $BC \leq B_1C_1$. Como SB_1 e SC_1 são diâmetros de k_b e k_c segue que $\angle SA_0B_1 = \angle SA_0C_1 = 90^\circ$ e $A_0 \in B_1C_1$. Analogamente, $B_0 \in C_1A_1$ e $C_0 \in A_1B_1$. Sejam S'_b e S'_c as projeções de S_b e S_c sobre BC . Os triângulos S_bBA_0 , S_cCA_0 , $S_bB_1A_0$ e $S_cC_1A_0$ são isósceles. Logo, $BC = 2S'_bS'_c$ e $B_1C_1 = 2S_bS_c$. No trapézio retângulo $S_bS'_bS'_cS_c$ temos $S'_bS'_c \leq S_bS_c$ e conseqüentemente $BC \leq B_1C_1$. De forma semelhante se mostra que $CA \leq C_1A_1$ e $AB \leq A_1B_1$. Isso demonstra que o $\triangle A_1B_1C_1$ é o de maior área.

A Figura 2.3.2 mostra uma construção geométrica com o problema resolvido.

Figura 2.3.2: Construção geométrica da resolução do Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

2.4 Eixo e centro radical, quadriláteros cíclicos, ângulos. P5 IMO 1985.

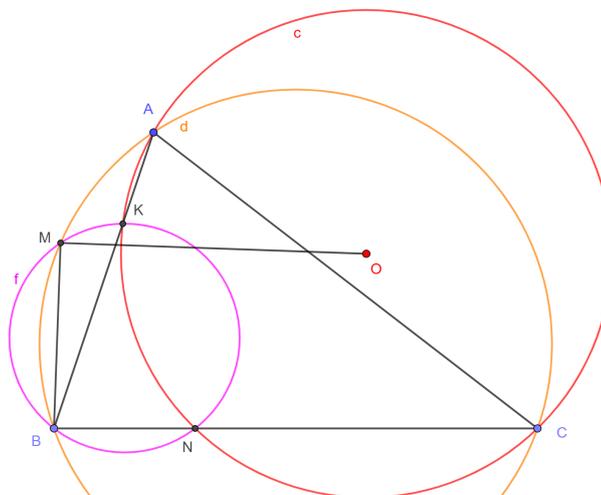
Problema 2. *Um círculo de centro O passa pelos vértices A e C de um triângulo ABC e intersecta os segmentos AB e BC novamente em pontos distintos K e N , respectivamente. Os círculos circunscritos aos triângulos ABC e KBN se intersectam em exatamente 2 pontos distintos B e M . Provar que $\angle OMB = 90^\circ$.*

A IMO 1985 foi realizada na cidade de Joutsa, Finlândia [10]. Problema 22 da lista curta e escolhido como P5 da competição, proposto pela delegação da Rússia [11].

2.4.1 Resolução do Problema 2.

A Figura 2.4.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 2.4.1: Construção geométrica inicial para o Problema 2. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam c , d e f as circunferências de centro O , a circunscrita ao $\triangle ABC$ e ao $\triangle KBN$, respectivamente. As retas AC , KN , e MB são eixos radicais das circunferências c , e d , c e f e d e f , respectivamente. Seja P o centro radical das três circunferências anteriores. Isto é, $P = AC \cap KN \cap MB$.

Como os quadriláteros $BNKM$ e $NCAK$ são cíclicos temos:

$$180^\circ = \angle PMK + \angle BMK = \angle BNK + \angle CNK = \angle CAK + \angle PAK.$$

Logo, o quadrilátero $PMKA$ é cíclico.

Seja E a segunda interseção da linha MA com a circunferência c . Como o quadrilátero $KNEA$ é cíclico:

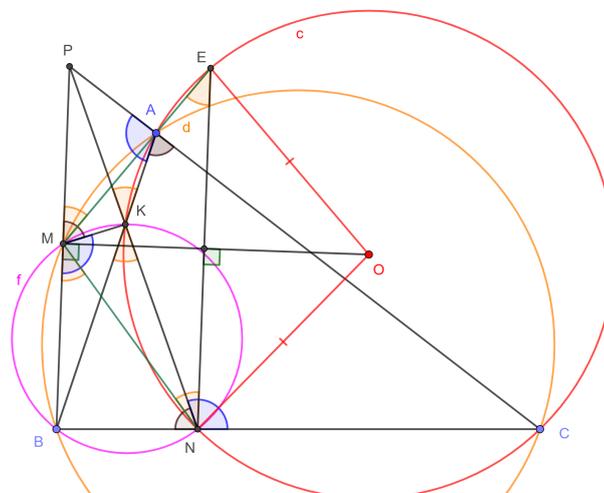
$$\angle MEN = \angle AEN = \angle AKP = \angle AMP.$$

Segue que $BP \parallel MP \parallel NE$ e bastará mostrar que $OM \perp EN$.

Mas também temos

$$\angle MNE = \angle BMN = \angle BKN = \angle MEN.$$

Os triângulos MEN e OEN são isósceles com a mesma base EN , segue que $ME = MN$ e $OE = ON$. Os pontos O e M pertencem a mediatriz do segmento EN , disto concluímos que $OM \perp EN$. A Figura 2.4.2 mostra uma construção geométrica.

Figura 2.4.2: Construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

2.5 Potência de ponto relativo a circunferência, base média, semelhança. P2 IMO 2009.

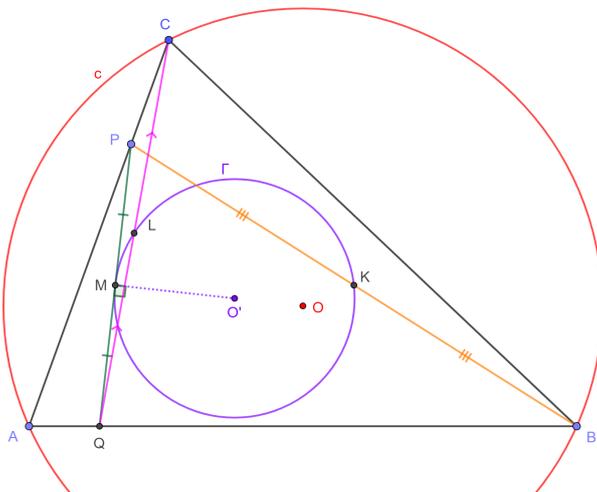
Problema 3. *Seja ABC um triângulo com circuncentro O . Sejam P e Q pontos no interior dos lados CA e AB , respectivamente. Sejam K , L e M os pontos médios dos segmentos BP , CQ e PQ , respectivamente, e seja Γ o círculo que passa por K , L e M . Se PQ é tangente a Γ , provar que $OP = OQ$.*

A IMO 2009 foi realizada na cidade de Brémen, Alemanha [10]. Problema 17 da lista curta e escolhido como P2 da competição, proposto pela delegação da Rússia [11].

2.5.1 Resolução do Problema 3.

A Figura 2.5.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 2.5.1: Construção geométrica inicial para o Problema 3. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja c a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$ e O' o centro de Γ . No $\triangle PQB$ temos que M e K são pontos médios. Logo, $MK \parallel QB \parallel AB$ e $\frac{MK}{QB} = \frac{1}{2}$. Analogamente, no $\triangle PQC$ temos que M e L são pontos médios. Segue que $ML \parallel PC \parallel AC$ e $\frac{ML}{PC} = \frac{1}{2}$.

Por serem ângulos formados de segmentos mutuamente paralelos se encontra que $\angle KML = \angle BAC$. Adicionalmente, vale que

$$\frac{ML}{MK} = \frac{PC}{QB}. \tag{2.5.1}$$

Por alternos entre paralelas $\angle AQP = \angle KMQ$. Como PQ é tangente a Γ , referente a corda KM , temos a igualdade de um ângulo de segmento com um inscrito $\angle KMQ = \angle MLK$.

Segue que $\triangle AQP \sim \triangle MLK$,

$$\frac{AQ}{ML} = \frac{AP}{MK} = \frac{QP}{LK}. \tag{2.5.2}$$

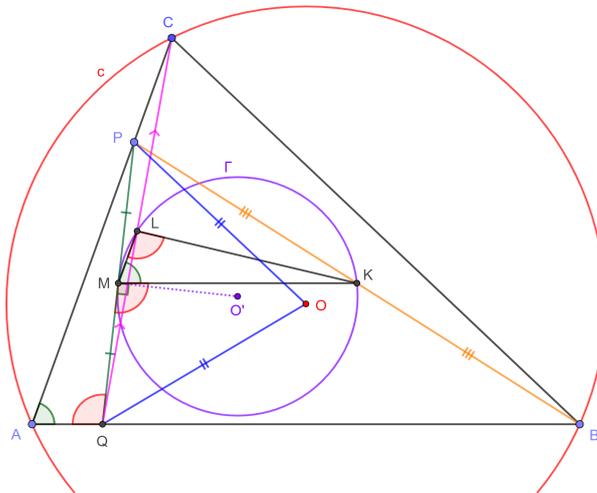
De (2.5.1) e (2.5.2) temos $\frac{AQ}{AP} = \frac{ML}{MK} = \frac{PC}{QB}$. Logo,

$$AQ \cdot QB = AP \cdot PC. \tag{2.5.3}$$

A equação (2.5.3) indica que a potência de Q e P em relação a circunferência c é a mesma:

$$Pot_c(Q) = OA^2 - OQ^2 = OA^2 - OP^2 = Pot_c(P).$$

Isto é, $OQ = OP$. A Figura 2.5.2 mostra uma construção geométrica.

Figura 2.5.2: Construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

2.6 Quadrilátero circunscritível, Teorema de Pitot, incentro e ortocentro. P23 SL IMO 2009.

Problema 4. *Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Seja g uma reta que passa por A e encontra as retas BC e CD em M e N , respectivamente. Denotar por I_1 , I_2 , e I_3 os incentros dos $\triangle ABM$, $\triangle MNC$ e $\triangle NDA$, respectivamente. Mostrar que o ortocentro do $\triangle I_1I_2I_3$ está sobre g .*

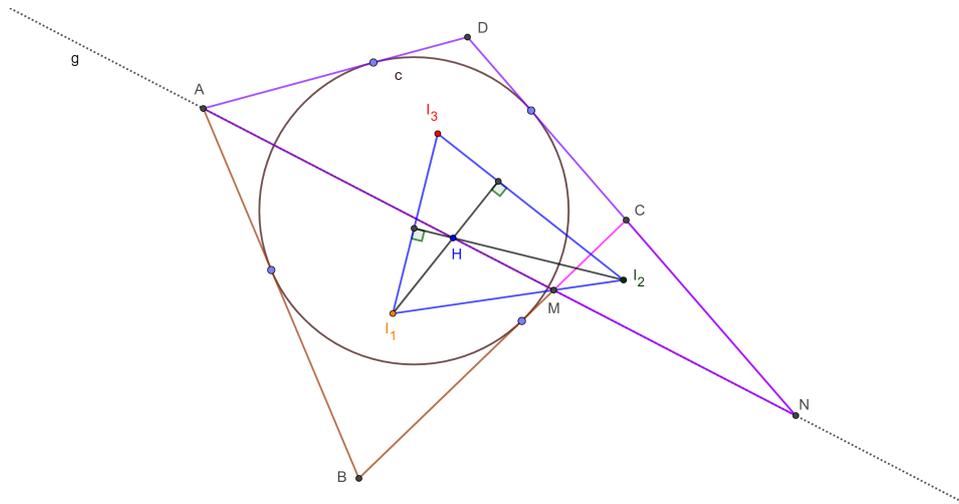
A IMO 2009 foi realizada na cidade de Brémen, Alemanha [10]. Problema 23 da lista corta, proposto pela delegação da Bulgária [11].

2.6.1 Resolução do Problema 4.

A Figura 2.6.1 mostra uma construção geométrica inicial. A circunferência c ilustra que o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível. Pelo Teorema de Pitot 4 vale que

$$AB + CD = AD + BC.$$

Figura 2.6.1: Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam k_1 , k_2 e k_3 os incírculos dos triângulos ABM , MNC , e NDA , respectivamente. Construímos a reta tangente h de C a k_1 , diferente de CB . Mostraremos que h também é tangente a k_3 .

Seja X o ponto de interseção de g e h . Notamos que os lados (ou suas extensões) do quadrilátero $ABCX$, são tangente a k_1 . Por serem quadriláteros circunscritíveis, usando o Teorema de Pitot 4, tanto em $ABCX$, como em $ABCD$, segue que

$$\begin{aligned} CD - CX &= (AB + CD) - (AB + CX) = \\ &= (BC + AD) - (BC + AX) = AD - AX. \end{aligned}$$

Isto é,

$$CD + AX = AD + CX.$$

Pela recíproca do Teorema de Pitot 4, o quadrilátero $ADCX$ também é circunscritível, assim como h é tangente à k_3 .

Adicionalmente, como I_3C , I_2C , I_1C , I_3N e I_1I_2 são bissetrizes, encontramos que

$$\begin{aligned} \angle I_3CI_1 &= \angle I_3CX + \angle XCI_1 = \\ &= \frac{1}{2}(\angle DCX + \angle XCB) = \frac{1}{2}\angle DCB = \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MCN) = 180^\circ - \angle MI_2N = \angle I_3I_2I_1. \end{aligned}$$

O anterior permite concluir que os pontos C , I_1 , I_2 e I_3 pertencem a uma mesma circunferência

d.

Sejam L_1 e L_3 as reflexões do ponto C em relação as retas I_2I_3 e I_1I_2 , respectivamente. Como I_2I_3 é bissetriz do $\angle CNM$ e I_1I_2 do $\angle CMN$ segue que $L_1 \in g$ e $L_3 \in g$.

Seja H o ortocentro do $\triangle I_1I_2I_3$. Temos

$$\angle I_2L_3I_1 = \angle I_1CI_2 = \angle I_1I_3I_2 = 180^\circ - \angle I_1HI_2.$$

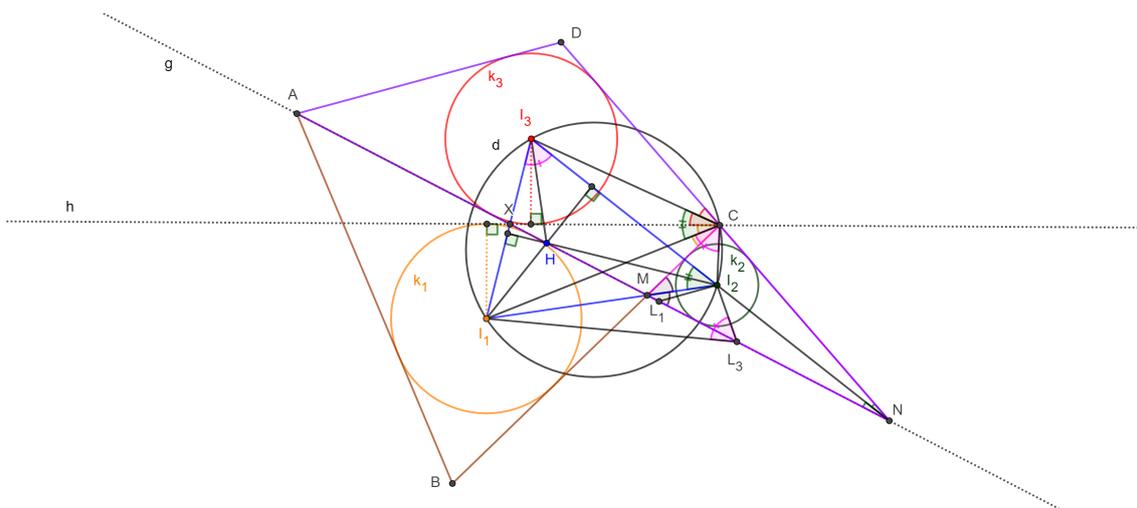
Isto significa que o quadrilátero $I_2HI_1L_3$ é cíclico. Analogamente, $I_3HL_1I_2$ é inscritível.

