



**EESC · USP**

*Escola de Engenharia de São Carlos  
Universidade de São Paulo*

# VIBRAÇÃO DAS ESTRUTURAS

**JOSÉ ELIAS LAIER**

**2ª Edição - Revisada  
Outubro de 2024**

VIBRAÇÃO DAS ESTRUTURAS

# VIBRAÇÃO DAS ESTRUTURAS

**José Elias Laier**  
Professor Titular  
Departamento de Engenharia de Estruturas  
Escola de Engenharia de São Carlos  
Universidade de São Paulo

Segunda Edição Revisada

Outubro de 2024

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor - Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-Reitora - Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Diretor - Fernando Martini Catalano

Vice-diretor – Antônio Néelson Rodrigues da Silva



Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citado a fonte e autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada USP

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues  
Fontes da EESC/USP

L185v                    Laier, José Elias  
                              Vibração das estruturas / José Elias Laier. - 2.ed. -  
São Carlos : EESC/USP, 2024.  
                              [576p.]  
                              ISBN 978-65-86954-46-3  
                              DOI 10.11606/9786586954463

1. Dinâmica das estruturas.    2. Superposição modal.  
3. Propagação ondulatória.   4. Vibrações aleatórias.  
5. Dinâmica não-linear. I. Título.

Elaborado por Elena Luzia Palloni Gonçalves – CRB 8/4464

## **APRESENTAÇÃO: PRIMEIRA EDIÇÃO**

Este texto é voltado para estudantes dos cursos de engenharia, especialmente de engenharia civil, bem como profissionais de engenharia em geral, tendo-se em mente que nos tempos atuais o conhecimento dos conceitos de dinâmica das estruturas vem ganhando importância crescente, como vai chamar a atenção a exposição inicial do Capítulo I, seguido de uma explanação geral do tema sob a ótica da engenharia.

Inicialmente é importante ressaltar que a solução da equação de movimento é, no presente texto, alcançada mediante duas técnicas matemáticas de integração, quais sejam, a técnica da superposição modal, assunto dos capítulos de II a VII, também referida como técnica de integração em termos finitos, dado que o domínio de integração deve ser finito; e a técnica de superposição ondulatória, assunto dos capítulos VIII e IX, também referida como técnica de integração em termos não finitos, dado que o domínio de integração nesse caso pode ser não finito. No desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos apresentado no Capítulo X deixa-se claro que essas duas técnicas podem ser empregadas também na versão numérica da equação de movimento.

Vale também ressaltar ainda que aspectos que interessam à prática, como as técnicas de avaliação do amortecimento, ou seja, Técnica do Decaimento Logarítmico, Técnica da Meia Potência e Técnica do Círculo de Nyquist (círculo ajustado), são apresentados em detalhes; sem contar estudo dos sensores de vibração e o tratamento digital de sinais de vibração.

A exposição dos assuntos abordados, tendo-se por referência os ensinamentos didáticos do Prof. Dr. Frederico Schiel, responsável pela Cátedra que deu origem ao atual Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, tem início sempre pelo tratamento de casos mais simples, evoluindo-se gradativamente para os mais completos (complicados).

A equação de movimento de um grau de liberdade é apresentada no Capítulo II, partindo-se dos fundamentos das Leis de Newton, tendo-se em conta as ações de inércia, de viscosidade e de rigidez, supostas em regime linear; estudando-se a contribuição isolada de cada uma dessas ações, bem como na sequência suas combinações, visando-se mostrar suas contribuições no comportamento do conjunto. Além disso, a técnica de integração da equação de movimento é explicada em detalhes, lançando-se mão das séries de Taylor, que consiste numa maneira imediata e simples de abordagem das equações em jogo. O estudo do problema da isolação de vibrações exemplifica bem o emprego das técnicas analíticas de solução, bem como a formulação de duas técnicas de medição indireta do amortecimento; sem contar uma breve apresentação dos fundamentos dos sensores de medição do movimento, como o acelerômetro e sismômetro.

Outras técnicas de integração são estudadas no Capítulo III, onde chama-se a atenção para a técnica da convolução de Duhamel formulada de maneira mais direta, e da transformada de Fourier, muito útil do ponto de vista operacional

na abordagem de vibrações aleatórias, encerrando-se com a terceira técnica de medição indireta do amortecimento, denominada de Círculo Ajustado (Circle Fitted), que decorre de um exame da transformada de Fourier do movimento livre produzido por impacto e por deslocamento inicial imposto.

As técnicas de integração numérica da equação de movimento de um grau de liberdade são objeto de apresentação no Capítulo IV, iniciando-se com a clássica das diferenças finitas centrais, seguindo-se da eficiente técnica proposta por Newmark e de outras destacadas na literatura, bem como uma proposta pelo autor em termos das diferenças finitas hermitianas. O estudo detalhado da estabilidade numérica é apresentado para as duas primeiras com extensão imediata para as outras técnicas, bem como a questão do amortecimento numérico. A técnica de integração via transformada de Fourier é discutida apenas como uma ilustração, visto que sua eficiência, mesmo com a versão dada pela transformada rápida de Fourier, fica a desejar na comparação com as integrações numéricas diretas. Em apêndice apresenta-se o tratamento digital de sinais dinâmicos, esclarecendo-se a questão do aliasing (falseamento) e do leakage (descontinuidades), duas distorções introduzidas no sinal digitalizado, bem como o janelamento.

O capítulo V trata dos sistemas estruturais de dois ou mais graus de liberdade, iniciando-se com a formulação via método dos deslocamentos, definição dos modos de vibração e frequências naturais, seguido do estudo da ortogonalidade dos modos naturais de vibração, e método da superposição modal, base da integração em termos finitos da equação de movimento, assumido que o domínio de integração seja finito. Exemplos de aplicação mostrando a questão do batimento e de absorvedor dinâmico, bem como movimentos de base e a mobilização de frequências altas na resposta, que ocorre em problemas da balística, dado que o carregamento do impacto tem curta duração. A abordagem no domínio da frequência, transformada de Fourier, bem como a formulação da integração da equação de movimento via técnica do autovalor complexo, estudo da solução harmônica permanente e justificativa do procedimento SRSS da análise sísmica (raiz quadrada da soma de quadrados). O último tema consiste na formulação do amortecimento histerético.

Vibrações aleatórias são estudadas no Capítulo VI, iniciando-se com a caracterização de processo aleatório, seguido de uma apresentação detalhada da Teoria da Probabilidade, abordagem do processo binário e processo aleatório geral, e ergodicidade. Relações espectrais e integração da equação estocástica para solicitação aleatória vem em seguida. Processos aleatórios de banda estreita e estudo dos estados limites para vibrações aleatórias completam o temário.

Vibração de barras e vigas são o objeto do Capítulo VII, incluindo-se a formulação do modelo de amortecimento viscoso, relações de ortogonalidade dos modos de vibração e integração pela técnica da superposição modal. Estudo de cargas móveis, movimentos de apoio, bem como o modelo flexão de Timoshenko e influência da força normal são desenvolvidos, encerrando-se com o estudo das vibrações de viga sobre base elástica segundo os modelos de Winkler e bi-paramétrico de Pasternak.

O movimento ondulatório de barras e vigas, que se obtém pela integração da equação de movimento em termos não finitos (meio contínuo), são o assunto

do Capítulo VIII, bem como o modelo ondulatório de Timoshenko, inclusive pela inclusão de viscoelasticidade. O movimento ondulatório do contínuo tridimensional constitui tema do Capítulo IX, primeiramente destacando-se as duas ondas de domínio: ondas de tensão normal, chamada onda p, e ondas de cisalhamento, denominadas ondas sh e sv. Estudam-se em seguida a onda de superfície, de Rayleigh, guiada e de Love. O estudo da onda esférica finaliza o capítulo em questão.

A integração numérica na variável espaço é formulada pelo método dos Elementos Finitos via integração pela técnica de Galerkin, iniciando-se com o caso de barras, movimento axial, seguido do caso de flexão de vigas e estudo da dispersão numérica e reflexões espúrias, distorções introduzidas pela integração numérica. As ondas flexionais de Timoshenko, formulação de elementos finitos bi e tridimensionais isoparamétricos, com emprego da variante isoparamétrica e integração mediante quadratura de Gauss e elementos finitos de placas completam o temário sobre o assunto.

O Capítulo X aborda a formulação não linear unidimensional pela variante posicional, integração por meio de funções elíticas e via numérica utilizando-se a formulação de Galerkin, e processo iterativo de Newton, bem como explicitando-se o erro de truncamento. A análise bidimensional segue a mesma orientação empregada no caso unidimensional, acrescentando-se a formulação via tensor de Piola-Kirchhoff, bem como o emprego da fórmula de Nanson.

O texto em questão é o resultado final do compromisso assumido pelo autor para com a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Coordenação para o Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, do Ministério da Educação e Cultura (CAPES-MEC), e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Ministério da Ciência e Tecnologia (CNPq) em razão do apoio ao Programa de Pós-Doutorado do autor no Computational Mechanics Center de Southampton UK, no período de 01 de outubro de 1982 a 15 de Outubro de 1983 (foram quatro auxílios para um ano de programa, com quatro relatórios de atividade!- tempos difíceis para os engenheiros)

O autor expressa especial agradecimento ao desenhista Francisco Guedes Brito pelo capricho e presteza na produção das figuras.

**APRESENTAÇÃO:  
SEGUNDA EDIÇÃO REVISADA**

A segunda edição, além de contemplar as correções de texto, figuras e equívocos na redação de equações, acrescenta alguns temas visando dar mais atualidade à abordagem da dinâmica das estruturas, bem como complementando a exposição anterior.

Nesse sentido, merece destaque uma apresentação em apêndice de expedita formulação da teoria das variáveis complexas, com atenção voltada para o teorema dos resíduos, já no Capítulo III, bem como detalhar um pouco a fórmula de Leibniz empregada na integração da equação de equilíbrio via convolução de Duhamel. Afinal, o teorema dos resíduos é de grande importância na abordagem da transformada inversa de Fourier da equação de equilíbrio, bem como em aplicações na abordagem de vibrações aleatórias.

O apêndice do Capítulo IV é dedicado à apresentação, naquilo que de perto interessa, da decomposição matricial de Jordam, bem como da decomposição de matrizes retangulares em valores singulares, conhecida pela sigla SVD, de grande utilidade na análise modal, especialmente em sua formulação via método dos autovalores complexos, apresentada com mais detalhes no Capítulo V, bem como também nesse mesmo capítulo é apresentado um estudo expedito das chamadas formas quadráticas, necessárias na caracterização da definição positiva das matrizes de rigidez e de massa.

Por último, no apêndice do Capítulo XI desenvolve-se uma versão estabilizada das diferenças finitas estabilizada mediante penalização da matriz de massa, que se mostra especialmente vantajosa na abordagem de problemas não lineares por evitar o concurso do método iterativo de Newton-Raphson,

## SUMÁRIO

### CAPÍTULO I INTRODUÇÃO

1.1-Considerações Iniciais	1
1.2-Reações do corpo humano a vibrações	7
1.3-Objetivos da análise dinâmica	8
1.4-Etapas da análise dinâmica	9
1.4.1-Solicitação dinâmica	9
1.4.2-Modelagem das estruturas	11
1.4.3-Teoria das vibrações...	12
1.5-Comparação ilustrativa entre modelo estático e dinâmico	13
1.6-Gradezas físicas e unidades	15
1.7-Medida do tempo	16

### CAPÍTULO II EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

2.1-Introdução	19
2.2- Fundamentos	19
2.3-Leis de Newton	21
2.4-Sistema com 1 grau de Liberdade	22
2.5-Integração da equação homogênea em casos simples	24
2.6-Integração da equação homogênea combinando casos simples	27
2.7-Integração da equação homogênea no caso geral	34
2.8-Solução particular em casos simples submetidos à solicitação harmônica	38
2.9-Solução particular no caso geral submetido à solicitação harmônica	39
2.10-Solução particular para o caso polinomial e exponencial	41
2.11-Solução completa no caso geral submetido à solicitação harmônica	42
2.12-Movimento permanente	46
2.13- Vibração de base e sensores de medição	49
2.14-Estudo paramétrico da ressonância	54
2.15-Isolação de vibrações	55
2.16-Método da meia potência: medida indireta do amortecimento	58
2.17-Resposta à solicitação ressalto	60
2.18-Exemplos de aplicação	62
2.19-Exemplos propostos	64
2.20-Bibliografia para consulta	65

### APÊNDICE

2.21-Série de Taylor	66
2.22-Aplicação na solução de equação diferencial	67

### CAPÍTULO III OUTRAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

3.1-Introdução	72
----------------	----

3.2-Integração por série de Fourier	72
3.3-Integração por convolução de Duhamel	74
3.4-Transformada de Fourier	80
3.5-Aplicação da Transformada de Fourier na dinâmica	86
3.6-Espectro de Fourier	87
3.7-Círculos de Nyquist	88
3.8-Resposta permanente harmônica em notação complexa	91
3.9-Balço de energia e amortecimento histerético	92

### APÊNDICE

3.10-Transformadas analíticas de Fourier	94
3.11- Variável complexa e teorema dos resíduos	97
3.12- Fórmula de Leibniz	104

## CAPÍTULO IV INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

4.1- Introdução	105
4.2-Método das Diferenças Finitas Centrais	106
4.3- Método de Newmark	115
4.4-Método de Wilson $\theta$	120
4.5-Método HHT $\alpha$ (Hubert-Hughes-Taylor)	122
4.6-Método de Houbolt	123
4.7-Método de Galerkin Descontínuo	125
4.8-Método de Padè	130
4.9-Método do Autor: Diferenças Finitas Hermitianas	134
4.10-Transformada Rápida de Fourier	135
4.11-Exemplos de aplicação	146
4.12-Exemplos propostos	147

### APÊNDICE

4.13-Introdução ao tratamento digital	148
4.14-Medida digitalizada	149
4.15-Anomalias na amostragem digitalizada	151
4.16-Análise de frequências	157
4.17- Decomposição de Jordam	158
4.18- Decomposição em valores singulares (SVD)	159

## CAPÍTULO V

### SISTEMAS COM DOIS OU MAIS GRAUS DE LIBERDADE

5.1-Introdução	162
5.2-Ortogonalidade dos modos de vibração e superposição modal	165
5.3-Vibração forçada	169

5.4-Vibração forçada amortecida	174
5.5-Movimento de base	177
5.6-Sistematização da solução para amortecimento proporcional	181
5.7-Resposta no domínio da frequência	184
5.8-Métodos diretos de integração numérica	185
5.9-Estabilidade dos métodos diretos de integração numérica	188
5.10-Método do autovalor complexo	189
5.11-Estudo da solução harmônica permanente em notação complexa	195
5.12-Estudo da solução harmônica permanente com amortecimento histerético	199
5.13-Exemplos de aplicação	201
5.14-Exercícios propostos	203

### APÊNDICE

5.15- Formas quadráticas e matriz definida positiva	208
---	-----

## CAPÍTULO VI

### INTRODUÇÃO À VIBRAÇÕES ALEATÓRIAS

6.1-Introdução	212
6.2-Noções básicas da Teoria da Probabilidade	214
6.3-Axiomas da Teoria da Probabilidade	217
6.4-Processo aleatório binário (arremesso de moeda)	230
6.5-Processo aleatório	235
6.6-Relações espectrais	239
6.7-Solicitações aleatórias	240
6.8-Sistemas com vários graus de liberdade	244
6.9-Processos derivados	251
6.10-Processos probabilísticos de banda estreita	252
6.11-Análise de cruzamentos em processos de banda estreita	254
6.12-Estados limites (colapso) sob vibração aleatória	258

### APÊNDICE

6.13-Aplicação da Técnica dos resíduos	268
--	-----

## CAPÍTULO VII

### VIBRAÇÃO DE ESTRUTURAS CONTÍNUAS: BARRAS E VIGAS

7.1-Introdução	271
7.2-Vibração longitudinal de barras	271
7.2.1-Ortogonalidade dos modos de vibrar	274
7.2.2-Superposição modal	275
7.3-Vibração de vigas	280
7.3.1-Ortogonalidade dos modos de vibrar	284
7.3.2-Viga sob carga móvel	289
7.4-Sistemas de barras (pórticos)	291

7.5-Vibração de vigas sob movimento de apoio	299
7.5.1- Vibração de vigas: modelo de Timoshenko	300
7.5.2-Vibração livre	302
7.5.3-Ortogonalidade dos modos de vibrar	308
7.5.4-Vibração forçada: técnica da superposição modal	310
7.6-Efeito da força normal	313
7.8-Viga sobre base elástica	315

### **CAPÍTULO VIII**

<b>INTEGRAÇÃO EM TERMOS NÃO FINITOS:VIBRAÇÃO DE BARRAS E VIGAS</b>	
8.1- Introdução	317
8.2-Vibração longitudinal de barras	317
8.2.1-Condições iniciais	319
8.2.2-Condições de contorno (reflexão)	320
8.2.3-Fonte pontual de onda (vibração forçada)	325
8.2.4-Refração	326
8.3-Ondas viscoelásticas	327
8.4-Ondas de flexão	329
8.5-Ondas de flexão de Timoshenko	330

### **CAPÍTULO IX**

#### **INTEGRAÇÃO NÃO FINITA NO MEIO CONTÍNUO: MOVIMENTO ONDULATÓRIO**

9.1- Introdução	333
9.2-Reflexão e refração das ondas de distorção e dilatação	339
9.3-Bifurcação (solução complexa): onda de superfície	350
9.4-Onda de Rayleigh	352
9.5-Ondas de Stoneley	354
9.6-Ondas guiadas	357
9.7-Onda de Love	359
9.8-Outras ondas de superfície	361
9.9-Onda esférica	361

### **CAPÍTULO X**

#### **INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NA VARIÁVEL ESPAÇO: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

10.1-Introdução	367
10.2-Movimento axial	367
10.3-Movimento flexional	374
10.4-Onda axial: dispersão numérica	380
10.5-Onda axial: estudo da reflexão espúria	386
10.6-Dispersão e reflexão espúria da onda de flexão (Timoshenko)	390
10.7-Formulação de elementos finitos bidimensionais	399
10.8-Formulação de elementos finitos de placas	.418

**APÊNDICE**

10.9-Transformação de variáveis	426
---------------------------------	-----

**CAPÍTULO XI**

PROPAGAÇÃO DE ONDA NÃO LINEAR UNIDIMENSIONAL

11.1-Introdução	432
11.2-Onda não-linear	433
11.3-Integração no tempo da primeira de (11.24)	438
11.4-Integração no espaço da segunda de (11.24)	441
11.5-Integração pelo Método dos Elementos Finitos via formulação de Galerkin	446
11.6-Integração no tempo de (11.66) pelo Método de Newmark	450
11.7-Raízes da equação não-linear pelo Método de Newton	451
11.8-Formulação dos elementos finitos considerando-se grandes deslocamentos e grandes deformações	452
11.9-Erro local de truncamento	459
11.10- Método das diferenças finitas estabilizadas	460

**CAPÍTULO XII**

ANÁLISE NÃO LINEAR BIDIMENSIONAL

12.1-Introdução	462
12.2-Mapeamento (formulação posicional)	462
12.3-Fórmula de Nanson	468
12.4-Onda elástica não-linear: formulação do elemento finito	469

## CAPÍTULO I INTRODUÇÃO

### 1.1- Considerações iniciais

Para esclarecer a importância da análise dinâmica das estruturas nos tempos atuais, a Figura 1.1 mostra uma torcida assistindo a um jogo de futebol no final dos anos quarenta do século passado, ficando-se claro que se tratava de uma torcida bem comportada, pois naquele tempo as pessoas iam aos estádios com chapéu e de terno e gravata. Valendo-se lembrar que, para acalmar eventuais ânimos exaltados, no intervalo do jogo uma banda de música apresentava seus mais animados dobrados.



Figura 1.1

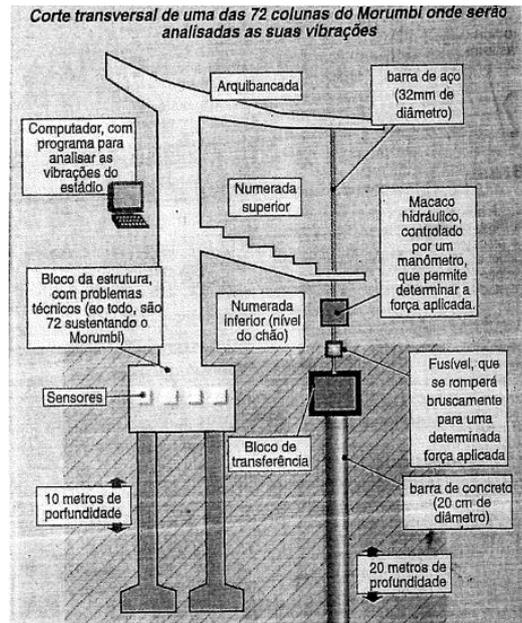
A Figura 1.2 mostra os torcedores mais rebeldes daquele tempo, sentados fora dos locais adequados, inclusive um dos membros da torcida usando um lenço com os nós nas pontas no lugar de chapéu.



**Figura 1.2**

Confrontando-se essa comportada torcida do final dos anos quarenta com o comportamento das torcidas hoje em dia, verifica-se uma radical mudança de comportamento, via de regra, agora dançando e pulando euforicamente e com danças ritmadas, seguindo-se a um comando único, sem contar a algazarra reinante e a chamada movimentação ondular sincronizada da 'ola mexicana', excitando-se dinamicamente a estrutura das arquibancadas. Esse comportamento virou uma regra em todos os estádios do mundo, levando-se as autoridades a examinar melhor o que estava acontecendo com as estruturas, pois era visível aumento na movimentação da estrutura das arquibancadas. Afinal, o carregamento com característica estática proporcionado pelas torcidas no passado era padronizado tendo-se em conta uma multidão comportada, algo como  $4000\text{N}/\text{m}^2$ , e agora estavam certamente majorados por efeito dinâmico, e com risco de desabamentos.

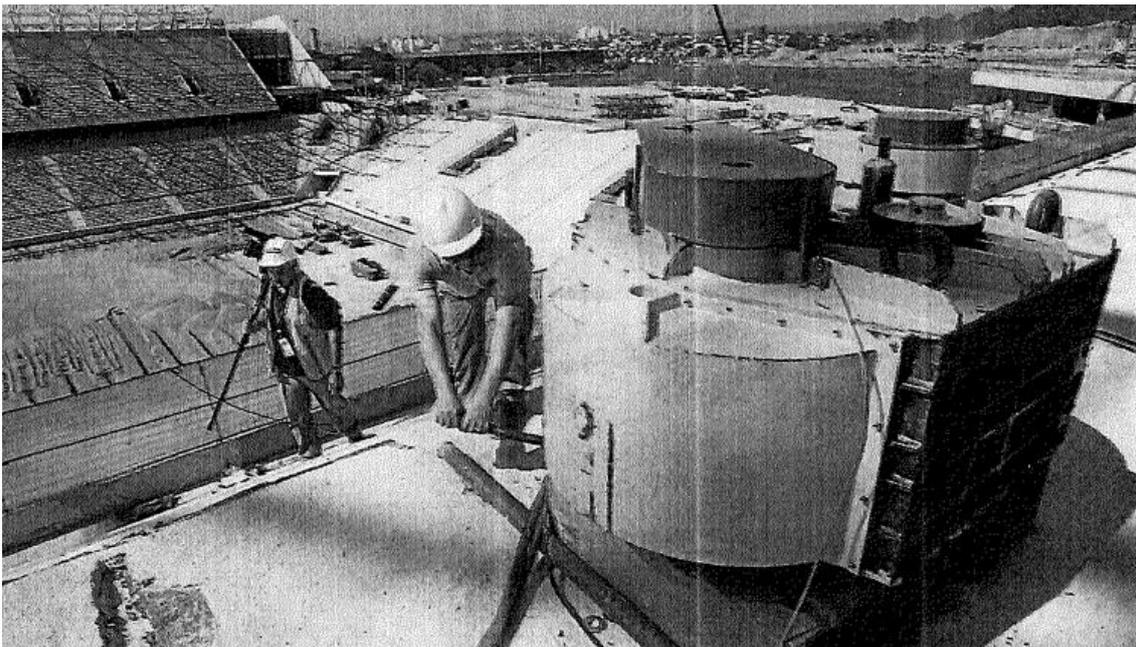
Assim, no final dos anos noventa do século passado houve no mundo todo estudos de reforços nas estruturas dos estádios, tendo-se em conta essas novas solicitações dinâmicas. A Figura 1.3 mostra esquematicamente ensaios levados a efeito no Estádio do Morumbi, São Paulo, mediante o chamado método do fusível mecânico, que consiste em tracionar o fusível mecânico até a ruptura, promovendo-se então a vibração livre da estrutura por meio de condições iniciais de deslocamento e velocidade nulas.



**Figura 1.3**

Interessante é que, no caso dos testes no Estádio do Maracanã no Rio de Janeiro, a opção foi por excitar a vibração livre da estrutura mediante queda de pesados sacos de areia, cujo impacto simula condições iniciais de velocidade imposta e nula de deslocamento; e, com isso, os ensaios do Estádio do Morumbi e do Maracanã empregaram, na medida do amortecimento as duas variantes da técnica denominadas Círculo Ajustado (Circular Fitted), a ser apresentada em detalhes no final do Capítulo III.

Ensaio mais requintado com excitadores harmônicos também foram levados a efeito no Estádio do Morumbi, como mostra a Figura 1.4, facultando-se uma análise em frequência mais detalhada e precisa do comportamento dinâmico da estrutura do estádio



**Figura 1.4**

Outro exemplo da importância da análise dinâmica consiste no estudo do impacto proporcionado pelos acidentes que ocorrem nas competições de corridas automobilísticas, como as da Fórmula 1. A Figura 1.5 mostra os momentos finais de um capotamento espetacular da Sauber pilotada pelo brasileiro Pedro Paulo Diniz, no Grande Prêmio da Europa em Nurburgring, Alemanha, em 1999.



Figura 1.5

Embora o carro tenha se despedaçado, felizmente o piloto brasileiro não sofreu lesões graves, mas o fato de se ter rompido o protetor de cabeça (roll bar) fez com que a Federação Internacional de Automobilismo (FIA) anunciasse de imediato mudança nos critérios de projeto dessa peça importante na proteção do piloto, principalmente pelo fato dela não ter resistido ao toque na zebra como previsto no estabelecimento do critério então vigente, mostrados na Figura 1.6.



Figura 1.6

O protetor de cabeça, no critério vigente a época, deveria resistir a uma força vertical de  $8P=6240$  Kgf com retração de no máximo 100mm, no sentido longitudinal a uma força de  $5.5P=4290$ Kgf, com movimentação de no máximo 50mm, bem como no sentido lateral a uma força de  $1.6P=1248$ Kgf e movimentação de também 50mm. O peso  $P$  considerado de 780Kgf, representa o peso médio do carro com piloto dentro e mais o combustível. Todavia, no caso do carro da Sauber, no toque na caixa de brita o impacto lateral superou os 1248Kgf garantidos no teste da FIA. Por sorte, a menor estatura do Pedro Paulo Diniz não permitiu que todo o peso do carro atuasse sobre sua cabeça, bem como o fato de o cockpit ser mais baixo em 1999.

A figura 1.7 registra o fato de que o aumento da resistência dos carros salvou a vida do piloto Luciano Burti em acidente semelhante sofrido na corrida de Spa-Francorchamps, Bélgica, pouco tempo depois em 2001, mostrando-se o acerto dos novos critérios.



Figura 1.7

Em 2017 foi introduzida mais uma proteção aos pilotos, com o dispositivo denominado Halo, como mostra a Figura 1.8, que salvou a vida do piloto francês Romain Grosjean, da Hass, em acidente no GP do Bahrein de 2020, com seu carro partindo-se ao meio e pegando fogo após bater no guard rail e no choque com a Alpha Tauri do russo Danil Kvyat.



Figura 1.8

Como bem sabido, a competição da Fórmula I exhibe o que de mais avançado a indústria automobilística tem em matéria de segurança dos pilotos em situações de impacto, cujo estudo decorre da análise dinâmica da estrutura dos carros. E essa preocupação se volta também para os pedestres em situação de atropelamento, como mostra testes de um airbag externo da Volvo a Figura 1.9.



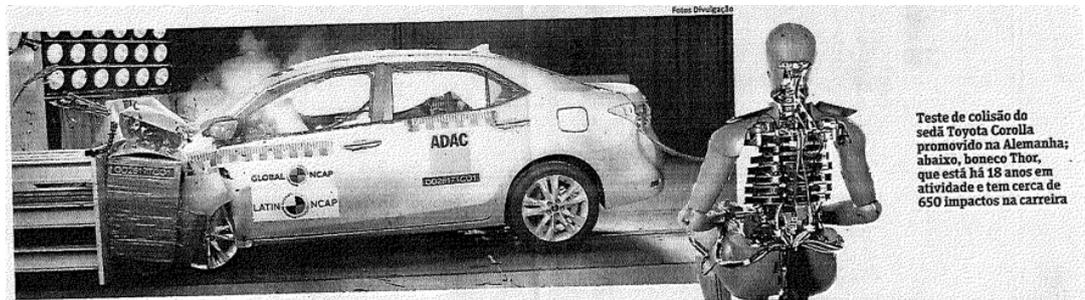
Figura 1.9

A empresa Mercedes-Benz em 2003 apresentou modificações na parte do capô e frontal para, no caso de atropelamento de pedestre, reduzir as lesões na parte baixa da coluna, como ilustra a Figura 1.10.



Figura 1.10

A Figura 1.11 mostra testes de colisão frontal em estudos para a proteção das pessoas no interior do carro Toyota Corolla. A plastificação da estrutura do carro consome boa parte da energia envolvida na colisão, aliviando-se o impacto nos ocupantes do veículo.



**Figura 1.11**

Outra aplicação importante do estudo do comportamento dinâmico das estruturas ocorre no desenvolvimento do calçado tênis, que são cada vez mais adequados às atividades esportivas e de lazer, pela introdução de amortecimentos especiais, como exibe-se na Figura 1.12. Em outras palavras, o tênis agora passou a ser um produto de engenharia por contemplar quesitos técnicos de qualidade, assim como tecidos especiais para a vestimenta de atletas.



**Figura 1.12**

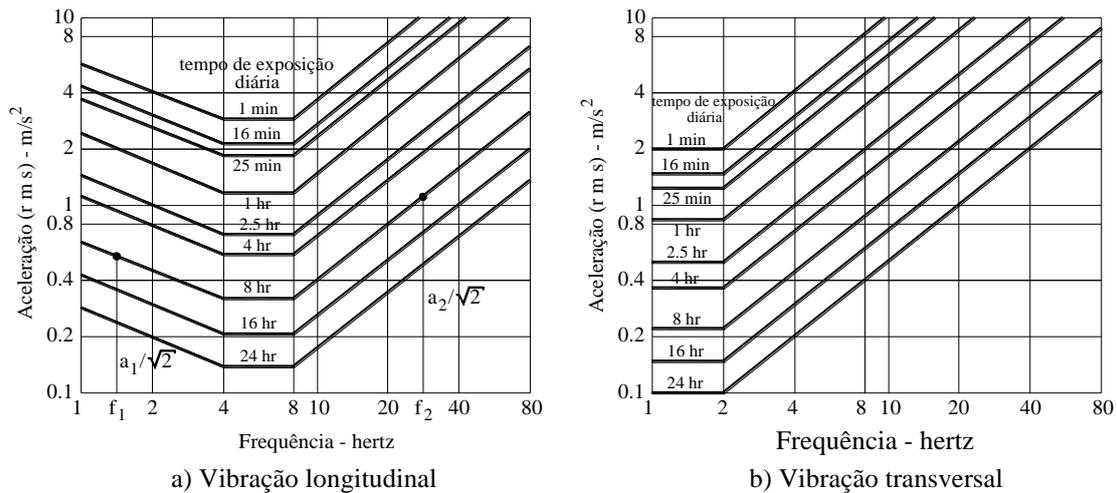
## 1.2-Reações do corpo humano a vibrações

Estudos mostraram que o corpo humano reponde à movimentos vibratórios para frequências de quatro a cem hertz, A Tabela 1.1 mostra as faixas de frequências onde se observam movimentos maiores dos vários membros do corpo humano.

**Tabela 1.1**

Parte baixa da coluna	4-6Hz
Parte alta da coluna	10-14Hz
Cabeça e ombros	20-30Hz
Globo ocular	60-90Hz

Em verdade, os primeiros estudos da resposta do corpo humano à movimentos foi desenvolvido para resolver o problema da ejeção de pilotos de aeronaves atingidas durante batalhas aéreas. Na primeira Grande Guerra os aviões voavam em baixa velocidade, e, ao ser atingidos, permitiam que o piloto saltasse de paraquedas sem problemas, mas já na segunda Grande Guerra a velocidade das aeronaves inviabilizava o salto, e então se estudavam os níveis de esforços suportados pelos pilotos ao serem violentamente ejetados da aeronave. De qualquer modo, a evolução desses estudos resultara nas curvas de conforto mostradas na Figura 1.13, admitindo-se claramente que a grandeza que controla o conforto é o nível de aceleração que varia segundo a frequência.



**Figura 1.13**

Os engenheiros em meados dos anos cinquenta do século passado achavam que o conforto estava relacionado com a derivada da aceleração, denominada jerk, se esquecendo dos fundamentos das Leis de Newton, que mostravam que nenhuma grandeza física estava relacionada com essa derivada, uma vez que, se isso não fosse verdade, a equação de movimento deveria incluir tais grandezas. Todavia, tal equívoco foi logo resolvido, ficando-se claro que o mal estar estava de fato relacionado com a magnitude da aceleração. Sucede que a sensação ao descer em um tobogã parecia aumentar conforme a variação da inclinação, ou seja da variação da aceleração, no caso  $g \sin \theta$ , sendo  $\theta$  a inclinação da rampa.