Na configuração da Figura 2.6.2 temos

$$\begin{aligned} \angle L_3HI_2 &= \angle L_3I_1I_2 = \angle I_2I_1C = \\ &= \angle I_2I_3C = \angle L_1I_3I_2 = \angle L_1HI_2. \end{aligned}$$

Portanto, L_1 , L_3 e H são colineares. Como $L_1 \neq L_3$, o problema fica demonstrado.

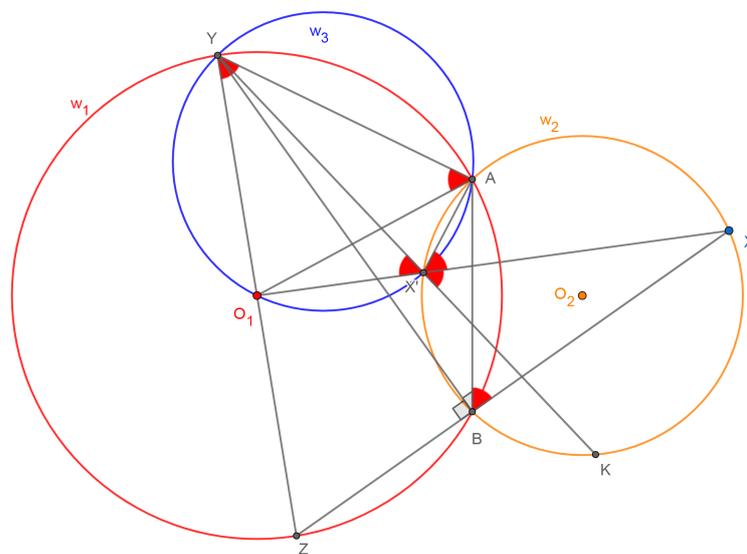
Figura 2.6.2: Construção geométrica para o Problema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

2.7 Quadriláteros cíclicos, ângulos na circunferência e triângulo isósceles. P1 NA IGO 2015.

Problema 5. *Dois círculos w_1 e w_2 (com centros O_1 e O_2 , respectivamente) se intersectam em A e B . O ponto $X \in w_2$. Seja $Y \in w_1$ tal que $\angle XBY = 90^\circ$. Seja X' o segundo ponto de interseção da reta O_1X e w_2 e K o segundo ponto de interseção de $X'Y$ e w_2 . Provar que X é o ponto médio do arco AK .*

Figura 2.7.2: Construção geométrica da resolução do Problema 5. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Capítulo 3

Baricentro

3.1 Introdução

No Problema 6 é dado um quadrilátero cíclico $ABCD$ e é pedido mostrar que os baricentros dos triângulos ABC , BCD , CDA e DAB pertencem a uma mesma circunferência. Primeiro se prova que o centroide do quadrilátero coincide com o centroide dos baricentros dos triângulos citados. A seguir, uma homotetia com centro no centroide comum resolve o problema.

O Problema 7 apresenta um triângulo arbitrário ABC e um ponto M no interior deste. É pedido provar a validade de certa desigualdade e mostrar quando acontece a igualdade. O desafio é interpretado como uma soma de áreas. Várias transformações de equivalência levam a desigualdade dada a uma soma de quadrados.

O Problema 8 é dividido em duas partes. Na primeira, dois pontos P_1 e P_2 são colocados arbitrariamente sobre duas circunferências (um em cada uma). É pedido encontrar o lugar geométrico dos pontos médios de P_1 e P_2 , quando estes passam por todas as posições possíveis. Na segunda, é adicionada mais uma circunferência e um ponto P_3 e deve-se determinar o lugar geométrico dos baricentros dos triângulos $P_1P_2P_3$. Uma construção geométrica dinâmica no Geogebra sugere a resposta e uma justificativa algébrica é dada.

No Problema 9 se explora a geometria do triângulo Napoleônico interno de um $\triangle ABC$ arbitrário. Se solicita determinar o lugar geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$ para os quais as triplas de pontos A', C, B' ; B', A, C' e C', B, A' são colineares.

O Problema 10 combina transformações de reflexão e homotetia e as propriedades do ortocentro, circuncentro e baricentro. Se usa o teorema de Simson-Wallace para demonstrar uma condição necessária e suficiente para três pontos serem colineares.

Iniciamos com uma introdução dos conceitos básicos sobre o baricentro.

3.2 Conceitos básicos

A Figura 3.2.1 mostra um triângulo ABC . Sejam D , E e F pontos médios dos lados BC , CA e AB , respectivamente. As medianas AD , BE e CF concorrem no ponto G , chamado baricentro ou centroide [13].

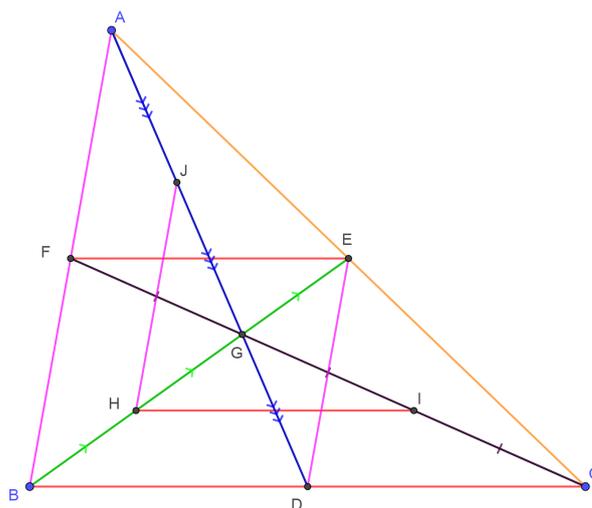
Proposição 5. *A distância de um vértice ao baricentro é duas vezes a distância do baricentro ao pé da mediana correspondente.*

Demonstração. EF é base média do $\triangle ABC$ logo $EF \parallel BC$ e $EF = \frac{BC}{2}$. Sejam H e I pontos médios dos lados BG e CG , respectivamente. Temos que o segmento HI é base média do $\triangle GBC$. Segue que $HI \parallel BC$ e $HI = \frac{BC}{2}$.

Como $EF \parallel HI$ e $EF = HI$ o quadrilátero $EFHI$ é um paralelogramo e suas diagonais HE e FI se encontram nos seus pontos médios: $HG = GE$ e $FG = GI$. Concluimos que $BG = 2GE$ e $CG = 2GF$. Analogamente se demonstra que $AG = 2GD$. ED é base média do $\triangle CAB$ logo $ED \parallel AB$ e $ED = \frac{AB}{2}$. Seja J o ponto médio de AG . Temos que o segmento JH é base média do $\triangle GAB$. Segue que $ED \parallel JH$ e $JH = \frac{AB}{2}$.

Como $ED \parallel JH$ e $ED = JH$ o quadrilátero $EDHJ$ é um paralelogramo e suas diagonais HE e JD se encontram nos seus pontos médios: $HG = GE$ e $DG = GJ$. Concluimos que $AG = 2GD$. \square

Figura 3.2.1: A distância de um vértice ao baricentro é duas vezes a distância do baricentro ao pé da mediana correspondente. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Usaremos a notação $S(P)$ para referirmos a área do polígono P . A Figura 3.2.2 permite acompanhar a Proposição 6.

Proposição 6. *O baricentro G do $\triangle ABC$ determina com os vértices e pontos médios M_{AB} , M_{BC} e M_{CA} dos lados AB , BC e CA , respectivamente, seis triângulos de igual área. Isto é,*

$$\begin{aligned} S(AGM_{AB}) &= S(BGM_{AB}) = S(BGM_{BC}) = \\ &= S(CGM_{BC}) = S(CGM_{CA}) = S(AGM_{CA}) = \frac{S(ABC)}{6}. \end{aligned}$$

Os triângulos AGB , BGC e CGA têm a mesma área. Isto é,

$$S(AGB) = S(BGC) = S(CGA) = \frac{S(ABC)}{3}.$$

Os triângulos ACM_{AB} , BCM_{AB} , BAM_{BC} , CAM_{BC} , CBM_{CA} e ABM_{CA} têm a mesma área. Isto é,

$$\begin{aligned} S(ACM_{AB}) &= S(BCM_{AB}) = S(BAM_{BC}) = \\ &= S(CAM_{BC}) = S(CBM_{CA}) = S(ABM_{CA}) = \frac{S(ABC)}{2}. \end{aligned}$$

Demonstração. Sejam G_C , G_A e G_B os pés das alturas do ponto G sobre os lados AB , BC e CA , respectivamente. Como GG_C é altura comum aos triângulos AGM_{AB} e BGM_{AB} e $AM_{AB} = M_{AB}B$ temos:

$$S(AGM_{AB}) = S(BGM_{AB}).$$

Adicionalmente, os triângulos ACM_{AB} e BCM_{AB} têm a mesma altura e base de igual medida. Logo,

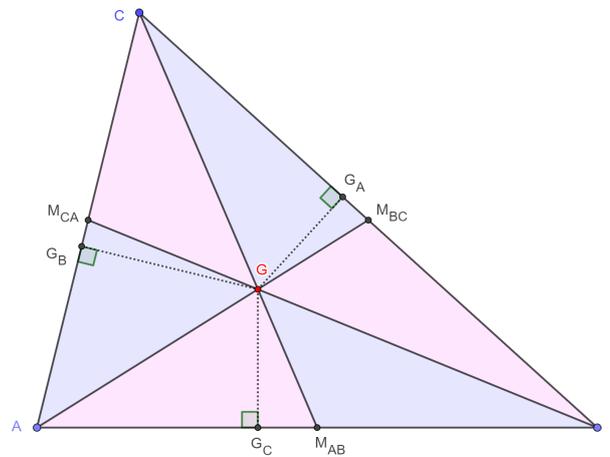
$$S(ACM_{AB}) = S(BCM_{AB}).$$

Os dois resultados anteriores permitem afirmar que

$$S(ACG) = S(BCG).$$

O resto das igualdades é provada do mesmo modo. □

Figura 3.2.2: Igualdade de áreas envolvendo o baricentro. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Do ponto de vista algébrico, para um conjunto de pontos com coordenadas cartesianas $A_i = (A_{ix}, A_{iy})$, com $1 \leq i \leq n$ e $i, n \in \mathbb{N}$, pode ser provado [14] que o baricentro G se calcula como:

$$G = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n A_{ix}, \sum_{i=1}^n A_{iy} \right).$$

Isto é, as coordenadas cartesianas de G são a média aritmética das coordenadas dos A_i .

Proposição 7 (Reta de Euler). *Para todo triângulo ABC o circuncentro O , o baricentro G e o ortocentro H são colineares e $HG = 2GO$. Adicionalmente, sendo D o pé da mediana relativa ao vértice A vale que $AH = 2OD$.*

A demonstração a seguir foi inspirada no artigo [15] e no livro [13].

Demonstração. A Figura 3.2.3 ilustra um triângulo ABC . Sejam D e E pontos médios dos lados BC e CA , respectivamente. Sejam H_a e H_b os pés das alturas relativas aos vértices A e B . Construímos o circuncentro O e o ortocentro H do triângulo ABC . Denotamos por G' a interseção das retas AD e HO .

Iremos mostrar que o ponto $G' = G$ é o baricentro. Isto é, H, G e O são colineares.

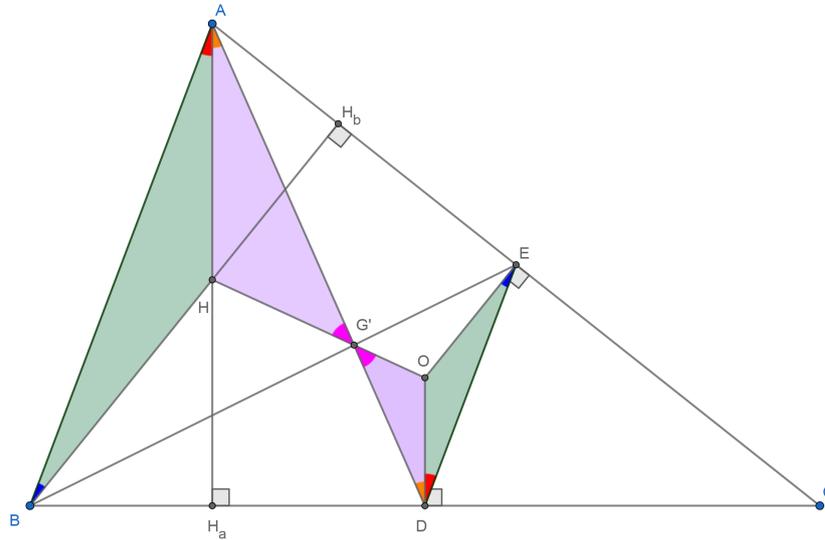
Temos que DE é base média relativa ao lado AB . Logo $DE \parallel AB$ e $\frac{AB}{DE} = 2$. Como $AH_a \parallel OD$ e $BH_b \parallel OE$ segue que $\angle BAH = \angle EDO$ e $\angle ABH = \angle DEO$.

Por ângulo-ângulo temos $\triangle ABH \sim \triangle DEO$. Portanto $\frac{BH}{EO} = \frac{AH}{DO} = \frac{AB}{DE} = 2$.

Adicionalmente, por alternos entre paralelas, $\angle HAG' = \angle ODG'$ e por opostos pelo vértice $\angle AG'H = \angle DG'O$. Consequentemente, por ângulo-ângulo temos $\triangle AHG' \sim \triangle DOG'$. Portanto $\frac{AH}{DO} = \frac{HG'}{OG'} = \frac{AG'}{DG'} = 2$.

Como $AG' = 2DG'$ e $AG = 2DG$ concluímos que $G' = G$ e os pontos H , G e O são colineares (pertencem a reta de Euler).

Figura 3.2.3: Guia para a demonstração. Os pontos H , G e O são colineares. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

□

3.3 Baricentro, homotetia, quadriláteros cíclicos. P36-LL-IMO-1966.

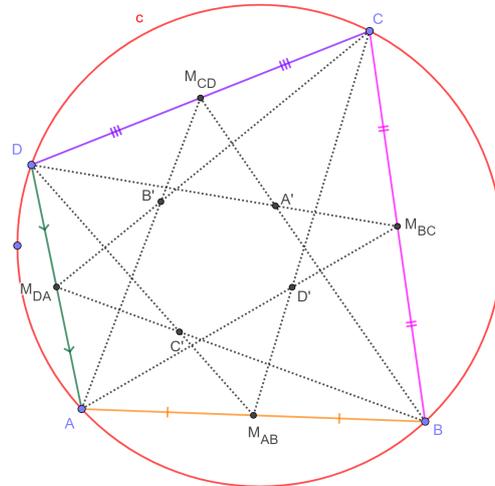
Problema 6. *Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Mostrar que os baricentros dos triângulos ABC , BCD , CDA e DAB pertencem a um mesma circunferência.*

A IMO 1966 foi realizada na cidade de Sófia, Bulgária [10]. Problema 36 da lista longa, proposto pela delegação da Polônia [11].

3.3.1 Resolução do Problema 6.

A Figura 3.3.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 3.3.1: Construção geométrica inicial para o Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Consideramos que c é a circunferência circunscrita ao quadrilátero $ABCD$. Sejam D' , A' , B' e C' os baricentros dos triângulos ABC , BCD , CDA e DAB , respectivamente.

Proposição 8. *O ponto G , baricentro do quadrilátero $ABCD$, coincide com o ponto G' , baricentro do quadrilátero $D'A'B'C'$. Isto é, $G = G'$.*

Demonstração. Temos:

$$D' = \frac{1}{3} \cdot (A_x + B_x + C_x, A_y + B_y + C_y),$$

$$A' = \frac{1}{3} \cdot (B_x + C_x + D_x, B_y + C_y + D_y),$$

$$B' = \frac{1}{3} \cdot (C_x + D_x + A_x, C_y + D_y + A_y),$$

$$C' = \frac{1}{3} \cdot (D_x + A_x + B_x, D_y + A_y + B_y),$$

onde $J = (J_x, J_y)$, com $J = A, B, C$ e D .