### 1.3-Objetivos da análise dinâmica

Os objetivos da análise dinâmica de estruturas são basicamente os mesmos da análise estática, mas com caracterização apresentando diferenças. Em primeiro lugar pela consideração da variável tempo, bem como frequência, sem contar que também são consideradas as magnitudes da aceleração, e eventualmente da velocidade.

O cálculo da magnitude dos deslocamentos, como na análise estática, decorre do fato de as estruturas apresentarem restrições de diversas naturezas, como as funcionais já mencionadas no caso do protetor de cabeça dos carros de corrida, e limitações operacionais como no caso de limitação do espaço livre para as movimentações da estrutura, e tantos outros.

Por seu lado, o cálculo da magnitude das acelerações tem a ver, especificamente, conforto dos usuários, como já trabalhado no item anterior, cujas limitações variam no domínio da frequência, bem como do tempo de exposição.

Os esforços internos: momento fletor, força cortante e força normal estão relacionados com os critérios de projeto, visando a devida segurança no tocante ao colapso, definidos pela caracterização do estado limite último, e do bom funcionamento, cujas características tem a ver com a definição do estado limite último de utilização.

Finalmente, o cálculo das tensões visa o atendimento dos critérios de fadiga do material da estrutura, bem como a determinação da vida útil do sistema estrutural.

#### 1.4-Etapas da análise dinâmica

A análise dinâmica começa pela caracterização da solicitação em estudo, que consiste numa função nas variáveis espaço e tempo, seguida da modelagem da estrutura, cujo comportamento dinâmico é descrito pelas matrizes de massa que contemplam as grandezas inerciais, de rigidez que tem em conta a reação da estrutura à deformação (mudança de forma), e, finalmente, a matriz de amortecimento que leva em conta as forças de viscosidade envolvidas na movimentação, mobilizadas pela velocidade. E por fim, a aplicação da teoria das vibrações toma lugar, com destaque, no caso da engenharia, para as técnicas apropriadas de integração das equações de movimento, visando avaliar os deslocamentos resultantes, bem como velocidades e acelerações, dado que são parâmetros com limitações de magnitude, em razão do conforto humano já mencionados. Além disso, a obtenção dos esforços internos também limitados em razão da capacidade limitada de resistência do material, bem como da deformabilidade dos materiais da estrutura; sem contar as tensões necessárias ao estudo da ruptura por fadiga dos materiais.

Apresenta-se, no que se segue, cada uma dessas etapas em maiores detalhes.

##### 1.4.1-Solicitações dinâmicas

As solicitações dinâmicas podem ser entendidas como determinísticas no caso em que a magnitude do carregamento varia no tempo segundo funções conhecidas, podendo ser periódicas, como no caso harmônico mostrado na Figura 1.14 a), ou seja:

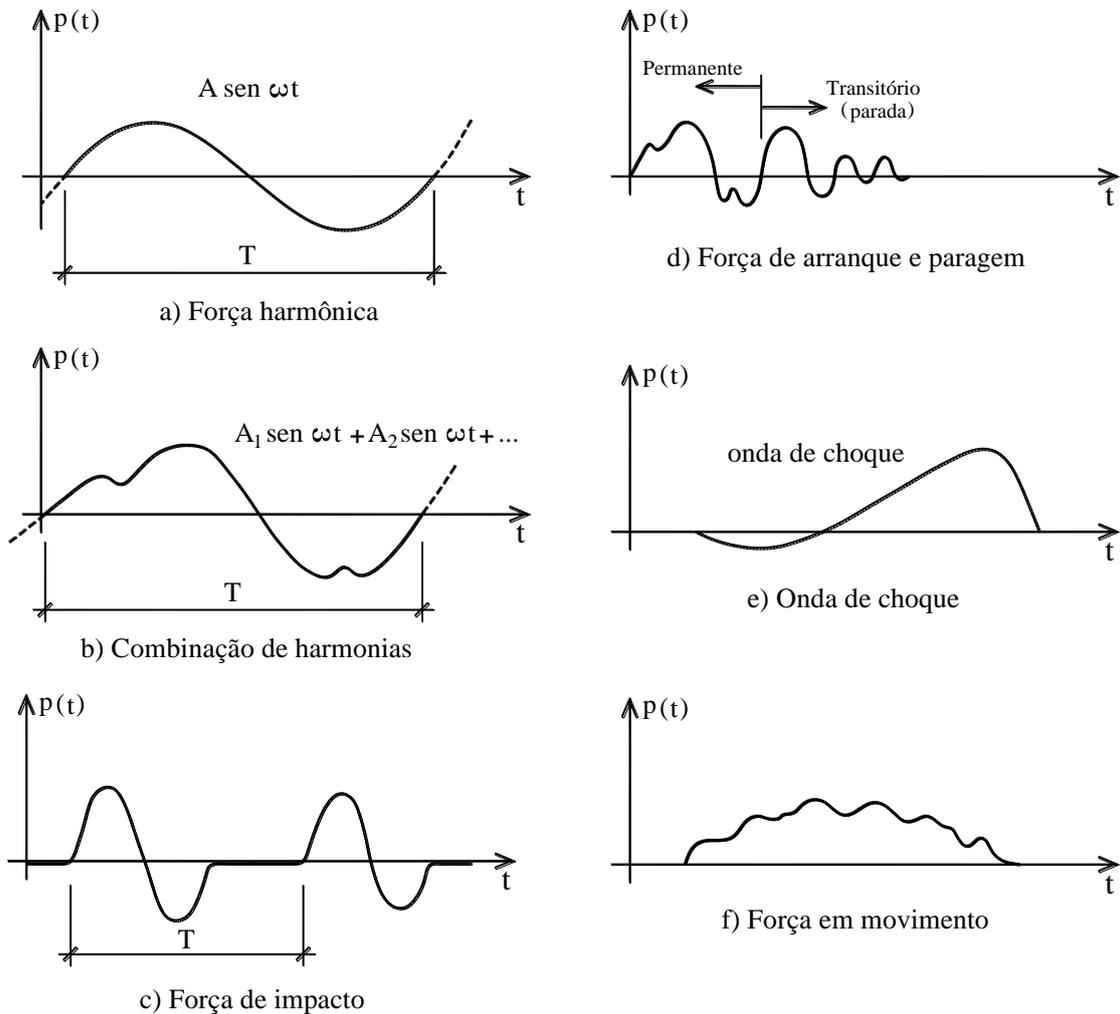
$$P(t) = P \text{sen} \omega t \quad (1.1)$$

ou ainda a soma de carregamentos harmônicos:

$$P(t) = P_1 \text{sen} \omega_1 t + P_2 \text{sen} \omega_2 t + \dots \quad (1.2)$$

como exibido na Figura 1.14 b); ou mesmo impactos de máquinas de percussão (martelões), como mostra a Figura 1.14 c), que podem ser representados por uma série de Fourier; e aperiódicas como a solicitação de arranque ou frenagem ilustrada na Figura 1.14 d), que consiste numa função harmônica amortecida,

solicitação por onda de choque produzidas por explosões na atmosfera como exposto na Figura 1.14 e), ou mesmo solicitação por veículos em movimento uniforme atuando sobre a estrutura, como ilustrado na Figura 1.14 f).



**Figura 1.14**

A Figura 1.15 a) é um registro típico de uma solicitação aleatória, que pode ser o registro das pressões causadas pelo vento, das acelerações de um terremoto, altura das ondas do mar, que produzem pressões hidrodinâmicas, etc., pois a solicitação verificada em um trecho do registro não se repete mais ao longo do próprio registro; constatando-se assim a existência de incerteza. A Figura 1.15 b) ilustra a densidade de probabilidade da solicitação em questão.

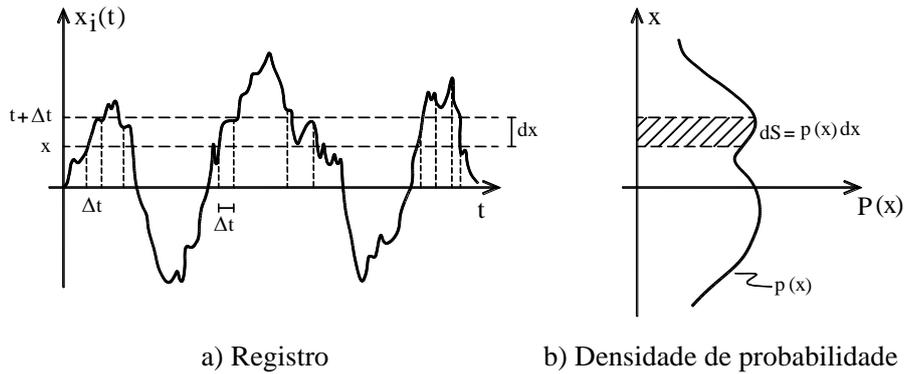


Figura 1.15

A natureza pode ser entendida como uma fábrica que produz ventos, chuvas, terremotos etc., porém, caprichosamente, segundo processos de produção aleatórios, conquanto, do mesmo modo que não existe uma pessoa igual a outra, um vento, uma chuva e um terremoto não é igual a outro. Assim sendo, nesses casos tem-se que lançar mão da Teoria da Probabilidade, uma vez que se trata da única maneira disponível de se lidar com tais problemas.

#### 1.4.2-Modelagem da estrutura

A modelagem discreta de um sistema estrutural parte da identificação das grandes massas mobilizadas no movimento, como nos casos ilustrados na Figura 1.16. O caso da Figura 1.16 a) consiste num pórtico de um andar, com a grande massa na altura do andar; no caso de uma caixa d'água, como ilustrada na Figura 1.16 b), a grande massa vem a ser a água armazenada; ou seja, nesses casos a grande inércia está localizada, e tais sistemas podem ser simbolicamente representados pela figura clássica de sistemas de um grau de liberdade mostrada na Figura 1.16 c).

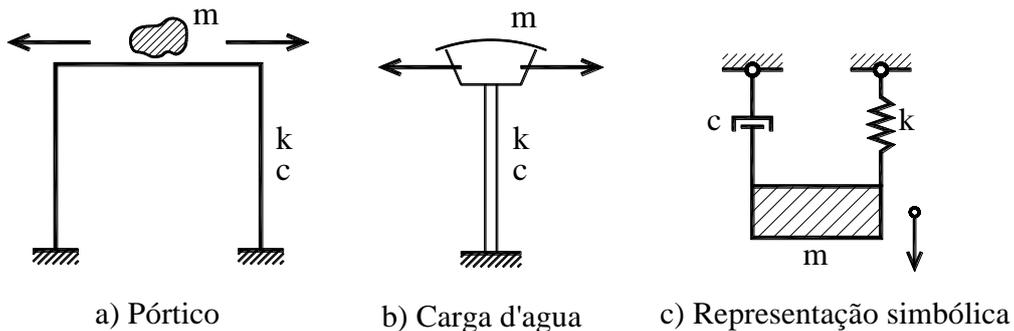


Figura 1.16

A modelagem de sistemas estruturais mais complexos, como no caso de análise plana de pórticos de múltiplos andares mostrado na Figura 1.17 a), no caso de análise tridimensional de pórticos, Figura 1.17 b), pode ser levada a efeito mediante a consideração de movimentos com vários graus de liberdade. Já a Figura 1.17 c) exibe a modelagem do meio estrutural contínuo discretizado segundo o método dos elementos finitos, com o grau de liberdade definido pela própria malha adotada na simulação.

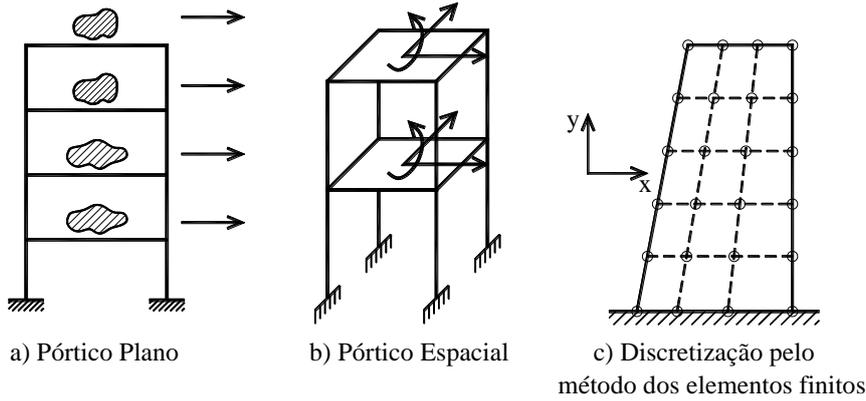


Figura 1.17

A Figura 1.18 a) ilustra a modelagem do corpo humano apresentada no início dos anos sessenta do século passado para estudos da reação do corpo humano em viagens aeroespaciais, e a Figura 1.18 b) uma evolução do modelo para abordagem da movimentação da coluna vertebral apresentada já nos anos noventa, sofisticando-se bastante a modelagem com a consideração de muito mais graus de liberdade. A evolução dos computadores viabilizou o desenvolvimento extraordinário da chamada Biomecânica, que tem nos modelos da Figura 1.18 estudos pioneiros.

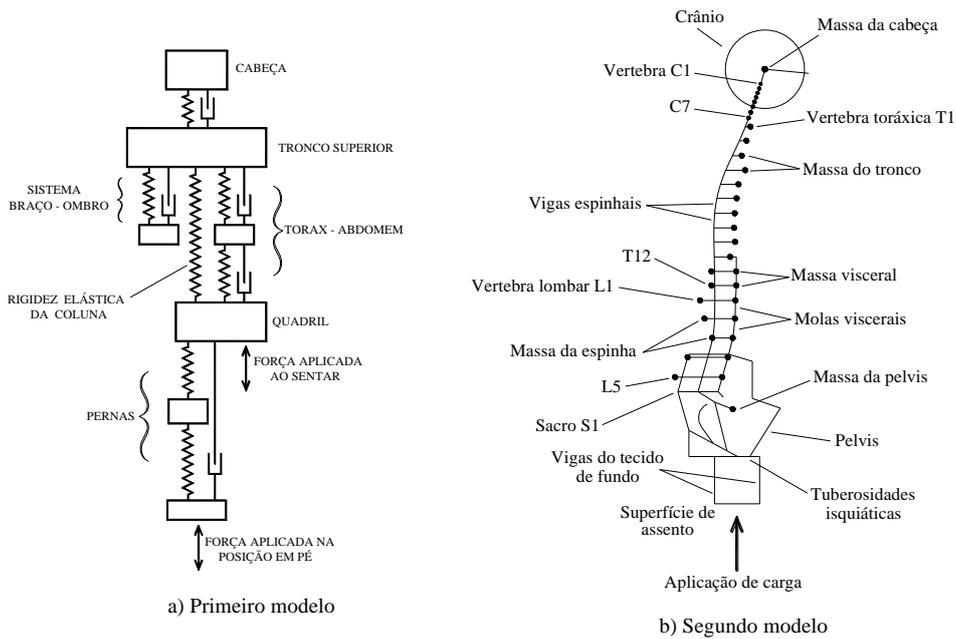


Figura 1.18

### 1.4.3-Teoria das vibrações

A segunda Lei de Newton permite formular as equações de movimento do sistema estrutural, resultando-se, em notação matricial, na forma:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P(t)\} \quad (1.3)$$

onde  $[M]$  é a matriz de massa, cujos elementos contemplam as grandes inércias,  $[C]$  é a matriz contemplando as forças de amortecimento mobilizadas na movimentação das massas consideradas na matriz de massa, e  $[K]$  a matriz de rigidez que contempla as forças elásticas mobilizadas nas deformações do sistema estrutural; o vetor  $\{x\}$  representa os movimentos das massas, com pontos superiores indicando o grau de derivação no tempo, e o vetor  $\{P(t)\}$  as solicitações segundo os graus de liberdade considerados.

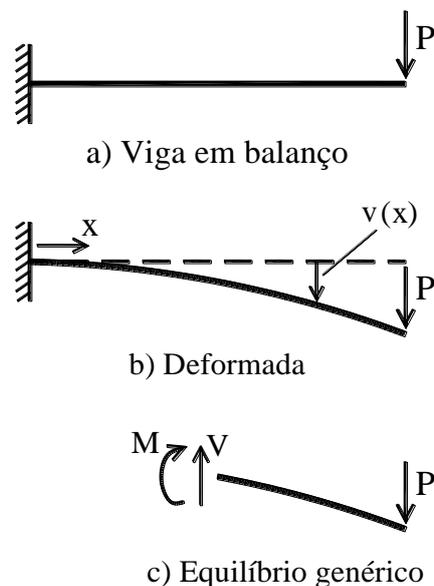
A Teoria das Estruturas é o ramo do conhecimento que trata da integração do sistema de equações diferenciais de segunda ordem no tempo dado em (1.3), o qual pode contemplar não linearidades físicas envolvendo tanto os termos de velocidade quanto de deslocamentos.

Nesse ponto vale registrar que a engenharia tem técnicas próprias para efetuar a integração da equação (1.3), e essas técnicas são objeto de desenvolvimento ao longo dos capítulos. Embora a Matemática tenha trabalhado muitos métodos para tal, nas aplicações da engenharia apenas algumas dessas técnicas são apropriadas para a engenharia, como se esclarece ao longo do texto.

### 1.5-Comparação ilustrativa entre modelo estático e dinâmico

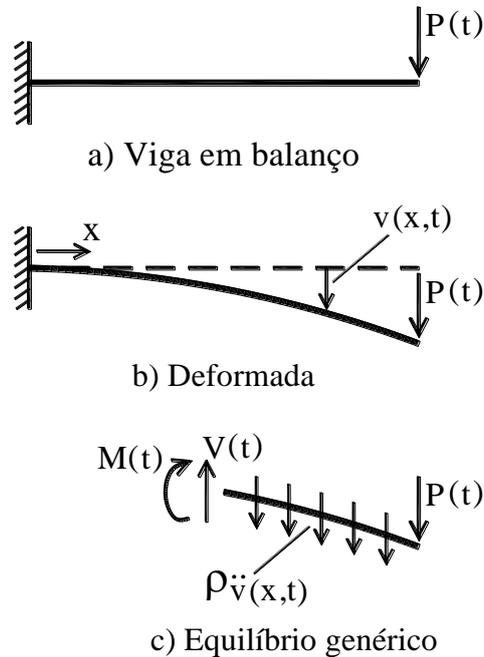
Para finalizar essa apresentação, nada mais adequado, especialmente para os engenheiros civis, que providenciar uma comparação entre os elementos trabalhados no modelo estático de uma viga em balanço com o modelo dinâmico.

A Figura 1.19 a) exhibe uma viga em balanço com uma carga na extremidade, como pioneiramente Galileu considerou ao dar início a área do conhecimento da Resistência dos Materiais. A Figura 1.19 b) mostra a deformada da viga e a Figura 1.19 c) a configuração de equilíbrio com a indicação dos esforços solicitantes momento fletor e força cortante atuantes numa seção genérica.



**Figura 1.19**

A Figura 1.20 reproduz a viga em balanço, chamando-se a atenção para o fato de que agora acha-se envolvida também a variável tempo, com destaque para existência das forças de inércia mobilizadas no caso dinâmico.



**Figura 1.20**

A equação constitutiva também apresenta diferenças notáveis, pois no caso estático tem-se:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.4)$$

sendo  $\sigma$  a tensão desenvolvida,  $\varepsilon$  a deformação correspondente e  $E$  o módulo de elasticidade do material, resultando-se nas seguintes relações momento-curvatura e cortante-distorção, respectivamente:

$$\begin{aligned} M &= -EI \frac{d^2v}{dx^2} \\ V &= -EI \frac{d^3v}{dx^3} \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde  $I$  vem a ser o momento de inércia da seção transversal da viga.

No modelo dinâmico a equação constitutiva, no caso de material viscoelástico, por exemplo, se escreve:

$$\sigma = E \left( \varepsilon + c \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \quad (1.6)$$

ganhando-se as correspondentes de (1.5), por conseguinte, as seguintes redações:

$$\begin{aligned} M &= -EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} + c \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{dv}{dt} \right) \right) \\ V &= -EI \left( \frac{d^3v}{dx^3} + c \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{dv}{dt} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

chamando-se a atenção para o fato de que a viscosidade acrescenta nos esforços internos uma contribuição, como se uma massa fluida no interior contribuísse com uma parcela da reação do material.

Em resumo, o modelo dinâmico acrescenta um carregamento devido a mobilização de forças de inércia, bem como modifica o equilíbrio interno ao ter em conta forças de viscosidade.

### 1.6-Grandezas físicas e unidades

Entende-se por grandezas físicas as propriedades mensuráveis de um fenômeno, sendo que as grandezas podem ser escalares, quando apenas um número é necessário para caracterizar, a exemplo da massa de um volume de material, quantidade de bois no pasto etc., e vetoriais quando, no caso espacial, três números são necessários (componentes do vetor) para caracterizar tais grandezas; e, finalmente, tensorial de segunda ordem exigindo-se seis números para a sua definição no caso de tensor simétrico, e tensores de ordem mais elevada que dois.

No caso de tensores simétricos, o seguinte desenvolvimento é ilustrativo: o tensor de ordem zero caracteriza a grandeza escalar, que pode ser uma função nas variáveis espaço,  $\phi = \phi(x, y, z)$ , e o tensor de ordem 1 consiste na grandeza vetorial, que são suas derivadas parciais em número de três, ou seja:

$$\begin{aligned} \phi_x &= \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} \\ \phi_y &= \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} \\ \phi_z &= \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \end{aligned}$$

e o tensor de ordem 2 as derivadas segundas, quais sejam:

$$\begin{aligned} \phi_x &\rightarrow \{ \phi_{xx} \quad \phi_{xy} \quad \phi_{xz} \} \\ \phi_y &\rightarrow \{ \phi_{yx} \quad \phi_{yy} \quad \phi_{yz} \} \\ \phi_z &\rightarrow \{ \phi_{zx} \quad \phi_{zy} \quad \phi_{zz} \} \end{aligned}$$

que, face a igualdade de derivas parciais envolvendo as mesmas variáveis, apresentam apenas seis parâmetros independentes, cuja representação em notação matricial fica:

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} & \phi_{xz} \\ \phi_{xy} & \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{xz} & \phi_{yz} & \phi_{zz} \end{bmatrix}$$

e, por decorrência, a extensão para tensores de ordem maior.

As grandezas básicas do Sistema Internacional de unidades (SI) diretamente relacionadas com a dinâmica das estruturas são a massa em quilograma massa, o comprimento em metro, e o tempo em segundos. Todavia, em passado não muito distante (até o início dos anos setenta) era comum na Engenharia Civil o emprego do Sistema Técnico de unidades (ST), cujas unidades básicas eram a força em quilo força, que vem a ser a força de atração da gravidade sobre um litro de água, o comprimento em metro, e o tempo em segundo. Uma desvantagem do sistema técnico era a abordagem estranha da grandeza massa, pois nesse sistema a massa teria por unidade  $m \approx 1\text{kf} / g$ , ou seja, aproximadamente 0.1 UTM de massa (unidade técnica de massa), adotando-se aceleração da gravidade  $g \approx 10\text{m/s}^2$ . Na época havia uma confusão entre quilo massa e quilo força esquecendo-se de se ter em conta a Lei de Newton corretamente.

A Tabela 1.2 indica algumas grandezas de interesse, as unidades e o símbolo universal correspondente, bem como a Tabela 1.3 indica a denominação dos múltiplos e as frações das grandezas.

Tabela 1.2

Grandeza	Unidade	Símbolo
Massa	quilograma	Kg
Comprimento	metro	m
Tempo	segundo	s
Força	Newton ( $\text{kgm/s}^2$ )	N
Velocidade	metro por segundo	m/s
Aceleração	Metro por $\text{s}^2$	$\text{m/s}^2$
Tensão	Pascal ( $\text{N/m}^2$ )	Pa
Momento	Newton-metro	N.m

### 1.7-Medida do tempo

Tendo-se em vista que o tempo é uma variável cuja natureza sempre intrigou o pensamento humano, especialmente no entendimento do princípio da causalidade, que estabelece ocorrer o efeito sempre depois da causa, sem cantar ser impossível retornar ao passado, ou mesmo acelerar ou diminuir a velocidade com que o tempo se esgota. Todavia, independentemente do entendimento do que vem a ser o tempo, sua medida pode ser feita como exposto no que se segue.

Tabela 1.3

<b>Fator de multiplicação</b>	<b>Nome</b>	<b>Símbolo</b>
$10^{18}$	exa	E
$10^{15}$	peta	P
$10^{12}$	tera	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	quilo	k
$10^2$	hecto	h
$10^1$	deca	da
$10^{-1}$	deci	d
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-3}$	mili	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-18}$	atto	a

A medida do tempo que temos hoje depende, como sabido do ciclo solar, com o dia entendido como o tempo de revolução da terra em seu próprio eixo, tendo 24 horas de duração. Esse ciclo é fundamental para a vida, pois governa o ciclo do crescimento das plantas. Todavia, a medida do tempo antes de a civilização humana dominar a agricultura, no período em que as comunidades humanas eram nômades, o ciclo básico da vida era regido pelas fases da lua, e coincidentemente, o ciclo lunar é exatamente o ciclo da reprodução humana (28 dias)!

Como a revolução da terra em relação ao seu eixo não tem sincronia com sua revolução em torno do sol, a repetição da mesma posição do sol no céu, chamado de ano tropical, tem a duração de 365,2422 dias, mas o ano sideral, que consiste na repetição da mesma posição de uma estrela no céu, tem duração de 365,2564 dias. Sucede que o calendário Juliano era baseado numa aproximação do ano dada por 365,25 dias que corresponde a 365 dias mais um quarto de dia, criando-se assim no calendário o chamado ano bissexto, tendo o mês de fevereiro no ano bissexto um dia a mais. No calendário Juliano sempre os anos divisíveis por 4 seriam, pois, bissextos.

Todavia, na época do pontificado do papa Gregório XIII foi sentido que as estações do ano estavam ocorrendo com defasagem sistemática e apreciável, e os astrônomos do Vaticano verificaram que isso se devia a aproximação adotada no calendário Juliano ( $365 + \frac{1}{4}$  dias), e, refazendo-se os cálculos, propuseram que o calendário mais correto seria baseado numa aproximação melhor, ou seja: 365,2425 que equivale a  $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}$ , e, com isso, nesse novo calendário, chamado Gregoriano, todos os anos divisíveis por 4 continuariam a ser bissextos, os divisíveis por 400 também, mas os divisíveis por 100, como 1700, 1800, 1900 etc., não seriam. Para dar início a esse novo calendário e corrigir o erro acumulado, no ano de 1582 foram eliminados 10 dias no mês de

outubro: em termos coloquiais, as pessoas foram dormir no dia 04 de outubro, uma quinta-feira, e acordaram no dia 15 de outubro, uma sexta-feira. Nesse novo calendário uma nova correção só vai ocorrer no ano de 3333; ou seja, por ora não deve causar grandes preocupações, afinal só no ano 3333 o mês de fevereiro vai ficar com 27 dias ( $365,2425 - 365,2422 = 0,0003$ , e  $1/0,0003 = 3333$ ).

Complementando-se, cumpre assinalar que a medida do tempo é basicamente a hora, que consiste na fração  $1/24$  da duração do dia; por sua vez a hora é dividida em sessenta minutos e o minuto em sessenta segundos. Trata-se, pois, de uma medida segundo o sistema sexagesimal, que tem por base a os 10 dedos da mão, e tendo-se em conta que os dedos das mãos e dos pés têm três ossos destacados, resultando-se no total 60 objetos. Trata-se de sistema de numeração desenvolvido na Babilônia, tendo na estrela de Davi, a qual tem seis pontas, também uma referência notável. Além do seu emprego na abordagem do tempo, esse sistema ainda tem lugar em tempos modernos por meio de unidades como a dúzia que significa o numeral doze, a grosa que consiste em doze dúzias e a mão que corresponde a 5 dúzias (sessenta).

A divisão do globo terrestre em fusos horários como conhecida hoje foi convencionada num encontro de 25 nações em Washington, USA, em 1884, tendo o meridiano que passa por Greenwich, próximo de Londres, Inglaterra, como referência zero, sendo horas a menos para os meridianos a leste e horas a mais para oeste, ficando-se a linha internacional da data numa região remota do oceano Pacífico. Por essa razão as primeiras festas de réveillon ocorrem nos países daquela região.

Além disso, cumpre também assinalar que o famoso tratado das Tordesilhas, firmado entre os reis de Portugal e Espanha em 1494, ao se referir à longitude na qual se dividia o mundo português e espanhol, numa época que não se dispunha de relógio que funcionasse em embarcações, portanto sem definição clara, permitiu aos portugueses conquistar pacificamente um território continental para o Brasil. Além disso, outra curiosidade na história relacionada à medida do tempo aconteceu na primeira circum-navegação realizada pelo navegador português Fernão Magalhães, sob o patrocínio da coroa Espanhola. Sucede que essa navegação foi feita na direção do sol poente, e ao seu término havia uma diferença de exato um dia a menos em relação ao calendário da Europa. Essa diferença foi uma questão que ficou em aberto por mais de cem anos; afinal o dia medido na frota de Magalhães ficava em média sempre um pouco mais longo conseqüentemente, algo não percebido na época.

## CAPÍTULO II

# EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

### 2.1-Introdução

O presente capítulo é dedicado ao estudo da equação de movimento, iniciando-se com os fundamentos da mecânica newtoniana, seguido das três leis do movimento de Newton e estudo da vibração de sistemas de um grau de liberdade, bem como discutidas várias implicações de ordem prática.

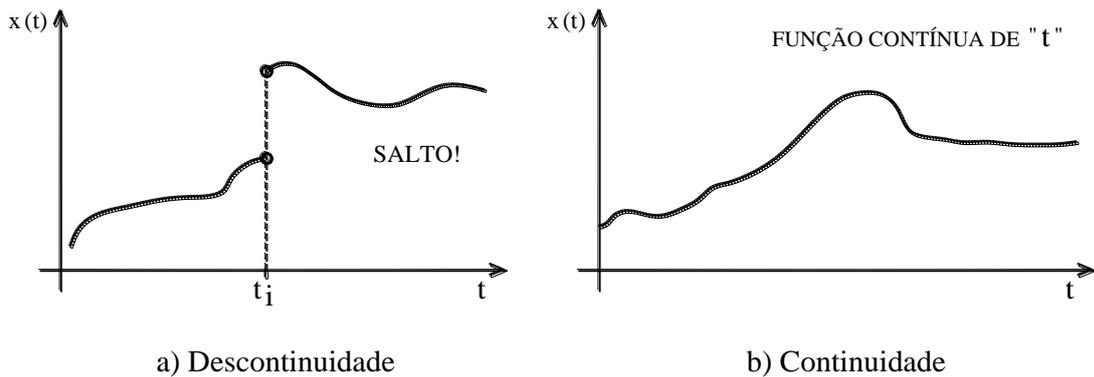
### 2.2- Fundamentos

Antes de se abordar os fundamentos da mecânica newtoniana, vale percorrer um pouco sobre o tempo, variável tempo, dado que essa variável, que tanto tem merecido do pensamento humano constante reflexão, e tem sido sempre um tema favorito dos filósofos.

Por exemplo, na visão do filósofo alemão Immanuel Kant o tempo é o ato da transformação, sem contar que se trata de algo que só vai, por assim se dizer, numa única direção: do presente para o futuro; não havendo, para o nosso entendimento, retorno ao passado. Sem contar que sua “velocidade” de esgotamento, por assim se dizer, não depende de nossa vontade, ou de algo que podemos fazer. Caminhamos sempre para o futuro, jamais para o passado; disso decorrendo a noção de casualidade, ou seja, o efeito vem sempre depois da causa. Do ponto de vista matemático, o fato de que o que ocorre no presente só depende do passado, jamais do futuro, implica em que as condicionantes do movimento são dadas por condições iniciais, não tendo, pois, nenhum sentido ter-se em conta condições de contorno envolvendo a variável tempo (o futuro afetando de algum modo o presente).

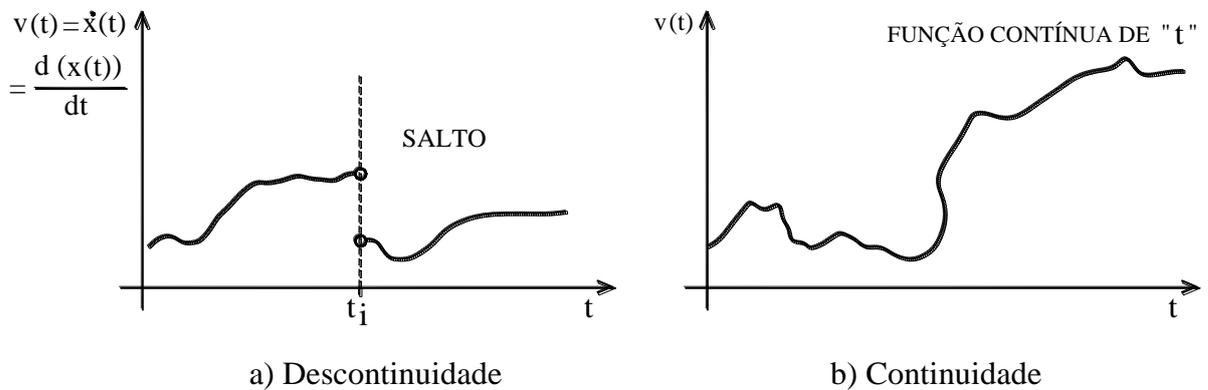
Nesse sentido cumpre assinalar que modernas teorias desenvolvidas no início do século passado, como a teoria da relatividade por Albert Einstein, que explica fenômenos cósmicos, e a mecânica quântica iniciada por Max Planck e que cuida do movimento das partículas elementares da matéria, acabaram por abalar os alicerces da mecânica newtoniana. Todavia, tendo-se em conta a gama de grandezas com as quais lidamos no dia a dia, as restrições consideradas por essas novas teorias indicam que eventuais correções na mecânica newtoniana não são nada apreciáveis na prática.