Somando, por coordenadas, as quatro equações anteriores segue:

$$\begin{aligned} G' &= \frac{1}{4} \cdot (D'_x + A'_x + B'_x + C'_x, D'_y + A'_y + B'_y + C'_y) = \\ &= \frac{1}{12} \cdot (3A_x + 3B_x + 3C_x + 3D_x, 3A_y + 3B_y + 3C_y + 3D_y) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (A_x + B_x + C_x + D_x, A_y + B_y + C_y + D_y) = G \end{aligned}$$

□

Proposição 9. *Com referência a Figura 3.3.2 vale que:*

$$\frac{AG}{GA'} = \frac{BG}{GB'} = \frac{CG}{GC'} = \frac{DG}{GD'} = 3.$$

Demonstração. Temos:

$$G_x - A_x = \frac{1}{4} \cdot (B_x + C_x + D_x - 3A_x),$$

$$G_y - A_y = \frac{1}{4} \cdot (B_y + C_y + D_y - 3A_y),$$

$$AG = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(B_x + C_x + D_x - 3A_x)^2 + (B_y + C_y + D_y - 3A_y)^2}.$$

Também temos:

$$A'_x - G_x = \frac{1}{3} \cdot (B_x + C_x + D_x) - \frac{1}{4} \cdot (A_x + B_x + C_x + D_x) =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot (B_x + C_x + D_x - 3A_x),$$

$$A'_y - G_y = \frac{1}{3} \cdot (B_y + C_y + D_y) - \frac{1}{4} \cdot (A_y + B_y + C_y + D_y) =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot (B_y + C_y + D_y - 3A_y),$$

$$GA' = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{(B_x + C_x + D_x - 3A_x)^2 + (B_y + C_y + D_y - 3A_y)^2}.$$

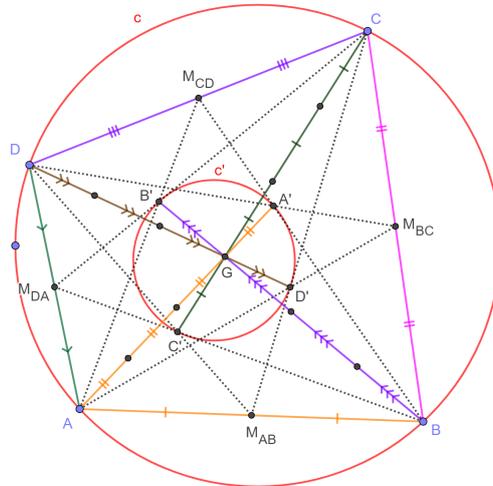
Com isto provamos que

$$\frac{AG}{GA'} = 3.$$

O resto da demonstração é feita analogamente. □

As duas proposições anteriores permitem afirmar que uma homotetia, com centro no ponto G , e fator de proporcionalidade $-\frac{1}{3}$ transforma A, B, C, D e c em A', B', C', D' e c' , respectivamente. Sendo c' a circunferência circunscrita ao quadrilátero $A'B'C'D'$. A Figura 3.3.2 mostra uma construção geométrica.

Figura 3.3.2: Construção geométrica para o Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

3.4 Baricentro, áreas, desigualdade. P9-SL-IMO-1968.

Problema 7. *Seja ABC um triângulo arbitrário e M um ponto no interior deste. Sejam d_a , d_b , e d_c as distâncias de M aos lados BC , CA , e AB ; e a , b , c a medida dos lados, respectivamente. Seja S a área do $\triangle ABC$. Provar que*

$$abd_a d_b + bcd_b d_c + cad_c d_a \leq \frac{4S^2}{3}. \tag{3.4.1}$$

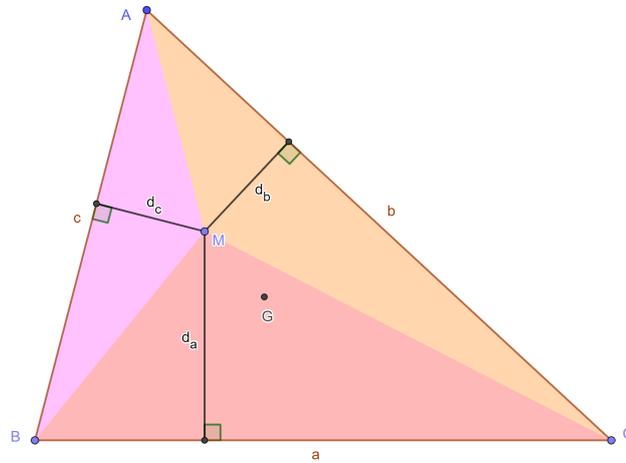
Provar que a igualdade acontece quando M é o baricentro.

A IMO 1968 foi realizada na cidade de Moscou, Rússia [10]. Problema 9 da lista curta, proposto pela delegação da Romênia [11].

3.4.1 Resolução do Problema 7.

A Figura 3.4.1 mostra uma construção geométrica.

Figura 3.4.1: Construção geométrica para o Problema 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Iniciamos notando que a desigualdade (3.4.1) é equivalente a:

$$\frac{ad_a}{2} \cdot \frac{bd_b}{2} + \frac{bd_b}{2} \cdot \frac{cd_c}{2} + \frac{cd_c}{2} \cdot \frac{ad_a}{2} \leq \frac{S^2}{3}.$$

Sejam $S_a = S(BCM) = \frac{ad_a}{2}$, $S_b = S(CAM) = \frac{bd_b}{2}$ e $S_c = S(ABM) = \frac{cd_c}{2}$. Segue que

$$S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a \leq \frac{S^2}{3}.$$

Como $S = S_a + S_b + S_c$, a desigualdade anterior equivale a

$$3(S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a) \leq (S_a + S_b + S_c)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando se encontra

$$S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a \leq S_a^2 + S_b^2 + S_c^2.$$

Multiplicamos toda a desigualdade por 2 e colocamos os termos do lado esquerdo no direito

$$0 \leq 2(S_a^2 + S_b^2 + S_c^2) - 2(S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a).$$

A linha anterior pode ser reescrita como

$$0 \leq (S_a - S_b)^2 + (S_b - S_c)^2 + (S_c - S_a)^2.$$

Como o quadrado de um número é sempre maior o igual a zero a última desigualdade é verdadeira. Todas as transformações usadas foram de equivalência, logo fica provado (3.4.1). A igualdade acontece quando $S_a = S_b = S_c$. Pela Proposição 6, o anterior significa que $M = G$.

3.5 Baricentro, lugar geométrico, circunferências. P27-LL-IMO-1974.

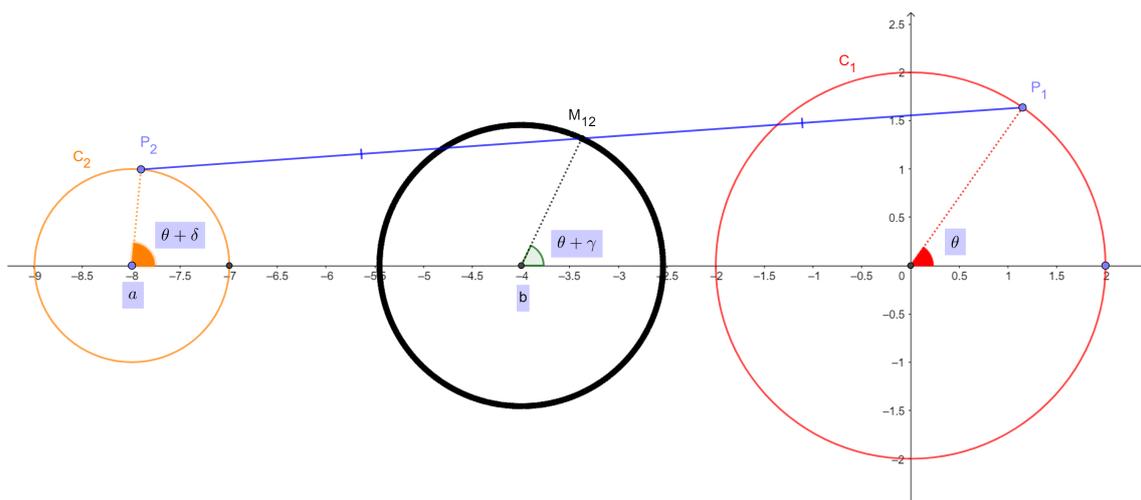
Problema 8. a) Sejam C_1 e C_2 circunferências no mesmo plano, P_1 e P_2 pontos arbitrários sobre C_1 e C_2 , respectivamente, e M_{12} o ponto médio do segmento P_1P_2 . Encontrar o lugar geométrico dos pontos M_{12} quando P_1 e P_2 passam por todas as posições possíveis. b) Sejam C_1 , C_2 e C_3 três circunferências no mesmo plano. Encontrar o lugar geométrico dos baricentros dos triângulos $P_1P_2P_3$ quando $P_1 \in C_1$, $P_2 \in C_2$ e $P_3 \in C_3$ passam por todas as posições possíveis.

A IMO 1974 foi realizada na cidade de Erforte, Alemanha [10]. Problema 27 da lista longa, proposto pela delegação da Romênia [11].

3.5.1 Ilustração da solução do Problema 8.

A Figura 3.5.1 mostra uma construção geométrica para o item a.

Figura 3.5.1: Construção geométrica da primeira parte do Problema 8. A circunferência em preto é desenhada animando os pontos P_1 e P_2 e deixando o rastro do ponto M_{12} . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Vamos colocar a origem de um sistema cartesiano coincidindo com o centro da circunferência C_1 e o centro de C_2 sobre o eixo x . Isto é, C_1 tem centro em $(0, 0)$ e raio R_1 e C_2 centro

em $(a, 0)$ e raio R_2 .

As coordenadas dos pontos P_1 e P_2 podem ser escritas como:

$$P_1 = (R_1 \cdot \cos(\theta), R_1 \cdot \text{sen}(\theta)),$$

$$P_2 = (a + R_2 \cdot \cos(\theta + \delta), R_2 \cdot \text{sen}(\theta + \delta)).$$

Onde θ é um ângulo que serve de parâmetro para percorrer todos os pontos das circunferência e δ é um valor fixo que descreve a defasagem inicial entre C_1 e C_2 .

As coordenadas do ponto médio entre P_1 e P_2 serão:

$$M_{12} = \frac{1}{2} \cdot (a + R_1 \cdot \cos(\theta) + R_2 \cdot \cos(\theta + \delta), R_1 \cdot \text{sen}(\theta) + R_2 \cdot \text{sen}(\theta + \delta)).$$

Após o uso de identidades trigonométrica podemos reescrever as coordenadas do ponto médio M_{12} entre P_1 e P_2 como:

$$M_{12} = (b + R_{12} \cdot \cos(\theta + \gamma), R_{12} \cdot \text{sen}(\theta + \gamma)).$$

Onde $b = \frac{1}{2}a$ e

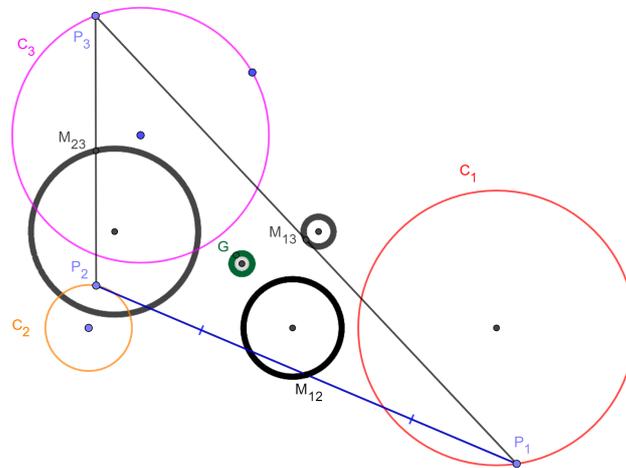
$$R_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos(\delta)},$$

$$\tan(\gamma) = \frac{R_2 \cdot \text{sen}(\delta)}{R_1 + R_2 \cdot \cos(\delta)}.$$

Isto é, M_{12} descreve uma circunferência com centro em $(b, 0)$, defasagem γ e raio R_{12} .

A Figura 3.5.2 mostra uma construção geométrica para o item b.

Figura 3.5.2: Construção geométrica da segunda parte do Problema 8. As circunferências em preto e verde são desenhadas animando os pontos P_1 , P_2 e P_3 e deixando o rasto dos pontos M_{12} , M_{23} , M_{31} e G . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Analogamente ao item a, os pontos M_{13} e M_{23} descrevem circunferências com centro nos pontos médios dos centros das circunferência respectivas. Da mesma forma que os pontos médios são calculados usando a média aritmética, o baricentro também é. Em outras palavras:

$$G = \frac{1}{3} \cdot (P_{1x} + P_{2x} + P_{3x}, P_{1y} + P_{2y} + P_{3y}),$$

onde $P_i = (P_{ix}, P_{iy})$, com $1 \leq i \leq 3$. Pode ser provado que G também descreve uma circunferência, com centro no baricentro dos centros das circunferências geradas por M_{12} , M_{23} e M_{31} .

3.6 Baricentro, lugar geométrico, teorema de Napoleão. SL-P12-IMO-1987.

Problema 9. *Dado um triângulo não equilátero ABC , com os vértices listados em sentido anti-horário, encontrar o lugar geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$ (vértices listados em sentido anti-horário) para os quais as triplas de pontos A', C, B' ; B', A, C' e C', B, A' são colineares.*

A IMO 1987 foi realizada na cidade de Havana, Cuba [10]. Problema 12 da lista curta, proposto pela delegação da Polônia [11].

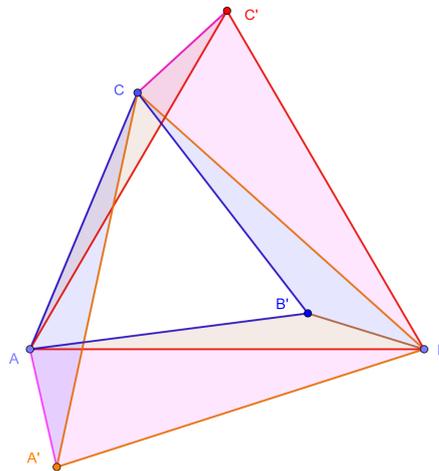
3.6.1 Considerações iniciais sobre o Problema 9.

Para poder resolver o problema vamos precisar estudar primeiro uma versão do Teorema de Napoleão e um Lema deste último.

Lema 10 (Para o Teorema de Napoleão). *Se sobre os lados de um triângulo qualquer ABC forem construídos triângulos equiláteros ABC' , BCA' e CAB' , então $AA' = BB' = CC'$.*

Demonstração. A Figura 3.6.1 mostra uma construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. O caso contrário pode ser encontrado em [16].

Figura 3.6.1: Construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

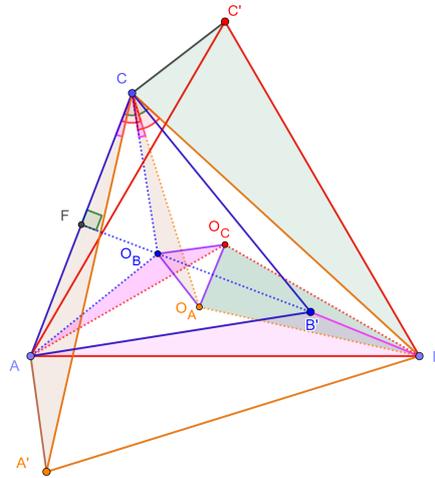
Por construção temos $AC = AB'$ e $AC' = AB$. De $\angle CAB' = \angle C'AB = 60^\circ$, segue que $\angle CAC' = \angle B'AB$. Por LAL, encontramos $\triangle ACC' \equiv \triangle AB'B$. Logo, $CC' = B'B$.

Analogamente, temos $A'B = CB$ e $AB = C'B$. De $\angle A'BC = \angle ABC' = 60^\circ$, segue que $\angle A'BA = \angle CBC'$. Por LAL, encontramos $\triangle A'BA \equiv \triangle CBC'$. Logo, $A'A = CC'$. Concluimos que $AA' = BB' = CC'$. \square

Teorema 11 (Teorema de Napoleão). *Se sobre os lados de um triângulo qualquer ABC forem construídos triângulos equiláteros, os ortocentros desses triângulos equiláteros formam igualmente um triângulo equilátero.*

Demonstração. A Figura 3.6.2 mostra uma construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. O caso contrário pode ser encontrado em [16].

Figura 3.6.2: Construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Girando o $\triangle O_B C O_A$ em 30° em sentido horário em torno do vértice C se mostra que é semelhante com o $\triangle A C A'$.

De fato, como $\angle A C O_B = \angle B C O_A = 30^\circ$ e $\angle A C O_A = \angle B C O_B$, então $\angle A C A' = \angle O_B C O_A$.

Em triângulos equiláteros o ortocentro e o baricentro coincidem, logo $F O_B = \frac{1}{3} F B'$. Segue que $C O_B \cdot \sin(30^\circ) = \frac{1}{3} C B' \cdot \sin(60^\circ)$ e $C A = C B' = \sqrt{3} \cdot C O_B$.

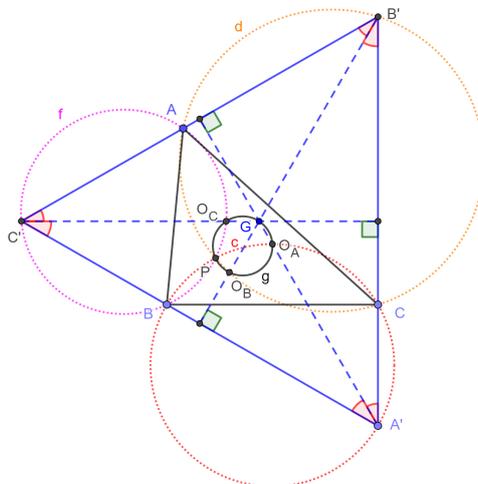
Analogamente, $C A' = C B = \sqrt{3} \cdot C O_A$. Com isto, $\frac{C A'}{C A} = \frac{C O_A}{C O_B}$. Pelo caso de semelhança LAL temos $\triangle A C A' \sim \triangle O_B C O_A$. Segue que $A A' = \sqrt{3} \cdot O_B O_A$.

Similarmente, se mostra que $B B' = \sqrt{3} \cdot O_C O_B$ e $C C' = \sqrt{3} \cdot O_A O_C$. Como, provado no Lema 10, vale $A A' = B B' = C C'$, então o $\triangle O_A O_B O_C$ é equilátero. \square

3.6.2 Resolução do Problema 9.

A Figura 3.6.3 mostra uma construção geométrica.

Figura 3.6.3: Construção geométrica do Problema 9. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Construir o ponto O_A no interior do $\triangle ABC$ de tal forma que $\angle O_A BC = \angle O_A CB = 30^\circ$. Teremos que $\angle BO_A C = 120^\circ$. A seguir construir a circunferência circunscrita c ao $\triangle BO_A C$. Posicionar o ponto A' sobre c . Construir as retas $A'B$ e $A'C$. Podemos ter os quadriláteros cíclicos $BA'CO_A$, $BCA'O_A$ e $BCO_A A'$. No primeiro caso $\angle BA'C = 60^\circ$ e nos dois últimos $\angle BA'C = 120^\circ$.

Analogamente, construir o ponto O_B no interior do $\triangle ABC$ de tal forma que $\angle O_B CA = \angle O_B AC = 30^\circ$. Teremos que $\angle CO_B A = 120^\circ$. A seguir construir a circunferência circunscrita d ao $\triangle CO_B A$. Marcar $B' \neq C$ como a interseção de $A'C$ e d .

Similarmente, construir o ponto O_C no interior do $\triangle ABC$ de tal forma que $\angle O_C AB = \angle O_C BA = 30^\circ$. Teremos que $\angle AO_C B = 120^\circ$. A seguir construir a circunferência circunscrita f ao $\triangle AO_C B$. Marcar $C' \neq B$ como a interseção de $A'B$ e f .

Construir as medianas do $\triangle A'B'C'$ e marcar o ponto em que concorrem: G . Em todo triângulo equilátero o baricentro coincide com o ortocentro, o circuncentro e o incentro. Segue que $\angle A'GB' = \angle B'GC' = \angle C'GA' = 120^\circ$. Adicionalmente os pontos O_A , O_B e O_C pertencem as bissetrizes dos ângulos em A' , B' e C' , respectivamente. O $\triangle O_A O_B O_C$ é o triângulo napoleônico interno do $\triangle ABC$. Isto é, o $\triangle O_A O_B O_C$ é equilátero e $\angle O_A O_B O_C = 60^\circ$. Com isto temos $\angle O_A O_B O_C + \angle O_A G O_C = 180^\circ$. Ou seja, o quadrilátero $O_A G O_C O_B$ é cíclico.

Construir a circunferência g circunscrita ao $\triangle O_A O_B O_C$. O lugar geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$ é g . Marcar o ponto P , de Fermat ou Torricelli, na interseção de c , d e f . Quando $A' = P$ o $\triangle A'B'C'$ é reduzido a um ponto.

3.7 Baricentro, Simson-Wallace, homotetia. P5 SL IMO 1998.

Problema 10. *Seja ABC um triângulo, H seu ortocentro, O seu circuncentro, e R seu circunraio. Seja D a reflexão de A em BC , E de B em CA , e F de C em AB . Provar que D , E e F são colineares se, e somente se, $OH = 2R$.*

A IMO 1998 foi realizada na cidade de Taipé, Taiwan [10]. Problema 5 da lista curta, proposto pela delegação da França [11].

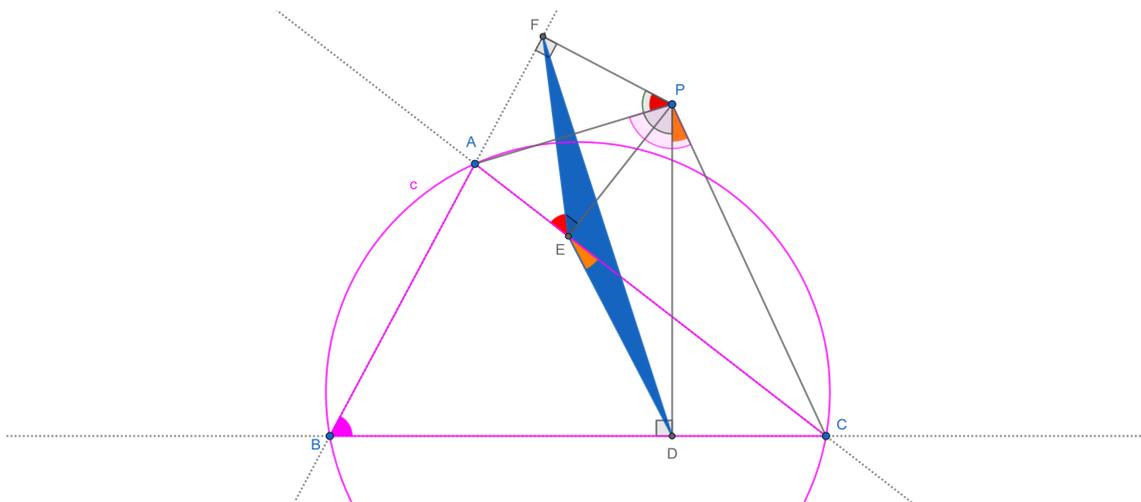
3.7.1 Considerações iniciais para o Problema 10.

Definição 3 (Triângulo pedal). *Sejam P um ponto do plano, ABC um triângulo e D , E e F as projeções de P sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente. Então DEF é chamado de triângulo pedal de P em relação ao $\triangle ABC$.*

Teorema 12 (Teorema de Simson-Wallace). *Dado um $\triangle ABC$, e sua circunferência circunscrita e um ponto P no mesmo plano de ABC , o triângulo pedal de P em relação a ABC é degenerado (D , E e F são colineares) se, e somente se, $P \in c$.*

A Figura 3.7.1 mostra uma construção geométrica.

Figura 3.7.1: Construção geométrica para a prova do Teorema 12. Versão interativa [aqui](#).



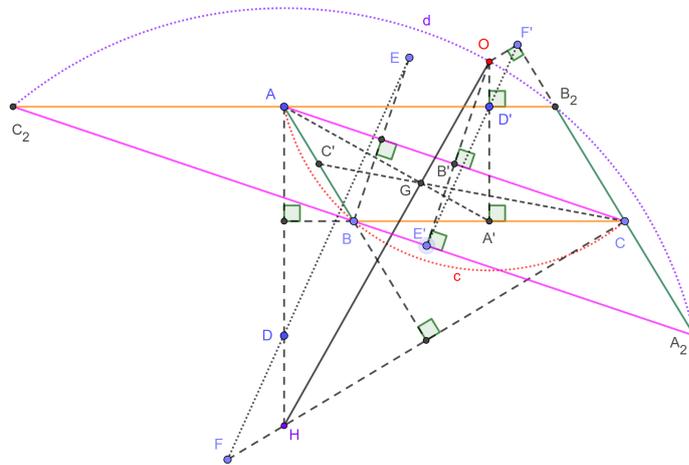
Fonte: O autor.

Demonstração. Como $\angle PFA = \angle PEA = 90^\circ$, então $PFAE$ é um quadrilátero cíclico. Segue que $\angle FPA = \angle FEA$. De $\angle PEC = \angle PDC = 90^\circ$ temos que $PEDC$ é um quadrilátero cíclico.

Como D é a reflexão de A em BC , então $D' = \mathbb{H}(D)$ é a reflexão de A' em $B'C'$. Segue que $D' \in B_2C_2$ e $A'D' \perp B_2C_2$. Por outro lado, da definição de circuncentro e $BC \parallel C_2B_2$ temos que OA' e B_2C_2 são ortogonais. Os dois resultados anteriores permitem afirmar que O , D' e A' são colineares e D' é a projeção de O em B_2C_2 . Analogamente, $E' = \mathbb{H}(E)$ e $F' = \mathbb{H}(F)$ são as projeções de O em C_2A_2 e A_2B_2 .

Pelo Teorema de Simson-Wallace 12, D' , E' e F' são colineares (o qual equivale por \mathbb{H} a D , E e F serem colineares) se, e somente se, o ponto O está sobre a circunferência d circunscrita ao $\triangle A_2B_2C_2$. Como $c = \mathbb{H}(d)$ e $O = \mathbb{H}(H)$, d tem centro em H e raio $2R$. Esta última condição é equivalente a $HO = 2R$. A Figura 3.7.3 mostra uma construção geométrica.

Figura 3.7.3: Construção geométrica para o Problema 10. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Capítulo 4

Incírculos e exincírculos

4.1 Introdução

No Problema 11, P1 IMO 1970, são construídos três in-círculos e três ex-círculos. Se solicita demonstrar determinada igualdade com os seis raios. Pelo uso das relações métricas, associadas aos segmentos formados entre os vértices e os pés das bissetrizes, e a relação de Stewart se resolve o desafio.

No Problema 12, P4 IMO 1992, se requer encontrar o lugar geométrico dos pontos P partindo de uma circunferência c , uma reta l tangente a c , e um ponto M sobre l . P deve satisfazer determinada propriedade. A solução está ligada a construção das circunferências inscrita e ex-inscrita de um triângulo.

O Problema 13, P5 IMO 1999, apresenta duas circunferência tangentes internamente a uma terceira. Se solicita mostrar que determinada reta é tangente a uma das circunferências. Usando os conceitos de potência de um ponto e as propriedades dos círculos inscritos e ex-inscritos se resolve o desafio.

O Problema 14, P16 SL IMO 2005, explora as propriedades de um paralelogramo $ABCD$ e das bissetrizes usadas na construção de dois ex-círculos. Uma linha variável l passa pelo ponto A . Se pede provar que a medida de determinado ângulo não depende da escolha de l .

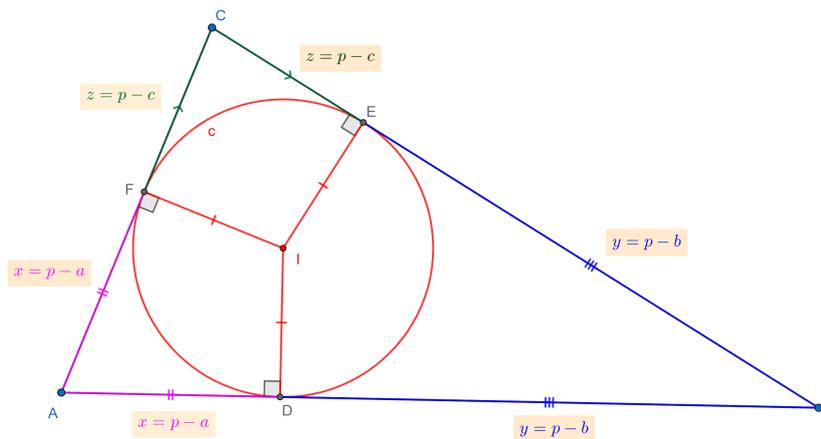
O Problema 15, P18 SL IMO 2006, pede construir o centro do ex-círculo tangente ao lado BC num triângulo ABC . Após algumas outras construções se deseja determinar dois ângulos. Se resolve o desafio mediante o esboço de três circunferências com um ponto em comum, centro radical das mesmas.

Iniciamos com uma introdução dos conceitos básicos sobre incírculos e exincírculos.

4.2 Conceitos básicos

Proposição 13. A Figura 4.2.1 mostra um triângulo ABC . Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Sejam D , E e F os pontos de interseção da circunferência inscrita c com os lados AB , BC e CA , respectivamente. E seja o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$. Então vale que $AD = AF = p - a$, $BD = BE = p - b$ e $CF = CE = p - c$.

Figura 4.2.1: Guia para a demonstração da Proposição 13. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Como os lados do $\triangle ABC$ são tangentes à circunferência c vale que $AF = AD = x$, $BD = BE = y$ e $CF = CE = z$. Isto permite escrever o sistema de equações

$$x + y = c,$$

$$y + z = a,$$

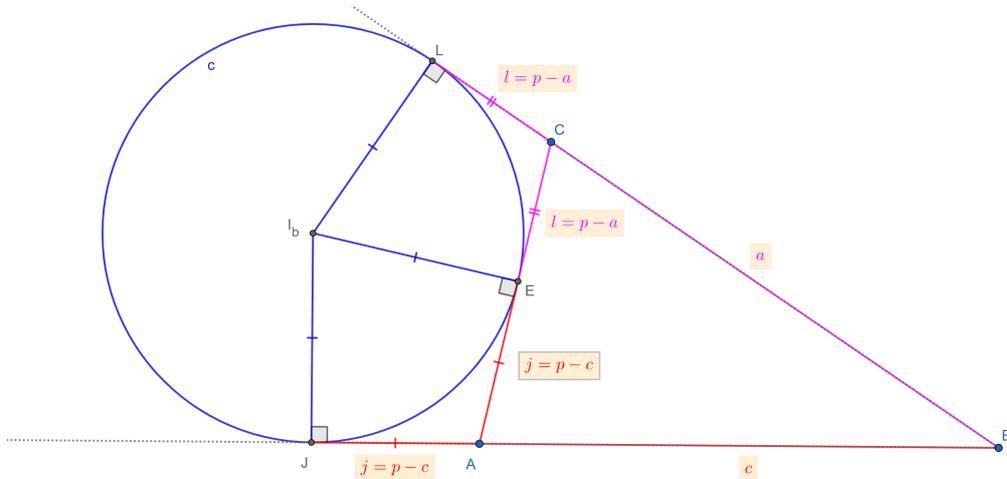
$$z + a = b,$$

$$p = x + y + z.$$

Colocando em evidência x , y e z se encontram as soluções citadas. □

Proposição 14. A Figura 4.2.2 mostra um triângulo ABC . Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Sejam J , L e E os pontos de interseção da circunferência ex-inscrita c com os prolongamentos dos lados AB e BC e com o lado CA , respectivamente. E seja o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$. Então vale que $BL = BJ = p$, $CL = CE = p - a$ e $AJ = AE = p - c$.