As Figuras 2.1 a) e b) descrevem a posição de um objeto ao longo do tempo (história de sua posição). A descrição retratada na Figura 2.1 a) não é aceitável, porquanto um objeto não pode, segundo nosso entendimento laico, ocupar duas posições no espaço ao mesmo tempo (princípio da onipresença). Sucede, por outro lado, que nesse caso a velocidade assumiria valor infinito no instante do salto, o que corresponderia, por exemplo, a uma energia cinética infinita; e energia infinita simplesmente não tem o menor sentido. Portanto, a função que descreve a posição de um objeto ao longo do tempo só pode ser expressa por uma função contínua, como mostra a Figura 2.1 b).



**Figura 2.1 – Posição de um objeto ao longo do tempo**

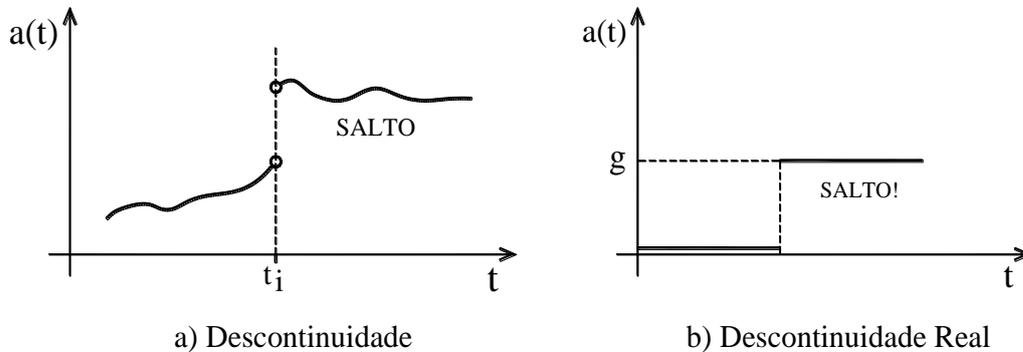
Continuando-se, de maneira similar as Figuras 2.2 a) e b) descrevem a velocidade de um objeto ao longo do tempo, sendo que o comportamento mostrado na Figura 2.2 a) igualmente não é aceitável, pois no instante do salto (descontinuidade) a aceleração do objeto assumiria valor infinito, indicando-se força atuante infinita, e uma grandeza, qualquer que seja ela, assumir valor infinito não faz sentido. Assim sendo, também a velocidade de um objeto só pode ser descrita por uma função contínua na variável tempo, como mostrado na Figura 2.2 b).



**Figura 2.2 – Velocidade de um objeto ao longo do tempo**

As Figuras 2.3 a) e b) descrevem a história da aceleração de um objeto segundo a variável tempo, e ambas são corretas, sendo que a segunda, por exemplo, consiste na descrição da aceleração de um objeto solto no campo gravitacional. Ao se soltar o objeto, instantaneamente a aceleração passa de zero para o valor da aceleração da gravidade, com derivada da aceleração sendo infinita nesse instante. A conclusão é de que a derivada da aceleração não deve estar relacionada com nenhuma grandeza física. Um fato curioso é que nos anos 50, como já mencionado no capítulo anterior, alguns engenheiros entenderam que o desconforto humano ao movimento, como o experimentado em montanhas russas, estaria relacionado com a derivada da aceleração, grandeza essa denominada jerk. Pensavam que a variação do ângulo de

escorregamento fosse a causa do desconforto (a aceleração no plano inclinado é  $g \sin(\theta)$ , sendo  $\theta$  a inclinação); todavia essa ideia felizmente foi logo abandonada por violar as leis de Newton tratadas no que se segue.



**Figura 2.3 – Aceleração de um objeto ao longo do tempo**

### 2.3-Leis de Newton

A mecânica clássica, que também é referida como mecânica newtoniana, baseia-se em apenas três leis da natureza para descrever qualquer movimento, quais sejam, as três leis formuladas por Isaac Newton.

A primeira lei, conhecida por lei da inércia, estabelece que um objeto em movimento retilíneo uniforme, assim vai permanecer se não houver ação sobre ele. Em outras palavras, a quantidade de movimento não se altera, ou seja:

$$m\dot{x} = \text{cte.} \quad (2.1)$$

sendo  $m$  a massa do objeto em movimento e  $\dot{x}$  sua velocidade, empregando-se em (2.1) a clássica notação com pontos superiores para designar o grau de derivação do deslocamento  $x$  em relação à variável tempo. Em verdade, a lei da inércia foi originalmente proposta por Galileu Galilei.

A segunda lei de Newton estabelece que a derivada da quantidade de movimento vem a ser a ação que atua sobre o corpo, ou seja:

$$\text{Ação} = F = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) \quad (2.2)$$

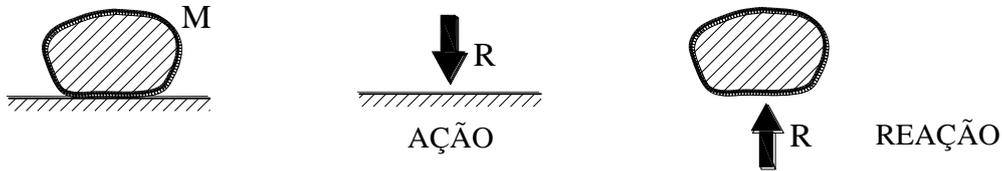
ou, no caso de não haver variação da massa, sua forma mais conhecida

$$F = m\ddot{x} \quad (2.3)$$

que representa a mais notável contribuição de Newton para mecânica. Afinal, ele enxergou como causa da variação da quantidade de movimento a grandeza força.

A terceira lei de Newton, que consiste no princípio da ação e reação, é igualmente notável, pois, como ilustrado na Figura 2.4, no caso de objeto

parado sobre uma mesa, por exemplo, o equilíbrio decorre do fato de a ação e a reação serem opostas e iguais. A ação e a reação correspondente só são explicitadas quando o objeto é considerado isolado do outro pela interface.



**Figura 2.4 Ação e reação**

Cabe assinalar que as leis de Newton são redigidas tendo-se em conta um referencial inercial, ou seja, não acelerado. Por exemplo, no caso de se estar dentro de um elevador, o referencial no assoalho do elevador não vale para efeito de aplicação das leis de Newton no caso de o elevador estar em queda livre, pois no caso tal referencial está sob a aceleração da gravidade. Afinal, estar parado em relação ao piso do elevador não significa estar em repouso, naturalmente.

Todavia, em termos práticos, a superfície da terra pode ser aproximadamente tomada como referencial inercial, pois a rotação da terra em torno de seu eixo implica em aceleração centrípeta de no máximo da ordem de 0,4% da aceleração da gravidade, ou seja, implicando-se em erro insignificante do ponto de vista da engenharia. A avaliação é simples. O raio da terra é da ordem de 6850 km, que corresponde a uma velocidade tangencial devido à rotação da terra na linha do equador que vale

$$\dot{x} = \frac{2\pi}{24} 6850 = 1790 \text{ km/h} = 498 \text{ m/s} \quad (2.4)$$

resultando-se em aceleração centrípeta de

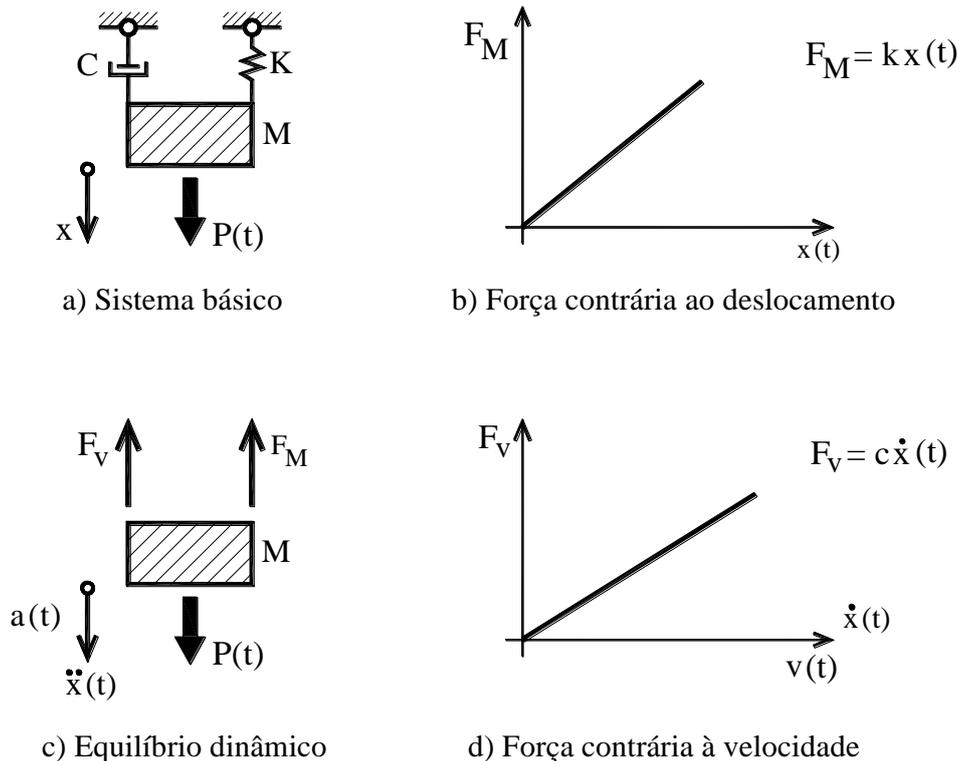
$$a = \frac{498^2}{6850000} = 0,036 \text{ m/s}^2 \quad (2.5)$$

uma aceleração realmente desprezível para os casos da prática. A questão do referencial absoluto foi questão não resolvida até a formulação da Teoria da Relatividade.

## 2.4-Sistema com 1 grau de liberdade

Como visto na apresentação das leis de Newton, as grandezas envolvidas nessas leis são apenas as relacionadas com o deslocamento, a velocidade (derivada do deslocamento) e a aceleração (derivada da velocidade), sendo que as derivadas no tempo de ordem superior a dois não estão relacionadas a grandezas físicas, como já mencionado; e, portanto, suas magnitudes não estão envolvidas na definição dos movimentos.

A Figura 2.5 a) mostra um sistema básico de um grau de liberdade, formado por uma massa  $m$ , uma mola representando as forças internas de deformação (elasticidade) e um amortecedor (absorvedor de energia), bem como a ação externa representada por  $P(t)$ . A mola contempla, pois, a força relacionada com o deslocamento (deformação do meio elástico, aqui representado por uma mola), o amortecedor, que contempla a força de amortecimento, relacionado com a velocidade, e a massa, naturalmente, relacionada com a aceleração, como visto em (2.3).



**Figura 2.5 – Sistema de um grau de Liberdade**

Considera-se aqui o regime linear, tanto para o meio elástico (efeito mola), quanto para o amortecimento. Assim, como ilustrado na Figura 2.5 c), a força na mola é sempre contrária ao deslocamento, e proporcional à magnitude do deslocamento (Figura 2.5 b)); e a força de amortecimento é sempre contrária à velocidade, e proporcional à magnitude da velocidade (Figura 2.5 d)). Cabe assinalar que o regime linear pode ser entendido como uma primeira aproximação do regime não linear, sem contar que, na maioria dos casos da prática, essa consideração é o suficiente.

Tendo-se em conta a segunda lei de Newton, no caso de sistema de um grau de liberdade, como mostrado na Figura 2.5 c), o expresso em (2.3) ganha a seguinte redação:

$$-F_v - F_M + P(t) = m\ddot{x} \quad (2.6)$$

ou ainda, o equilíbrio dinâmico segundo D'Alembert:

$$-F_v - F_M - m\ddot{x} + P(t) = 0 \quad (2.7)$$

no qual a variação da quantidade de movimento  $m\dot{x}$  é considerada como força, no caso força de inércia; afinal esse termo está sendo somado às demais forças em jogo. A força de inércia é a responsável, por exemplo, pela ruptura das estruturas quando sujeitas a terremoto; porquanto, nesse caso, não há força externa aplicada à estrutura. Em verdade, o expresso em (2.6) relaciona ação com a variação da quantidade de movimento, e o expresso em (2.7) retrata o equilíbrio dinâmico, com a variação da quantidade de movimento sendo considerada como uma força de sinal oposto (a inércia é a reação ao movimento).

Tendo-se em conta o regime linear, o expresso em (2.7) ganha uma nova redação, qual seja:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (2.8)$$

que consiste na clássica equação de movimento de um grau de liberdade, onde  $c$  é a constante de proporcionalidade de amortecimento e  $k$  a rigidez do sistema.

A maneira canônica de integração da equação (2.8) consiste na superposição de duas funções, ou seja:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2.9)$$

onde  $x_h(t)$  é a solução homogênea de (2.8), ou seja:

$$m\ddot{x}_h(t) + c\dot{x}_h(t) + kx_h(t) = 0 \quad (2.10)$$

também conhecida como solução da vibração livre (ausência de carregamento), sendo contemplada nessa solução as constantes de integração, no caso duas (equação diferencial de segunda ordem), e  $x_p(t)$  é a chamada solução particular de (2.8), ou seja:

$$m\ddot{x}_p(t) + c\dot{x}_p(t) + kx_p(t) = P(t) \quad (2.11)$$

sendo que nessa solução as constantes de integração não são contempladas; em outras palavras, a solução  $x_p(t)$  apenas reproduz o carregamento dado.

## 2.5-Integração da equação homogênea em casos simples

Tendo-se em conta agora o conhecido princípio romano, segundo o qual para se vencer uma guerra a melhor estratégia é a separação dos inimigos, e atacar um de cada vez, considere-se inicialmente um sistema onde as forças de amortecimento e de rigidez são desprezíveis ( $c = 0$ ,  $k = 0$ ), ou seja, o caso

em que a rigidez e o amortecimento são de magnitude muito pequena. Assim sendo, o equilíbrio dinâmico livre ( $P(t) = 0$ ) se expressa:

$$m\ddot{x}_h(t) = m \frac{d^2}{dt^2}(x_h(t)) = 0 \quad (2.12)$$

que implica em:

$$\ddot{x}_h(t) = 0 \quad (2.13)$$

cujas integrações fornece:

$$\dot{x}_h(t) = C_1 \quad (2.14)$$

sendo  $C_1$  uma constante de integração. Por outro lado, a integração de (2.14) resulta:

$$x_h(t) = C_1 t + C_2 \quad (2.15)$$

onde  $C_2$  é a segunda constante de integração. No caso de movimento livre com condições iniciais conhecidas, por exemplo:

$$\begin{aligned} x_h(t=0) &= x_0 = C_2 \\ \dot{x}_h(t=0) &= \dot{x}_0 = C_1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

o expresso em (2.15), tendo em conta as equações (2.14), permite que se escreva o movimento livre em questão como:

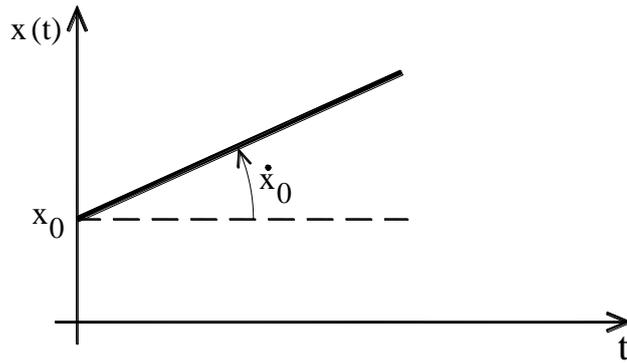
$$x_h(t) = \dot{x}_0 t + x_0 \quad (2.17)$$

expressão essa já conhecida da cinemática (a posição final é dada pela velocidade multiplicada pelo tempo mais a posição inicial). A Figura 2.6 ilustra o expresso em (2.17), indicando-se tratar-se de equilíbrio dinâmico **instável**, pois uma vez iniciado o movimento ele não para mais.

Esse movimento retrata aproximadamente o chamado movimento de deriva de embarcações, por exemplo, uma vez que a embarcação com massa enorme, não estando amarrada (sem mola) e com movimento lento a embarcação não mobiliza forças de arrasto hidrostático apreciável.

Considerando-se agora o caso de um sistema com massa desprezível e sem rigidez, que, aproximadamente, é o caso do movimento de uma esfera de isopor, por exemplo, inserida no mel, tem-se:

$$c\dot{x}_h(t) = 0 \quad (2.18)$$



**Figura 2.6 – Equilíbrio instável**

implicando-se em:

$$\dot{x}_h(t) = \frac{d}{dt}(x_h(t)) = 0 \quad (2.19)$$

cuja integração resulta:

$$x_h(t) = C_1 \quad (2.20)$$

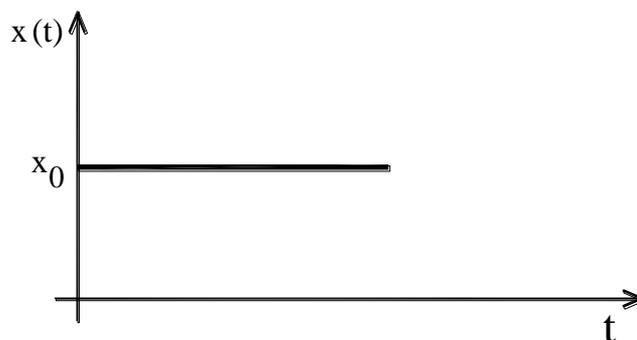
que, no caso de movimento livre com deslocamento inicial dado, ou seja:

$$x_h(t=0) = x_0 = C_1 \quad (2.21)$$

resultando na seguinte expressão para o movimento livre em apreço:

$$x_h(t) = x_0 \quad (2.22)$$

cuja representação gráfica acha-se ilustrada na Figura 2.7, indicando-se tratar-se do chamando equilíbrio dinâmico **indiferente**, pois a posição final será sempre a mesma posição inicial imposta ao sistema.



**Figura 2.7- Equilíbrio indiferente**

Finalmente, considere-se o caso em que a massa e o amortecimento são desprezíveis, ficando-se o equilíbrio dinâmico expresso por:

$$kx_h(t) = 0 \quad (2.23)$$

resultando-se

$$x_h(t) = 0 \quad (2.24)$$

em outras palavras, o equilíbrio estático nesse caso só admite como solução o repouso, não saindo do lugar de origem, como ilustrado na Figura 2.8. Afinal essa é a característica esperada de uma “personalidade” dita rígida. Trata-se, pois, de equilíbrio dito **estável**.



**Figura 2.8 – Equilíbrio estável**

Em resumo, a massa confere instabilidade ao equilíbrio dinâmico, o amortecimento confere a característica de equilíbrio indiferente e a rigidez confere ao equilíbrio dinâmico a característica de estabilidade.

## 2.6-Integração da equação homogênea combinando casos simples

Considere-se agora o caso em que somente a massa tem magnitude desprezível (caso aproximado de uma boia de caixa d'água), para o qual o equilíbrio dinâmico se escreve:

$$c\dot{x}_h(t) + kx_h(t) = 0 \quad (2.25)$$

ou ainda:

$$\dot{x}_h(t) = \frac{d}{dt}x_h(t) = \left(-\frac{k}{c}\right)x_h(t) \quad (2.26)$$

em outras palavras, a derivada do deslocamento é, a menos de uma constante negativa, igual ao próprio deslocamento.

A equação diferencial (2.26) foi uma das mais trabalhadas no passado, pois também aparece na teoria do crescimento populacional, tendo-se por base que o crescimento da população é proporcional ao número de casais, ou seja:

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}y(t) = \lambda y(t) \quad (2.27)$$

sendo  $y(t)$  a população,  $\lambda$  a constante de proporcionalidade e  $\dot{y}(t)$  a taxa de crescimento da população. A solução da equação diferencial (2.27) é dada por:

$$y(t) = Ce^{\lambda t} \quad (2.28)$$

que consiste na função exponencial (crescimento exponencial da população) onde  $C$  é a constante de integração. Uma didática demonstração de (2.27) é o objeto do Apêndice, no qual a série de Taylor é empregada para tal finalidade.

A solução de (2.26) tendo-se em vista (2.28) fica então expressa por:

$$x_h(t) = Ce^{-\left(\frac{k}{c}t\right)} \quad (2.29)$$

e tendo-se em conta a condição de deslocamento inicial dado:

$$x_h(t=0) = C = x_0 \quad (2.30)$$

resultando-se o movimento livre:

$$x_h(t) = x_0 e^{-\left(\frac{k}{c}t\right)} \quad (2.31)$$

cuja representação gráfica acha-se na Figura 2.9. É oportuno verificar que o comportamento exibido na Figura 2.9 é exatamente, como esperado, uma mistura do comportamento da rigidez com o comportamento indiferente do amortecimento. No limite com a rigidez  $k$  tendendo a zero tem-se:

$$x_h(t) = x_0 \quad (2.32)$$

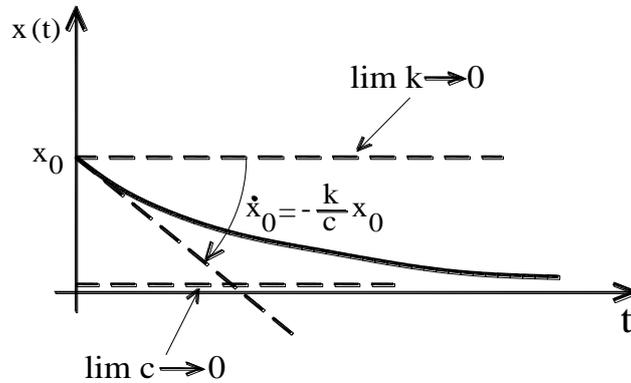
a exemplo de (2.22); e, no caso do amortecimento  $c$  tendendo a zero:

$$x_h(t) = 0 \quad (2.33)$$

a exemplo de (2.24).

Dando sequência, considere-se o caso em que somente a rigidez é nula (caso de uma esfera solta em meio líquido) tem-se:

$$m\ddot{x}_h(t) + c\dot{x}_h(t) = 0 \quad (2.34)$$



**Figura 2.9 – Movimento assintótico para a origem**

ou ainda:

$$\ddot{x}_h(t) = \frac{d}{dt} \dot{x}_h(t) = \left(-\frac{c}{m}\right) \dot{x}_h(t) \quad (2.35)$$

que, a exemplo de (2.29), tem por solução:

$$\dot{x}_h(t) = C_1 e^{-\left(\frac{c}{m}t\right)} \quad (2.36)$$

e, por outro lado, a primitiva da função expressa em (2.36) tem a seguinte redação:

$$x_h(t) = \int \dot{x}_h(t) dt + C_2 \quad (2.37)$$

onde  $C_2$  é a segunda constante de integração, resultando-se:

$$x_h(t) = C_1 \int e^{-\left(\frac{c}{m}t\right)} dt + C_2 = C_1 \left(-\frac{c}{m}\right) e^{-\left(\frac{c}{m}t\right)} + C_2 \quad (2.38)$$

No caso de movimento livre com condições iniciais de velocidade e deslocamento dadas tem-se:

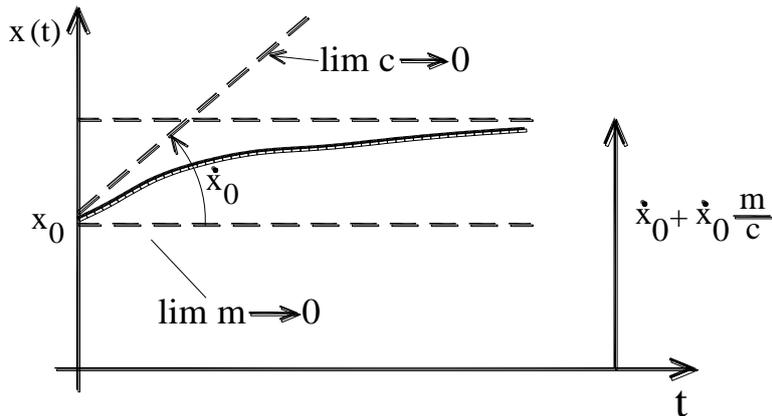
$$\begin{aligned} \dot{x}_h(t=0) &= \dot{x}_0 \\ x_h(t=0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

resultando-se de (2.36) e (2.38) o movimento livre:

$$x_h(t) = x_0 + \dot{x}_0 \frac{m}{c} \left( 1 - e^{-\left(\frac{c}{m}t\right)} \right) \quad (2.40)$$

cuja representação gráfica acha-se na Figura 2.10; valendo-se ressaltar que na situação limite em que a massa  $m$  tende para zero resulta:

$$x_h(t) = x_0 \quad (2.41)$$



**Figura 2.10 – Movimento assintótico**

como em (2.22). Já no caso do amortecimento tendendo-se para zero uma indeterminação em (2.40) aparece, mas facilmente levantada pela regra de L'Hopital, ou seja:

$$x_h(t) = x_0 + \dot{x}_0 m \frac{\frac{d}{dc} \left( 1 - e^{-\left(\frac{c}{m}t\right)} \right)}{\frac{d}{dc} c} \quad (2.42)$$

resultando-se:

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t \quad (2.43)$$

a exemplo de (2.17). Como se percebe, novamente o comportamento misto do equilíbrio dinâmico instável da massa e indiferente do amortecimento podem ser vistos. A indeterminação de (2.40) pode também ser levantada tendo-se em conta a série de Taylor da função exponencial em jogo.

A questão um pouco mais delicada ocorre no caso em que somente o amortecimento é desprezível, ou seja:

$$m\ddot{x}_h(t) + kx_h(t) = 0 \quad (2.44)$$

ou ainda:

$$\ddot{x}_h(t) = \left(-\frac{k}{m}\right)x_h(t) \quad (2.45)$$

indicando-se que a aceleração é oposta ao deslocamento, no sentido de se voltar à origem. Essa equação diferencial foi trabalhada por Galileu Galilei na questão da oscilação do pêndulo quando estudava a oscilação de luminárias na Catedral de Pisa, verificando-se tratar-se de movimento harmônico. A solução da equação diferencial (2.44) é dada por:

$$x_h(t) = C_1 \text{sen}(\omega_n t) + C_2 \text{cos}(\omega_n t) \quad (2.46)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração e  $\omega_n$  a frequência natural angular do sistema, como também exposto no apêndice. A derivada segunda do expresso em (2.46) resulta:

$$\ddot{x}_h(t) = -\omega_n^2 (C_1 \text{sen}(\omega_n t) + C_2 \text{cos}(\omega_n t)) = -\omega_n^2 x_h(t) \quad (2.47)$$

que, comparando-se com (2.45), permite explicitar a frequência angular natural do sistema:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.48)$$

Considerando-se agora o caso de vibração livre com condições iniciais dadas, ou seja:

$$\begin{aligned} x_h(t=0) &= C_2 = x_0 \\ \dot{x}_h(t=0) &= C_1 \omega_n = \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

resultando-se, pois, no movimento livre:

$$x_h(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t) + x_0 \text{cos}(\omega_n t) \quad (2.50)$$

ou ainda:

$$x_h(t) = \left( \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2 + x_0^2} \right) \text{sen}(\omega_n t + \theta) \quad (2.51)$$

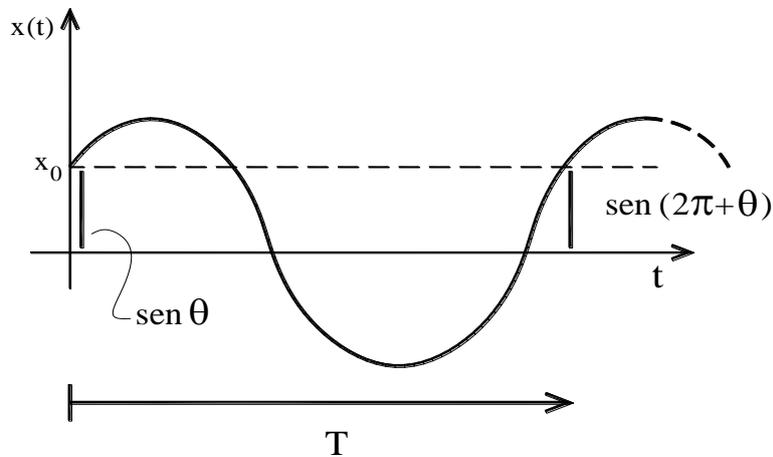
onde:

$$t_g(\theta) = \frac{\omega_n X_0}{\dot{X}_0} \quad (2.52)$$

A Figura 2.11 ilustra a representação gráfica de (2.51).

A passagem de (2.50) para (2.51) tem uma demonstração bastante simples, pois, em sendo o argumento do seno e do cosseno o mesmo, tem-se:

$$x_h(t) = C_1 \text{sen}(\omega_n t) + C_2 \text{cos}(\omega_n t) = C \text{sen}(\omega_n t + \theta) = C [\text{sen}(\omega_n t) \text{cos}(\theta) + \text{cos}(\omega_n t) \text{sen}(\theta)] \quad (2.53)$$



**Figura 2.11 – Oscilação harmônica**

implicando-se em:

$$\begin{aligned} C \text{cos}(\theta) &= C_1 \\ C \text{sen}(\theta) &= C_2 \end{aligned} \quad (2.54)$$

resultando-se:

$$\begin{aligned} C^2 &= C_1^2 + C_2^2 \\ t_g \theta &= \frac{C_2}{C_1} \end{aligned} \quad (2.55)$$

explicando-se assim os fatores expressos em (2.53) e (2.52).

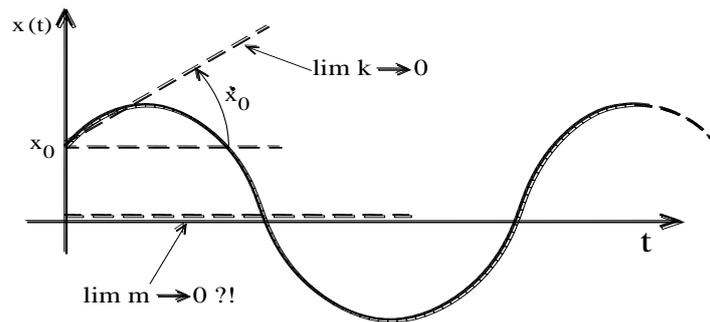
Considerando-se o caso limite com a rigidez  $k$  tendendo para zero, o expresso em (2.50) resulta:

$$x_h(t) = \dot{X}_0 t + X_0 \quad (2.56)$$

como ilustrado na Figura 2.12, uma vez que nesse caso a frequência natural  $\omega_n$  tende para zero, mas o limite indeterminado do primeiro termo de (2.50) é elementar, visto que:

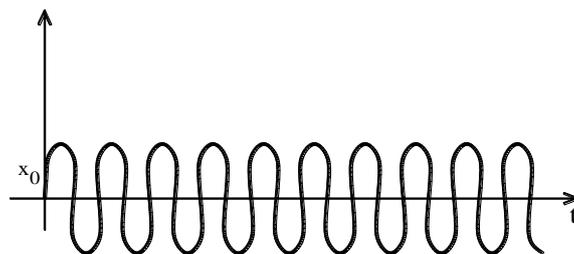
$$x_n(t) = \dot{x}_0 \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n t} + x_0 \cos(\omega_n t) \quad (2.57)$$

tendo-se, pois, para o expresso em (2.50), no limite, (2.56), reproduzindo-se assim o expresso em (2.15), como era de se esperar.



**Figura 2.12 – Limites da oscilação harmônica**

Todavia algo intrigante ocorre no caso do limite com a massa tendendo-se para zero. Neste caso a frequência angular natural tende para o infinito, ou seja, oscilação infinita em qualquer intervalo de tempo, como ilustra-se graficamente na Figura 2.13. Esse limite é similar ao que ocorre na chamada microfonia. De certo modo, o valor do deslocamento não se anula, mas a oscilação ocorre em torno da posição de repouso.



**Fig. 2.13 – Frequência infinita**

Examinando-se o expresso em (2.50), verifica-se que o período da oscilação é dado por:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (2.58)$$

visto que:

$$\begin{aligned}
 x(t+T) &= \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n(t+T_n)) + x_0 \cos(\omega_n(t+T_n)) = \\
 &\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t + 2\pi) + x_0 \cos(\omega_n t + 2\pi)
 \end{aligned}
 \tag{2.59}$$

e, por outro lado, a frequência natural, que consiste no número de ciclos por unidade de tempo se expressa por:

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}
 \tag{2.60}$$

sendo a frequência dada em Hz quando o período for tomado em segundos, e a frequência angular natural  $\omega_n$  em radianos por segundo.

### 2.7-Integração da equação homogênea no caso geral

Quando nenhum termo da equação de equilíbrio dinâmico é nulo, ou seja:

$$m\ddot{x}_h(t) + c\dot{x}_h(t) + kx_h(t) = 0
 \tag{2.61}$$

ou ainda:

$$\ddot{x}_h(t) + \frac{c}{m} \dot{x}_h(t) + \frac{k}{m} x_h(t) = 0
 \tag{2.62}$$

que, por sua vez, resulta em:

$$\ddot{x}_h(t) + 2\gamma\omega_n\dot{x}_h(t) + \omega_n^2 x_h(t) = 0
 \tag{2.63}$$

onde o amortecimento adimensional  $\gamma$  é expresso por:

$$\gamma = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}
 \tag{2.64}$$

sendo que o fator 2 é escolhido visando simplificar expressões que são abordadas mais adiante

Antes de se abordar a solução da equação diferencial (2.63), vale assinalar que, quando combinado amortecimento e rigidez a solução é do tipo exponencial, e, portanto, não oscilante (vide (2.29)), e o mesmo acontecendo combinando-se amortecimento e massa (vide (2.40)); mas quando se combina rigidez e massa a solução é oscilante (vide (2.50)). Assim sendo, é de se esperar que a solução de (2.61) deve ser oscilante para amortecimento de pequena magnitude, e do tipo exponencial não oscilante em caso contrário. Vale acrescentar que buscar a solução de (2.61) pela via da série de potência,

embora viável, envolve manipulação algébrica de grande monta, sendo mais expedito inspecionar a solução pela via do exponencial, como segue.

Assume-se, portanto, que a solução de (2.61) é também do tipo exponencial, ou seja:

$$x_h(t) = Ce^{\beta t} \quad (2.65)$$

sendo C uma constante, e que, levada em (2.63), resulta:

$$[\beta^2 + 2\gamma\omega_n\beta + \omega_n^2]Ce^{\beta t} = 0 \quad (2.66)$$

ou seja, no caso de solução não nula ( $C \neq 0$ ), implica em:

$$\beta^2 + 2\gamma\omega_n\beta + \omega_n^2 = 0 \quad (2.67)$$

cujas raízes são dadas por:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\gamma\omega_n + \omega_n\sqrt{\gamma^2 - 1} \\ \beta_2 &= -\gamma\omega_n - \omega_n\sqrt{\gamma^2 - 1} \end{aligned} \quad (2.68)$$

resultando-se, pois:

$$x_h(t) = e^{-\gamma\omega_n t} \left[ C_1 e^{\omega_n t \sqrt{\gamma^2 - 1}} + C_2 e^{-\omega_n t \sqrt{\gamma^2 - 1}} \right] \quad (2.69)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são as constantes de integração. Como se pode perceber de (2.69), para amortecimento adimensional  $\gamma$  maior que a unidade a solução homogênea não é oscilante (sem vibração); assim o interesse vai doravante focar a solução para  $\gamma$  menor que a unidade, ficando (2.69) com uma nova redação, ou seja:

$$x_h(t) = e^{-\gamma\omega_n t} \left[ C_1 e^{i\omega_n t \sqrt{1 - \gamma^2}} + C_2 e^{-i\omega_n t \sqrt{1 - \gamma^2}} \right] \quad (2.70)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária. Como mostrado no Apêndice, o exponencial complexo, pela fórmula de Euler, corresponde à solução do tipo trigonométrico, e, assim sendo, (2.70) passa a ter a seguinte redação:

$$x_h(t) = e^{-\gamma\omega_n t} \left[ C_1 \text{sen}(\omega_* t) + C_2 \text{cos}(\omega_* t) \right] \quad (2.71)$$

onde:

$$\omega_* = \omega_n \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (2.72)$$

sendo  $\omega_*$  a frequência angular natural com amortecimento. Valendo-se apontar que a solução expressa em (2.71) vale também para amortecimento  $\gamma$  superior a unidade trocando-se as funções trigonométricas pelas correspondentes funções hiperbólicas (detalhes dessa conversão são objeto de atenção no Apêndice). A solução para amortecimento unitário pode ser obtida examinando-se em situação limite tanto (2.70) como (2.71), ou ainda as séries de Taylor correspondentes.

Considerando-se o caso de movimento livre com condições iniciais dadas, ou seja:

$$\begin{aligned} x_h(t=0) &= C_2 = x_0 \\ \dot{x}_h(t=0) &= -\gamma\omega_n C_2 + \omega_* C_1 = \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

e, com isso, o expresso em (2.71) e sua derivada resultam:

$$x_h(t) = e^{-\gamma\omega_n t} \left[ \frac{\dot{x}_0 + \gamma\omega_n x_0}{\omega_*} \text{sen}(\omega_* t) + x_0 \cos(\omega_* t) \right] \quad (2.74)$$

e, exemplo de (2.51), (2.74) ganha também a redação:

$$x_h(t) = e^{-\gamma\omega_n t} \left[ \left( \sqrt{\left( \frac{\dot{x}_0 + \gamma\omega_n x_0}{\omega_*} \right)^2 + x_0^2} \right) \text{sen}(\omega_* t + \theta) \right] \quad (2.75)$$

onde:

$$t_g(\theta) = \frac{x_0 \omega_*}{\dot{x}_0 + \gamma\omega_n x_0} \quad (2.76)$$

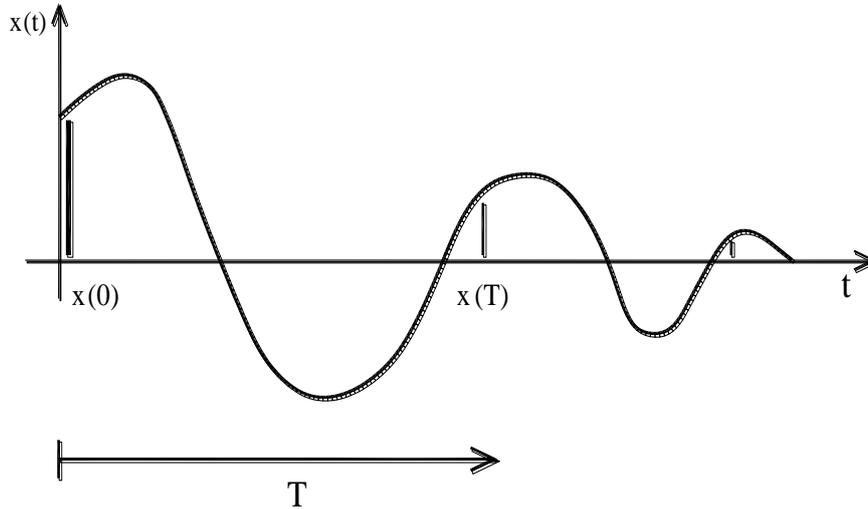
sendo a representação gráfica de (2.75) exibida em gráfico na Figura 2.14, indicando-se o período do movimento livre com amortecimento em questão e as amplitudes no início e no fim do período, ou seja:

$$\begin{aligned} x_h(t=0) &= \left( \sqrt{\left( \frac{\dot{x}_0 + \gamma\omega_n x_0}{\omega_*} \right)^2 + x_0^2} \right) \text{sen}(\theta) \\ x_h(t=T) &= e^{-\gamma\omega_n T} \left( \sqrt{\left( \frac{\dot{x}_0 + \gamma\omega_n x_0}{\omega_*} \right)^2 + x_0^2} \right) \text{sen}(\theta + 2\pi) \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde:

$$\omega_n T = 2\pi \quad (2.78)$$

corresponde ao ciclo da função (2.74), com  $T$  sendo agora o período com amortecimento.



**Figura. 2.14 – Oscilação amortecida**

Define-se como decremento logarítmico a relação:

$$\delta = \ell_n \left( \frac{x_n(t=0)}{x_n(t=T)} \right) = \gamma \omega_n T = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \quad (2.79)$$

onde  $\ell_n$  denota o logaritmo natural, ou ainda a forma inversa:

$$\gamma = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} \quad (2.80)$$

o que permite, pois, explicitar o amortecimento adimensional em função do decremento logarítmico. No caso de amortecimento adimensional de pequena magnitude ( $\gamma \ll 1$ ) o expresso em (2.79) e (2.80) ficam respectivamente:

$$\begin{aligned} \delta &= 2\pi\gamma \\ \gamma &= \frac{\delta}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.81)$$

que são expressões mais comumente encontradas na literatura técnica especializada.

É oportuno assinalar, nesse ponto, que o parâmetro de amortecimento  $c$  é muito difícil de ser medido diretamente, ao contrário do que ocorre com a massa por meio de balança, ou a rigidez por meio de um transdutor de força, pois a força de amortecimento não tem como ser individualizada. Assim, a

medida indireta fornecida por (2.80) por meio do decremento logarítmico é uma das possíveis maneiras indiretas de se medir o amortecimento; sendo que outras maneiras como a chamada técnica da meia potência a ser examinada mais adiante, com base a resposta do sistema submetido à solicitação harmônica, e outras baseadas na transformada de Fourier, como a denominada técnica do Círculo Ajustado (Circular Fitted), vão ser objeto de atenção no próximo capítulo.

## 2.8-Solução particular em casos simples submetidos à solicitação harmônica

A atenção aqui vai estar voltada agora para a solução particular da equação de movimento (2.8), tendo-se em conta solicitações do tipo harmônico, que é o caso que interessa mais de perto em dinâmica; e, por essa razão, a abordagem é mais detalhada, valendo-se também daquele princípio romano.

Considere-se inicialmente o caso de solicitação senoidal atuante em um sistema estrutural, no qual apenas a massa não é nula, ou seja:

$$m\ddot{x}_p(t) = P\text{sen}(\omega t) \quad (2.82)$$

ou ainda:

$$\ddot{x}_p(t) = \frac{P}{m}\text{sen}(\omega t) \quad (2.83)$$

que corresponde ao deslocamento expresso por:

$$x_p(t) = -\frac{P}{m\omega^2}\text{sen}(\omega t) = \frac{P}{m\omega^2}\text{sen}(\omega t - \pi) \quad (2.84)$$

mostrando-se que a solução particular se mostra defasada da solicitação com atraso de meia volta ( $-\pi$ ). No caso de solicitação cossenoidal, ou seja:

$$m\ddot{x}_p(t) = P\text{cos}(\omega t) \quad (2.85)$$

a solução, de modo similar, é dada por:

$$x_p(t) = \frac{P}{m\omega^2}\text{cos}(\omega t - \pi) \quad (2.86)$$

valendo-se, pois, a mesma observação feita no caso senoidal.

No caso em que a massa e a rigidez do sistema são nulas, tem-se:

$$c\dot{x}_p(t) = P\text{sen}(\omega t) \quad (2.87)$$

cuja solução se expressa:

$$x_p(t) = -\frac{P}{c\omega} \cos(\omega t) = \frac{P}{c\omega} \text{sen}(\omega t - \pi/2) \quad (2.88)$$

verificando-se assim que o amortecimento se caracteriza por uma resposta com defasagem negativa de um quarto de volta ( $-\pi/2$ ) em relação à solicitação. No caso de solicitação cossenoidal, ou seja:

$$\dot{x}_p(t) = P\cos(\omega t) \quad (2.89)$$

a solução é dada por:

$$x_p(t) = \frac{P}{c\omega} \cos(\omega t - \pi/2) \quad (2.90)$$

valendo-se, pois, a mesma observação feita no caso senoidal.

Já no caso em que somente a rigidez não é nula, conhecido como caso quase estático, tem-se:

$$kx_p(t) = P\text{sen}(\omega t) \quad (2.91)$$

cuja solução de modo imediato é então:

$$x_p(t) = \frac{P}{k} \text{sen}(\omega t) \quad (2.92)$$

não havendo, pois, nenhuma defasagem entre a da solicitação e a da solução particular. Em outras palavras, a rigidez não permite defasagem na resposta particular. Para a solicitação cossenoidal a resposta é igualmente simples, substituindo-se em (2.92) a função senoidal pela cossenoidal.

## 2.9-Solução particular no caso geral submetido à solicitação harmônica

Deixando-se de lado um detalhamento maior da solução particular combinando massa rigidez e amortecimento, visando não alongar desnecessariamente o texto, no caso em que nenhum termo é nulo tem-se:

$$m\ddot{x}_p(t) + c\dot{x}_p(t) + kx_p(t) = P\text{sen}(\omega t) \quad (2.93)$$

sendo que a solução particular deve agora contemplar tanto termos em seno como em cosseno, pois no primeiro membro de (2.93) contempla-se também termo em derivada primeira, assim:

$$x_p(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \quad (2.94)$$

onde as constantes A e B são determinadas de modo a (2.94) atender à (2.93), ou seja:

$$m[-A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t)] + c[A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)] + k[A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)] = P\sin(\omega t) \quad (2.95)$$

ou ainda:

$$[-mA\omega^2 - Bc\omega + kA]\sin(\omega t) + [-mB\omega^2 + cA\omega + kB]\cos(\omega t) = P\sin(\omega t) \quad (2.96)$$

resultando-se (dado que as funções seno e cosseno são independentes)

$$\begin{aligned} A(-m\omega^2 + k) + B(-c\omega) &= P \\ A(c\omega) + B(-m\omega^2 + k) &= 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} A &= P \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \\ B &= P \frac{-c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \end{aligned} \quad (2.98)$$

e com isso a solução particular ganha a seguinte redação:

$$x_p(t) = \frac{P}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} [(k - m\omega^2)\sin(\omega t) - c\omega\cos(\omega t)] \quad (2.99)$$

ou ainda:

$$x_p(t) = \frac{P}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \left[ \left( \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right) \sin(\omega t - \theta) \right] \quad (2.100)$$

ou mais ainda:

$$x_p(t) = \frac{P}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} [\sin(\omega t - \theta)] \quad (2.101)$$

onde:

$$t_g(\theta) = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (2.102)$$

a exemplo de (2.51). No caso cossenoidal a solução particular é dada por:

$$x_p(t) = \frac{P}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} [\cos(\omega t - \theta)] \quad (2.103)$$

verificando-se de (2.101) que a defasagem é nula para massa e amortecimento nulos,  $-\pi/2$  para massa e rigidez nulas, e  $-\pi$  para rigidez e amortecimento nulos, e valores intermediários no caso de parâmetros variando nos intervalos correspondentes.

## 2.10-Solução particular para o caso polinomial e exponencial

Os casos de solicitação variando segundo um polinômio e segundo uma função exponencial são também obtidos de maneira simples por inspeção, e, por essa razão, são também objeto de apresentação a seguir. Os casos de solicitação com magnitude variando segundo funções mais complicadas de serem manipuladas algebricamente vão ser tratados por métodos mais gerais apresentados no próximo capítulo (método de Duhamel e da Transformada de Fourier).

Considere-se, a título de ilustração, o caso de solicitação variando segundo um polinômio cúbico, ou seja:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3) \quad (2.104)$$

ou ainda:

$$\ddot{\rho} + 2\gamma\omega_n\dot{\rho} + \omega_n^2\rho = \omega_n^2(A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3) \quad (2.105)$$

na qual  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ,  $\gamma = c/2m\omega_n$ ,  $\rho = x/x_e$  e  $x_e = P/k$ .

Por inspeção, verifica-se facilmente que a solução particular nesse caso é também dada por um polinômio cúbico, ou seja:

$$\rho_p = \omega_n^2(A_0^* + A_1^*t + A_2^*t^2 + A_3^*t^3) \quad (2.106)$$

a qual substituída em (2.105) permite redigir:

$$\begin{aligned} & (2A_2^* + 6A_3^*t) + 2\gamma\omega_n(A_1^* + 2A_2^*t + 3A_3^*t^2) + \\ & \omega_n^2(A_0^* + A_1^*t + A_2^*t^2 + A_3^*t^3) = A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3 \end{aligned} \quad (2.107)$$

o que resulta nas igualdades:

$$\begin{aligned}
 \omega_n^2 A_3^* &= A_3 \\
 2\gamma\omega_n(3A_3^*) + \omega_n^2 A_2^* &= A_2 \\
 6A_3^* + 2\gamma\omega_n(2A_2^*) + \omega_n^2 A_1^* &= A_1 \\
 2A_2^* + 2\gamma\omega_n(A_1^*) + \omega_n^2 A_0^* &= A_0
 \end{aligned}
 \tag{2.108}$$

resultando-se, finalmente:

$$\begin{aligned}
 \rho_p = A_0 - \frac{2\gamma}{\omega_n} A_1 + \frac{8\gamma^2 - 2}{\omega_n^2} A_2 - \frac{48\gamma^3 - 24\gamma}{\omega_n^3} A_3 + \\
 \left[ A_1 - \frac{4\gamma}{\omega_n} A_2 + \frac{24\gamma^2 - 6}{\omega_n^2} A_3 \right] t + \left[ A_2 - \frac{6\gamma}{\omega_n} A_3 \right] t^2 + A_3 t^3
 \end{aligned}
 \tag{2.109}$$

que consiste na solução particular procurada.

No caso de solicitação variando segundo a função exponencial, ou seja:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Pe^{at}
 \tag{2.110}$$

a qual, a exemplo de (2.104), tem também a redação parametrizada:

$$\ddot{\rho} + 2\gamma\omega_n\dot{\rho} + \omega_n^2\rho = \omega_n^2 e^{at}
 \tag{2.111}$$

cuja solução particular é também por inspeção do tipo exponencial, ou seja:

$$\rho_p = A^* e^{at}
 \tag{2.112}$$

que, substituída em (2.111), permite explicitar  $A^*$  em termos dos parâmetros do sistema, ou seja:

$$\rho_p = \frac{\omega_n^2}{a^2 + 2\gamma\omega_n a + \omega_n^2} e^{at}
 \tag{2.113}$$

deixando-se para o momento oportuno outras soluções particulares também de interesse na prática.

## 2.11-Solução completa no caso geral submetido à solicitação harmônica

A solução geral da equação diferencial (2.8), no caso de solicitação harmônica senoidal, conforme já exposto em (2.9), consiste na superposição da solução homogênea (2.71) com a solução particular (2.99), ou seja:

$$x(t) = e^{-\gamma\omega_n t} [C_1 \text{sen}(\omega_* t) + C_2 \text{cos}(\omega_* t)] + \frac{P}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} [(k - m\omega^2) \text{sen}(\omega t) - c\omega \text{cos}(\omega t)] \quad (2.114)$$

que, no caso de condições iniciais de repouso, ou seja, quando o movimento passa a ser produzido pela ação apenas da carga aplicada, que é o caso que mais de perto interessa do ponto de vista da engenharia, tem-se:

$$x(t=0) = 0 = C_2 - \frac{Pc\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \quad (2.115)$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 = -\gamma\omega C_2 + C_1\omega + \frac{P\omega(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

ganhando-se, pois, (1.114) a seguinte redação:

$$x(t) = \frac{P}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \left[ e^{-\gamma\omega_n t} \left( \frac{c\gamma\omega_n \omega - \omega(k - m\omega^2)}{\omega_*} \text{sen}(\omega_* t) + c\omega \text{cos}(\omega_* t) \right) + \left[ (k - m\omega^2) \text{sen}(\omega t) - c\omega \text{cos}(\omega t) \right] \right] \quad (2.116)$$

ou ainda:

$$x(t) = \frac{P}{k} \frac{1}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \left[ e^{-\gamma\omega_n t} \left( \frac{(2\gamma^2 + \alpha^2 - 1)\alpha}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \text{sen}(\omega_* t) + 2\gamma\alpha \text{cos}(\omega_* t) \right) + \left[ (1 - \alpha^2) \text{sen}(\omega t) - 2\gamma\alpha \text{cos}(\omega t) \right] \right] \quad (2.117)$$

onde:

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (2.118)$$

que consiste, pois, na relação entre a frequência angular da solicitação e a frequência angular natural do sistema.

Como o fator  $P/k$  representa deslocamento estático, a função:

$$\psi(\gamma, \alpha, \omega_n t) = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2 \alpha^2} \left[ e^{-\gamma \omega_n t} \left( \frac{(2\gamma^2 + \alpha^2 - 1)\alpha}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \text{sen}(\omega_n t) + 2\gamma\alpha \cos(\omega_n t) \right) + (1 - \alpha^2) \text{sen}(\omega t) - 2\gamma\alpha \cos(\omega t) \right] \quad (2.119)$$

representa então a amplificação dinâmica do deslocamento estático ao longo do tempo. Além disso, como a parcela multiplicada pelo exponencial negativo, que corresponde à contribuição da solução homogênea, desaparece ao longo do tempo, essa parcela representa o chamado movimento transitório, e a outra parcela, denominada movimento permanente, descreve praticamente o movimento para os tempos adiante.

No caso de solicitação cossenoidal a expressão equivalente de (2.119) se escreve:

$$\phi(\gamma, \alpha, \omega_n t) = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2 \alpha^2} \left[ -e^{-\gamma \omega_n t} \left( \frac{(1 + \alpha^2)\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \text{sen}(\omega_n t) + (1 - \alpha^2) \cos(\omega_n t) \right) + (1 - \alpha^2) \cos(\omega t) + 2\gamma\alpha \text{sen}(\omega t) \right] \quad (2.120)$$

sendo que, tanto (2.119), quanto (2.120) são lançados em gráficos como ilustrado na clássica Figura 2.15 de Den Hartog<sup>1</sup>. A Figura 2.15 a) exhibe casos particulares das funções de amplificação dinâmica  $\psi(t)$  e  $\phi(t)$ , e a Figura 2.15 b) explicita a superposição da parte da solução (2.116) afetada pelo termo exponencial negativo (contribuição da solução homogênea) com a parte da solução não afetada pelo termo exponencial (contribuição da solução particular), deixando-se claro que, com o passar do tempo, a solução geral passa a convergir para apenas a contribuição da solução particular.

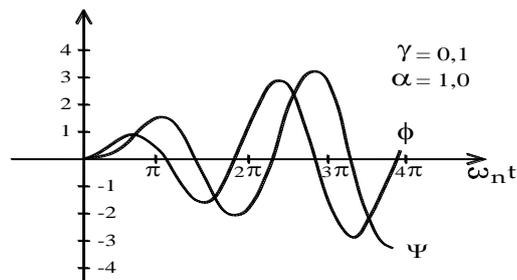
Vale também assinalar que a superposição em discussão deixa evidente que as maiores amplitudes ocorrem no início do movimento, quando a contribuição da solução homogênea é significativa, indicando-se que eventual colapso do sistema deve ser examinado no começo do movimento tendo-se em conta as contribuições da solução homogênea e da solução particular. É sabido, por exemplo, que a queima de uma lâmpada ocorre no acender, ou no apagar como ilustra a Figura 2.15b); bem como se sabe que a maioria dos acidentes aéreos ocorre em operações de pouso e de decolagem; o mesmo ocorrendo com os acidentes rodoviários no início e final de jornadas, na proximidade da origem e destino, respectivamente.

<sup>1</sup> Den Hartog, J.P., *Mechanical Vibrations*, 4a. Ed., Mc Graw Hill, Inc., New York, (1956)

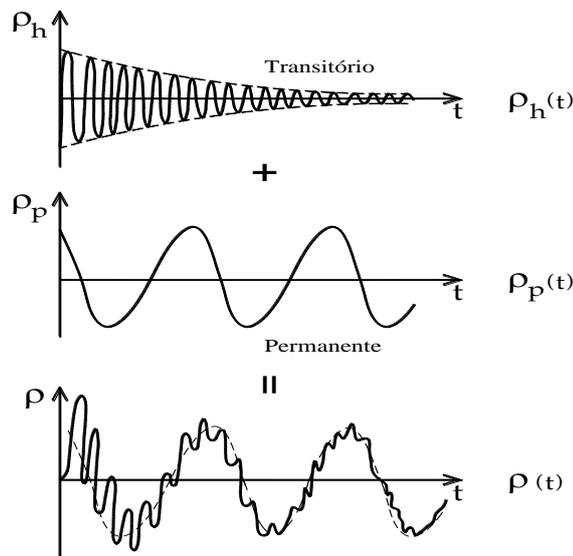
Valendo-se acrescentar ainda que, no caso de se ter condições iniciais não nulas, as soluções gerais para solicitações envolvendo funções harmônicas podem ser obtidas por superposição com a solução (2.74), ou seja:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{P}{k} \psi(\gamma, \alpha, \omega_n t) + \\
 &e^{-\gamma \omega_n t} \left[ \frac{\dot{x}_0 + \gamma \omega_n x_0}{\sqrt{1-\gamma^2}} \operatorname{sen}(\sqrt{1-\gamma^2} \omega_n t) + x_0 \cos(\sqrt{1-\gamma^2} \omega_n t) \right] \\
 x(t) &= \frac{P}{k} \phi(\gamma, \alpha, \omega_n t) + \\
 &e^{-\gamma \omega_n t} \left[ \frac{\dot{x}_0 + \gamma \omega_n x_0}{\sqrt{1-\gamma^2}} \operatorname{sen}(\sqrt{1-\gamma^2} \omega_n t) + x_0 \cos(\sqrt{1-\gamma^2} \omega_n t) \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.121}$$

nos casos senoidal e cossenoidal, respectivamente.



a) Ampliação dinâmica



b) Superposição

**FIGURA- 2.15 Funções de amplificação e superposição**

## 2.12-Movimento permanente

Como se pode perceber facilmente, depois de decorrido um determinado tempo, de sorte a se ter:

$$e^{-\gamma\omega_n t} \ll 1 \quad (2.122)$$

a solução (2.117) ganha a redação:

$$x(t) = \frac{P}{k} \frac{1}{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \left[ (1-\alpha^2)\text{sen}(\omega t) - 2\gamma\alpha \cos(\omega t) \right] = \frac{P/k}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \text{sen}(\omega t - \theta) \quad (2.123)$$

e no caso cossenoidal:

$$x(t) = \frac{P/k}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \cos(\omega t - \theta) \quad (2.124)$$

onde:

$$t_g(\theta) = \frac{2\gamma\alpha}{1-\alpha^2} \quad (2.125)$$

valendo-se ressaltar que parcela da solução (2.117) afetada pelo exponencial negativo é denominada movimento transitório, uma vez que ela deixa de contribuir para a solução geral decorrido tempo suficiente, como exposto em (2.122). O exposto em (2.123) e (2.124) são conhecidos apropriadamente como soluções permanentes.

Tanto em (2.123) como em (2.124) o fator:

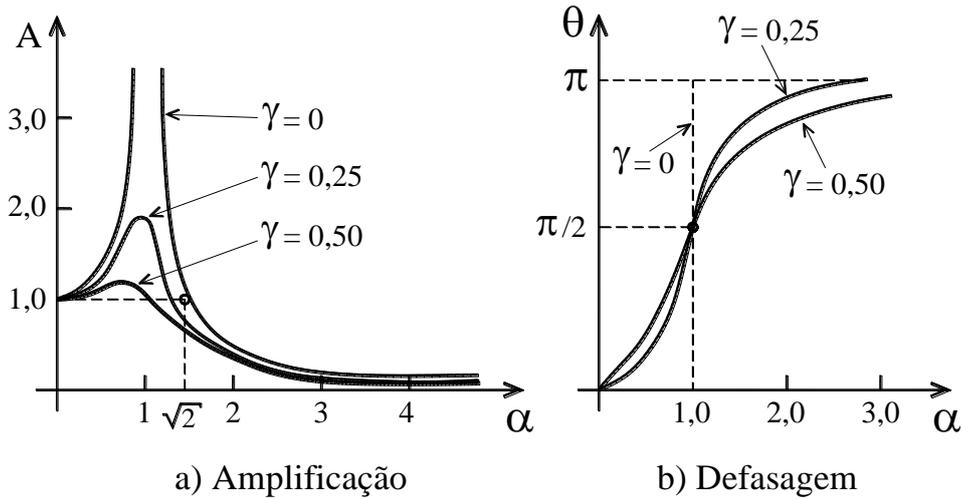
$$A = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \quad (2.126)$$

consiste, como já mencionado, na amplificação dinâmica da amplitude estática ( $P/k$ ), cuja representação gráfica em função do amortecimento  $\gamma$  e da relação  $\alpha$  acha-se na Figura 2.16 a), mostrando-se que, no caso de amortecimento nulo e  $\alpha$  unitário, a amplificação é infinita, correspondendo-se ao que se denomina ressonância. A Figura 2.16 b) exhibe a defasagem  $\theta$  em função de  $\gamma$  e  $\alpha$ .

Todavia, esse aparente paradoxo de a amplitude ser infinita aparentemente instantaneamente, se resolve, pois, no caso de amortecimento nulo, o expresso em (2.119) fica:

$$\psi(\alpha, \omega_N t) = \frac{1}{(1-\alpha^2)^2} \left[ \alpha(\alpha^2 - 1) \text{sen}(\omega_n t) + (1-\alpha^2) \text{sen}(\alpha \omega_n t) \right] \quad (2.127)$$

cujo limite com  $\alpha$  tendendo para o valor unitário fica indeterminado. Todavia, aplicando-se o teorema de L'Hopital depois de simplificada a expressão resultante, ou seja:



**Figura 2.16 – Amplificação dinâmica e defasagem**

$$\psi(\alpha, \omega_N t) = \frac{\frac{d}{d\alpha} [\text{sen}(\alpha \omega_n t) - \alpha \text{sen}(\omega_n t)]}{\frac{d}{d\alpha} (1-\alpha^2)} = \frac{1}{2} [\text{sen}(\omega_n t) - \omega_n t \cos(\omega_n t)] \quad (2.128)$$

verificando-se que a função em questão cresce indefinidamente com o tempo, mas não instantaneamente como poderia parecer de (2.126). No caso cossenoidal a condição de amortecimento nulo e relação  $\alpha$  tendendo-se para valor unitário, de modo similar, fica:

$$\phi(\omega_N t) = \frac{\omega_n t}{2} \text{sen}(\omega_n t) \quad (2.129)$$

função igualmente crescente indefinidamente com o tempo.

Cabe assinalar que a amplificação dinâmica expressa em (2.126) atinge máximo para  $\alpha$  satisfazendo a condição:

$$\frac{dA}{d\alpha} = 2(1 - \alpha^2)(-2\alpha) + 8\gamma^2\alpha = 0 \quad (2.130)$$

$$\alpha = \sqrt{1 - 2\gamma^2}$$

ou seja, a máxima amplificação ocorre para frequência angular menor que a frequência angular natural (para amortecimento menor que 10% o máximo ocorre para  $\alpha$  praticamente unitário).

O expresso em (2.126) para amortecimento nulo fica:

$$A = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^2} \quad (2.131)$$

resultando-se amplitude  $A$  é unitária para  $\alpha$  nulo e  $\alpha = \sqrt{2}$ . Além disso, como mostrado na Figura 2.16 a), para valores da relação  $\alpha$ , grosso modo, menores que  $\sqrt{2}$  tem-se amplificação dinâmica com amplitude da resposta maior que a amplitude estática; e, para valores maiores, tem-se redução da amplitude (isolação dinâmica). Além disso, para valores menores do amortecimento, a curva de resposta fica sempre acima das referentes a valores maiores.

Já a Figura 2.16 b) exhibe o comportamento da defasagem  $\theta$  segundo o expresso em (2.125), mostrando-se que, na ressonância ( $\alpha = 1$ ), a defasagem é de um quarto de volta ( $\pi/2$ ) independente do amortecimento, sendo que as curvas para amortecimentos maiores ficam por cima das de valores menores para  $\alpha$  menores que a unidade e abaixo em caso contrário. Mais ainda, a defasagem é nula para  $\alpha$  nulo,  $-\pi/2$  para  $\alpha$  unitário, e  $-\pi$  para  $\alpha$  maior que um para amortecimento nulo, bem como para  $\alpha$  tendendo para o infinito no caso de amortecimento não nulo.

Conclusões de grande interesse prático, que podem ser extraídas do mostrado na Figura 2.16 a), são as seguintes: em primeiro lugar, para pequenos valores da relação  $\alpha$  e amortecimento de pequena magnitude, grosso modo  $\alpha < 0.5$ , tem-se  $A \cong 1$ , e com isso:

$$x(t)_{\max} = x_e = \frac{P}{k} \quad (2.132)$$

resultando-se que nessa região o domínio é da rigidez, pois o deslocamento só depende da rigidez. Em outras palavras, para se reduzir o deslocamento tem-se que alterar a rigidez para maior, pois alterar a massa ou o amortecimento nada resolve. Já para a relação  $\alpha$  próxima da unidade, grosso modo  $0.5 < \alpha < \sqrt{2}$ , tem-se:

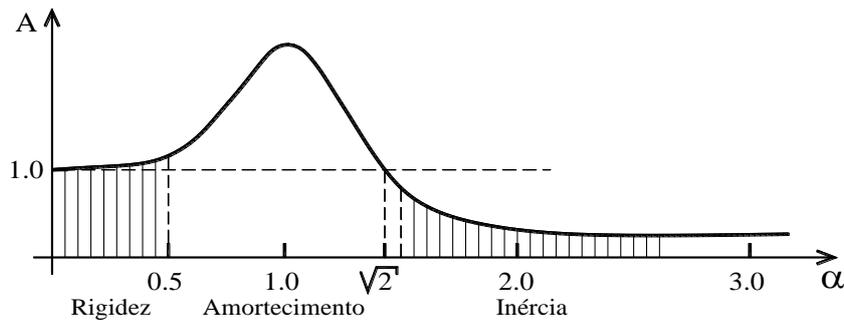
$$x(t)_{\max} = \frac{x_e}{2\gamma} \quad (2.133)$$

região dominada pelo amortecimento, na qual a magnitude do deslocamento dinâmico depende da magnitude do amortecimento e do deslocamento estático, mas alterar a rigidez para reduzir o deslocamento estático envolve custos de grande vulto, enquanto a alteração do amortecimento mostra-se assim mais adequada.

Finalmente, para relação  $\alpha > \sqrt{2}$  tem-se:

$$x(t)_{\max} = \frac{P}{m\omega^2} \quad (2.134)$$

região, pois, dominada pela massa. Para se reduzir o deslocamento dinâmico nesse caso a massa é que tem que ser alterada para maior. Valendo-se adiantar que é nessa região que se encontra a maioria dos casos de isolamento dinâmica. A Figura 2.17 ilustra as regiões mencionadas. Resumindo-se, problemas na região da rigidez são resolvidos com o controle da rigidez; na região do amortecimento a solução tem de ter em conta o amortecimento e na região da massa, a massa é quem controla a amplitude do deslocamento.



**Figura 2.17 – Regimes do movimento dinâmico**

### 2.13-Vibração de base, sensores de medição e isolamento

A Figura 2.18 ilustra um sistema de um grau de liberdade sob ação de movimento na base expresso por:

$$x_b = A \sin \omega t \quad (2.135)$$

e assim, a equação de equilíbrio dinâmico se escreve:

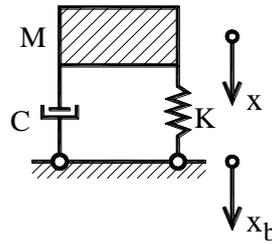
$$m\ddot{x} + c\dot{x}_R + kx_R = 0 \quad (2.136)$$

na qual:

$$x_R = x - x_b \quad (2.137)$$

visto que a força elástica mobiliza-se mediante deformação da mola (deslocamento relativo), e igualmente a força de viscosidade depende apenas

da velocidade relativa, e também pelo fato de não haver solicitação externa atuando na massa.



**FIGURA 2.18**

Tendo-se em vista (2.137) o equilíbrio (2.136) ganha uma nova redação, ou seja:

$$m\ddot{x}_R + c\dot{x}_R + kx_R = mA\omega^2 \text{sen}\omega t \quad (2.138)$$

cuja integração resulta na solução permanente (afinal, a parte transitória logo desaparece):

$$x_R = A \frac{\alpha^2}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \text{sen}(\omega t - \theta) \quad (2.139)$$

que decorre de (2.123) com  $P = mA\omega^2$ , onde, como em (2.125), a defasagem  $\theta$  é dada por  $\text{tg}\theta = 2\gamma\alpha / (1-\alpha^2)$ .