Figura 4.2.2: Guia para a demonstração da Proposição 14. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Como os lados do $\triangle ABC$ são tangentes à circunferência c vale que $BL = BJ$, $CL = CE = l$ e $AJ = AE = j$. Consideramos a soma

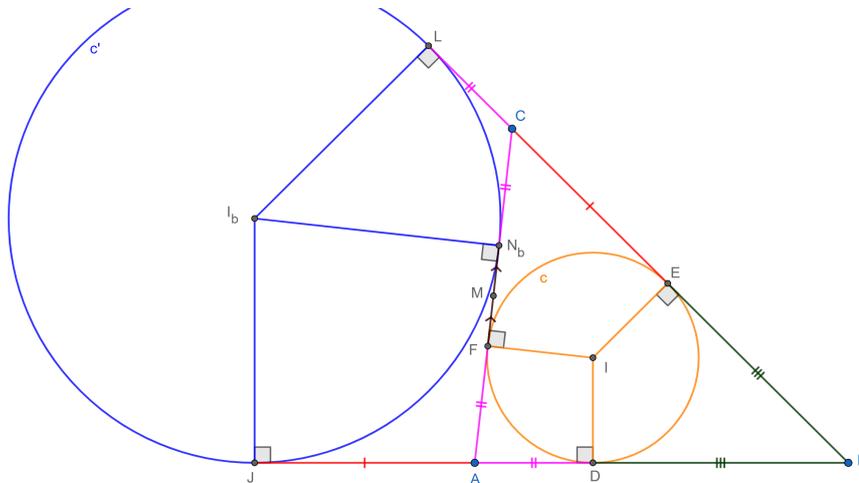
$$BL + BJ = a + l + j + c = a + b + c = 2p.$$

Do resultado anterior segue que $BL = BJ = p$. Como $AB = c$ e $BC = a$ temos $AJ = AE = j = p - c$ e $CL = CE = l = p - a$. \square

Corolário 15. A Figura 4.2.3 mostra um triângulo ABC . Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Sejam D , E e F os pontos de interseção da circunferência inscrita c com os lados AB , BC e CA , respectivamente. Sejam J , L e N_b os pontos de interseção da circunferência ex-inscrita c' com os prolongamentos dos lados AB e BC e com o lado CA , respectivamente. E seja o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$. Então vale que o ponto M , médio de A e C , também é ponto médio de F e N_b . Adicionalmente,

$$FM = MN_b = \frac{a - c}{2}.$$

Figura 4.2.3: Guia para a demonstração do Corolário 15. Versão interativa [aqui](#).



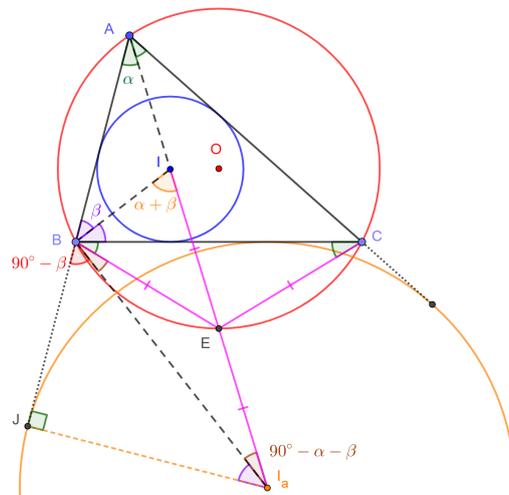
Fonte: O autor.

Demonstração. Isto é consequência de $AF = CN_b = p - a$, resultados provados nas Proposições 13 e 14. □

Proposição 16. A Figura 4.2.4 mostra um triângulo ABC . Seja I seu incentro e I_a o centro da ex-circunferência correspondente ao lado BC . Seja E o ponto de interseção de AI com a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Então

$$EB = EC = EI = EI_a.$$

Figura 4.2.4: Guia para a demonstração da Proposição 16. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Pela bissetriz em A e o quadrilátero cíclico $ACEB$ temos $\angle BAE = \angle CAE = \angle CBE = \angle BCE = \alpha$. Portanto, o $\triangle EBC$ é isósceles de base BC e $EB = EC$.

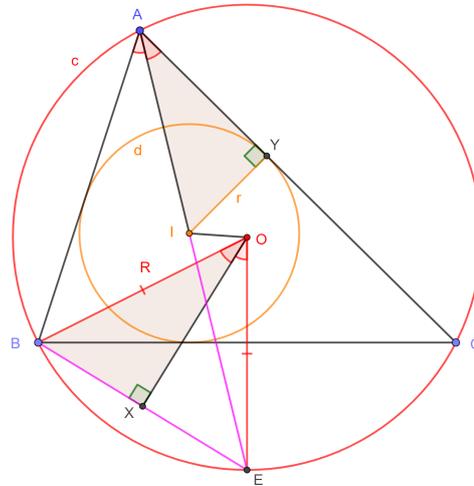
Além disso, da bissetriz em B , sejam $\angle IBA = \angle IBC = \beta$. Pela propriedade do ângulo externo, $\angle BIE = \alpha + \beta$. Segue que, $\angle BIE = \angle IBE$, o $\triangle EBI$ é isósceles de base BI e $EB = EI$.

Pela bissetriz externa em B , sejam $\angle JBI_a = \angle CBI_a = \gamma$. Como o $\angle JBA = 180^\circ$ temos que $\gamma = 90^\circ - \beta$. Do $\triangle BJI_a$ retângulo em J temos $\angle JI_aB = \beta$. Pela soma dos ângulos internos no $\triangle AJI_a$ e o ângulo raso em B encontramos $\angle EBI_a = \angle EI_aB = 90^\circ - \alpha - \beta$. Isto é, o $\triangle EB I_a$ é isósceles, de base BI_a , e $EB = EI_a$. Concluimos que $EB = EC = EI = EI_a$. \square

Proposição 17 (Fórmula de Euler). *A Figura 4.2.5 mostra um triângulo ABC . Seja I seu incentro, d sua circunferência inscrita de raio r . Adicionalmente, seja c a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$, de centro O e raio R . Então*

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

Figura 4.2.5: Guia para a demonstração da Proposição 17. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja E o ponto de interseção da bissetriz AI com c . Pela potência do ponto I em relação a c temos

$$R^2 - OI^2 = AI \cdot EI. \tag{4.2.1}$$

Sejam X e Y os pés das perpendiculares de O e I até BE e AC , respectivamente. Como o $\triangle OBE$ é isósceles de base BE , e devido a relação entre ângulo central e inscrito, relativo a corda BE , segue que $\angle AIY = \angle OBX$.

Logo, pelo caso de semelhança AA, temos $\triangle AIY \sim \triangle OBX$. Portanto,

$$\frac{BX}{IY} = \frac{OB}{AI}$$

ou

$$AI = \frac{OB \cdot IY}{BX} = \frac{2Rr}{EB}.$$

Vimos na Proposição 16 que $EB = EI$, segue que

$$AI = \frac{2Rr}{EI}. \tag{4.2.2}$$

Substituindo (4.2.2) em (4.2.1) encontramos $R^2 - OI^2 = 2Rr$. Logo,

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

□

4.3 Exincírculos, incentro, relação de Stewart. P1 IMO 1970.

Problema 11. *Dado um ponto M no lado AB do triângulo ABC , sejam r_1 e r_2 raios das círculos inscritos nos triângulos ACM e BCM , respectivamente e sejam ρ_1 e ρ_2 os raios dos exincírculos dos triângulos ACM e BCM nos lados AM e BM , respectivamente. Sejam r e ρ os raios do círculo inscrito e do exincírculo no lado AB do $\triangle ABC$, respectivamente. Provar que*

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r}{\rho}.$$

A IMO 1970 foi realizada na cidade de Keszthely, Hungria [10]. Problema 8 da lista curta, proposto pela delegação da Polônia e escolhido como primeiro da competição [11].

4.3.1 Considerações iniciais para o Problema 11.

Teorema 18 (Relação de Stewart). *Seja D um ponto no lado BC do $\triangle ABC$. Sejam $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $BD = x$, $AC = y$ e $AD = z$. Vale que:*

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = a + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

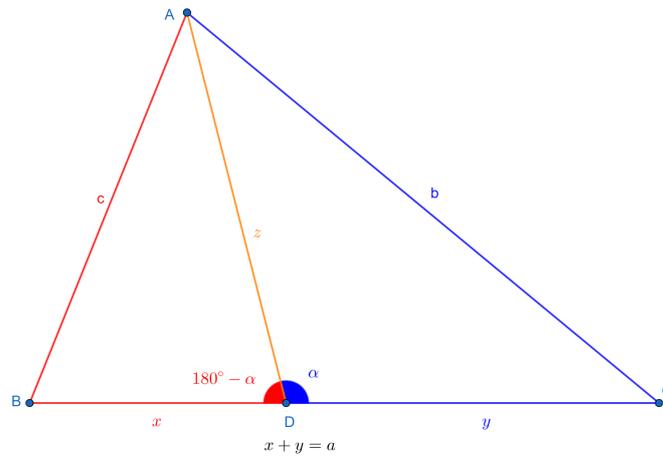
Ou equivalentemente

$$z^2 = \frac{b^2}{a}x + \frac{c^2}{a}y - xy.$$

O resultado não fica escrito como função dos ângulos em D .

A Figura 4.3.1 permite acompanhar a prova.

Figura 4.3.1: Guia para a demonstração do Teorema 18. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Sejam $\angle ADC = \alpha$ e $\angle ADB = 180^\circ - \alpha$. Pela Lei dos Cossenos aplicada no $\triangle ABD$ temos

$$c^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos(180^\circ - \alpha).$$

Mas $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$. Logo

$$c^2 = x^2 + z^2 + 2xz \cos(\alpha),$$

$$\frac{c^2}{x} = x + \frac{z^2}{x} + 2z \cos(\alpha). \tag{4.3.1}$$

Pela Lei dos Cossenos aplicada no $\triangle ACD$ temos

$$b^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos(\alpha),$$

$$\frac{b^2}{y} = y + \frac{z^2}{y} - 2z \cos(\alpha). \tag{4.3.2}$$

Somando (4.3.1) e (4.3.2) segue

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = x + y + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = a + z^2 \frac{a}{xy},$$

$$\frac{b^2x + c^2y}{axy} = 1 + \frac{z^2}{xy},$$

$$z^2 = \frac{b^2x + c^2y}{a} - xy.$$

No caso em que D é o ponto médio de BC temos $x = y = \frac{a}{2}$ e $z = m_a$. E vale

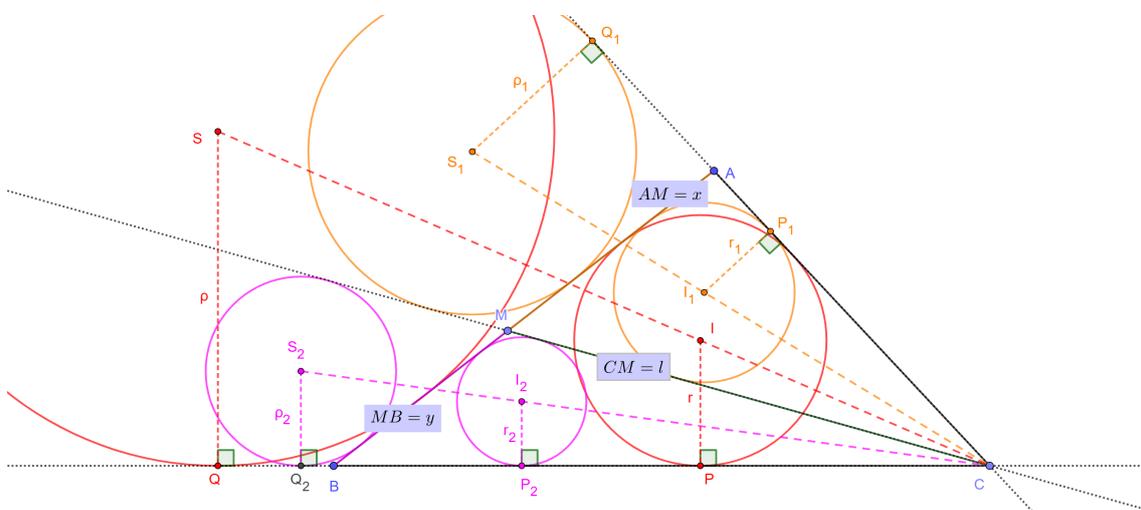
$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

□

4.3.2 Resolução do Problema 11.

A Figura 4.3.2 mostra uma construção geométrica.