A Figura 2.19 ilustra o gráfico do fator de amplificação:

$$\frac{\alpha^2}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \quad (2.140)$$

para três valores representativos do amortecimento, onde se indicam duas regiões exploradas pelos sensores de medição de vibração, ou seja, a primeira para valores de  $\alpha$  próximos de zero que é a faixa de medição dos sensores fabricados com alta frequência natural (acelerômetros), e a outra região para  $\alpha$  grosso modo acima de 2.5, que é a faixa de medição dos sensores com baixa frequência natural (sismômetros).

A Figura 2.20 ilustra o caso do sismômetro, que mede a velocidade da base por meio de uma bobina com um magneto percorrendo seu interior, gerando-se, pois, segundo leis da eletricidade uma voltagem proporcional à velocidade relativa. Os dispositivos que convertem grandezas físicas em grandezas elétricas, como o sismômetro e acelerômetro, são denominados transdutores.

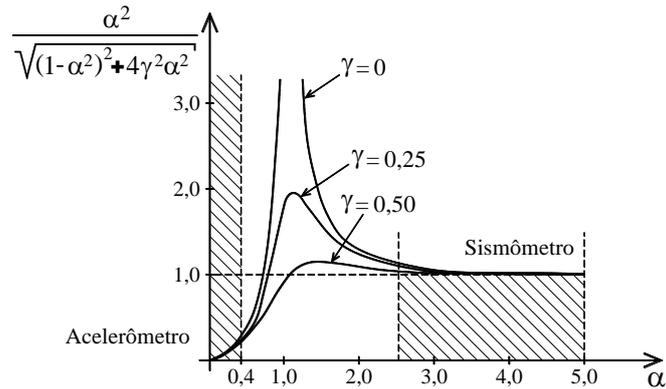


FIGURA 2.19

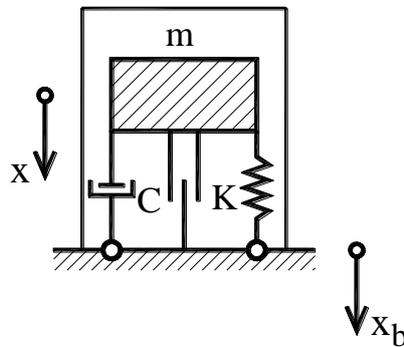


Figura 2.20

Como o sismômetro é indicado para medir vibração com frequências bem maiores que a natural do aparelho, ou seja  $\omega \gg \omega_n$ , tem-se que a amplificação (2.140) é praticamente unitária e a defasagem da resposta do aparelho é praticamente de meia volta, ou seja  $\pi$  (vide Figura 2.15b), e, assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_b &= A\omega \cos \omega t \\ \dot{x}_R &= A\omega \cos(\omega t - \pi) = -A\omega \cos \omega t \end{aligned} \quad (2.141)$$

ou seja, a velocidade medida pelo aparelho  $\dot{x}_R$  é, a menos do sinal, a velocidade da base que se deseja avaliar. Vale ainda registrar que a medida do sismômetro não apresenta distorção de fase (fases diferentes para frequências diferentes), pois no caso de dois sinais superpostos, por exemplo, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_b &= A_1\omega_1 \text{sen}\omega_1 t + A_2\omega_2 \text{sen}\omega_2 t \\ \dot{x}_R &= -A_1\omega_1 \text{sen}\omega_1 t - A_2\omega_2 \text{sen}\omega_2 t \end{aligned} \quad (2.142)$$

resultando-se novamente que a resposta do sismômetro é, a menos do sinal, a velocidade da base, pois as defasagens para as duas frequências são igualmente  $\pi$  ( $\omega_i \gg \omega_n$ ).

A Figura (2.21) mostra o interior de um sismômetro típico, que consiste num cilindro de base circular de raio algo como 15cm e altura de 30cm, em geral fabricado com frequência natural de 2 a 5 Hz, com faixa de uso entre 10 e 500Hz; cuja sensibilidade consiste na geração de 100mv para a velocidade de 100m/h.



**Figura 2.21 Sismômetro**

A figura 2.22 exhibe esquematicamente um acelerômetro, que consiste num dispositivo contendo uma massa sísmica apoiada num cristal piezelétrico, que gera uma voltagem proporcional à força que lhe é aplicada. No caso, a força em questão é aplicada pelo cristal piezelétrico na massa sísmica provocando sua movimentação.

No caso do acelerômetro tem-se então  $\omega_n \gg \omega$ , e, portanto, a amplificação expressa em (2.140) é aproximadamente unitária, e a defasagem sendo nula, e com isso, tem-se:

$$\begin{aligned}
 x_b &= A \text{sen} \omega t \\
 x_R &= A \alpha^2 \text{sen} \omega t = x_b \alpha^2 = -\frac{\ddot{x}_b}{\omega_n^2} \text{sen} \omega t
 \end{aligned}
 \tag{2.143}$$

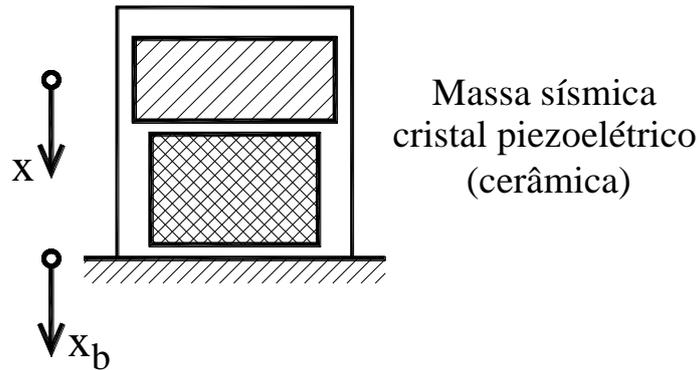


Figura 2.22

ou seja, o sinal medido (segunda de (2.143) é, a menos do sinal e de um fator, o sinal da base. Cumpre assinalar que a segunda de (2.143) indica que quanto maior a frequência natural do sensor menor a sua sensibilidade. Cada sensor tem sua constante relacionando a voltagem gerada no cristal em relação à aceleração.

O resultado (2.143) é também válido para a medições de vibração de uma gama maior frequências, grosso modo até  $\omega = 0.4\omega_n$ , com o artifício de se incorporar ao sensor amortecimento da ordem de  $\gamma = 0.7$ . Nessas condições, vale registrar que a medição ainda não apresenta distorção de fase. Como ilustra-se na Figura 2.23 a) e b), as seguintes relações aproximadas podem ser, respectivamente, redigidas:

$$\theta = \text{arc.tg} \frac{2\gamma\alpha}{1-\alpha^2} \cong \frac{\pi}{2} \alpha = \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_n} \quad (2.144)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \cong 1$$

e, assim sendo, no caso da superposição de sinais tem-se

$$x_b = x_1 \text{sen} \omega_1 t + x_2 \text{sen} \omega_2 t$$

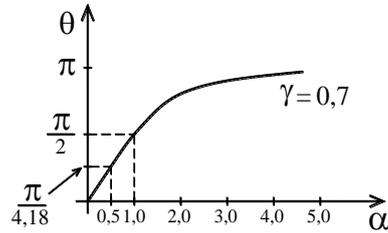
$$x_R = x_1 \alpha_1^2 \text{sen}(\omega_1 t + \theta_1) + x_2 \alpha_2^2 \text{sen}(\omega_2 t + \theta_2) \quad (2.145)$$

$$x_R = \frac{\ddot{x}_1}{\omega_n^2} \text{sen} \omega_1 t^* + \frac{\ddot{x}_2}{\omega_n^2} \text{sen} \omega_2 t^*$$

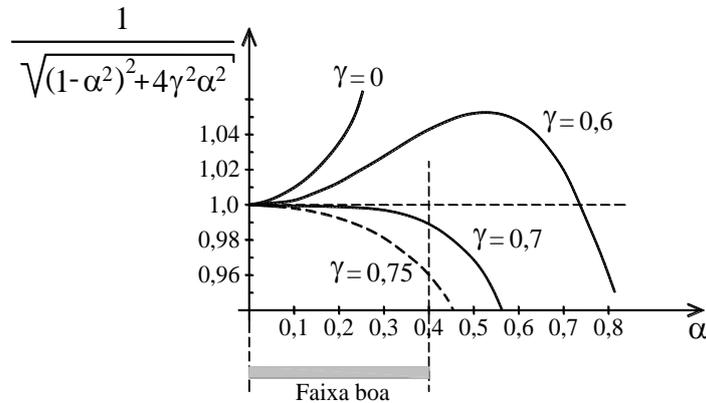
onde:

$$t^* = t + \frac{\pi}{2\omega_n} \quad (2.146)$$

verificando-se, pois, que a resposta do sistema  $x_R$  é dada também por uma superposição das acelerações de cada sinal  $x_b$ , a menos de um ajuste na variável tempo, mas sem defasagem diferente (distorção de fase).



a) Defasagem



b) Amplificação

**Figura 2.23**

### 2.14- Estudo paramétrico da ressonância

Um fato interessante pode ser constatado examinando-se o movimento permanente expresso em (2.123) na seguinte forma paramétrica:

$$\begin{aligned} \chi &= P \sin \omega t \\ \delta &= A \sin(\omega t - \theta) \end{aligned} \quad (2.147)$$

sendo a solicitação  $\chi$  lançada no eixo coordenado horizontal e a resposta  $\delta$  no eixo vertical. A figura formada no plano  $\chi\delta$  conforme o tempo passa é uma elipse, pois, por exemplo, para  $\alpha = 1$  tem-se de (2.125)  $\theta = \pi/2$  ( $\sin(\omega t - \pi/2) = -\cos \omega t$ ), resultando-se:

$$\left(\frac{\chi}{P}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{A}\right)^2 = 1 \quad (2.148)$$

sendo que para  $\alpha$  nulo, tem-se defasagem  $\theta$  igualmente nula, resultando-se:

$$\frac{\chi}{P} - \frac{\delta}{A} = 0 \quad (2.149)$$

que consiste numa degeneração reta da elipse para o lado direito, e, com  $\alpha$  tendendo-se para o infinito, tem-se  $\theta = \pi$ , resultando-se:

$$\frac{\chi}{P} + \frac{\delta}{A} = 0 \quad (2.150)$$

que consiste numa degeneração reta da elipse para o lado esquerdo. Para situações intermediárias vale a elipse expressa por:

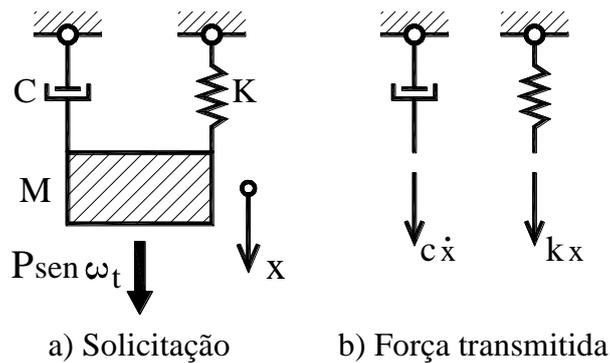
$$\left(\frac{\chi}{P}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{A}\right)^2 - 2\cos\theta\left(\frac{\chi\delta}{PA}\right) = \sin^2\theta \quad (2.151)$$

que vem uma ser a elipse com eixo inclinado.

Esse estudo paramétrico permite determinar experimentalmente a frequência natural mediante um ensaio com atuador, variando-se a frequência de excitação, pois, na frequência natural, a figura formada por (2.147) vem a ser uma elipse em posição simétrica.

### 2.15- Isolação dinâmica

A isolação dinâmica do sistema é avaliada tendo-se em conta a força de interação com a base, como ilustra-se na Figura 2.24. Assim sendo, tendo-se em conta o movimento permanente expresso em (2.123), tem-se:



**Figura 2.24**

$$F = kx + c\dot{x} = \frac{P}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \left[ \sin(\omega t - \theta) + \frac{c}{k} \omega \cos(\omega t - \theta) \right] \quad (2.152)$$

$$\text{tg}\theta = \frac{2\gamma\alpha}{1-\alpha^2}$$

ou ainda:

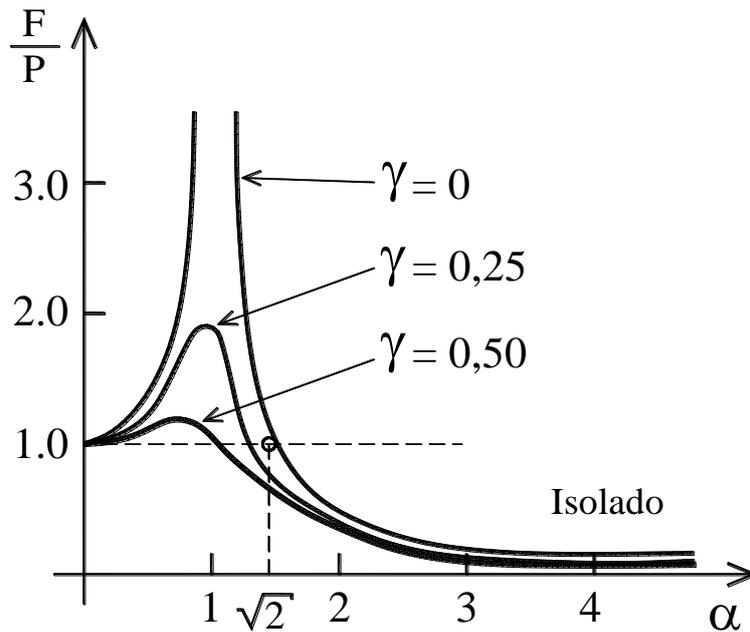
$$\frac{F}{P} = \sqrt{\frac{1 + 4\gamma^2\alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \text{sen}(\omega t - \theta + \varphi) \quad (2.153)$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{c\omega}{k} = 2\gamma\alpha$$

sendo o fator de isolamento:

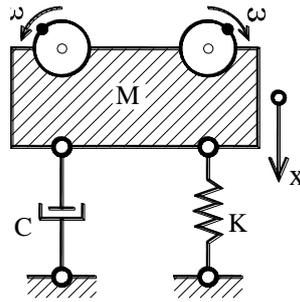
$$\sqrt{\frac{1 + 4\gamma^2\alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \quad (2.154)$$

lançado em gráfico da Figura 2.25 para valores característicos do amortecimento. Um exame dos resultados mostra que isolação dinâmica eficiente só é alcançada para frequências de excitação maiores que  $\sqrt{2}$  da frequência natural, sendo mais eficiente para amortecimentos menores. Trata-se, pois, de um isolamento inercial, a exemplo da isolação conferida por blocos de grande inércia como base para equipamentos que vibram.

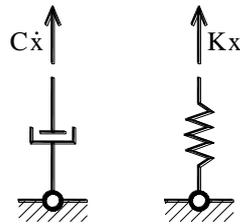


**Figura 2.25**

Aproveitando-se ainda da solução permanente (2.123), um caso interessante consiste na isolação de vibração, como, por exemplo, o lustrado na Figura 2.26, com sistemas excêntricos girando em direção oposta com frequência angular  $\omega$ , resultando na sollicitação vertical:



a) Solicitação



b) Força transmitida

**Figura 2.26**

$$P = m r \omega^2 \text{sen} \omega t \quad (2.155)$$

onde o produto  $mr$  representa a inércia resultante do sistema excêntrico. A resposta permanente fica então com a redação:

$$x = \frac{m \omega^2 r}{K} \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + 4 \gamma^2 \alpha^2}} \text{sen}(\omega t - \theta) = \frac{r \alpha^2}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + 4 \gamma^2 \alpha^2}} \text{sen}(\omega t - \theta) \quad (2.156)$$

$$\text{tg} \theta = \frac{2 \gamma \alpha}{1 - \alpha^2}$$

e a força transmitida à base dada então por:

$$F = c \dot{x} + kx = \frac{r \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2 + 4 \gamma^2 \alpha^2} [c \omega \cos(\omega t - \theta) + k \text{sen}(\omega t - \theta)] =$$

$$m r \omega^2 \sqrt{\frac{1 + 4 \gamma^2 \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2 + 4 \gamma^2 \alpha^2}} \text{sen}(\omega t - \theta + \beta) \quad (2.157)$$

$$\frac{F}{kr} = \alpha^2 \sqrt{\frac{1 + 4 \gamma^2 \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2 + 4 \gamma^2 \alpha^2}} \text{sen}(\omega t - \theta + \beta)$$

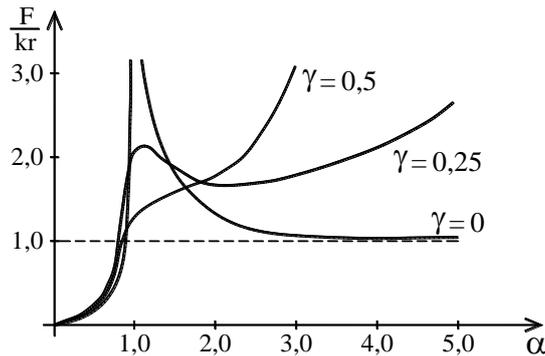
onde  $kr$  é uma força de referência, que, a exemplo da segunda de (2.153), ou seja:

$$\beta = \text{arctg} 2 \gamma \alpha \quad (2.158)$$

sendo o fator de isolamento:

$$\frac{F}{kr} = \alpha^2 \sqrt{\frac{1 + 4\gamma^2\alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \quad (2.159)$$

lançado no gráfico da Figura 2.27 para três valores ilustrativos do amortecimento.



**Figura 2.27**

Um exame do resultado exposto na Figura 2.27 mostra que a isolamento praticante total é alcançada para excitação com frequência angular  $\omega$  muito menor que a natural do sistema  $\omega \ll \omega_n$  (rotação baixa); ou então para amortecimento praticamente nulo e com frequências angulares muito maiores que a natural ( $\alpha \gg 1$ ), resultando-se amplitudes com a magnitude da estática. Esse é o caso da isolamento de motores em relação à carenagem de carros, isolamento das chamadas ultra centrífugas de enriquecimento de urânio, ou de máquina de lavar roupa, onde o cuidado é a aplicação de um torque potente para acelerar a rotação de modo a passar rápido pela ressonância ( $\omega_n$ ) do sistema, sem mobilizar grandes amplitudes.

### 2.16- Método da meia potência: medida do amortecimento

A Figura 2.28 reproduz esquematicamente o fator de amplificação dinâmica expresso em (2.126), indicando-se o pico máximo dado por  $1/2\gamma$  ocorre aproximadamente na frequência natural  $\omega_n$ , e duas outras frequências ( $\omega_1$  e  $\omega_2$ ) que correspondentes ao nível:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2\gamma} \right) \quad (2.160)$$

denominado de meia potência, permitindo-se formular a seguinte relação:

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\gamma} \right]^2 = \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\gamma \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \right]^2 = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\gamma \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (2.161)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - 2(1 - 2\gamma^2)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1 - 8\gamma^2 &= 0 \\ \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 &= (1 - 2\gamma^2) \pm 2\gamma\sqrt{1 + \gamma^2} \end{aligned} \quad (2.162)$$

sendo que a segunda de (2.162), para amortecimento pequeno ( $\gamma \ll 1$ ), implicando-se também:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 &= 1 \pm 2\gamma \\ \omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_n \\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_n} &= 2 \end{aligned} \quad (2.163)$$

permitindo-se redigir:

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_n}\right)^2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2 = 4\gamma \cong 2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} \quad (2.164)$$

ou ainda:

$$\gamma \cong \frac{1}{2} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} = \frac{1}{2} \frac{f_2 - f_1}{f_n} \quad (2.165)$$

que consiste, finalmente, numa outra maneira de se avaliar o amortecimento do sistema, onde  $f_i = \omega_i / 2\pi$  é a frequência correspondente, a partir do gráfico da amplificação dinâmica do sistema.

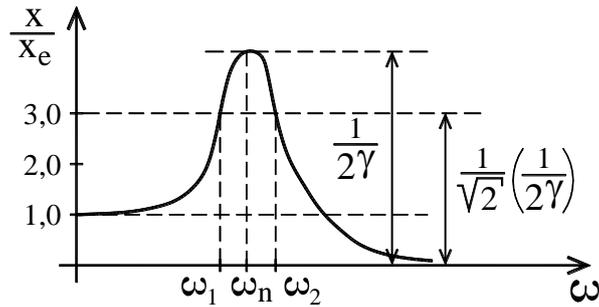


Figura 2.28

### 2.17- Resposta à solicitação ressalto

Outra solução completa importante, e que será empregada no próximo capítulo em seu item (3.1), é a da solicitação ressalto, assim expressa:

$$\begin{aligned} P(t) &= 0 \rightarrow t < 0 \\ P(t) &= P \rightarrow t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.166)$$

como ilustra-se na Figura 2.29, e cuja solução particular é expressa por (2.109) com  $A_0 = 0$  ( $x_p = 0$ ) para  $t < 0$  e com  $A_0 = 1$ , ou seja,  $x_p = P/k$ , para  $t \geq 0$ ; e, assim sendo, a solução geral se expressa:

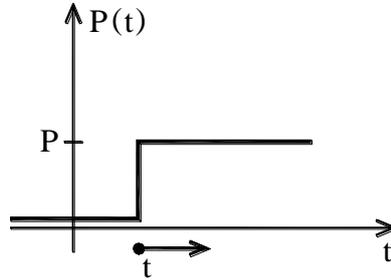


Figura 2.29

$$\begin{aligned} x &= 0 \rightarrow t < 0 \\ x &= \frac{P}{k} + e^{-\gamma\omega_n t} \left[ A \operatorname{sen} \omega_n t \sqrt{1-\gamma^2} + B \cos \omega_n t \sqrt{1-\gamma^2} \right] \rightarrow t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.167)$$

onde as constantes de integração da segunda de (2.167) para condição de repouso em  $t$  nulo são dadas por:

$$\begin{aligned} B &= \frac{P}{k} \\ A &= -\frac{P}{k} \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \end{aligned} \quad (2.168)$$

ganhando-se, pois, a segunda de (2.167) a seguinte redação:

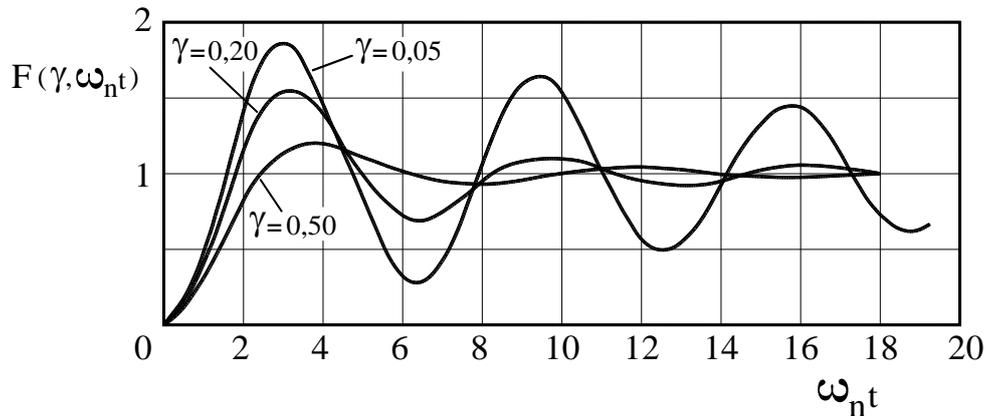
$$x = \frac{P}{k} F(t) \quad (2.169)$$

onde a função em jogo e sua derivada se expressam, respectivamente:

$$F(t) = 1 - e^{-\gamma\omega_n t} \left( \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \text{sen}\omega_n t \sqrt{1-\gamma^2} + \cos\omega_n t \sqrt{1-\gamma^2} \right) \quad (2.170)$$

$$\dot{F}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\gamma^2}} \text{sen}\omega_n t \sqrt{1-\gamma^2}$$

sendo que a primeira de (2.170) ilustra-se na Figura 2.30, para três valores típicos de amortecimento. É oportuno registrar que a primeira de (2.170), juntamente com as expressas em (2.119) e (2.120) vão ser empregadas no desenvolvimento da solução geral via série de Fourier, item 3.1 no próximo capítulo, e a última é de utilidade na formulação de solução analítica para eventual mudança de carregamento.



**Figura 2.30**

É oportuno chamar a atenção para o fato da função  $F(t)$ , no caso de amortecimento nulo, varia de zero a dois, e esse fato representa uma aproximação exagerada do coeficiente de impacto de carga móvel em ponte, dobrando-se a magnitude do efeito. Esse tema será abordado em detalhes no Capítulo VII.

A questão do carregamento lento empregada no estudo elementar da Teoria das Estruturas pode ser melhor entendida examinando-se o caso da solicitação com variação linear ao longo do tempo, ou seja:

$$m\ddot{x} + kx = P \frac{t}{t_0} \quad (2.171)$$

negligenciando-se a contribuição do amortecimento, por ser um fator favorável reduzindo-se o movimento mais rapidamente. A solução geral de (2.171), tendo-se em vista o exposto em (2.71) e (2.109) tem a seguinte redação:

$$x = \frac{P}{kt_0} \left( t - \frac{\text{sen} \omega_n t}{\omega_n} \right) = \frac{P}{k} \left( \frac{\omega_n t}{\omega_n t_0} - \frac{\text{sen} \omega_n t}{\omega_n t_0} \right) \quad (2.172)$$

ficando-se evidente que a oscilação do movimento resultante é reduzida com o aumento de  $\omega_n t_0$ . Grosso modo, o carregamento lento, que não mobiliza vibração (movimento quase estático), corresponde a  $\omega_n t_0 > 4$ , ou seja, o movimento lento corresponde a um tempo de aplicação da carga  $t_0 > 4/\omega_n$ . Em outras palavras, a lentidão (tempo gasto para completar o carregamento) depende inversamente da frequência natural do sistema.

Antes de terminar a exposição teórica, é conveniente apresentar as derivadas das funções  $\psi(t)$ ,  $\phi(t)$  e de  $x_h(t)$ , que serão de utilidade na obtenção da resposta analítica nos casos de mudança da sollicitação, ou seja:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{\omega_n}{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \left( e^{-\gamma\omega_n t} \left[ \frac{-\alpha\gamma(1+\alpha^2)}{\sqrt{1-\gamma^2}} \text{sen} \omega_* t + \alpha(\alpha^2 - 1) \cos \omega_* t \right] + \alpha(1-\alpha^2) \cos \omega t + 2\gamma\alpha^2 \text{sen} \omega t \right) \quad (2.173)$$

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\omega_n}{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \left( -e^{-\gamma\omega_n t} \left[ \frac{\alpha^2(1-2\gamma^2)-1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \text{sen} \omega_* t + 2\gamma\alpha^2 \cos \omega_* t \right] - \alpha(1-\alpha^2) \cos \omega t + 2\gamma\alpha^2 \text{sen} \omega t \right) \quad (2.174)$$

$$\dot{x}_h = e^{-\gamma\omega_n t} \left( \frac{-(\gamma\dot{x}_0 + \omega_n X_0)}{\sqrt{1-\gamma^2}} \text{sen} \omega_* t + \dot{x}_0 \cos \omega_* t \right) \quad (2.175)$$

as quais são empregadas quando funções harmônicas estão em jogo, lembrando-se que a derivada da função  $F(t)$  é dada pela segunda de (2.170).

## 2.18-Exemplos de aplicação

1-Como primeiro exemplo, considere-se o caso de um sistema com massa unitária ( $m = 1\text{Kg}$ ), rigidez também unitária ( $k = 1.0\text{N/m}$ ) e amortecimento

$c = 0.4\text{N}/(\text{m}/\text{s})$ . Pede-se a resposta do sistema para uma solicitação  $P(t) = 0.5\cos(0.5t)$ , para  $t > 0$ . As condições iniciais são de repouso.

Com os dados tem-se

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1\text{rad./s.} \quad \omega = 0.5\text{ rad./s.} \quad \alpha = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

$$\gamma = \frac{C}{2m\omega_n} = \frac{0.4}{2 \times 1 \times 1} = 0.2 \quad \omega_* = 0.98\omega_n = 0.98 \quad \gamma\omega_n = 0.2$$

e com isso:

$$\rho(t) = \frac{x(t)}{0.5/k} = \phi(t) = \frac{1}{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}$$

$$\left[ -e^{-\gamma\omega_n t} \left( \frac{\gamma(1+\alpha^2)}{\sqrt{1-\gamma^2}} \text{sen}(\omega_* t) + (1-\alpha^2) \cos(\omega_* t) \right) + (1-\alpha^2) \cos(0.5t) + 2\gamma\alpha \text{sen}(0.5t) \right]$$

$$\rho(t) = 1.6597 \left[ -e^{-0.2t} \{0.25516\text{sen}(0.98t) + 0.75 \cos(0.98t)\} + 0.75 \cos(0.5t) + 0.2\text{sen}(0.5t) \right]$$

2-Um Segundo exemplo de aplicação consiste na determinação da resposta do sistema para uma aceleração da base dada por:

$$\ddot{x}_a(t) = 0 \quad t \leq 0$$

$$\ddot{x}_a(t) = A |\text{sen}(\omega_n t)| \quad 0 \leq t \leq T_n$$

$$\ddot{x}_a(t) = 0 \quad t \geq T_n$$

com amortecimento adimensional de 1% (0.01).

A solução para o intervalo  $0 \leq t \leq T_n / 2$  se expressa:

$$m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r = -mA\text{sen}(\omega_n t)$$

$$\ddot{\rho} + 2\gamma\omega_n\dot{\rho} + \omega_n^2\rho = \omega_n^2\text{sen}(\omega t)$$

$$\rho(t) = x_r(t)/(-mA/k) = \psi(t)$$

ou seja, considerando-se que  $\alpha = 1$  e  $\sqrt{1-\gamma^2} \approx 1$ , tem-se então:

$$\rho(t) = e^{-0.01\omega_n t} \left( \frac{1}{2} \text{sen}(\omega_n t) + 50 \cos(\omega_n t) \right) - 50 \cos(\omega_n t)$$

$$\dot{\rho}(t) = \omega_n \left( e^{-0.01\omega_n t} 50 \text{sen}(\omega_n t) + 50 \text{sen}(\omega_n t) \right)$$

resultando no final deste intervalo:

$$\begin{aligned}\rho(t = T_n/2) &= -0.4845 \\ \dot{\rho}[t = T_n/2] &= -98.45\omega_n\end{aligned}$$

A solução e sua derivada para o intervalo seguinte ( $T_n/2 \leq t \leq T_n$ ) são dadas por:

$$\begin{aligned}\rho(t^*) &= -e^{-0.01\omega_n t^*} [98.45\text{sen}(\omega_n t^*) + 0.4845\text{cos}(\omega_n t^*)] + \psi(t^*) \\ \dot{\rho}(t^*) &= -e^{-0.01\omega_n t^*} [-1,469\text{sen}(\omega_n t^*) + 98.44\text{cos}(\omega_n t^*)] + \dot{\psi}(t^*)\end{aligned}$$

onde  $t^* \geq t - T_n/2$  (nova origem para o tempo), uma vez que as condições iniciais deste trecho são o deslocamento e a velocidade no final do trecho anterior, e a sollicitação volta a ser novamente senoidal, como no trecho inicial.

Para o trecho  $t > T_n$ , o sistema entra em vibração livre expressa por:

$$\rho(t^{**}) = e^{-0.01\omega_n t^{**}} (-99.09\text{sen}\omega_n t^{**} + 94.92\text{cos}\omega_n t^{**})$$

onde  $t^{**} \geq t - T_n$  e com condições iniciais  $\rho = 94.92$  e  $\dot{\rho} = -97.03\omega_n$  mediante procedimento similar ao do trecho anterior.

## 2.19-Execícios propostos

1- Sabendo-se que a sollicitação do sistema de um grau de liberdade é dada por  $Pf(t)$  com:

$$\begin{aligned}f(t) &= 0 & t \leq 0 \\ f(t) &= (1 - \cos(\omega_n t)) & 0 \leq t \leq T_n/4 \\ f(t) &= 1 & t \geq T_n/4\end{aligned}$$

pede-se a resposta do movimento do sistema com amortecimento adimensional valendo 0.01 (1%).

Resposta:

$$\begin{aligned}0 \leq t \leq T_n/4 \\ x(t) &= \frac{P}{k} (1 - e^{-0.01\omega_n t} (49.99\text{sen}\omega_n t + \text{cos}\omega_n t) - 50\text{sen}\omega_n t) \\ t \geq T_n/4 \rightarrow t^* &= t - T_n/4 \\ x(t^*) &= \frac{P}{k} (e^{-0.01\omega_n t^*} (0.530\text{sen}\omega_n t^* + 0.213\text{cos}\omega_n t^*) + F(t^*))\end{aligned}$$

2- Para um sistema de um grau de liberdade, pede-se a resposta para o carregamento:

$$0 \leq t \leq T_n / 4 \rightarrow P(t) = P \frac{t}{T_n} \left( t - \frac{T_n}{4} \right)$$

$$: T_n / 4 \leq t \leq T_n / 2 \rightarrow P(t) = P \frac{t^*}{T_n} \left( t^* - \frac{T_n}{4} \right)$$

$$t^* = t - T_n / 4$$

sendo nulo o amortecimento

Resposta:

$$0 \leq t \leq T_n / 4$$

$$x(t) = \frac{P}{k} \left[ \begin{array}{l} 0.03979 \text{sen}(\omega_n t) + 0.05066 \text{cos}(\omega_n t) - 0.05066 - \\ 0.03979 \omega_n t + 0.02533 (\omega_n t)^2 \end{array} \right]$$

$$T_n / 4 \leq t \leq T_n / 2 \rightarrow t^* = t - T_n / 4$$

$$x(t^*) = \frac{P}{k} \left[ \begin{array}{l} 0.028909 \text{sen}(\omega_n t^*) + 0.03979 \text{cos}(\omega_n t^*) - 0.05066 - \\ 0.03979 \omega_n t^* + 0.02533 (\omega_n t^*)^2 \end{array} \right]$$

3- Sabendo-se que a aceleração da base do sistema de um grau de liberdade é dada por:

$$\ddot{x}_a(t) = 0 \quad t \leq 0$$

$$\ddot{x}_a(t) = A(1 - \text{sen}(\omega_n t)) \quad 0 \leq t \leq T_n / 4$$

$$\ddot{x}_a(t) = 0 \quad t \geq T_n / 4$$

pede-se a resposta do movimento relativo do sistema com amortecimento adimensional valendo 0.01 (1%).