Figura 4.3.2: Construção geométrica para o Problema 11. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam $BC = a$, $CA = b$, $AM = x$, $MB = y$ e $CM = l$. Denotamos com I_1 o incentro e com S_1 o ex-centro do exincírculo do $\triangle AMC$. Supor que P_1 e Q_1 sejam os pés das perpendiculares de I_1 e S_1 , respectivamente, a linha AC . Então $\triangle I_1CP_1 \sim \triangle S_1CQ_1$ e $\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{CP_1}{CQ_1}$. Seja p_1 o semiperímetro do $\triangle ACM$. Sabemos das Proposições 13 e 14 que $CP_1 = p_1 - x = \frac{b+l-x}{2}$ e $CQ_1 = p_1 = \frac{b+l+x}{2}$. Logo,

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{b + l - x}{b + l + x}. \tag{4.3.3}$$

Analogamente, denotamos com I_2 o incentro e com S_2 o ex-centro do exincírculo do $\triangle BMC$. Supor que P_2 e Q_2 sejam os pés das perpendiculares de I_2 e S_2 , respectivamente, a linha BC . Então $\triangle I_2CP_2 \sim \triangle S_2CQ_2$ e $\frac{r_2}{\rho_2} = \frac{CP_2}{CQ_2}$. Seja p_2 o semiperímetro do $\triangle BCM$. Sabemos das Proposições 13 e 14 que $CP_2 = p_2 - y = \frac{a+l-y}{2}$ e $CQ_2 = p_2 = \frac{a+l+y}{2}$. Logo,

$$\frac{r_2}{\rho_2} = \frac{a + l - y}{a + l + y}. \tag{4.3.4}$$

Do mesmo modo, denotamos com I o incentro e com S o centro do exincírculo do $\triangle ABC$. Supor que P e Q sejam os pés das perpendiculares de I e S , respectivamente, a linha BC . Então $\triangle ICP \sim \triangle SCQ$ e $\frac{r}{\rho} = \frac{CP}{CQ}$. Seja p o semiperímetro do $\triangle ABC$. Sabemos das Proposições 13 e 14 que $CP = p - c = \frac{a+b-c}{2}$ e $CQ = p = \frac{a+b+c}{2}$. Logo,

$$\frac{r}{\rho} = \frac{a+b-c}{a+b+c}. \quad (4.3.5)$$

Do enunciado do Problema 11 e as equações (4.3.3), (4.3.4) e (4.3.5) resta provar que

$$\left(\frac{b+l-x}{b+l+x}\right) \cdot \left(\frac{a+l-y}{a+l+y}\right) = \frac{a+b-c}{a+b+c}.$$

Após multiplicar pelos denominadores na equação anterior, lembrando que $c = x + y$ e várias simplificações, encontramos a relação de Stewart 18 para a ceviana $CM = l$ do $\triangle ABC$:

$$\frac{b^2}{x} + \frac{a^2}{y} = c + l^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

4.4 Exincírculo, incírculo, semelhança de triângulos. P4 IMO 1992.

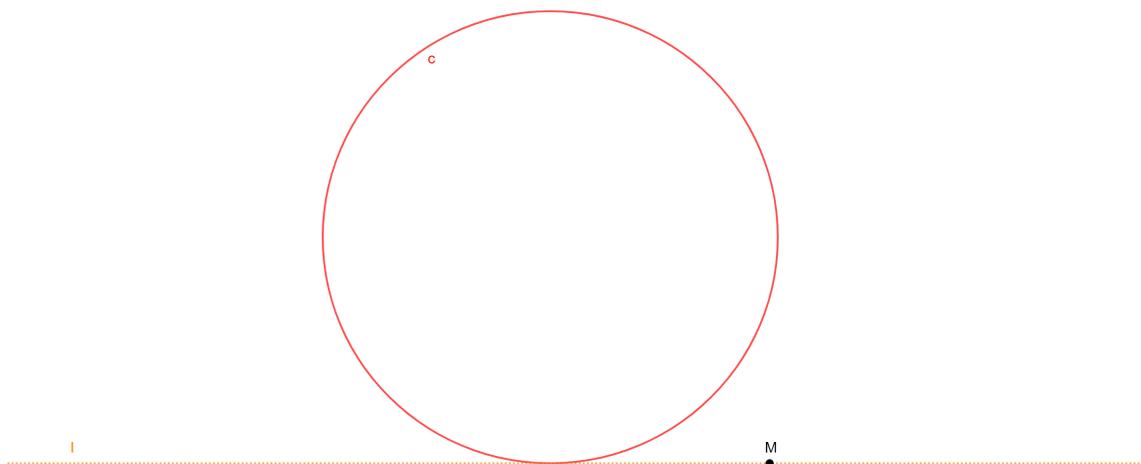
Problema 12. *No plano, sejam dadas uma circunferência c , uma reta l tangente a c , e um ponto M sobre l . Encontrar o lugar geométrico dos pontos P que têm a seguinte propriedade: Existem dois pontos Q e R sobre l tais que M é o ponto médio de QR e c é o incírculo de PQR .*

A IMO 1992 foi realizada na cidade de Moscou, Rússia [10]. Problema 20 da lista corta, proposto pela delegação da França e escolhido como o P4 da competição [11].

4.4.1 Resolução do Problema 12.

A Figura 4.4.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.4.1: Construção geométrica inicial para o Problema 12. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Denotamos por U o ponto de tangência da circunferência c , de centro S , e a reta l . Sejam X e U' os pontos simétricos de U com relação a S e M , respectivamente. X e U' não dependem da escolha de P .

Colocamos um ponto variável $Q \in l$. A posição do ponto $R \in l$ fica determinada pela equação $QM = MR$. Construimos as retas tangentes a c , diferentes de l , partindo de Q e R . Marcamos P na interseção destas tangentes. Adicionalmente, seja c' o exincírculo do $\triangle PQR$, S' o centro de c' , e W e W' os pontos de tangência de c e c' com a reta PQ , respectivamente. A reta PS' é a bissetriz do $\angle QPR$.

Como $WS \parallel W'S'$ e $\angle WPS = \angle W'PS'$ temos que $\triangle WSP \sim \triangle W'S'P$. Logo,

$$\frac{WS}{W'S'} = \frac{SP}{S'P} = \frac{WP}{W'P}.$$

Mas $WS = SX$ e $W'S' = S'U'$. Segue que

$$\frac{SX}{S'U'} = \frac{SP}{S'P} = \frac{WP}{W'P}.$$

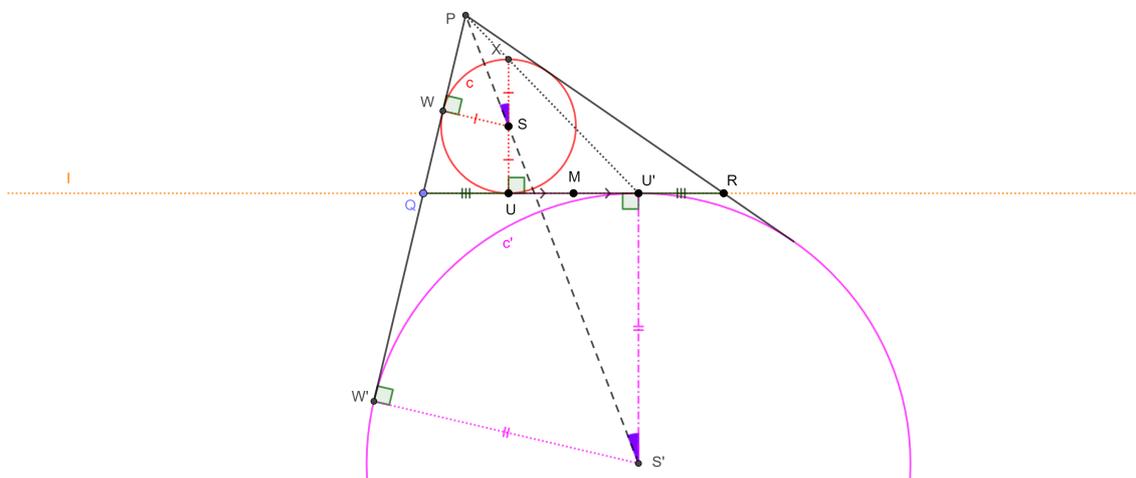
Adicionalmente, de $SX \parallel S'U'$, então $\angle PSX = \angle PS'U'$. Pelo critério de semelhança LAL temos que $\triangle PSX \sim \triangle PS'U'$ e o ponto X é colinear com P e U' . Isto é, P é o ponto de homotetia externo das circunferências c e c' . Dada a configuração inicial do problema basta construir os pontos X e U' para localizar o ponto P na semirreta $U'X$, além de X .

A Figura 4.4.2 mostra uma construção geométrica. No link interativo indicado é possível deslocar o ponto Q para observar o rastro deixado pelo ponto P .

Por outro lado, dado um ponto P na semirreta $U'X$, além de X , é possível construir as

tangentes a c partindo de P e marcar suas interseções com l . Isto é, encontrar os pontos Q e R .

Figura 4.4.2: Construção geométrica para o Problema 12. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.5 Incírculo, exincírculo, potência de um ponto relativo a uma circunferência. P5 IMO 1999.

Problema 13. *Sejam duas circunferências k_1 e k_2 que se intersectam nos pontos X e Y e são tangentes internamente a circunferência k nos pontos M e N , respectivamente. Adicionalmente, o centro de k_2 está sobre k_1 . Sejam A e B os pontos de interseção da reta XY com k . As retas MA e MB intersectam k_1 em C e D , respectivamente. Provar que k_2 é tangente a CD .*

A IMO 1999 foi realizada na cidade de Bucareste, Romênia [10]. Problema 12 da lista corta, e escolhido como P5 da competição, proposto pela delegação da Rússia [11].

4.5.1 Resolução do Problema 13.

A Figura 4.5.1 mostra uma construção geométrica inicial. Esboçamos primeiro a circunferência k , de centro O , e colocamos o ponto $M \in k$. Segundo, o centro O_1 , da circunferência k_1 , deve ser posicionado sobre o segmento OM , para garantir a tangência interna, em M , de k e k_1 . Terceiro, colocamos o centro $O_2 \in k_1$, e encontramos $N = OO_2 \cap k$, assegurando a tangência interna de k e k_2 .

Demonstração. O ponto A está no eixo radical das circunferências k_1 e k_2 . Logo, $AC \cdot AM = AX \cdot AY = AE \cdot AN$. A equação anterior significa que o quadrilátero $MNEC$ é inscrito.

Seja Z a segunda interseção de MN com k_1 . E seja M' um ponto na tangente comum a k e k_1 em M . Então, pela igualdade entre ângulo inscrito e de segmento, temos $\angle MCZ = \angle M'MZ = \angle M'MN = \angle MAN$ (como ângulos orientados). Isto significa que $CZ \parallel AN$.

Por correspondentes entre paralelas $\angle ANM = \angle CZM$. Como $MNEC$ é cíclico também temos que $\angle ACE = \angle ANM$. Como $\angle MO_1C = 2\angle CZM$, e o $\triangle CO_1M$ é isósceles, a igualdade $\angle CZM = \angle ACE$ significa que CE é tangente a k_1 . Analogamente se prova que k_2 é tangente a CD . \square

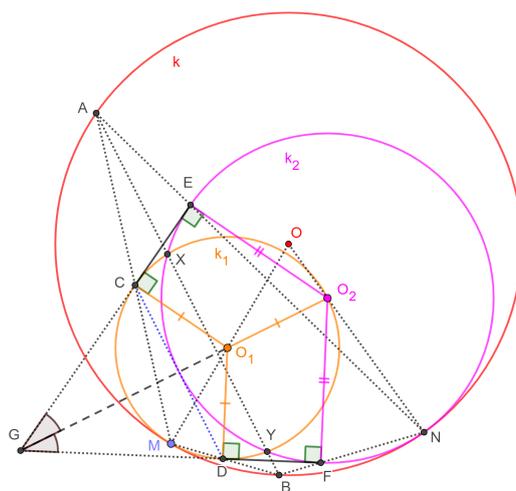
Retomando o problema principal, a Figura 4.5.3 mostra uma construção geométrica. Sejam E e F , respectivamente, as interseções de NA e NB com k_2 . Aplicando o Lema 19 CE e DF são as tangentes externas comuns a k_1 e k_2 .

Quando k_1 e k_2 têm o mesmo raio a reta CD passa pelo ponto O_1 , ponto de tangência com k_2 , o quadrilátero $DFEC$ é um retângulo e o resultado procurado fica provado. Para os outros casos, seja $G = CE \cap DF$.

Os centros O_1 e O_2 estão sobre a bissetriz do $\angle CGD$, devido a k_1 e k_2 serem tangentes a GC e GD . Como $O_1D = O_1C$ e $\angle O_1DG = \angle O_1CG = 90^\circ$, segue que O_1 é o ponto médio do menor arco CD da circunferência circunscrita do $\triangle CDG$.

Pela Proposição 16 encontramos que O_2 é o ex-centro do $\triangle CDG$ oposto a G ou o incentro. Isto é, k_2 é um exincírculo ou o incírculo do $\triangle CDG$. Nos dois casos concluímos que CD é tangente a k_2 .

Figura 4.5.3: Construção geométrica para o Problema 13. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.6 Bissetrizes, paralelogramo, semelhanças de triângulos. P16 SL IMO 2005.

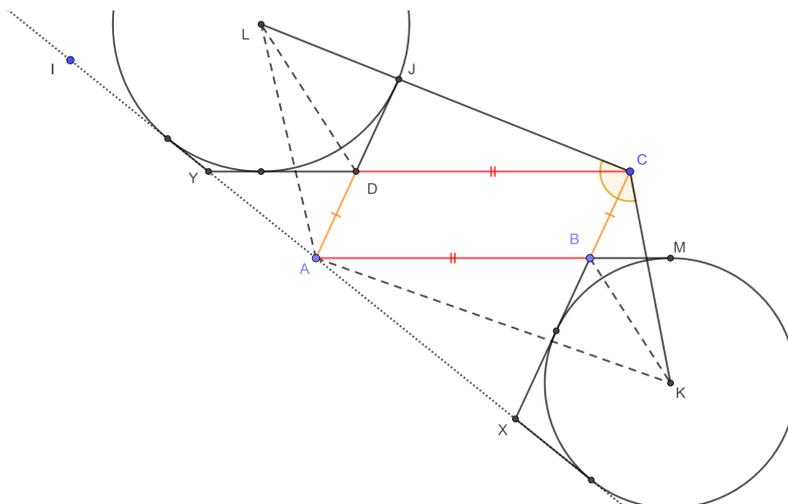
Problema 14. *Seja $ABCD$ um paralelogramo. Uma linha variável l passa pelo ponto A e intersecta as retas BC e DC nos pontos X e Y , respectivamente. Sejam K e L os centros dos exincírculos dos triângulos ABX e ADY , que tocam os lados BX e DY , respectivamente. Provar que a medida do ângulo KCL não depende da escolha da linha l .*

A IMO 2005 foi realizada na cidade de Mérida, México [10]. Problema 16 da lista corta, proposto pela delegação da Ucrânia [11].

4.6.1 Resolução do Problema 14.

A Figura 4.6.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.6.1: Construção geométrica inicial para o Problema 14. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Primeiro notamos que por $ABCD$ ser um paralelogramo temos $AB = CD$, $BC = DA$, $\angle ABC = \angle CDA$ e $\angle YDA = \angle DAB = \angle BCD = \angle ABX$. Adicionalmente, como DL , BK , AL e AK são bissetrizes vale que $\angle YDL = \angle LDJ$, $\angle XBK = \angle KBM$, $\angle YAL = \angle LAD$ e $\angle BAK = \angle KAX$.

Como

$$\angle ADL = \angle KBA = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle CDA$$

e $\angle ALD = \frac{1}{2}\angle AYD = \angle KAB$, por AA, temos $\triangle ABK \sim \triangle LDA$. Logo,

$$\frac{BK}{BC} = \frac{BK}{AD} = \frac{AB}{DL} = \frac{DC}{DL}.$$

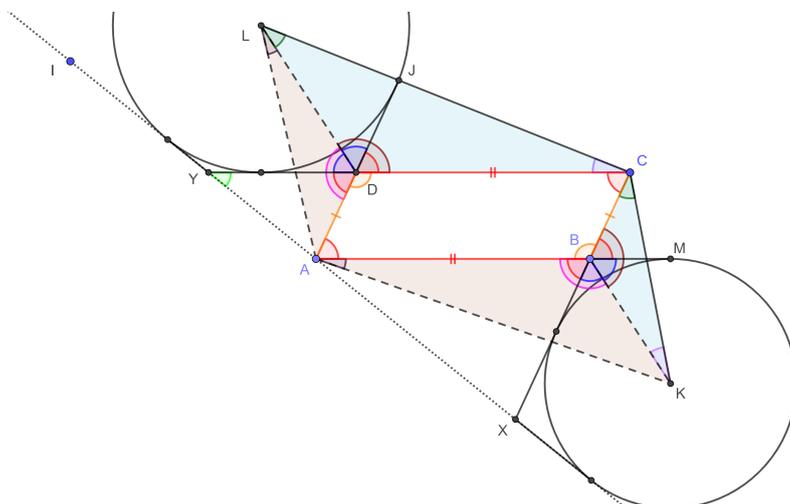
A primeira e última fração do resultado anterior, unido a $\angle LDC = \angle CBK$, pelo caso de semelhança LAL, leva a que $\triangle LDC \sim \triangle CBK$. Logo, $\angle DCL = \angle BKC$ e $\angle CLD = \angle KCB$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \angle KCL &= 360^\circ - \angle BCD - (\angle DCL + \angle KCB) = \\ &= 360^\circ - \angle BCD - (\angle BKC + \angle KCB) = \\ &= 360^\circ - \angle BCD - (180^\circ - \angle CBK) = \\ &= 180^\circ - \angle BCD + \angle CBK = \angle CBA + \angle CBK, \end{aligned}$$

que é constante. Isto é, o $\angle KCL$ somente depende da construção do paralelogramo $ABCD$ e não da escolha de l . A Figura 4.6.2 mostra uma construção geométrica.