Resposta:

$$0 \leq t \leq T_n / 4$$

$$x(t) = \frac{A}{\omega_n^2} \left( -1 + e^{-0.01 \omega_n t} \left[ 0.51 \text{sen}(\omega_n t) + 50 \text{cos}(\omega_n t) \right] - 50 \text{cos}(\omega_n t) \right)$$

$$t \geq T_n / 4$$

$$x(t^*) = \frac{A}{\omega_n^2} \left( e^{-0.01 \omega_n t^*} \left[ -0.03063 \text{sen}(\omega_n t^*) - 0.986 \text{cos}(\omega_n t^*) \right] \right)$$

$$t^* = t - T_n / 4$$

## 2.20-Bibliografia para Consulta

- G. B. Warburton, *Dynamical Behaviour of Structures*, Pergamon Press, (1976)
- R. W. Clough e J. Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Book Company (1975)

-W. T. Thomson, *Teoria da Vibração com Aplicação*, Editora Interciência (1973)

## APÊNDICE

### 2.21-Série de Taylor

A teoria das séries de Taylor foi sem dúvida uma revolução na matemática operacional, afinal ela permitiu pela primeira vez, na história da matemática, explicitar de maneira exata, além das funções trigonométricas, muitas outras funções; e de fácil entendimento.

Em verdade, a série de Taylor é uma expansão polinomial tendo por base o valor da função e de suas derivadas para um dado valor da variável (em geral para o valor nulo), da mesma forma como ocorre com qualquer polinômio.

Por exemplo, considere-se um polinômio genérico do tipo:

$$p(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \dots \quad (2.176)$$

onde  $C_i$  são as constantes do polinômio. Suas derivadas sucessivas são expressas por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}p(x) &= p'(x) = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \dots \\ \frac{d}{dx^2}p(x) &= p''(x) = 2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2 + \dots \\ \frac{d}{dx^3}p(x) &= p'''(x) = 6C_3 + 24C_4x + \dots \\ \frac{d}{dx^4}p(x) &= p^{IV}(x) = 24C_4 + \dots \end{aligned} \quad (2.177)$$

onde o numeral romano indica o nível de derivação. Assim sendo, para valor nulo da variável  $x$  tem-se de imediato:

$$\begin{aligned} p(x=0) &= C_0 = 0!C_0 = p_0 \\ p'(x=0) &= C_1 = 1!C_1 = p_0^I \\ p''(x=0) &= 2C_2 = 2!C_2 = p_0^{II} \\ p'''(x=0) &= 6C_3 = 3!C_3 = p_0^{III} \\ p^{IV}(x=0) &= 24C_4 = 4!C_4 = p_0^{IV} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.178)$$

e com isso o polinômio (2.176) ganha a seguinte escrita:

$$p(x) = p_0 + p_0^I \frac{x^1}{1!} + p_0^{II} \frac{x^2}{2!} + p_0^{III} \frac{x^3}{3!} + p_0^{IV} \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (2.179)$$

que consiste na redação clássica da série de Taylor.

Em outras palavras, conhecendo-se a função polinomial e suas derivadas para o valor nulo da variável  $x$ , o polinômio acha-se determinado, pois existe uma relação direta desses valores com as constantes do polinômio.

## 2.22-Aplicação na solução de equação diferencial

Considere-se a equação diferencial de primeira ordem em sua forma canônica, que descreve, por exemplo, o aumento populacional a partir de um casal reprodutor, ou seja:

$$y'(x) = Ay(x) \quad (2.180)$$

sendo  $y'(x)$  a derivada da população  $y(x)$ , ou a taxa de crescimento, e  $A$  a constante de proporcionalidade. Tendo-se em conta uma condição inicial dada, ou seja:

$$y(x=0) = y_0 \quad (2.181)$$

onde  $y_0$ , por exemplo, é a quantidade inicial de casais reprodutores. Assim sendo, a função  $y(x)$  e suas derivadas ficam assim expressas:

$$\begin{aligned} y(x=0) &= y_0 \\ y'(x=0) &= Ay(x=0) = Ay_0 \\ y''(x=0) &= Ay'(x=0) = A^2y_0 \\ y'''(x=0) &= Ay''(x=0) = A^3y_0 \\ y^{IV}(x=0) &= Ay'''(x=0) = A^4y_0 \\ &\dots\dots \end{aligned} \quad (2.182)$$

que levados em (2.179) permite exprimir-se:

$$y(x) = y_0 + Ay_0x + A^2y_0 \frac{x^2}{2!} + A^3y_0 \frac{x^3}{3!} + A^4y_0 \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (2.183)$$

ou ainda:

$$y(x) = y_0 \left[ 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{(Ax)^2}{2!} + \frac{(Ax)^3}{3!} + \frac{(Ax)^4}{4!} + \dots \right] \quad (2.184)$$

ou mais ainda

$$y(x) = y_0 e^{Ax} \quad (2.185)$$

visto que, para a função exponencial, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.186)$$

ou seja

$$\begin{aligned} f(x=0) &= 1 \\ f'(x=0) &= 1 \\ f''(x=0) &= 1 \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.187)$$

ou mais ainda, tendo-se em conta (2.179), verifica-se que:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (2.188)$$

que consiste na função exponencial desenvolvida em série de Taylor.

No caso da função senoidal, por exemplo, tem-se:

$$\begin{aligned}
 f(x=0) &= \text{sen}(0) = 0 \\
 f'(x=0) &= \text{cos}(0) = 1 \\
 f''(x=0) &= -\text{sen}(0) = 0 \\
 f'''(x=0) &= -\text{cos}(0) = -1 \\
 f^{IV}(x=0) &= \text{sen}(0) = 0 \\
 f^V(x=0) &= \text{cos}(0) = 1 \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{2.189}$$

resultando-se:

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\dots
 \tag{2.190}$$

que vem a ser o desenvolvimento em série de Taylor da função senoidal.

Procedendo-se igualmente no caso da função cossenoidal chega-se à:

$$\text{cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\dots
 \tag{2.191}$$

que consiste na série de Taylor da função cossenoidal.

Por outro lado, empregando-se argumento complexo na série de Taylor da função exponencial tem-se:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots\dots
 \tag{2.192}$$

onde  $i$  ( $i^2 = -1$   $i^3 = -i$  ...) é a unidade imaginária resultando-se, pois:

$$e^{ix} = \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) + \left( \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) i
 \tag{2.193}$$

ou ainda

$$e^{ix} = \text{cos}(x) + i\text{sen}(x)
 \tag{2.194}$$

que consiste na clássica fórmula de Euler, de utilidade nos casos em que o argumento torna-se complexo, caracterizando-se o que em matemática denomina-se bifurcação da solução.

Continuando, as funções senoidais e cossenoidais com argumento complexo implicam em:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(ix) &= \left( x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) i = i \operatorname{seh}(x) \\ \operatorname{cos}(ix) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \operatorname{coh}(x) \end{aligned} \quad (2.195)$$

verificando-se que, complexando o argumento, o seno resulta no seno hiperbólico multiplicado pela unidade imaginária, e o cosseno resulta no cosseno hiperbólico. Inversamente, complexando o argumento do seno hiperbólico resulta no seno multiplicado pela unidade imaginária e o cosseno hiperbólico resulta no cosseno. Valendo-se apenas lembrar que:

$$\begin{aligned} \operatorname{seh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \operatorname{coh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned} \quad (2.196)$$

exprimem a definição clássica do seno e do cosseno hiperbólico.

Retomando-se agora o caso da equação diferencial que descreve o movimento livre de um sistema onde o amortecimento é nulo, que é do tipo:

$$x'' = -\omega_n^2 x \quad (2.197)$$

suas derivadas sucessivas são expressas por:

$$\begin{aligned} x'''(t=0) &= -\omega_n^2 x'(t=0) = -\omega_n^2 x_0^I \\ x^{IV}(t=0) &= -\omega_n^2 x''(t=0) = \omega_n^4 x_0 \\ x^V(t=0) &= -\omega_n^2 x'''(t=0) = \omega_n^4 x_0^I \\ x^{VI}(t=0) &= -\omega_n^2 x^{IV}(t=0) = -\omega_n^6 x_0 \\ x^{VII}(t=0) &= -\omega_n^2 x^V(t=0) = -\omega_n^6 x_0^I \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.198)$$

onde  $x_0$  e  $x_0^I$  são as condições iniciais em deslocamento e velocidade, respectivamente.

A correspondente série de Taylor da resposta fica então:

$$\begin{aligned}
 x = x_0 + x_0^1 t + (-\omega_n^2 x_0) \frac{t^2}{2!} + (\omega_n^2 x_0^1) \frac{t^3}{3!} + (\omega_n^4 x_0) \frac{t^4}{4!} + \\
 (\omega_n^4 x_0^1) \frac{t^5}{5!} + (-\omega_n^6 x_0) \frac{t^6}{6!} + (-\omega_n^6 x_0^1) \frac{t^7}{7!}
 \end{aligned}
 \tag{2.199}$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
 x = x_0 \left[ 1 - \frac{(\omega_n t)^2}{2!} + \frac{(\omega_n t)^4}{4} - \frac{(\omega_n t)^6}{6!} + \dots \right] + \\
 \frac{x_0^1}{\omega_n} \left[ \omega_n t - \frac{(\omega_n t)^3}{3!} + \frac{(\omega_n t)^5}{5!} - \frac{(\omega_n t)^7}{7!} + \dots \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.200}$$

Resultando-se:

$$x = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{x_0^1}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t)
 \tag{2.201}$$

que confirma solução anteriormente obtida de maneira direta por inspeção.

## CAPÍTULO III

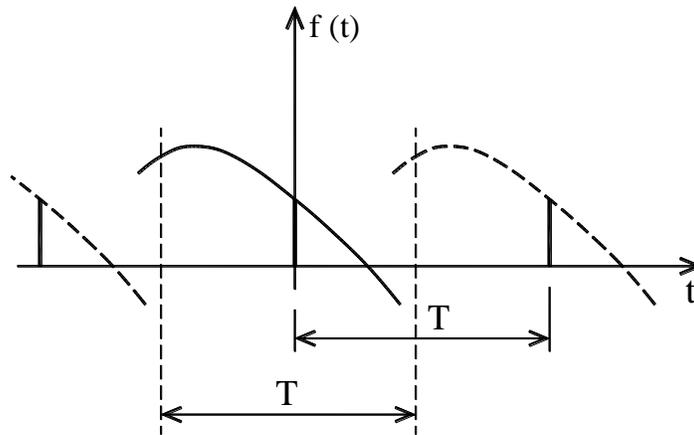
### OUTRAS TÉCNICAS ANALÍTICAS DE INTEGRAÇÃO

#### 3.1-Introdução

A integração analítica da equação de movimento é agora abordada iniciando-se com a clássica integração mediante o emprego da série de Fourier, e seguida pela integração via convolução de Duhamel, encerrando-se com a técnica da transformada de Fourier, que consiste numa forma limite da série de Fourier, bem como finaliza-se com o desenvolvimento da técnica de determinação do amortecimento via círculo de Nyquist, também denominada círculo ajustado (circle fitted).

#### 3.2-Integração por série de Fourier

A Figura 3.1 ilustra uma função periódica com período indicado por  $T$ . Todavia, como sabido, a caracterização da função periódica pode ser dada por qualquer trecho da função em questão com intervalo  $T$ , como mostrado.



**Figura 3.1 Função periódica**

A função periódica, qualquer que seja ela, gera uma série de Fourier expressa por:

$$S(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \operatorname{sen} j\omega t \quad (3.1)$$

onde:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{T} \\ B_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T P(t) dt \\ B_j &= \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \cos(j\omega t) dt \\ A_j &= \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \sin(j\omega t) dt\end{aligned}\tag{3.2}$$

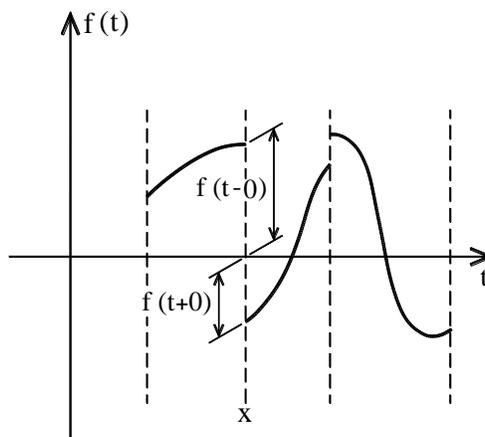
sendo que a identidade entre a série (3.1) e a função  $P(t)$  que lhe deu origem, ou seja:

$$S(t) = P(t)\tag{3.3}$$

verifica-se no caso de a função  $P(t)$  atender às condições de Dirichet, quais sejam, que a função em questão seja definida, ou seja, é finita em todo o domínio e periódica; mais ainda, que tanto a função como sua primeira derivada sejam seccionalmente contínuas, ou seja, com saltos finitos e em número discreto, como ilustra-se na Figura 3.2. Finalmente, a igualdade (3.3) só é atendida nos trechos de continuidade, e nas descontinuidades vale a relação:

$$P(t) = \frac{f_-(t) + f_+(t)}{2}\tag{3.4}$$

onde  $f_-(t)$  e  $f_+(t)$  são os valores assumidos pela função antes e depois do salto; sem contar que a série imediatamente antes e depois do salto experimenta o chamado efeito Gibbs, que em fortes oscilações sem influência na parte contínua.



**Figura 3.2**

Tendo-se em conta na equação de movimento, a solitação periódica sendo substituída pela sua série de Fourier correspondente, ou seja:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{B_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \sin j\omega t \quad (3.5)$$

a linearidade da equação permite a integração ser alcançada pela superposição das soluções correspondentes a cada um dos termos da somatória indicada em (3.5), ou seja:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_0 + c\dot{x}_0 + kx_0 &= \frac{B_0}{2} \rightarrow x_0 = \frac{B_0}{2k} F(\gamma, \omega_n t) \\ m\ddot{x}_{j1} + c\dot{x}_{j1} + kx_{j1} &= B_j \cos j\omega_1 t \rightarrow x_{j1} = \frac{B_j}{k} \phi(\gamma, j\alpha, \omega_n t) \\ m\ddot{x}_{j2} + c\dot{x}_{j2} + kx_{j2} &= A_j \cos j\omega_1 t \rightarrow x_{j2} = \frac{A_j}{k} \psi(\gamma, j\alpha, \omega_n t) \\ \alpha &= \frac{\omega}{\omega_n} \end{aligned} \quad (3.6)$$

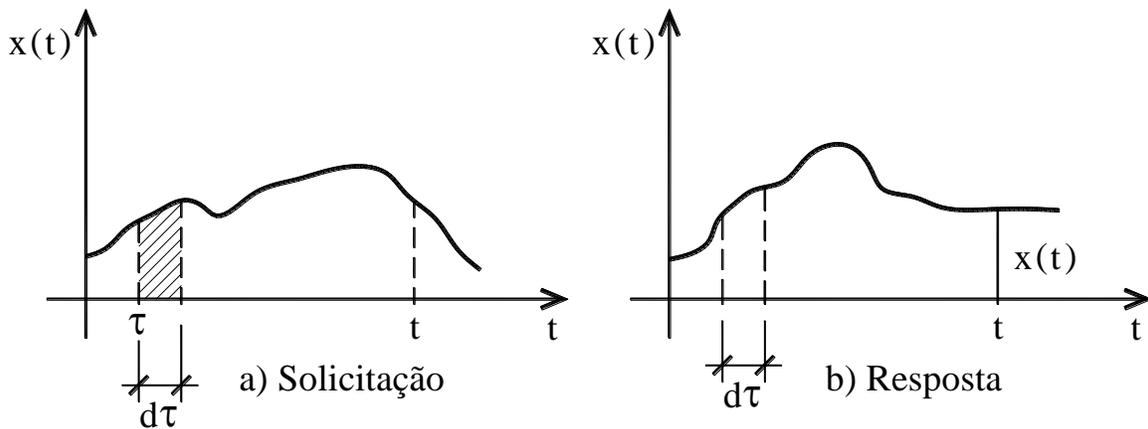
resultando-se:

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (x_{j1} + x_{j2}) \quad (3.7)$$

deixando-se evidente que o trabalho algébrico é enorme, uma vez que sabidamente a série de Fourier, em geral, é de convergência muito lenta, sendo necessário muitos termos da série para se obter algum resultado prático.

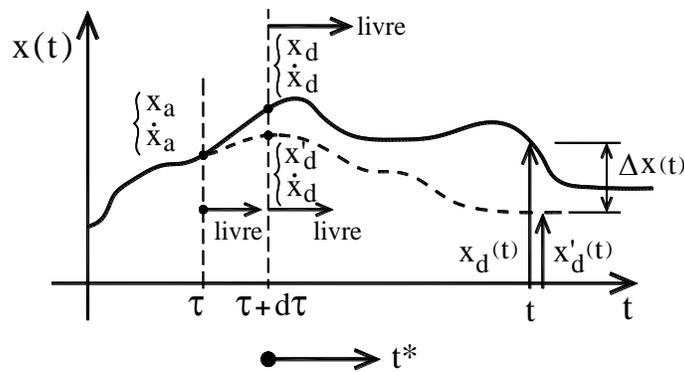
### 3.3-Integração por convolução de Duhamel

A Figura 3.3 a) exibe uma história de carregamento ao lado da história da resposta correspondente como indicado na Figura 3.3 b), destacando-se um trecho elementar de carregamento (do tempo  $\tau$  ao tempo  $\tau + d\tau$ ), e a resposta do sistema  $x(t)$ , no tempo  $t$ . A questão básica a ser respondida é o quanto da resposta  $x(t)$ , no tempo  $t$  está relacionada com a existência de carregamento no intervalo de  $\tau$  a  $\tau + d\tau$ . Afinal, com esse conhecimento a resposta final  $x(t)$  pode ser então obtida somando-se todas as contribuições do carregamento existente antes de  $t$ , atendendo-se, pois, o princípio da casualidade (o presente depende só do passado).



**Figura 3.3 Solicitação e resposta**

Para tanto, ilustra-se na Figura 3.4 o fato de no instante  $\tau$  o deslocamento e a velocidade são, respectivamente,  $x_a$  e  $\dot{x}_a$ . No tempo  $\tau+d\tau$  acontecem duas situações como ilustrado. No caso de haver solicitação no intervalo de  $\tau$  a  $\tau+d\tau$  o deslocamento e a velocidade ficam, respectivamente, expressos por  $x_d$  e  $\dot{x}_d$ , e não havendo a solicitação por  $x'_d$  e  $\dot{x}'_d$ .



**Figura 3.4 Respostas nos dois casos**

Por outro lado, a equação de movimento no intervalo de  $\tau$  a  $\tau+d\tau$  com e sem carregamento se expressam, respectivamente:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= P(\tau) \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

ou seja, as acelerações no intervalo  $d\tau$  ficam, respectivamente:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{aP} &= \frac{P(\tau)}{m} + \frac{c\dot{x}_a + kx_a}{m} \\ \ddot{x}_{aL} &= \frac{c\dot{x}_a + kx_a}{m}\end{aligned}\quad (3.9)$$

e com isso, tendo-se em conta a expansão de Taylor, os deslocamentos e velocidades no final do trecho infinitesimal ficam:

$$\begin{aligned}x_d &= x_\tau + \dot{x}_\tau d\tau + \left( \frac{P(\tau)}{m} - \frac{c\dot{x}_\tau + kx_\tau}{m} \right) \frac{d\tau^2}{2} + \dots \\ \dot{x}'_d &= \dot{x}_\tau + \dot{x}_\tau d\tau + \left( -\frac{c\dot{x}_\tau + kx_\tau}{m} \right) \frac{d\tau^2}{2} + \dots \\ \dot{x}_d &= \dot{x}_\tau + \left( \frac{P(\tau)}{m} - \frac{c\dot{x}_\tau + kx_\tau}{m} \right) d\tau + \dots \\ \dot{x}'_d &= \dot{x}_\tau + \left( -\frac{c\dot{x}_\tau + kx_\tau}{m} \right) d\tau + \dots\end{aligned}\quad (3.10)$$

e, no tempo  $t$ , não havendo solicitação de  $\tau + d\tau$  até  $t$  (vibração livre) para ambas as situações, tendo-se em conta o exposto em (2.74), os deslocamentos ficam:

$$\begin{aligned}x_d(t) &= e^{-\gamma\omega_n t} \left[ \left( \frac{\dot{x}_d + 2\gamma\omega_n x_L}{\omega_n \sqrt{1-\gamma^2}} \right) \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\gamma^2} t) + x_d \cos(\omega_n \sqrt{1-\gamma^2} t) \right] \\ \dot{x}'_d(t) &= e^{-\gamma\omega_n t} \left[ \left( \frac{\dot{x}'_d + 2\gamma\omega_n x_P}{\omega_n \sqrt{1-\gamma^2}} \right) \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\gamma^2} t) + \dot{x}'_d \cos(\omega_n \sqrt{1-\gamma^2} t) \right]\end{aligned}\quad (3.11)$$

cuja diferença:

$$\Delta x(t^*) = x_d(t^*) - \dot{x}'_d(t^*) = e^{-\gamma\omega_n t} \left[ \frac{\gamma\omega_n \frac{P(\tau) d\tau^2}{2} + \frac{P(\tau)}{m}}{\omega_n \sqrt{1-\gamma^2}} \text{sen} \omega_n \sqrt{1-\gamma^2} t^* + \frac{P(\tau) d\tau^2}{m} \frac{\cos \omega_n \sqrt{1-\gamma^2} t^*}{2} \right]\quad (3.12)$$

ou ainda, desprezando-se os termos de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \Delta x(t^*) = \Delta x(t) &= e^{-\gamma\omega_n t^*} \frac{P(\tau)}{m\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}} \text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}t^*) d\tau = \\ & e^{-\gamma\omega_n(t-\tau)} \frac{P(\tau)}{m\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}} \text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}(t-\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde  $t^* = t - \tau$ , e, com isso, e assumindo-se que a solitação em consideração se inicia no tempo nulo ( $t^* = 0$ ), obtém-se a resposta somando-se as contribuições, ou seja:

$$\begin{aligned} x(t) = \int_0^t \Delta x(t) &= \int_0^t P(\tau) \frac{e^{-\gamma\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}} \text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}(t-\tau)) d\tau = \\ & \int_0^t P(\tau) h(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde:

$$h(t^*) = h(t-\tau) = \frac{e^{-\gamma\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}} \text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}(t-\tau)) \quad (3.15)$$

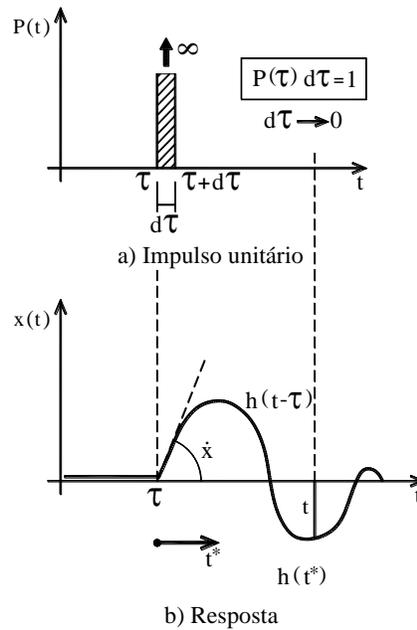
consiste na resposta ao impulso unitário aplicado no tempo  $\tau$ , uma vez que, como ilustra-se na Figura 3.5 a), a resposta ao impulso unitário aplicado no tempo  $\tau$ , como exposto em (3.14), assim fica redigido:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^\tau (P(\tau) = 0) h(t-\tau) d\tau + \int_0^{\tau+d\tau} (P(\tau) d\tau = 1) h(t-\tau) + \\ & \int_{\tau+d\tau}^t (P(\tau) = 0) h(t-\tau) d\tau = \int_0^{\tau+d\tau} (P(\tau) d\tau = 1) h(t-\tau) = h(t-\tau) = h(t^*) \end{aligned} \quad (3.16)$$

sendo a função  $h(t^*)$  mostrada na Figura 3.5 b). Vale ainda registrar que a derivada da função  $h(t^*)$  para  $t^*$  nulo vale:

$$\dot{h}(t^* = 0) = \frac{1}{m} \quad (3.17)$$

como era de se esperar (impulso  $I = \int m\ddot{x}dt = m\dot{x} = 1$ ). Além disso, a velocidade obtida mediante (3.14) ganha a seguinte redação:



**Figura 3.5**

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t P(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t P(\tau) \dot{h}(t-\tau) d\tau + P(t) h(0) \quad (3.18)$$

lembrando-se que a variável em questão é o limite superior da integral sendo derivada fornecida pela fórmula de Leibniz, objeto de apresentação no final do apêndice. Por recorrência, a aceleração fica então dada por:

$$\ddot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t P(\tau) \dot{h}(t-\tau) d\tau + P(t) h(0) \right] = \int_0^t P(\tau) \ddot{h}(t-\tau) d\tau + P(t) \dot{h}(0) + \dot{P}(t) h(0) \quad (3.19)$$

sendo  $h(0) = 0$  e  $\dot{h}(0) = 1/m$  como exposto em (3.18). Vale assinalar que o expresso em (3.14) e (3.18) mostra que as condições iniciais da solução dada pela convolução de Duhamel são as de repouso ( $x(t=0) = 0$ ,  $\dot{x}(t=0) = 0$ ), e assim, para condições iniciais não nulas a solução passa ser dada por:

$$x(t) = \int_0^t P(\tau) h(t-\tau) d\tau + e^{-\gamma\omega_n t} \left[ \frac{\dot{x}_0 + \gamma\omega_n x_0}{\omega_*} \text{sen}(\omega_* t) + x_0 \cos(\omega_* t) \right] \quad (3.20)$$

como já exposto em (2.121), ou seja, superpondo-se a solução geral de vibração livre (2.74).

Uma definição mais geral da função resposta ao impulso unitário é dada por

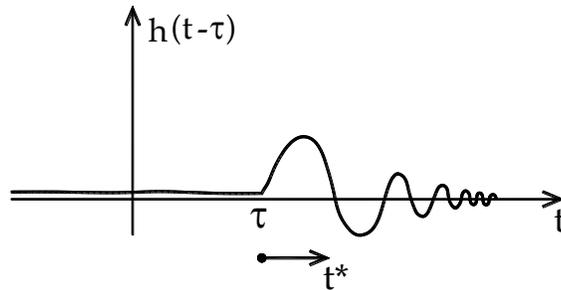
$$h(t - \tau) = h(t^*) = 0 \rightarrow \tau > t$$

$$h(t - \tau) = h(t^*) = \frac{e^{-\gamma\omega_n t^*}}{m\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}} \text{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}t^*\right) \rightarrow \tau \leq t \quad (3.21)$$

ganhando-se, pois, o expresso em (3.14) a seguinte redação:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (3.22)$$

que vem a ser a integração denominada convolução da função  $p(\tau)$  sobre a função  $h(t - \tau)$ . A Figura 3.6 ilustra o gráfico da função expressa em (3.21)



**Figura 3.6 Resposta ao impulso**

A solução expressa em (3.22) tem apenas um caráter simbólico, pois, na prática, é uma solução trabalhosa de ser alcançada, visto que, em primeiro lugar, o carregamento deve ser expresso analiticamente, e em segundo lugar a integração não é operação, em geral, expedita.

Considere-se, por exemplo, o caso da função ressalto dada por (2.166), resultando-se segundo (3.14) na seguinte escrita:

$$x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}} e^{-\gamma\omega_n(t-\tau)} \text{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}(t-\tau)\right) d\tau \quad (3.23)$$

ou ainda:

$$x(t) = \frac{P}{m\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^t \left( e^{-\gamma\omega_n(t-\tau)} \right) \frac{1}{i} \left( \frac{e^{i\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}(t-\tau)} - e^{-i\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}(t-\tau)}}{2} \right) d\tau \quad (3.24)$$

onde a forma complexa do seno foi empregada, de modo a facilitar a integração, envolvendo-se assim apenas exponenciais, resultando-se, após razoável manipulação algébrica no expresso no expresso em (2.169); e lembrando-se que,

no final, os fatores complexos acabam anulando-se, como era de se esperar. Detalhes operacionais dessa manipulação algébrica apresenta-se na primeira parte do Apêndice.

### 3.4-Transformada de Fourier

Como já mencionado, a Transformada de Fourier é obtida a partir da série de Fourier em situação limite. Para melhor expor o desenvolvimento em apreço, a série de Fourier expressa em (3.1) pode ser expressa em nova redação por:

$$f(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cos j\omega^* t + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \text{sen} j\omega^* t \quad (3.25)$$

onde, com a nova redação tem-se

$$\begin{aligned} \omega^* &= \frac{2\pi}{T} \\ B_0 &= \frac{\omega^*}{\pi} \int_0^T P(t) dt \\ B_j &= \frac{\omega^*}{\pi} \int_0^T P(t) \cos(j\omega^* t) dt \\ A_j &= \frac{\omega^*}{\pi} \int_0^T P(t) \text{sen}(j\omega^* t) dt \end{aligned} \quad (3.26)$$

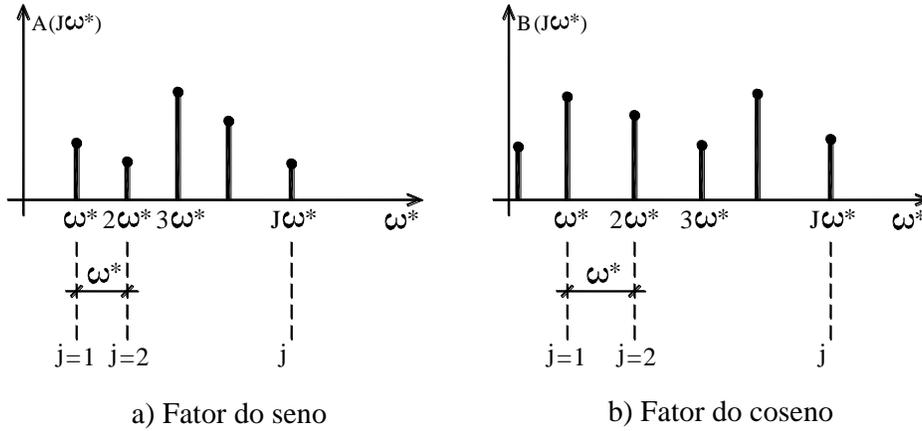
cujos valores são ilustrados em gráficos discretos similares aos da Figura 3.7. Uma nova redação de (3.25) pode ser ainda escrita, ou seja:

$$f(t) = \frac{\omega^*}{\pi} \int_0^T f(t) dt + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ (A(j\omega^*) \text{sen} j\omega^* t) + (A(j\omega^*) \cos j\omega^* t) \right] \omega^* \quad (3.27)$$

onde:

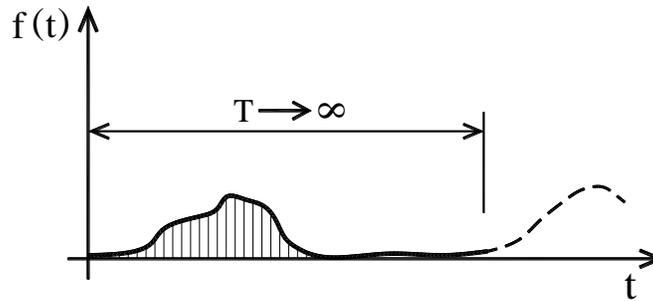
$$\begin{aligned} A(j\omega^*) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(t) \text{sen} j\omega^* t) dt \\ B(j\omega^*) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(t) \cos j\omega^* t) dt \end{aligned} \quad (3.28)$$

cujos gráficos são ilustrados, respectivamente, nas Figuras 3.7 a) e b).



**Figura 3.7 Representação discreta**

O exame do limite de (3.27) com  $T$  tendendo para infinito pode ser heurísticamente alcançado, para função limitada como a exibida na Figura 3.8, entendendo-se que a função vai se repetir novamente lá no infinito.



**Figura 3.8 Situação limite**

Assim sendo, os seguintes limites podem ser vislumbrados:

$$\omega^* = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \lim(T \rightarrow \infty) \rightarrow \omega^* \approx d\omega$$

$$j\omega^* \rightarrow \omega \rightarrow \begin{cases} \omega^* \rightarrow 0 \\ \text{mas...} j \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\frac{\omega^*}{2\pi} \int_0^\infty f(t)dt \rightarrow 0$$

uma vez que, embora  $\omega^*$  tenda para zero, o produto por  $j$  tem limite definido pois  $j$  varia ao infinito, e assumido que a integral indicada na terceira de (3.29) seja

limitada o produto aí indicado tende para zero. Com isso, o expresso e, (3.27) ganha a redação:

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega)\text{sen}\omega t + B(\omega)\text{cos}\omega t]d\omega \quad (3.30)$$

onde:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(t)\text{sen}\omega t)dt$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(t)\text{cos}\omega t)dt \quad (3.31)$$

sendo que (2.30) e (2.31) são as chamadas integrais de Fourier. Por outro lado, tendo-se em conta que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(\tau)\text{cos}\omega(t-\tau))d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (f(\tau)\text{cos}\omega(t-\tau))d\omega$$

$$\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (f(\tau)\text{sen}\omega(t-\tau))d\omega = \frac{i}{2} 0 \quad (3.32)$$

visto que a função cosseno é par (simétrica em relação à zero) e a função seno é ímpar (antimétrica), ganhando-se (3.30) a escrita:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \right] e^{i\omega t}d\omega \quad (3.33)$$

tendo-se em conta a fórmula de Euler ( $e^{i\omega(t-\tau)} = \text{cos}\omega(t-\tau) + i\text{sen}\omega(t-\tau)$ ).

O expresso em (3.33) permite finalmente definir a transformada de Fourier da função  $f(t)$ , pois definindo-se:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad (3.34)$$

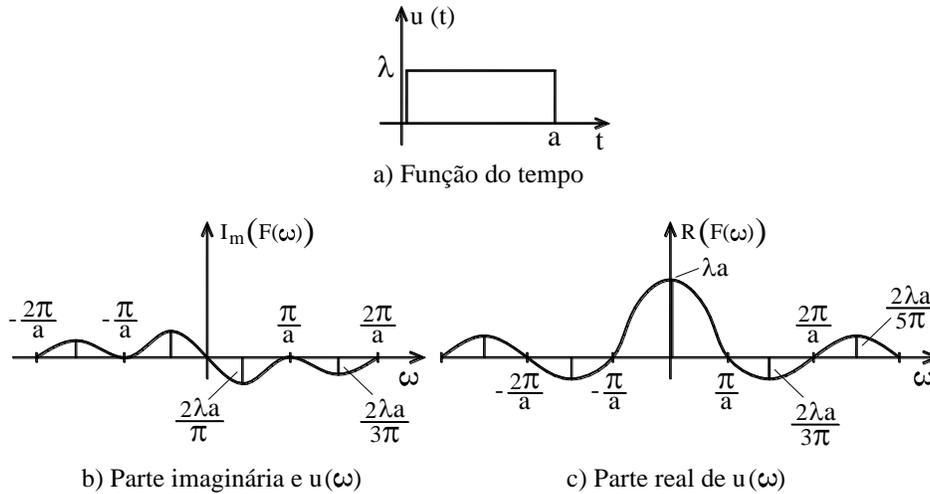
que vem a ser a transformada de Fourier da função em questão, e:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (3.35)$$

constitui a transformada inversa. O expresso em (3.34) é a representação da função  $f(t)$  no domínio da frequência.

Exemplificando, considere-se a função ilustrada na Figura 3.9 a), cuja definição é dada por:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \rightarrow t \leq 0 \\ f(t) &= \lambda \rightarrow 0 < t \leq a \\ f(t) &= 0 \rightarrow t > a \end{aligned} \quad (3.36)$$



**Figura 3.9**

cuja Transformada de Fourier assim se expressa:

$$F(\omega) = \int_0^a \lambda e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\lambda}{i\omega} [e^{-i\omega a} - 1] = \lambda a \left[ i \frac{\cos\omega a - 1}{\omega a} + \frac{\text{sen}\omega a}{\omega a} \right] \quad (3.37)$$

ou, em outras palavras, a função transformada é complexa, contendo uma componente imaginária:

$$I_m(F(\omega)) = \lambda a \frac{\cos\omega a - 1}{\omega a} \quad (3.38)$$

e uma componente real:

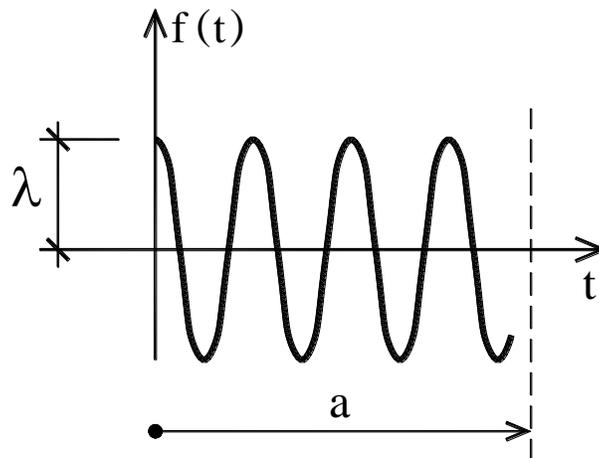
$$R(F(\omega)) = \lambda a \frac{\text{sen}\omega a}{\omega a} \quad (3.39)$$

cujos gráficos são ilustrados na Figura 3.9 b) e 3.9 c), respectivamente. Cumpre assinalar que a função exposta na Figura 3.9 a) com a tendendo-se ao infinito (integral tendendo-se igualmente ao infinito) a Transformada de Fourier fica igualmente indefinida.

Um outro exemplo interessante é a transformada de Fourier da função harmônica assim definida:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \rightarrow t < 0 \\ f(t) &= \lambda \cos \omega_0 t \rightarrow 0 \leq t \leq a \\ f(t) &= 0 \rightarrow t > a \end{aligned} \quad (3.40)$$

cujo gráfico acha-se ilustrado na Figura 3.10.

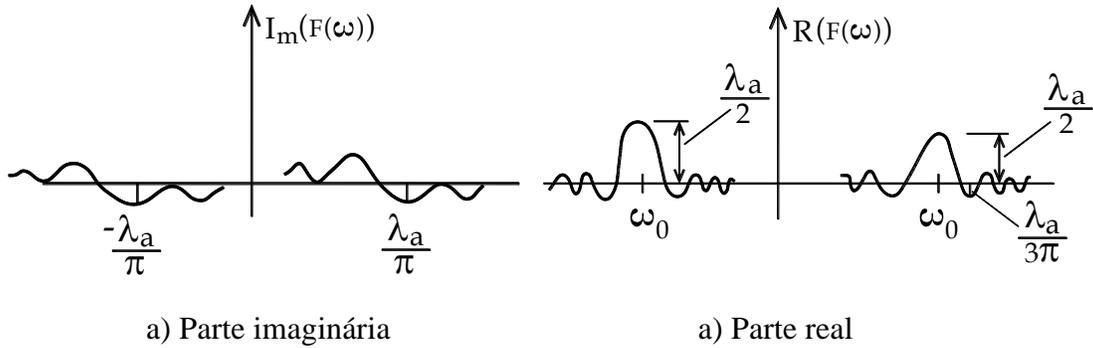


**Figura 3.10 Função harmônica truncada**

A transformada de Fourier da função definida em (3.40) fica então:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^a \lambda \cos(\omega t) e^{-i\omega t} dt = \lambda \int_0^a \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{\lambda}{2} \left[ i \left( \frac{\cos(\omega_0 - \omega)a - 1}{(\omega_0 - \omega)a} + \frac{\cos(\omega_0 + \omega)a - 1}{(\omega_0 + \omega)a} \right) + \frac{\text{sen}(\omega_0 - \omega)a}{(\omega_0 - \omega)a} + \frac{\text{sen}(\omega_0 + \omega)a}{(\omega_0 + \omega)a} \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

cujos gráficos da componente real e imaginária estão ilustrados, respectivamente, na Figura 3.11 a) e b), chamando-se a atenção para o fato de que a função dada em (3.37) é agora repetida a partir de  $\omega_0$  com metade da magnitude (fenômeno da modulação).



**Figura 3.11 Representação transformada**

Vale também assinalar que a função ilustrada na Figura 3.10 com duração a tendendo-se ao infinito implica em Transformada de Fourier indefinida.

Uma propriedade importante da transformada de Fourier consiste no fato de que, uma vez conhecida a transformada de Fourier da função, a transformada de suas derivadas não envolve mais integrações. Afinal:

$$\dot{F}(\omega) = \int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3.42)$$

na qual o ponto superior na transformada não significa derivação no tempo, mas apenas que se trata da transformada da derivada primeira da função  $f(t)$ . A integração por partes do exposto em (3.42) resulta:

$$\dot{F}(\omega) = \left[ f(t)e^{-i\omega t} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} (-i\omega) dt = -f(t=0) + i\omega F(\omega) \quad (3.43)$$

ou ainda a forma inversa, ou seja:

$$F(\omega) = \frac{\dot{F}(\omega) + f(t=0)}{i\omega} = -i \frac{\dot{F}(\omega) + f(t=0)}{\omega} \quad (3.44)$$

indicando-se que no domínio da frequência, para condição inicial nula, a transformada da derivada consiste na simples multiplicação da transformada da função por  $i\omega$ , e na transformada da integral pela divisão. Por recorrência, o exposto em (3.43) permite obter a transformada de Fourier para derivadas mais altas da função no tempo.

Outra propriedade importante resulta da transformada de Fourier da convolução, ou seja:

$$x(\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} P(\tau)h(t-\tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt \quad (3.45)$$

resultando:

$$x(\omega) = P(\omega)H(\omega) \quad (3.46)$$

onde:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \int_0^{\infty} P(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \\ H(\omega) &= \int_0^{\infty} h(t^*)e^{-i\omega t^*}dt^* \end{aligned} \quad (3.47)$$

ou seja:

$$P(\omega)H(\omega) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P(\tau)h(t^*)e^{-i\omega(t^*+\tau)}d\tau dt^* \quad (3.48)$$

sendo que o expresso em (3.48), procedendo-se a mudança de variável de  $\tau$  e  $t^*$  para  $\tau$  e  $t$ , com  $t = \tau + t^*$ , cujo jacobiano se expressa:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{d\tau}{d\tau} & \frac{d\tau}{dt} \\ \frac{dt^*}{d\tau} & \frac{dt^*}{dt} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad (3.49)$$

resultando-se unitário, permitindo-se uma nova redação para o expresso em (3.48), ou seja:

$$\begin{aligned} P(\omega)H(\omega) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P(\tau)h(t-\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau dt = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \left[ \int_0^{\infty} P(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] dt \\ &= x(\omega) \end{aligned} \quad (3.50)$$

que consiste no clássico teorema da convolução.

### 3.5-Aplicação da transformada de Fourier na dinâmica

Retomando-se a equação de movimento, ou seja:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = P(t) \quad (3.51)$$

e aplicando-se a transformada de Fourier em ambos os membros, tem-se:

$$\int_0^{\infty} [m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t)]e^{-i\omega t}dt = \int_0^{\infty} P(t)e^{-i\omega t}dt \quad (3.52)$$

resultando-se:

$$m\ddot{x}(\omega) + c\dot{x}(\omega) + kx(\omega) = P(\omega) \quad (3.53)$$

ou ainda:

$$m(-\dot{x}(t=0) - i\omega x(t=0) - \omega^2 x(\omega)) + c(-x(t=0) + i\omega x(\omega)) + kx(\omega) = P(\omega) \quad (3.54)$$

ou seja:

$$x(\omega) = \frac{P(\omega)}{k + i\omega c - m\omega^2} + \frac{m\dot{x}(t=0) + (c + i\omega m)x(t=0)}{k + i\omega c - m\omega^2} \quad (3.55)$$

cujas inversa se escreve:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_n \sqrt{1-\gamma^2}} e^{-\gamma\omega_n(t-\tau)} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\gamma^2}(t-\tau)\right) d\tau + e^{-\gamma\omega_n t} \left[ \frac{\dot{x}_0 + \gamma\omega_n x_0}{\omega \sqrt{1-\gamma^2}} \text{sen}\left(\omega t \sqrt{1-\gamma^2}\right) + x_0 \cos\left(\omega t \sqrt{1-\gamma^2}\right) \right] \quad (3.56)$$

como era de se esperar. Vale registrar que a manipulação algébrica para se obter a inversa de (3.55), nos termos expressos em (3.56), envolve várias operações no domínio complexo, a exemplo de (3.24), como também detalhado na segunda parte do apêndice.

### 3.6- Espectro de Fourier

Explicitando-se a transformada de Fourier da função  $f(t)$  tem-se:

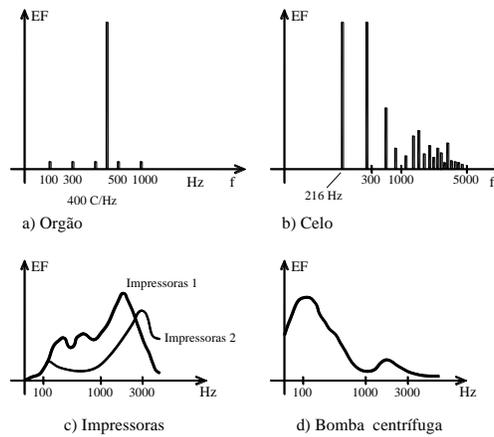
$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau) (\cos(\omega\tau) - i \text{sen}(\omega\tau)) d\tau = A(\omega) + iB(\omega) \quad (3.57)$$

sendo o módulo e a fase da transformada definidos como:

$$EF = |F(\omega)| = A^2(\omega) + B^2(\omega) \quad (3.58)$$

$$\phi = \text{arctg} \frac{B}{A}$$

cujos resultados da primeira de (3.58) são ilustrados na Figura 3.12 para o caso do som de órgão na Figura 3.12 a), violoncelo na Figura 3.12 b), de uma impressora matricial na Figura 3.12 c) e de uma bomba centrífuga na Figura 3.12 d).



**Figura 3.12**

### 3.7- Círculos de Nyquist

Um eficiente algoritmo de avaliação do amortecimento é provido pelo conhecido círculo de Nyquist, também conhecido como técnica do círculo ajustado (circle-fitted). O primeiro modo de se obter o círculo é alcançado procedendo-se a transformada de Fourier do sinal da vibração livre produzida por um impacto, ou seja:

$$I = \int_0^{\Delta t} P(t)dt \cong m\dot{x}(0) \quad (3.59)$$

cuja transformada se escreve:

$$x(\omega) = \frac{m\dot{x}(0)}{k - m\omega^2 + i\omega c} = m\dot{x}(0) \left( \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2} - i \frac{\omega c}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \right) \quad (3.60)$$

e a transformada da velocidade:

$$\dot{x}(\omega) = -x(0) + i\omega x(\omega) = m\dot{x}(0) \left( \frac{\omega^2 c}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2} + i \frac{(k - m\omega^2)\omega}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \right) \quad (3.61)$$

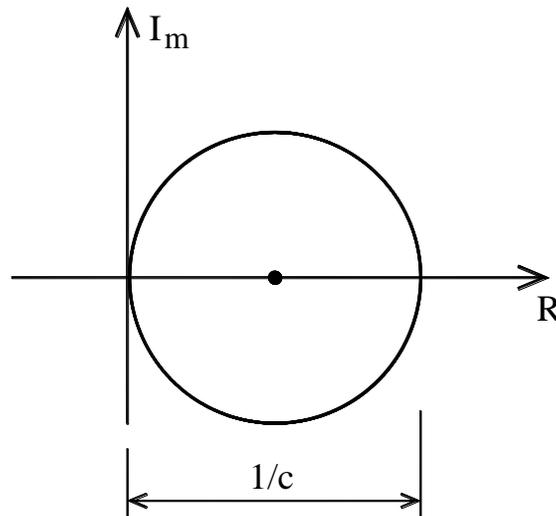
cuja parte real se expressa:

$$R[\dot{x}(\omega)] = m\dot{x}(0) \left( \frac{\omega^2 c}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \right) \quad (3.62)$$

e imaginária:

$$I[\dot{x}(\omega)] = m\dot{x}(0) \left( \frac{(k - m\omega^2)\omega}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \right) \quad (3.63)$$

as quais são as variáveis paramétricas  $R$  e  $I_m$ , respectivamente, do círculo ilustrado na Figura 3.13 em função da frequência angular  $\omega$ , indicando-se que o diâmetro do círculo é o inverso do coeficiente de amortecimento  $c$ . Essa técnica foi usada nos anos 90 para medir o amortecimento do estádio do Maracanã.



**Figura 3.13 Círculo de Nyquist**

A Figura 3.14 exhibe em detalhe o círculo em questão, destacando dois pontos, um antes de se atingir  $\omega_n$  ( $\omega_a$ ) e outro depois ( $\omega_d$ ). As seguintes relações geométricas são pertinentes:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta_a}{2} &= \frac{I[\dot{x}(\omega)]}{R[\dot{x}(\omega)]} = \frac{\omega_a (k - m\omega_a^2)}{c\omega_a^2} \\ \operatorname{tg} \frac{\theta_d}{2} &= \frac{\omega_d (-k + m\omega_d^2)}{c\omega_d^2} \end{aligned} \quad (3.64)$$

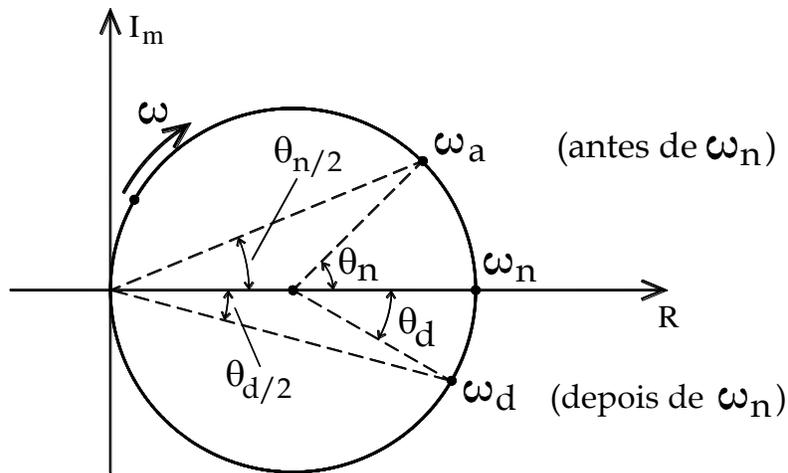
ou seja:

$$\omega_a \operatorname{tg} \frac{\theta_a}{2} + \omega_b \operatorname{tg} \frac{\theta_b}{2} = \frac{m(\omega_d^2 - \omega_a^2)}{c}$$

$$c = \frac{m(\omega_d^2 - \omega_a^2)}{\omega_a \operatorname{tg} \frac{\theta_a}{2} + \omega_b \operatorname{tg} \frac{\theta_b}{2}} \quad (3.65)$$

$$\gamma = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{\omega_d^2 - \omega_a^2}{2\omega_n \left[ \omega_a \operatorname{tg} \frac{\theta_a}{2} + \omega_b \operatorname{tg} \frac{\theta_b}{2} \right]}$$

valendo-se adiantar que o círculo em questão é obtido mediante ensaios com analisador de sinais, e que, no caso de ensaios com equipamentos digitalizados, os pontos obtidos do círculo em apreço são vários, e o amortecimento expresso na terceira de (3.65) pode ser avaliado para muitos dos pontos disponíveis.



**Figura 3.14 Círculo de Nyquist detalhado**

No caso da vibração livre provocada por deslocamento inicial dado, cuja transformada de Fourier tem a escrita:

$$x(\omega) = \frac{(c + im\omega)x(0)}{k - m\omega^2 + i\omega c} \quad (3.67)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}\dot{x}(0) &= -x(0) + i\omega x(\omega) = \frac{-kx(0)}{k - m\omega^2 + i\omega c} \\ \ddot{x}(0) &= -\dot{x}(0) - i\omega x(0) - \omega^2 x(\omega) = \frac{-i\omega kx(0)}{k - m\omega^2 + i\omega c}\end{aligned}\quad (3.67)$$

resultando-se:

$$\ddot{x}(\omega) = -kx(0) \left( \frac{\omega^2 c}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2} + i \frac{(k - m\omega^2)\omega}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \right) \quad (3.68)$$

cujo círculo é o mesmo apresentado na Figura 3.13, mas ocorrendo-se no semi-espaço negativo (imagem especular do círculo anterior).

### 3.8- Resposta permanente harmônica em notação complexa

Em primeiro lugar, é oportuno chamar a atenção para o fato de que o emprego de notação complexa facilita a manipulação algébrica da integração da equação de movimento, especialmente na abordagem da solução permanente, resolvendo-se ao mesmo tempo o caso de solitação variando senoidalmente e cossenoidalmente. Não é à toa que a equação  $e^{i\pi} + 1 = 0$  foi eleita uma das mais belas equações da história. Em notação complexa, a equação de movimento na forma adimensional tem a seguinte redação:

$$\ddot{\rho} + 2\gamma\omega_n\dot{\rho} + \omega_n^2\rho = \omega_n^2 e^{i\omega t} = \omega_n^2 (\cos \omega t + i \text{sen} \omega t) \quad (3.69)$$

onde a solitação harmônica é expressa por  $P e^{i\omega t}$  e  $\rho(t) = kx(t)/P$ .

A solução particular, por inspeção, pode também expressar-se em notação complexa, resultando-se nas seguintes relações:

$$\begin{aligned}\rho_p &= C e^{i\omega t} \\ \dot{\rho}_p &= i\omega C e^{i\omega t} \\ \ddot{\rho}_p &= -\omega^2 C e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (3.70)$$

cuja substituição em (3.69) resulta:

$$C = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega\omega_n} \quad (3.71)$$

ou seja:

$$\rho_p = \frac{1}{1 - \alpha^2 + 2i\gamma\alpha} e^{i\omega t} \quad (3.72)$$

onde  $\alpha = \omega / \omega_n$ .

O expresso em (3.72) tem ainda a seguinte redação:

$$\rho_p = \left[ \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} - i \frac{2\gamma\alpha}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \right] e^{i\omega t} = \frac{e^{i(\omega t - \theta)}}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \quad (3.73)$$

onde:

$$\theta = \text{arc.tg} \frac{2\gamma\alpha}{1 - \alpha^2} \quad (3.74)$$

e finalmente:

$$\rho_p = \left[ \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \cos \omega t + \frac{2\gamma\alpha}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \text{sen} \omega t \right] + i \left[ \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \text{sen} \omega t - \frac{2\gamma\alpha}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \cos \omega t \right] \quad (3.75)$$

sendo a primeira parcela do segundo membro de (3.75), que consiste na parte real, vem a ser a resposta permanente da função cossenoidal e a segunda, a parte complexa, a da função senoidal. Em outras palavras, a notação complexa resolve de uma vez só as duas funções harmônicas, ficando-se também explícito que a amplificação de ambas as parcelas de (3.75), conforme expresso em (3.73), é dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \quad (3.76)$$

que vem a ser o módulo da resposta complexa (3.73).

### 3.9- Balanço de energia e amortecimento hysterético

Examinando-se agora o trabalho realizado pelas forças internas e externas, ou seja:

$$\int_{x_1}^{x_2} [m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t)] dx = \int_{x_1}^{x_2} p(t) dx \quad (3.77)$$

onde  $x_1$  e  $x_2$  são duas posições genéricas ocupadas pelo sistema. A integração do primeiro e último termo das forças internas se escrevem, respectivamente:

$$\int_{x_1}^{x_2} m\ddot{x}dx = \int_{x_1}^{x_2} m\ddot{x}\dot{x}dt = \int_{x_1}^{x_2} m\dot{x}d\dot{x} = \frac{m\dot{x}^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (3.78)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{kx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2}$$

constituindo-se, respectivamente, na energia cinética e de deformação mobilizada no movimento. Todavia, a energia correspondente ao amortecimento explicita-se apenas no caso de oscilação harmônica, ou seja:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} \rightarrow \dot{x}(t) = i\omega x(t) \quad (3.79)$$

resultando-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} c\dot{x}dx = \int_{x_1}^{x_2} ci\omega xdx = ci\omega \frac{x^2}{2} \quad (3.80)$$

e nesse caso a energia mobilizada fica dependente da frequência angular da solitação ( $P(t) = Pe^{i\omega t}$ ).

O expresso em (3.80) é a base da formulação do amortecimento histerético, cuja energia mobilizada não depende da frequência angular. Para tanto, no lugar do amortecimento viscoelástico  $c$  emprega-se o amortecimento histerético  $h/\omega$ , ficando-se a equação de equilíbrio dinâmico com a seguinte escrita:

$$m\ddot{x}(t) + \frac{h}{\omega}\dot{x}(t) + kx(t) = Pe^{i\omega t} \quad (3.81)$$

ou ainda, em forma adimensional:

$$\ddot{\rho} + \frac{\mu}{\omega}\dot{\rho} + \omega_n^2\rho = \omega_n^2 e^{i\omega t} \quad (3.82)$$

sendo  $\rho = kx(t)/P$  e  $\mu = h/k$  que é o denominado amortecimento histerético adimensional. A solução particular de (3.82) se escreve:

$$\rho_p = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2(1+i\mu) - \omega^2} e^{i\omega t} = \left[ \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2 + \mu^2} - \frac{i\mu}{(1-\alpha^2)^2 + \mu^2} \right] e^{i\omega t} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + \mu^2}} e^{i(\omega t - \theta)} = \left[ \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2 + \mu^2} \cos \omega t + \frac{\mu}{(1-\alpha^2)^2 + \mu^2} \operatorname{sen} \omega t \right] + \quad (3.83)$$

$$i \left[ \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2 + \mu^2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{\mu}{(1-\alpha^2)^2 + \mu^2} \cos \omega t \right]$$

onde:

$$\theta = \operatorname{arc.tg} \frac{\mu}{1-\alpha^2} \quad (3.84)$$

sendo o termo real do último membro de (3.83) a resposta permanente da solicitação cossenoidal e a complexa da solicitação senoidal.

Vale assinalar que a máxima amplitude da solução permanente, no caso do amortecimento histerético, ocorre exatamente na ressonância, uma vez que:

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + \mu^2}} \right) \rightarrow -4\alpha(1-\alpha) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.85)$$

resultando  $\rho_{\max} = 1/\mu$ .

## APÊNDICE

### 3.10-Transformadas analíticas de Fourier

Em primeiro lugar, o expresso em (3.24) ganha a seguinte redação:

$$x(t) = \frac{P}{m\omega^*} \int_0^\infty (e^{-\gamma\omega_n(t-\tau)}) \frac{1}{i} \left( \frac{e^{i\omega^*(t-\tau)} - e^{-i\omega^*(t-\tau)}}{2} \right) d\tau =$$

$$\frac{P}{2im\omega^*} \left[ \frac{1 - e^{(i\omega^* - \gamma\omega_n)t}}{i\omega^* - \gamma\omega_n} - \frac{1 - e^{-(i\omega^* + \gamma\omega_n)t}}{i\omega^* + \gamma\omega_n} \right] \quad (3.86)$$

onde  $\omega^* = \omega_n \sqrt{1-\gamma^2}$ , ou ainda, tendo-se em conta que:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{i\omega^* - \gamma\omega_n} - \frac{1}{i\omega^* + \gamma\omega_n} = \frac{2i\omega^*}{(\omega^*)^2 + \gamma^2\omega_n^2} \\
 & \frac{e^{(i\omega^* - \gamma\omega_n)t}}{i\omega^* - \gamma\omega_n} + \frac{e^{-(i\omega^* - \gamma\omega_n)t}}{i\omega^* + \gamma\omega_n} = \\
 & -\frac{e^{-\gamma\omega_n t}}{(\omega^*)^2 + \gamma^2\omega_n^2} \left[ i\omega^* (e^{i\omega^* t} + e^{-i\omega^* t}) + \gamma\omega_n (e^{i\omega^* t} - e^{-i\omega^* t}) \right] = \\
 & -\frac{e^{-\gamma\omega_n t}}{(\omega^*)^2 + \gamma^2\omega_n^2} \left[ 2i\omega^* \cos \omega^* t + 2i\gamma\omega_n \text{sen} \omega^* t \right]
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

resultando-se no expresso em (2.169) visto que:

$$\begin{aligned}
 (\omega^*)^2 + \gamma^2\omega_n^2 &= \omega_n^2 \\
 m\omega_n^2 &= k
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

encerrando-se a primeira parte.

Inicia-se a segunda parte mostrando que:

$$h(\omega) = \int_0^{\infty} \left( \frac{\text{sen} \omega^* t}{m\omega^*} e^{-\gamma\omega_n t} \right) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{k + i\omega c - m\omega^2} \tag{3.89}$$

tarafa que decorre de:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \frac{e^{-\gamma\omega_n t}}{m\omega^*} \frac{1}{i} \left( \frac{e^{i\omega^* t} - e^{-i\omega^* t}}{2} \right) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2m\omega^* i} \left[ \frac{e^{(-\gamma\omega_n + i(\omega^* - \omega))t}}{-\gamma\omega_n + i(\omega^* - \omega)} + \frac{e^{-(\gamma\omega_n + i(\omega^* + \omega))t}}{\gamma\omega_n + i(\omega^* + \omega)} \right]_0^{\infty} = \\
 & \frac{1}{2m\omega^* i} \left[ \frac{e^{-\gamma\omega_n t} e^{i(\omega^* - \omega)t}}{-\gamma\omega_n + i(\omega^* - \omega)} + \frac{e^{-\gamma\omega_n t} e^{-i(\omega^* + \omega)t}}{\gamma\omega_n + i(\omega^* + \omega)} \right]_0^{\infty} = \\
 & \frac{1}{2m\omega^* i} \left[ \frac{e^{-\gamma\omega_n t} (\cos(\omega^* - \omega)t + i \text{sen}(\omega^* - \omega)t)}{-\gamma\omega_n + i(\omega^* - \omega)} + \frac{e^{-\gamma\omega_n t} (\cos(\omega^* + \omega)t - i \text{sen}(\omega^* + \omega)t)}{\gamma\omega_n + i(\omega^* + \omega)} \right]_0^{\infty}
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

resultando-se:

$$\frac{1}{2m\omega^*i} \left[ \frac{-1}{-\gamma\omega_n + i(\omega^* - \omega)} + \frac{-1}{\gamma\omega_n + i(\omega^* + \omega)} \right]_0^\infty = \frac{1}{2m\omega^*i} \left[ \frac{-2\omega^*i}{-\omega_n^2 + \omega^2 - 2\gamma i\omega\omega_n} \right] = \frac{1}{k + i\omega c - m\omega^2} \quad (3.91)$$

confirmando-se o expresso em (3.89).

A transformada inversa de Fourier do expresso em (3.89) envolve o teorema dos resíduos, tema seguinte, como segue:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{k + i\omega c - m\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{i\omega t}}{m(-\omega_n^2 - 2\gamma\omega_n\omega i + \omega^2)} d\omega = -\frac{1}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega = 2\pi i(R_1 + R_2) \quad (3.92)$$

uma vez que a integral em questão é do tipo singular, onde

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \gamma\omega i + \sqrt{1 - \gamma^2} \\ \omega_2 &= \gamma\omega i - \sqrt{1 - \gamma^2} \\ R_1 &= \frac{-1}{2\pi m} \left[ \frac{e^{i\omega_1 t}}{\omega_1 - \omega_2} \right] \\ R_2 &= \frac{-1}{2\pi m} \left[ \frac{e^{i\omega_2 t}}{\omega_2 - \omega_1} \right] \end{aligned} \quad (3.93)$$

onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são os polos, e  $R_1$  e  $R_2$  são os resíduos (parcelas que sobram) ao se eliminar os termos que singularizam o integrando. Assim sendo, o expresso e, (3.92) ganha a escrita:

$$h(t) = 2\pi i \left( \frac{e^{-\gamma\omega_n t}}{2\pi m\omega^*} \left( \frac{e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}}{2} \right) \right) = \frac{2\pi i e^{-\gamma\omega_n t}}{2\pi m\omega^*} (-i \operatorname{sen} \omega^* t) \quad (3.94)$$

concluindo-se a questão formulada.

Como exercício teórico para o leitor fica ainda verificar que a transformada de Fourier do movimento proporcionado por condições iniciais não nulas, bem como a transformada inversa são dadas por:

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma\omega_n t} \left[ \frac{\dot{x}_0 + \gamma\omega_n x_0}{\omega^*} \text{sen}(\omega^* t) + x_0 \cos(\omega^* t) \right] e^{-\omega t} dt =$$

$$\frac{m\dot{x}(t=0) + (c + i\omega m)x(t=0)}{k + i\omega c - m\omega^2}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\dot{x}(t=0) + (c + i\omega m)x(t=0)}{k + i\omega c - m\omega^2} e^{i\omega t} d\omega =$$

$$e^{-\gamma\omega_n t} \left[ \frac{\dot{x}_0 + \gamma\omega_n x_0}{\omega^*} \text{sen}(\omega^* t) + x_0 \cos(\omega^* t) \right]$$
(3.95)

valendo-se notar que, como exposto em (3.91):

$$h(\omega) = \frac{1}{k + i\omega c - m\omega^2} = \frac{-1}{m(-\omega^2 - 2\gamma\omega_n \omega + \omega_n^2)} = \frac{1}{m(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}$$
(3.96)

que consiste numa relação mais apropriada para a abordagem da transformada inversa de Fourier da resposta ao impulso unitário.

### 3.11- Variável complexa e teorema dos resíduos

Apresenta-se no que se segue, uma breve exposição sobre o teorema dos resíduos naquilo que de perto interessa na dinâmica das estruturas, uma espécie de caminho das pedras.

A variável complexa é definida como sendo expressa por:

$$z = x + iy$$
(3.97)

sendo  $x$  a parte real da variável e  $y$  a componente complexa, podendo-se trabalhar com a variável em questão do mesmo modo como se trabalha com qualquer variável real. Por exemplo:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i\text{sen}(y)) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$\text{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

etc.

(3.98)

bem como as regras de derivação são também as mesmas, ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} z^n &= n z^{n-1} \\ \frac{d}{dz} \text{sen}(z) &= \text{cos}(z) \\ \text{etc.}\end{aligned}\tag{3.99}$$

todavia, o interesse maior diz respeito às funções ditas analíticas expressas por:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)\tag{3.100}$$

Satisfazendo-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{3.101}$$

de sorte a garantir que as derivadas da função em relação à variável  $z$  seja a mesma em qualquer direção no plano  $xy$ , ou seja, venha a ser componentes de um tensor plano de segunda ordem do tipo hidrostático. Para tanto, considerando-se, por exemplo, a derivação da função fazendo-se  $idy = 0$  e procedendo-se o limite com  $dx$  tendendo-se para zero, ou então fazendo-se  $dx = 0$  e procedendo-se o limite com  $idy$  tendendo-se para zero tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} f(z) &= \frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \\ \frac{d}{dz} f(z) &= \frac{\partial f(z)}{\partial(iy)} = \frac{\partial u(x,y)}{i\partial y} + i \frac{\partial v(x,y)}{i\partial y} = -i \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\end{aligned}\tag{3.102}$$

cuja igualdade resulta nas relações (3.101).

Considere-se agora o caso de uma função analítica na região e na curva que a limita, como ilustrado na Figura A1, para a qual vale então o teorema de Cauchy:

$$\oint_c f(z) dz = 0\tag{3.103}$$

ou seja:

$$\oint_c f(z) dz = \oint_c (u + iv)(dx + idy) = \oint_c (udx - vdy) + i \oint_c (vdx + udy) = 0\tag{3.104}$$

em decorrência do teorema de Gauss/Green no plano, que se expressa:

$$\oint_C (u dx - v dy) = \iint_{R(x,y)} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy$$

$$\oint_C (u dy - v dx) = \iint_{R(x,y)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$
(3.105)

confirmando-se, pois, de (3.101) a nulidade em apreço.