Figura 4.6.2: Construção geométrica para o Problema 14. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.7 Exincírculo, potência de um ponto relativo a uma circunferência, ângulos. P18 SL IMO 2006.

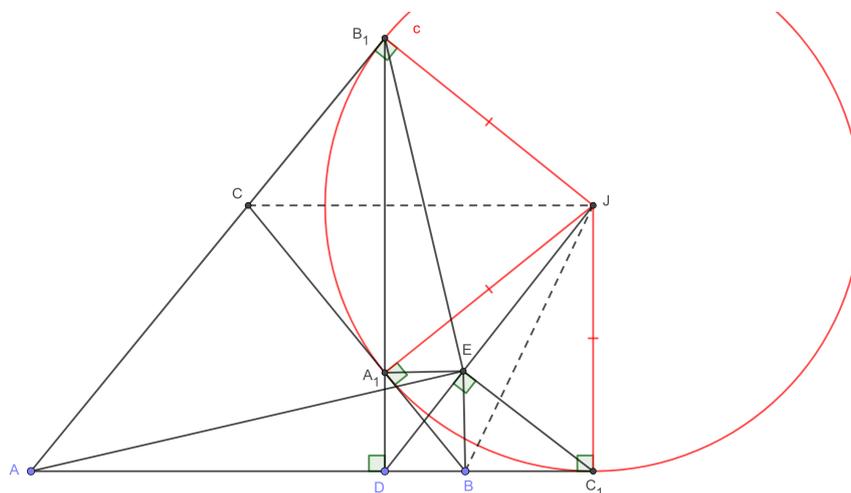
Problema 15. Num triângulo ABC , seja J o centro do exincírculo tangente ao lado BC em A_1 e as extensões dos lados AC e AB em B_1 e C_1 , respectivamente. Supor que a reta A_1B_1 e AB são perpendiculares e se intersectam em D . Seja E o pé da perpendicular de C_1 até o segmento DJ . Determinar os ângulos BEA_1 e AEB_1 .

A IMO 2006 foi realizada na cidade de Liubliana, Eslovênia [10]. Problema 18 da lista corta, proposto pela delegação da Grécia [11].

4.7.1 Resolução do Problema 15.

A Figura 4.7.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.7.1: Construção geométrica inicial para o Problema 15. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Consideramos as circunferências ω_1 , ω_2 e ω_3 de diâmetros C_1D , A_1B e AB_1 , respectivamente. Por construção, os segmentos JC_1 , JA_1 e JB_1 são tangentes a ω_1 , ω_2 e ω_3 , respectivamente. Devido ao ângulo reto em D , ω_2 e ω_3 passam por D .

Como $\angle C_1ED = 90^\circ$ temos $E \in \omega_1$. Pela potência do ponto J em relação a ω_1 [9] podemos escrever

$$JC_1^2 = JD \cdot JE.$$

Adicionalmente, de $JA_1 = JB_1 = JC_1$, raios do exincírculo c , também vale que

$$JA_1^2 = JD \cdot JE,$$

$$JB_1^2 = JD \cdot JE.$$

Mas pela inversa do teorema das cordas [9] as igualdades anteriores significam que $E \in \omega_2$ e $E \in \omega_3$ e $\angle BEA_1 = \angle AEB_1 = 90^\circ$. O ponto E é centro radical de ω_1 , ω_2 e ω_3 . A Figura 4.7.2 mostra uma construção geométrica.

Capítulo 5

Extremos com desigualdades

5.1 Introdução

Nos Problema 16, 19 e 20 se explora a desigualdade triangular e das médias. Os Problemas 17 e 18 usam fundamentalmente a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

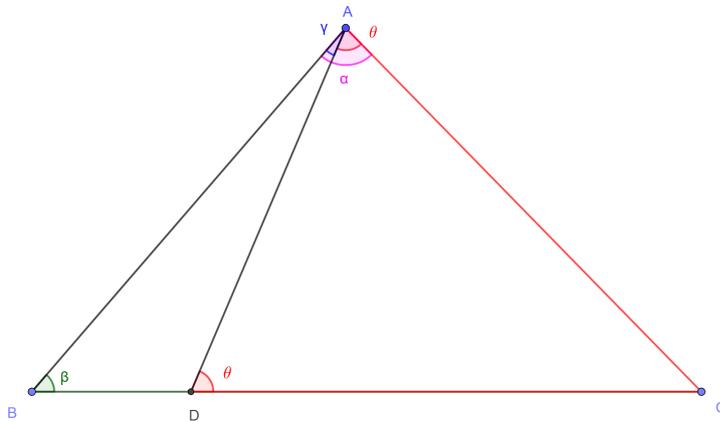
Iniciamos com uma apresentação de algumas desigualdades usadas para encontrar máximos e mínimos.

5.2 Conceitos básicos

Proposição 20. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados não são congruentes, e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

Demonstração. A Figura 5.2.1 mostra um triângulo ABC . Iremos supor que $BC > AC$. Marcamos sobre BC o ponto D tal que $AC = CD$. Logo, o $\triangle CAD$ é isósceles de base AD e $\angle CAD = \angle CDA = \theta$.

Sejam $\angle CBA = \beta$ e $\angle BAD = \gamma$. Pelo teorema do ângulo externo temos $\theta = \beta + \gamma$. Portanto, $\theta > \beta$. Além disso, como $\angle BAC = \alpha = \theta + \gamma$, então $\alpha > \beta$. Isto é, oposto ao maior lado corresponde o maior ângulo. \square

Figura 5.2.1: Guia para a demonstração da Proposição 20. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Por redução ao absurdo e a Proposição anterior se prova a recíproca. Isto é, o maior lado é oposto ao maior ângulo.

Proposição 21 (Desigualdade triangular). *A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.*

Demonstração. Basta mostrar que o maior lado é menor que a soma dos outros dois. A Figura 5.2.2 mostra um triângulo ABC . Iremos supor, sem perda de generalidade, $BC > CA > AB$. Estendemos a semirreta CA e marcamos o ponto $D \in CA$ de tal forma que $AD = AB$. Como o $\triangle ABD$ é isósceles de base BD temos $\angle ABD = \angle ADB = \theta$. Adicionalmente, de

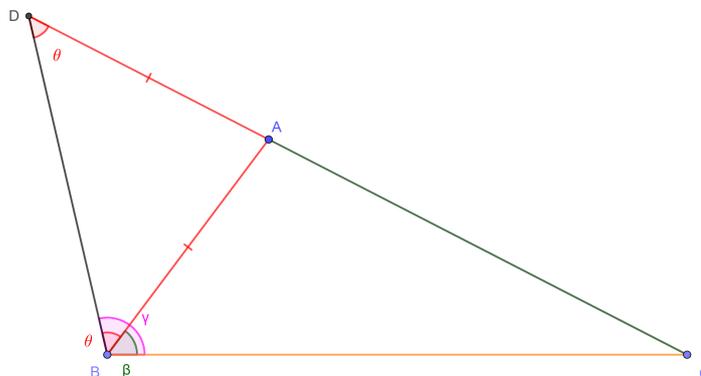
$$\angle DBC = \gamma = \theta + \beta > \theta = \angle BDA$$

e a Proposição 20, segue que

$$CD = CA + AD = CA + AB > BC.$$

□

Figura 5.2.2: Guia para a demonstração da Proposição 21. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Proposição 22 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Dadas duas sequências de números reais (a_1, a_2, \dots, a_n) e (b_1, b_2, \dots, b_n) então*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \tag{5.2.1}$$

e vale a igualdade quando $b_i = \lambda a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ com λ real.

Demonstração. Consideremos a função real de variável real

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado e colocando x em evidência podemos escrever

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Isto é, $f(x)$ é um polinômio de segundo grau em x . Como $f(x)$ é uma soma de quadrados teremos $f(x) \geq 0$ e seu discriminante negativo ou igual a zero:

$$\Delta = 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0.$$

Dividindo por 4 obtemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz reescrita com os símbolos de

somatórios:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2.$$

A igualdade acontece quando o discriminante é zero. Nesse caso $f(x)$ tem uma raiz dupla $x = \lambda$. Mas isto corresponde a

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2 = 0.$$

Como as sequências (a_n) e (b_n) são de números reais, os quadrados são não negativos. A única possibilidade é que $a_i \lambda - b_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Isto é, acontece a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz quando as sequências (a_n) e (b_n) são proporcionais. \square

Uma verificação interativa da desigualdade de Cauchy-Schwarz, com sequências bidimensionais, pode ser feita [aqui](#).

Proposição 23 (Desigualdade das médias aritmética e geométrica). *Seja $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma lista de números reais positivos com $n \geq 2$, então*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i},$$

onde $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ e $\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$. A igualdade ocorre quando $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Demonstração. Caso $n = 2$: Queremos provar que:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}.$$

Multiplicando os dois lados por 2 e elevando ao quadrado temos:

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 \cdot x_2.$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando obtemos outras sentenças equivalentes:

$$x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 4x_1 \cdot x_2,$$

$$x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 0,$$

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Mas o quadrado de um número real é sempre não negativo. A igualdade acontece quando $x_1 = x_2$. \square

A demonstração para $n > 2$ pode ser encontrada, por exemplo, em [17]. Uma verificação interativa da desigualdade das médias, usando dois segmentos, pode ser feita [aqui](#).

5.3 Desigualdade triangular, desigualdade das médias, áreas. P1 IMO 1976.

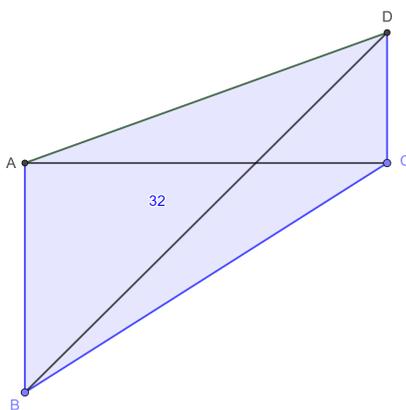
Problema 16. *Num quadrângulo convexo com área 32 cm^2 , a soma dos comprimentos de dois lados não adjacentes e uma diagonal é igual a 16 cm . a) Qual é o comprimento da outra diagonal? b) Quais são os comprimentos dos lados do quadrângulo se o perímetro é um mínimo? c) Será possível escolher os lados para que o perímetro seja um máximo?*

A IMO 1976 foi realizada na cidade de Lienz, Áustria [10]. Problema 3 da lista corta, proposto pela delegação da antiga Checoslováquia e escolhido como P1 da competição [11].

5.3.1 Resolução do Problema 16.

A Figura 5.3.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 5.3.1: Construção geométrica inicial para o Problema 16. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Um quadrângulo é uma figura plana que consiste em quatro pontos, cada um unido a outros dois por segmentos (que se intersectam ou não). Quando o quadrângulo é convexo, equivale a um quadrilátero convexo.

Seja $S = 32 \text{ cm}^2$ e

$$16 \text{ cm} = d = AB + CD + AC. \quad (5.3.1)$$

a) A área do quadrângulo $ABCD$ pode ser calculada pela soma das áreas dos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$, onde AC é o lado comum. Adicionalmente, o valor máximo da área acontece quando os dois triângulos são retângulos. Isto é,

$$S \leq \frac{1}{2}AC(AB + CD).$$

Usando (5.3.1) reescrevemos

$$S \leq \frac{1}{2}AC(d - AC). \quad (5.3.2)$$

Por outro lado, considerando AC como variável e usando a desigualdade das médias geométrica e aritmética (Proposição 23) no conjunto de números positivos $\{AC, d - AC\}$ temos

$$\begin{aligned} \sqrt{AC(d - AC)} &\leq \frac{AC + (d - AC)}{2}, \\ AC(d - AC) &\leq \frac{d^2}{4}. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

A igualdade acontece quando $AC = d - AC$ ou $AC = \frac{d}{2}$. Considerando (5.3.2) e (5.3.3) encontramos

$$S \leq \frac{d^2}{8}.$$

Usando os números dados para d e S concluímos que somente é possível a igualdade. Isto é, $AC = AB + CD = 8 \text{ cm}$, $AB \perp AC$ e $CD \perp AC$.

Construímos a reta AB e traçamos por D uma reta l paralela com AC . Marcamos o ponto $E = AB \cap l$. O triângulo BED , retângulo em E , permite calcular, pelo teorema de Pitágoras, o comprimento

$$BD = 2\sqrt{ED} = 2\sqrt{AC} = 2\sqrt{8}.$$

b) Para encontrar o valor mínimo do perímetro do quadrilátero $ABCD$ basta minimizar a soma $BC + AD$, pois $AB + CD = 8$. Para isso, posicionamos um ponto F de tal forma que o quadrilátero $ACFD$ seja um paralelogramo. Isto é, $DF = 8 \text{ cm}$ e $AD = CF$. Construímos também o segmento BF .

Aplicando a desigualdade triangular no $\triangle BCF$ temos:

$$BC + CF = BC + AD \geq BF.$$

Isto é, o valor mínimo de $BC + AD = BF$ e $C \in BF$. Usando o teorema de Pitágoras no $\triangle BEF$ encontramos $BF = 8\sqrt{5}$.

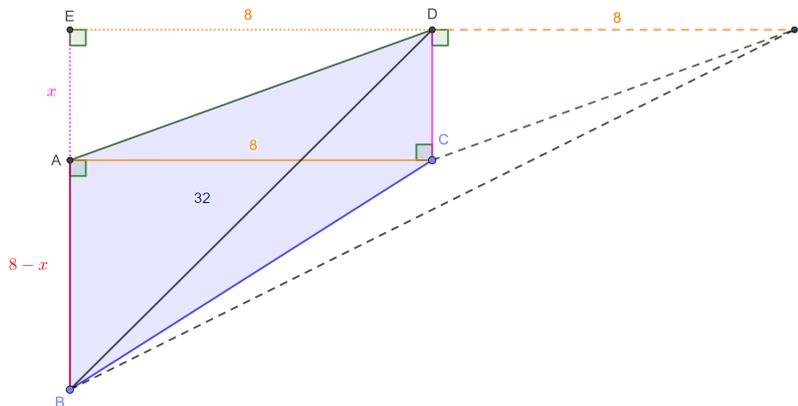
Por outro lado, quando $C \in BF$, por AA, temos $\triangle FDC \sim \triangle FEB$. Pela proporcionalidade dos lados segue que $CF = AD = \frac{BF}{2}$ e $DC = \frac{EB}{2} = 4$. Logo, $AD = BC = 4\sqrt{5}$ e $AB = CD = 4$.

c) Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $CD < AB$. Neste caso, o ponto C está no interior do $\triangle BDF$ e vale que

$$BC + AD = BC + CF \leq BD + DF.$$

Isto é, o valor máximo da soma $BC + AD$ é atingido quando os pontos C e D coincidem e o quadrângulo $ABCD$ é degenerado. A Figura 5.3.2 mostra uma construção geométrica.

Figura 5.3.2: Construção geométrica para o Problema 16. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

5.4 Desigualdade de Cauchy-Schwarz, incentro, áreas. P1 IMO 1981.

Problema 17. Encontrar o ponto P no interior de um $\triangle ABC$ para o qual a soma

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \tag{5.4.1}$$

é mínima, onde PD , PE e PF são as perpendiculares de P a BC , CA e AB , respectivamente.

A IMO 1981 foi realizada na cidade de Washington, EUA [10]. Problema 15 da lista corta, proposto pela delegação do Reino Unido e escolhido como P1 da competição [11].

5.4.1 Resolução do Problema 17.

Notamos que para qualquer ponto P no interior do $\triangle ABC$ a soma

$$BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF \quad (5.4.2)$$

é duas vezes a área do mesmo. Isto é, o resultado é constante (não depende de P).

Lembrando da desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 22) escrevemos

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2.$$

Identificando em (5.4.2) que $a_1^2 = BC \cdot PD$, $a_2^2 = CA \cdot PE$, $a_3^2 = AB \cdot PF$ e em (5.4.1) que $b_1^2 = \frac{BC}{PD}$, $b_2^2 = \frac{CA}{PE}$ e $b_3^2 = \frac{AB}{PF}$ temos

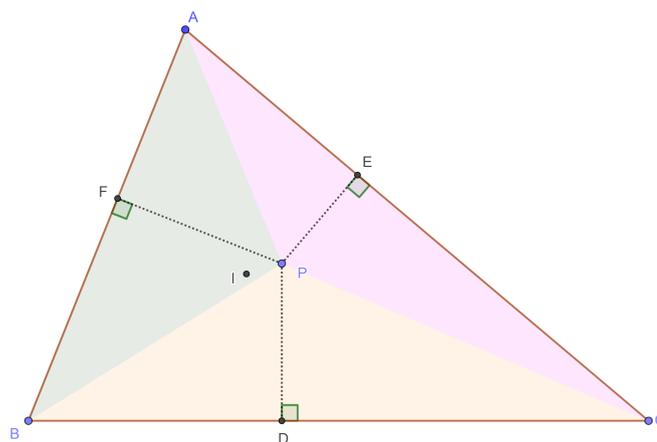
$$(BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF) \left(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \right) \geq (BC + CA + AB)^2.$$

A igualdade na desigualdade anterior (valor mínimo de (5.4.1)) acontece quando as sequências (a_n) e (b_n) são proporcionais. Isto é, quando existe um número λ tal que

$$(a_1, a_2, a_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3).$$

Logo, $\lambda = PD = PE = PF$. Portanto, o ponto P que minimiza (5.4.1) é o incentro do $\triangle ABC$. A Figura 5.4.1 mostra uma construção geométrica.

Figura 5.4.1: Construção geométrica para o Problema 17. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

5.5 Desigualdade de Cauchy-Schwarz, incírculo, tangentes. P6 IMO 1983.

Problema 18. *Se a , b e c são lados de um triângulo, provar que*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0. \quad (5.5.1)$$

Determinar quando vale a igualdade.

A IMO 1983 foi realizada na cidade de Paris, França [10]. Problema 9 da lista curta, proposto pela delegação dos Estados Unidos e escolhido como P6 da competição [11].

5.5.1 Resolução do Problema 18.

Construímos a circunferência inscrita d no $\triangle ABC$ e marcamos os pontos de interseção A' , B' e C' de d com os lados BC , CA e AB , respectivamente. Devido a tangência temos $AB' = AC' = x$, $BA' = BC' = y$ e $CA' = CB' = z$. Logo,

$$\begin{aligned} a &= y + z, \\ b &= z + x, \\ c &= x + y. \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

Substituindo (5.5.2) em (5.5.1) segue

$$(y+z)^2(z+x)(y-x) + (z+x)^2(x+y)(z-y) + (x+y)^2(y+z)(x-z) \geq 0.$$

Expandindo e simplificando temos

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(y+z+x).$$

Multiplicando os dois lados pelo número positivo $z+x+y$ encontramos uma desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 22):

$$(xy^3 + yz^3 + zx^3)(z+x+y) \geq [\sqrt{xyz}(y+z+x)]^2.$$

As duas sequências que dão origem a desigualdade anterior são:

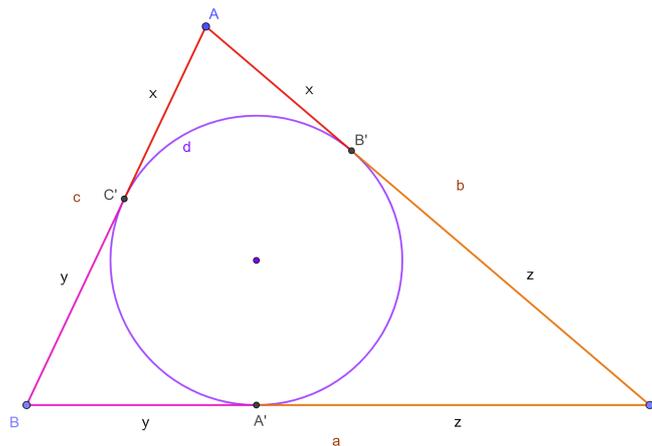
$$\begin{aligned} &(y\sqrt{xy}, z\sqrt{yz}, x\sqrt{zx}), \\ &(\sqrt{z}, \sqrt{x}, \sqrt{y}). \end{aligned}$$

A igualdade acontece quando as seqüências são proporcionais. Isto é,

$$\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{zx^3}{y}.$$

Como x , y e z são números reais positivos existe uma única solução para a igualdade anterior: $x = y = z$. Logo, $a = b = c$. A Figura 5.5.1 mostra uma construção geométrica.

Figura 5.5.1: Construção geométrica para o Problema 18. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

5.6 Desigualdade triangular, bases médias e paralelogramo. P7 SL IMO 1999.

Problema 19. *Seja ABC um triângulo e M um ponto em seu interior. Provar que*

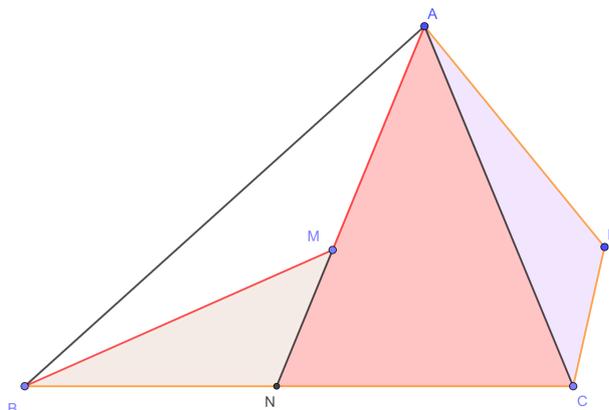
$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + BC + CA.$$

A IMO 1999 foi realizada na cidade de Bucarest, Romênia [10]. Problema 7 da lista corta, proposto pela delegação da Armênia [11].

5.6.1 Resolução do Problema 19.

Lema 24. *Seja M um ponto no interior de uma quadrilátero convexo $ABCD$. Então vale que $AM + MB < BC + CD + DA$.*

Demonstração. A Figura 5.6.1 mostra uma construção geométrica.

Figura 5.6.1: Construção geométrica para o Lema 24. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Seja $N = AM \cap BC$. Será usada três vezes a desigualdade triangular. No $\triangle MNB$ vale que $MB < MN + NB$ logo

$$AM + MB < AM + MN + NB = AN + NB.$$

No $\triangle ANC$ temos $AN < NC + CA$. Com isto

$$AN + NB < NC + CA + NB = CA + BC.$$

E no $\triangle CDA$ vale que $CA < CD + DA$. Portanto,

$$CA + BC < CD + DA + BC.$$

□

Sejam E , F e J os pontos médios de BC , AC e AB , respectivamente. Qualquer ponto M no interior do $\triangle ABC$ está no interior de, por lo menos, dois dos quadriláteros $ABEF$, $BCFJ$ e $CAJE$. Iremos supor, sem perda de generalidade, que $MB = \min\{MA + MB + MC\}$. Isto é, M está no interior de $ABEF$ e $BCFJ$.

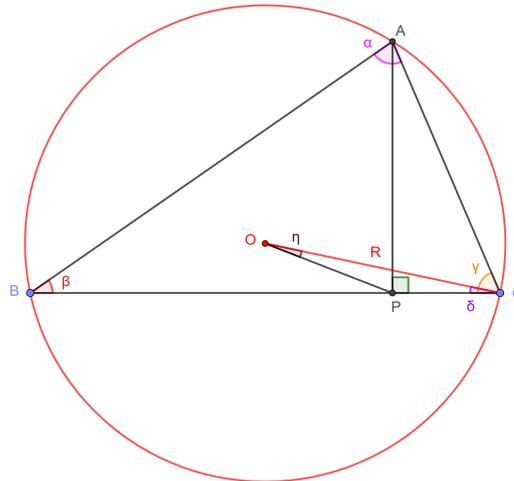
Aplicando o Lema 24 ao quadrilátero $ABEF$ temos:

$$AM + MB < BE + EF + FA. \quad (5.6.1)$$

5.7.1 Resolução do Problema 20.

A Figura 5.7.1 mostra uma construção geométrica.

Figura 5.7.1: Construção geométrica para o Problema 20. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $\angle OCP = \delta$ e $\angle COP = \eta$. Temos $\gamma \geq \beta + 30^\circ$. Como um ângulo central $\angle BOC = 2\alpha$ é duas vezes o inscrito $\angle BAC = \alpha$ e o $\triangle OBC$ é isósceles, segue que $\angle OCB = \delta = 90^\circ - \alpha$.

Do enunciado do Problema 20 queremos provar que $\eta < \delta$. Pela Proposição 5.2.1, aplicada no $\triangle COP$, o anterior equivale a demonstrar que $PC < OP$. Por sua vez, para verificar que $PC < OP$ bastará mostrar que

$$2 \cdot PC < OC = R. \tag{5.7.1}$$

De fato, aplicando a desigualdade triangular no $\triangle OCP$ e multiplicando por 2 podemos escrever:

$$2R < 2 \cdot OP + 2 \cdot PC.$$

Usando (5.7.1) temos

$$2R < 2 \cdot OP + R,$$

$$R < 2 \cdot OP. \tag{5.7.2}$$

Logo, de (5.7.1) e (5.7.2) segue

$$2 \cdot PC < R < 2 \cdot OP \Rightarrow PC < OP.$$

Devido ao $\angle CPA = 90^\circ$ segue

$$PC = AC \cos(\gamma).$$

Mas pela lei dos senos no $\triangle ABC$ temos

$$2R = \frac{AC}{\text{sen}(\beta)}.$$

Logo,

$$PC = 2R \text{sen}(\beta) \cos(\gamma).$$

Usando a hipótese $\gamma \geq \beta + 30^\circ$ e o fato da função cosseno ser decrescente no intervalo entre 0 e 90° encontramos

$$PC < 2R \text{sen}(\beta) \cos(\beta + 30^\circ).$$

Resta mostrar que

$$2\text{sen}(\beta) \cos(\beta + 30^\circ) < \frac{1}{2}.$$

De fato, usando as identidades do cosseno e seno da soma de dois ângulos temos:

$$\begin{aligned} 2\text{sen}(\beta) \cos(\beta + 30^\circ) &= 2\text{sen}(\beta)[\cos(\beta) \cos(30^\circ) - \text{sen}(\beta) \text{sen}(30^\circ)] = \\ &= \text{sen}(2\beta) \cos(30^\circ) - 2\text{sen}^2(\beta) \text{sen}(30^\circ). \end{aligned}$$

Somando e restando $\text{sen}(30^\circ)$ encontramos

$$\begin{aligned} 2\text{sen}(\beta) \cos(\beta + 30^\circ) &= \text{sen}(2\beta) \cos(30^\circ) + (1 - 2\text{sen}^2(\beta)) \text{sen}(30^\circ) - \text{sen}(30^\circ) = \\ &= \text{sen}(2\beta) \cos(30^\circ) + \cos(2\beta) \text{sen}(30^\circ) - \text{sen}(30^\circ) = \\ &= \text{sen}(2\beta + 30^\circ) - \text{sen}(30^\circ) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

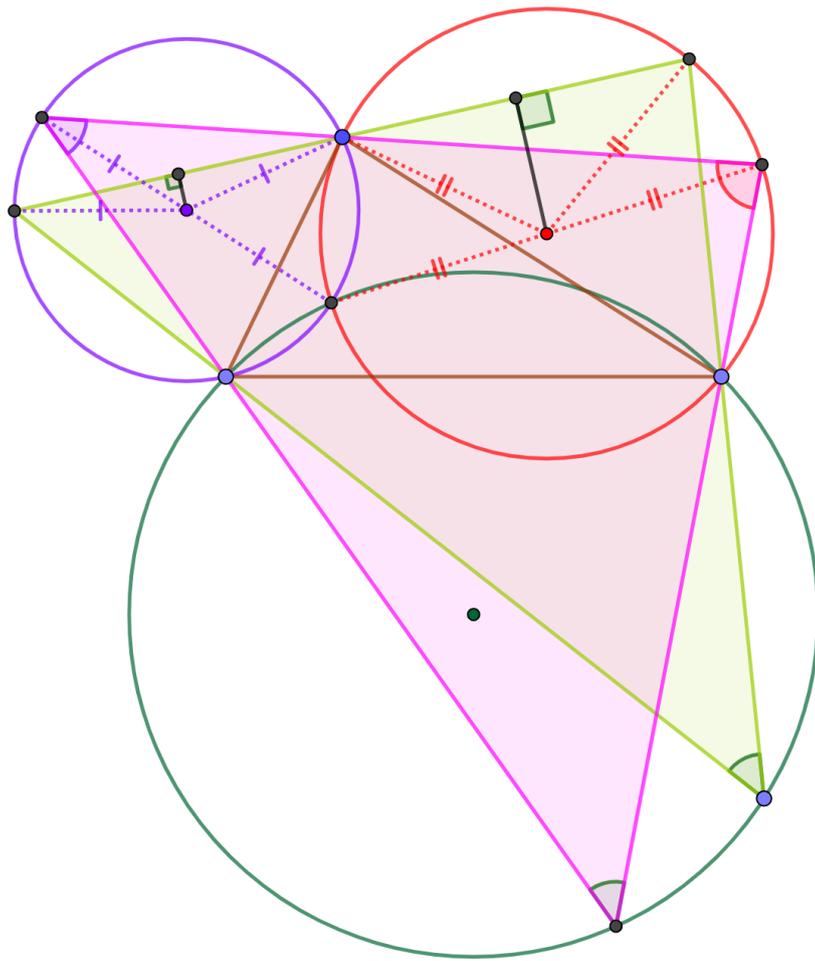
Capítulo 6

Referências Bibliográficas

- [1] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 14 jun. 2021. 1
- [2] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 14 jun. 2021. 1
- [3] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática**. 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 14 jun. 2021. 1
- [4] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 14 jun. 2021. 1
- [5] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5

- (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 14 jun. 2021. **1**
- [6] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvoll7ermac202023169664jllabagfb127138. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 14 jun. 2021. **1**
- [7] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdvoll8202023169664jllabagfb7888. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 14 jun. 2021. **1**
- [8] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdvoll9202023169664jll118127. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 14 jun. 2021. **1**
- [9] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. Aceito em **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. -, jul. 2021. DOI:. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 14 jun. 2021. **1, 4.7.1**
- [10] INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. **Timeline**. 2019. Disponível em: <https://www.imo-official.org/organizers.aspx>. Acesso em: 14 jun. 2021. **2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7**
- [11] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium**: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004. New York: Springer, 2006. Disponível em: <http://web.cs.elte.hu/~nagyzoli/compendium.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2021. **2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7**

- [12] **Problems and Solutions of the 2nd IGO**. 2015. Disponível em:
<https://igo-official.ir/events/2/>. Acesso em: 14 jun. 2021. 2.7
- [13] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. 3.2, 3.2
- [14] Delgado, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. 3.2
- [15] Pinheiro, P. R. O Círculo dos Nove Pontos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 14, p. 1-9, 1989. Disponível em:
<https://www.rpm.org.br/cdrpm/14/12.htm>. Acesso em: 14 jun. 2021. 3.2
- [16] RODRIGUES, A. R. Napoleão e as Revoluções no Plano Euclidiano. **É Matemática, Oxente!**, v. 1, p. 1-9, 2019. Disponível em:
<http://ematematicaoxente.com.br>. Acesso em: 14 jun. 2021. 3.6.1, 3.6.1
- [17] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção ProfMat). 5.2



ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book)