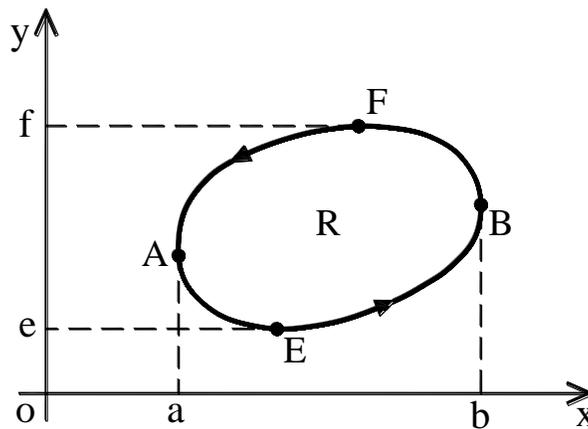


Figura A1

Decorre de (3.102) o fato de a integral ao longo de uma linha qualquer ligando dois pontos ser igual, independente do caminho percorrido, como ilustra-se na Figura A2 a), ou seja:

$$\int_{P_1 A P_2} f(z) dz = \int_{P_1 B P_2} f(z) dz$$
(3.106)

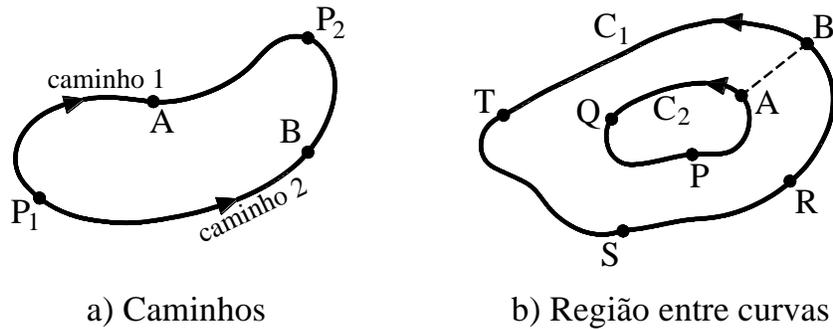
uma vez que:

$$\int_{P_1 A P_2} f(z) dz - \int_{P_1 B P_2} f(z) dz = \oint_C f(z) dz = 0$$
(3.107)

que vem a ser uma propriedade típica de potencial. Além disso, vale também a propriedade:

$$\oint_{C_1} f(Z) dz = \oint_{C_2} f(Z) dz$$
(3.108)

sendo  $C_1$  e  $C_2$  duas curvas fechadas limitando a região entre elas, como ilustra-se na Figura A2 b).



**Figura A2**

No sentido de se criar uma curva fechando a região entre as curvas em estudo, deve-se caminhar mantendo-se sempre à direita a região. Por exemplo, considere-se o caminho AB ligando as duas curvas e efetuar a integração segundo os caminhos:

$$\int_{AQPA} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \int_{BRSTB} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0 \quad (3.109)$$

ou seja:

$$\int_{AQPA} f(z)dz + \int_{BRSTB} f(z)dz = 0 \quad (3.110)$$

visto que a integração no trecho AB se anula, ou ainda:

$$\int_{AQPA} f(z)dz - \int_{BTSRB} f(z)dz = 0 \quad (3.111)$$

confirmando-se, pois, a relação (3.106).

A propriedade fundamental da teoria das variáveis complexas consiste na relação:

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i \rightarrow n = 1 \\ 0 \rightarrow n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.112)$$

tratando-se, pois, de uma integração em curva fechada com singularidade de ordem  $n$  num ponto  $a$  no seu interior, cuja prova é surpreendentemente simples. Para tanto considere-se a região delimitada por duas curvas, como ilustra-se na Figura A3, sendo a curva  $C_1$  um círculo de raio infinitesimal  $\varepsilon$  com centro no ponto  $a$ , valendo-se pois a relação (3.108), ou seja:

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n} \quad (3.113)$$

sendo que a curva  $C_1$  se expressa:

$$z - a = \varepsilon e^{i\theta} \quad (3.114)$$

tendo-se, pois:

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon^n e^{in\theta}} d\theta = \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \frac{\cos((1-n)\theta) + i\text{sen}((1-n)\theta)}{2\pi\varepsilon^{n-1}(1-n)} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{2\pi i \text{sen}((1-n)2\pi)}{\varepsilon^{n-1} (1-n)2\pi} \end{aligned} \quad (3.115)$$

resultando-se, pois, no expesso em (3.112), caindo-se no limite unitário clássico do seno dividido pelo arco quando este tende-se para zero (esse limite pode também ser visto trabalhando-se com a série de Taylor do exponencial em apreço).

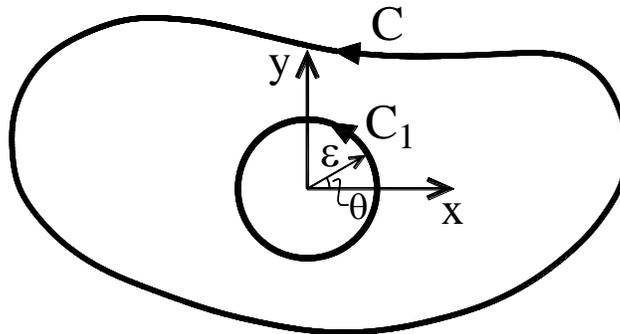


Figura A3

Por outro lado, verifica-se também que, para uma função analítica, vale a integração::

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a + i\varepsilon\theta)}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) i d\theta = if(a) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi if(a) \quad (3.116)$$

em decorrência de  $\varepsilon$  tender para zero.

No caso de se ter uma função analítica do tipo:

$$\phi(z) = (z - a)^n f(z) \quad (3.117)$$

a função  $f(z)$  pode ser redigida em termos da série de Laurent, ou seja:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n+1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots \quad (3.118)$$

que vem a ser uma extensão da série de Taylor com a inclusão de termos singulares, supondo-se, naturalmente que  $\phi(a) \neq 0$ . Assim sendo, o exposto e, (3.116) permite redigir:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i a_{-1} \quad (3.119)$$

que consiste no resultado prescrito pelo teorema dos resíduos nesse caso com polo em  $z = a$ , denominado polo simples pelo fato de se ter  $n = 1$ , bem como ser  $a^{-1}$  denominado resto. Essa denominação decorre do fato de que, no caso de polo simples, que é o caso que de perto interessa na dinâmica, tem-se:

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) \quad (3.120)$$

que vem a ser o que sobra da função ao se eliminar a singularidade.

No caso de haver mais polos na região de integração, como ilustra-se na Figura A4, tem-se:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots = 2\pi i (a_{-1} + b_{-1} + \dots) \quad (3.121)$$

resultando-se simplesmente na soma de todos os resíduos, pois a integração consiste em percorrer a curva  $C$  entrando e saindo de cada região com polo.

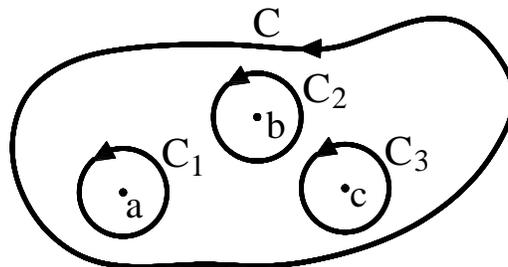


Figura A4

O emprego mais importante do teorema dos resíduos consiste no resultado expresso pela relação:

$$\int_{-R}^{+R} f(z)dz = \oint_C f(z)dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + \dots) \quad (3.122)$$

cujos polos estão contidos na região ilustrada na Figura A5, com R tendendo-se para o infinito. Porquanto:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz \rightarrow 0 \quad (3.123)$$

uma vez que em sendo  $f(z)$  uma função limitada, vale a relação:

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^K} \quad (3.124)$$

para:

$$z = Re^{i\theta} \quad (3.125)$$

onde M e K são constantes adequadamente escolhidas, implicando-se em:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq |f(z)||dz| \leq \frac{M}{R^K} (\pi R) = \frac{\pi M}{R^{K-1}} \rightarrow 0 \quad (3.126)$$

Visto que o arco da semicircunferência vale  $\pi R$ .

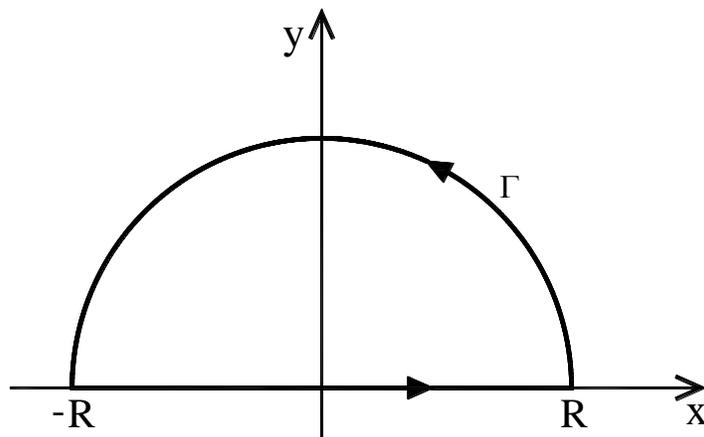


Figura A

### 3.12- Fórmula de Leibniz

A derivada do expresso em (3.4) se escreve:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[ \int_0^{t+dt} P(\tau)h(t+dt-\tau)d\tau - \int_0^t P(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] = \\ \lim_{dt \rightarrow 0} \int_0^t \left[ p(\tau) \frac{h(t+dt-\tau) - h(t-\tau)}{dt} \right] d\tau + \lim_{dt \rightarrow 0} \int_t^{t+dt} P(\tau)h(t+dt-\tau) \frac{dt}{d\tau} &= \quad (3.127) \\ \int_0^t P(\tau)\dot{h}(t-\tau)d\tau + P(t)h(0) \end{aligned}$$

uma vez que, no limite com dt tendendo-se para zero, na separação das integrais a primeira explicita a derivada da função impulso em relação à variável tempo, e na segunda, como as variáveis t e τ têm a mesma variação, os diferenciais correspondentes são então idênticos.

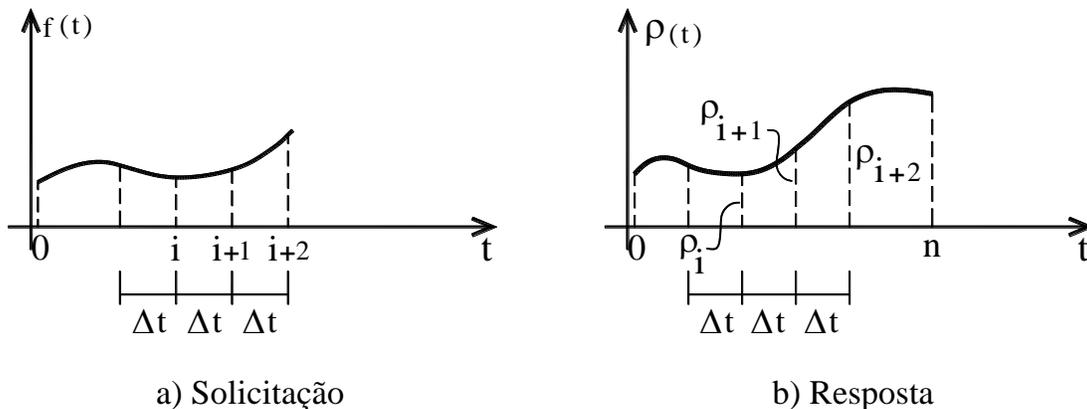
## CAPÍTULO IV INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

### 4.1-Introdução

A integração numérica da equação de movimento na forma adimensional, ou seja:

$$\ddot{\rho}(t) + 2\gamma\omega_n\dot{\rho}(t) + \omega_n^2\rho(t) = \omega_n^2f(t) \quad (4.1)$$

é a seguir formulada, tendo-se em conta que as funções envolvidas são agora expressas na forma vetorial, como ilustrado na Figura 4.1. Além disso, a malha no tempo é suposta, em geral, uniforme, não sendo prático o emprego de malhas irregulares, afinal o emprego de tecnologia digital toma por base uma resolução dada (quantidade de pontos na definição das funções em jogo).



**Figura 4.1**

Pois bem, a questão que se coloca agora é a seguinte. A solicitação é agora definida, pois, pelo vetor:

$$\{f\}^T = \{f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_n\} \quad (4.2)$$

e a resposta pelo vetor, segundo a mesma malha no tempo, ou seja:

$$\{\rho\}^T = \{\rho_0 \quad \rho_1 \quad \dots \quad \rho_n\} \quad (4.3)$$

e a questão básica consiste, pois, em como relacionar o vetor da solicitação (4.2) com o vetor da resposta do sistema (4.3).

No que se segue, vários métodos respondendo a essa questão vão ser objeto de apresentação, iniciando-se com o mais simples, e também o pioneiro, que se

denomina método das diferenças finitas centrais de segunda ordem, de passo duplo e formulação dita explícita, seguido do método de Newmark, também de segunda ordem, mas de passo único, mas com formulação dita implícita. O método da transformada rápida de Fourier, uma formulação numérica expedita de se proceder a transformada de Fourier, bem como outros métodos consagrados na literatura, completam a exposição.

## 4.2 – Método das diferenças centrais

Antes de se abordar a formulação do método das diferenças finitas centrais, é oportuno novamente uma breve apresentação da formulação da série de Taylor, que foi sem dúvida uma revolução na chamada matemática operacional, afinal ela permitiu, pela primeira vez na história da matemática, explicitar de maneira exata, além das funções trigonométricas, muitas outras funções.

Em verdade a série de Taylor é uma expansão polinomial tendo por base o valor da função e de suas derivadas em um determinado valor da variável, em especial para o valor nulo da variável, da mesma forma como ocorre com qualquer polinômio.

Por exemplo, considere-se um polinômio genérico do tipo:

$$p(t) = C_0 + C_1t + C_2t^2 + C_3t^3 + C_4t^4 + \dots \quad (4.4)$$

onde  $C_i$  são as constantes do polinômio. Suas derivadas sucessivas são expressas por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p(t) &= p'(t) = C_1 + 2C_2t + 3C_3t^2 + 4C_4t^3 + \dots \\ \frac{d}{dt^2}p(t) &= p''(t) = 2C_2 + 6C_3t + 12C_4t^2 + \dots \\ \frac{d}{dt^3}p(t) &= p'''(t) = 6C_3 + 24C_4t + \dots \\ \frac{d}{dt^4}p(t) &= p^{IV}(t) = 24C_4 + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde o numeral romano como expoente indica o nível de derivação. Assim sendo, para valor nulo da variável  $x$  tem-se de imediato:

$$\begin{aligned}
 p(t=0) &= C_0 = 0!C_0 = p_0 \\
 p'(t=0) &= C_1 = 1!C_1 = p_0' \\
 p''(t=0) &= 2C_2 = 2!C_2 = p_0'' \\
 p'''(t=0) &= 6C_3 = 3!C_3 = p_0''' \\
 p^{IV}(t=0) &= 24C_4 = 4!C_4 = p_0^{IV} \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

e com isso o polinômio (4.6) ganha a seguinte escrita:

$$p(t) = p_0 + p_0' \frac{t^1}{1!} + p_0'' \frac{t^2}{2!} + p_0''' \frac{t^3}{3!} + p_0^{IV} \frac{t^4}{4!} + \dots
 \tag{4.7}$$

ou seja, conhecendo-se a função polinomial e suas derivadas para o valor nulo da variável t, por exemplo, o polinômio acha-se determinado, pois existe uma relação direta desses valores com as constantes do polinômio, e essa propriedade vale para qualquer que seja o grau do polinômio.

A expressão (4.7) permite, por exemplo, escrever:

$$\begin{aligned}
 p(\Delta t) &= p_{i+1} = p_i + p_i' \Delta t + p_i'' \frac{\Delta t^2}{2!} + p_i''' \frac{\Delta t^3}{3!} + p_i^{IV} \frac{\Delta t^4}{4!} + \dots \\
 p(-\Delta t) &= p_{i-1} = p_i - p_i' \Delta t + p_i'' \frac{\Delta t^2}{2!} - p_i''' \frac{\Delta t^3}{3!} + p_i^{IV} \frac{\Delta t^4}{4!} - \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

o que permite redigir as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
 p_{i+1} - p_i &= 0 + 2p_i' \Delta t + 2p_i''' \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \\
 p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1} &= 0 + 2p_i'' \frac{\Delta t^2}{2!} + 2p_i^{IV} \frac{\Delta t^4}{4!} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

permitindo-se, pois, formular os seguintes operadores de diferenças finitas explicitando-se a ordem do erro:

$$\begin{aligned}
 p_i' &= \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta t} - \left( \frac{p_i'''}{3!} \Delta t^2 + \dots \right) \\
 p_i'' &= \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta t^2} - \left( \frac{2p_i^{IV}}{4!} \Delta t^2 + \dots \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

evidenciando-se que o operador central de primeira derivada:

$$p_i^I = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta t} \quad (4.11)$$

e o operador central de segunda derivada:

$$p_i^{II} = \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (4.12)$$

apresentam erro de segunda ordem, também denominado erro local, e, conseqüentemente, ao serem aplicados em relações diferenciais resultam, coerentemente, no conjunto, igualmente erros de segunda ordem.

Os operadores de diferenças finitas (4.11) e (4.12) que expressam derivadas em termos de valores da função na vizinhança são denominados lagrangeanos centrais de passo duplo. Todavia existem também operadores de diferenças finitas mais gerais denominados operadores de diferenças finitas hermitianos, como mostrado a seguir, apenas a título de exemplificação.

Considere-se para tanto os seguintes desenvolvimentos:

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i + p_i^I \Delta t + p_i^{II} \frac{\Delta t^2}{2!} + p_i^{III} \frac{\Delta t^3}{3!} + p_i^{IV} \frac{\Delta t^4}{4!} + \dots \\ p_{i+1}^I &= p_i^I + p_i^{II} \Delta t + p_i^{III} \frac{\Delta t^2}{2!} + p_i^{IV} \frac{\Delta t^3}{3!} + p_i^V \frac{\Delta t^4}{4!} - \dots \end{aligned} \quad (4.13)$$

os quais permitem obter um operador de diferenças finitas hermitianas de terceira ordem como segue:

$$y_i + ap_{i+1} + bp_i^I + cp_{i+1}^I = 0 - \frac{p_i^{III}}{12} (\Delta t^3) \quad (4.14)$$

e tendo-se em conta (4.13):

$$\begin{aligned} 1 + a &= 0 \\ a\Delta t + b + c &= 0 \\ a \frac{\Delta t^2}{2} + c\Delta t &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

resultando  $a = -1$ ,  $b = \Delta t/2$ ,  $c = \Delta t/2$ , sendo pois o operador em questão expresso por:

$$p_{i+1} - p_i - (p_i^I + p_{i+1}^I) \frac{\Delta t}{2} = 0 + \frac{p_i^{III}}{12} \Delta t^3 \quad (4.16)$$

que consiste no clássico operador trapezoidal, origem da formulação de Newmark<sup>1</sup>, cumprindo-se assinalar ainda que os operadores de diferenças finitas são obtidos anulando-se os termos da combinação do tipo (4.14) até a ordem desejada.

Tendo-se em conta os operadores expressos em (4.11) e (4.12) a equação de movimento (4.1) ganha no tempo  $i\Delta t$  a seguinte escrita:

$$\frac{\rho_{i+1} - 2\rho_i + \rho_{i-1}}{\Delta t^2} + 2\gamma\omega_n \frac{\rho_{i+1} - \rho_{i-1}}{2\Delta t} + \omega_n^2 \rho_i = \omega_n^2 f_i \quad (4.17)$$

forneendo-se a expressão de recorrência:

$$\rho_{i+1} = \frac{\theta^2 f_i + (\gamma\theta - 1)\rho_{i-1} + (2 - \theta^2)\rho_i}{1 + \gamma\theta} \quad (4.18)$$

que consiste numa equação de diferença pelo fato de que se trata de uma relação entra valores da função  $\rho(t)$  e da função  $f(t)$  para diferentes valores da variável, sendo  $\theta = \omega_n \Delta t$ . As condições iniciais permitem expressar as primeiras componentes do vetor de reposta, uma vez que:

$$\begin{aligned} \rho(t=0) &= \rho_0 \\ \dot{\rho}(t=0) &= \dot{\rho}_0 \cong \frac{\rho_1 - \rho_{-1}}{2\Delta t} \rightarrow \rho_{-1} = \rho_1 - 2\dot{\rho}\Delta t \end{aligned} \quad (4.19)$$

permitindo-se, pois, formular o primeiro passo:

$$\rho_1 = \frac{\theta^2 f_0 + (\gamma\theta - 1)\rho_{-1} + (2 - \theta^2)\rho_0}{1 + \gamma\theta} = \frac{1}{2}(\theta^2 f_0 + 2(1 - \gamma\theta)\dot{\rho}\Delta t + (2 - \theta^2)\rho_0) \quad (4.20)$$

e com isso encontrar, com a equação de recorrência (4.18), todas as demais componentes da resposta procurada.

É bastante ilustrativo resolver primeiro o caso simples da vibração livre sem amortecimento:

$$\ddot{\rho}(t) + \omega_n^2 \rho(t) = 0 \quad (4.21)$$

com condições iniciais:

$$\begin{aligned} \rho(t=0) &= \rho_0 = 0 \\ \dot{\rho}(t=0) &= \dot{\rho}_0 = 1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

cuja solução analítica é dada por:

<sup>1</sup> Newmark, N.M., *A method of Computation for structural dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division, 85 (EM3), (1959)

$$\rho(t) = \cos \omega_n t \quad (4.23)$$

e a solução numérica para  $\Delta t = T_n / 3$ , ou seja,  $\theta = \omega_n T_n / 3 = 2\pi / 3$ , resultando-se:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2}(2 - \theta^2) = -1.193\rho_0 \\ \rho_{i+1} &= (2 - \theta^2)\rho_i - \rho_{i-1} = -2.386\rho_i - \rho_{i-1} \end{aligned} \quad (4.24)$$

obtendo-se os cinco primeiros resultados expostos na Tabela 4.1

**Tabela 4.1**

passo	$t_i = i\Delta t$	$\rho_i$	$\rho_{\text{analítico}}$
1	0	1.0	1.0
2	$T_n / 3$	-1.193	-0.5
3	$2T_n / 3$	1.848	-0.5
4	$T_n$	-3.216	1.0
5	$4T_n / 3$	5.828	-0.5

cujos resultados numéricos são explosivamente crescentes, caracterizando-se o que se denomina instabilidade numérica; não sendo, pois, uma aproximação do resultado analítico. Esse mesmo exemplo com  $\Delta t = T_n / 4$ , ou seja  $\theta = 2\pi / 4 = 1.571$  já são os arrolados na Tabela 4.2, e não apresentam aquela instabilidade numérica então verificada.

**Tabela 4.2**

passo	$t_i = i\Delta t$	$\rho_i$	$\rho_{\text{analítico}}$
1	0	1.0	1.0
2	$T_n / 4$	-0.2337	0.0
3	$T_n / 2$	-0.8908	-1.0.
4	$3T_n / 4$	0.6500	0.0
5	$T_n$	0.5869	-1.0

A explicação para esse fato decorre do exame da solução da equação de diferença (4.18) expressa, no caso em tela, na forma homogênea:

$$\rho_{n+1} - (2 - \theta^2)\rho_n + \rho_{n-1} = 0 \quad (4.25)$$

com as condições iniciais:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 1 \\ \dot{\rho}_0 &= 0 = \frac{\rho_1 - \rho_{-1}}{2\Delta t} \rightarrow \rho_1 - \rho_{-1} = 0\end{aligned}\quad (4.26)$$

cuja solução analítica é expressa por:

$$\rho_n = C\lambda^n \quad (4.27)$$

que, substituída em (4.25), resulta:

$$C[\lambda^{n+1} - (2 - \theta^2)\lambda^n + \lambda^{n-1}] = 0 \quad (4.28)$$

ou seja:

$$\lambda^2 - (2 - \theta^2)\lambda + 1 = 0 \quad (4.29)$$

cujas raízes são:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} = \frac{2 - \theta^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2 - \theta^2}{2}\right)^2 - 1} \quad (4.30)$$

sendo, pois, complexas para  $\theta < 2$  ( $\Delta t < T_n / \pi$ ) e reais em caso contrário.

Examinando-se o caso que interessa primeiro ( $\theta < 2$ ), ou seja:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} = \frac{2 - \theta^2}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{2 - \theta^2}{2}\right)^2} = e^{\pm\beta i} \quad (4.31)$$

uma vez que o módulo das raízes complexas (4.31) é unitário e a fase dada por:

$$\beta = \text{arc. cos} \frac{2 - \theta^2}{2} \quad (4.32)$$

e, assim sendo, a solução analítica da equação de diferença em apreço ganha a seguinte redação:

$$\rho_n = C_1 e^{n\beta i} + C_2 e^{-n\beta i} \quad (4.33)$$

cujas constantes de integração, ao atender as condições expressas em (4.26), resultam:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 1 = C_1 + C_2 \\ \dot{\rho}_0 &= \rho_1 - \rho_{-1} = C_1 e^{\beta 1} + C_2 e^{-\beta 1} - (C_1 e^{-\beta 1} + C_2 e^{\beta 1}) = \\ &(e^{\beta 1} + e^{-\beta 1})(C_1 - C_2) \rightarrow C_1 - C_2 = 0\end{aligned}\quad (4.34)$$

resultando-se  $C_1 = C_2 = 1/2$ , ou seja:

$$\rho_n = \frac{1}{2} [e^{n\beta i} + e^{-n\beta i}] = \cosh(n\beta i) = \cos n\beta \quad (4.35)$$

enquanto a solução exata da vibração livre em questão é dada por:

$$\rho(t) = \cos \omega_n t = \cos \omega_n n \Delta t = \cos n\theta \quad (4.36)$$

restando-se agora confrontar o resultado (4.35) com (4.36).

No caso  $\Delta t = T_n / 4$  tem-se:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\pi}{2} = 1.5708 \\ \beta &= \arccos \left( \frac{2 - \frac{2\pi}{4}}{2} \right) \rightarrow \beta = 1.8067\end{aligned}\quad (4.37)$$

e a solução da equação de diferença resulta:

$$\rho_n = \cos n\beta = \cos \frac{\beta}{\theta} n\theta = \cos \omega_a n \Delta t = \cos \omega_a t \quad (4.38)$$

cujo confronto com (3.36) permite avaliar o encurtamento do período da solução numérica, ou seja:

$$\varepsilon_n = \frac{T - T_a}{T} = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_a} = 1 - \frac{\theta}{\beta} \quad (4.39)$$

que consiste numa medida do erro, lembrando-se que a amplitude dada por (4.38) coincide nesse caso com a amplitude da solução exata (4.36). Vale registrar que a solução numérica expressa em (4.38) apresenta os mesmos resultados da solução numérica arrolados na Tabela 4.2.

Para uma malha no tempo com  $\theta > 2$  tem-se:

$$\lambda_1 = \frac{2-\theta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2-\theta^2}{2}\right)^2 - 1} > -1 \rightarrow |\lambda_1| < 1$$

$$\lambda_2 = \frac{2-\theta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2-\theta^2}{2}\right)^2 - 1} < -1 \rightarrow |\lambda_2| > 1$$
(4.40)

resultando na solução da equação de diferença:

$$\rho_n = \frac{1}{2} [\lambda_1^n + \lambda_2^n]$$
(4.41)

visto que as condições iniciais implicam, a exemplo do expresso em (4.34) em  $C_1 = C_2 = 1/2$ , e levando aos valores explosivos arrolados na Tabela 4.1, pois o módulo de  $\lambda_2$  é superior à unidade.

A ordem do erro do encurtamento do período da solução numérica dada por (4.39), também denominado erro global, pode ser avaliada tendo-se em conta que:

$$\text{tg}\beta = \theta \sqrt{\frac{4-\theta^2}{(2-\theta^2)^2}}$$
(4.42)

e também que a série de Taylor do arco tangente é expressa por:

$$\text{arc.tg}(\eta) = \eta \left( 1 - \frac{\eta^2}{3} + \frac{\eta^4}{5} - \dots \right)$$
(4.43)

tem-se:

$$\beta = \theta \sqrt{\frac{4-\theta^2}{(2-\theta^2)^2}} \left[ 1 - \frac{\theta^2}{3} \frac{4-\theta^2}{(2-\theta^2)^2} + \frac{\theta^4}{5} \left( \frac{4-\theta^2}{(2-\theta^2)^2} \right)^2 - \dots \right]$$
(4.44)

resultando-se:

$$\frac{\theta}{\beta} - 1 = \frac{-\left[ \frac{\theta^2}{24} - \frac{7.25\theta^4}{4(2-\theta^2)^2} + \dots \right]}{\left[ 1 - \frac{46\theta^2}{48} - \frac{3.26\theta^4}{4(2-\theta^2)^2} + \dots \right]} \approx -\frac{\theta^2}{24}$$
(4.45)

que consiste na mesma ordem de erro dos operadores empregados, ou seja,  $o(\Delta t^2)$  cumprindo-se ressaltar que o amortecimento físico não altera a questão a estabilidade numérica.

### Exemplo de aplicação

Sabendo-se que a aceleração da base do sistema de um grau de liberdade é dada por:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_a(t) &= 0 & t \leq 0 \\ \ddot{x}_a(t) &= A |\text{sen}(\omega_n t)| & 0 \leq t \leq T_n \\ \ddot{x}_a(t) &= 0 & t \geq T_n\end{aligned}$$

pede-se a resposta do movimento relativo do sistema com amortecimento adimensional valendo  $\gamma = 0.01$ . Pede-se também formular a resposta pelo método das Diferenças Finitas Centrais  $\Delta t = T_n/8$ .

$$0 \leq t \leq T_n / 2$$

$$\begin{aligned}x(t) &= x_r(t) + x_a(t) & \ddot{\rho} + 2\gamma\omega_n\dot{\rho} + \omega_n^2\rho &= \omega_n^2\text{sen}(\omega t) \\ m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r &= -mA\text{sen}(\omega_n t) & \rho(t) &= x_r(t)/(-mA/k) = \psi(\gamma, \omega_n t, \alpha = 1)\end{aligned}$$

Com esses dados, tem-se:

$$\theta = \omega_n \Delta t = \pi/4 = 0.7854 \quad \theta^2 = 0.6168 \quad \gamma = 0.01 \quad f_j = \left| \text{sen} \left( \omega_n j \frac{T_n}{8} \right) \right| = \left| \text{sen} \left( j \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 0 & f_0 &= 0 & f_5 &= 0.7071 \\ \dot{\rho}_0 &= 0 & f_1 &= 0.7071 & f_6 &= 1 \\ \rho_1 &= \frac{1}{2} \left[ \theta^2 f_0 + 2(1 - \gamma\theta)\dot{\rho}_0 \Delta t + (2 - \theta^2)\rho_0 \right] = 0 & f_2 &= 1 & f_7 &= 0.7071 \\ \rho_{i+1} &= \frac{1}{1 + \gamma\theta} \left[ \theta^2 f_i + (\gamma\theta - 1)\rho_{i-1} + (2 - \theta^2)\rho_i \right] & f_3 &= 0.7071 & f_8 &= 0 \\ & & f_4 &= 0 & & \\ \rho_{i+1} &= 0.612f_i - 0.9844\rho_{i-1} + 1.37\rho_i & & & & \end{aligned}$$

exato	diferenças
0.0	0.0
0.07576	0.0
0.4961	0.4327
1.173	1.205
1.546	1.657
1.177	1.085
0.5189	0.2871
0.1207	-0.06238
0.04769	0.06469

### 4.3 – Método de Newmark

Na busca de um método de integração incondicionalmente estável, ou seja, numericamente estável para qualquer que seja o incremento  $\Delta t$ , o método de Newmark ganhou muito destaque por ser também um método de passo único, e, por essa razão, não exigir um operador diferente para tratar as condições iniciais, de fácil formulação, mas de natureza implícita por envolver a inversão da matriz de rigidez, no caso de mais de dois graus de liberdade, como examinado no item 5.8 do próximo capítulo.

A Figura 4.2 exibe a evolução da aceleração entre tempos sucessivos da malha e algumas interpolações ao longo do intervalo  $\Delta t$ .

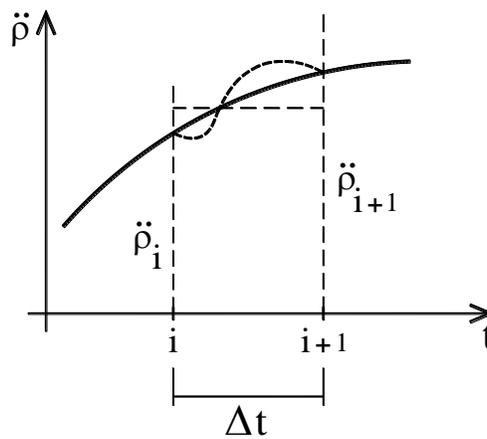


Figura 4.2

Pois bem, o método de Newmark parte do princípio de que, para qualquer função interpoladora adotada, as seguintes relações hermitianas resultam:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{i+1} &= \dot{\rho}_i + [(1-\delta)\ddot{\rho}_i + \delta\ddot{\rho}_{i+1}]\Delta t - \left( \frac{1-2\delta}{2!}\ddot{\rho}\Delta t^2 + \frac{1-3\delta}{3!}\rho^{IV}\Delta t^3 + \dots \right) \\ \rho_{i+1} &= \rho_i + \dot{\rho}_i\Delta t + [(1/2-\beta)\ddot{\rho}_i + \beta\ddot{\rho}_{i+1}]\Delta t^2 - \left( \frac{1-6\beta}{3!}\rho^{IV}\Delta t^3 + \frac{1-12\beta}{4!}\rho^V\Delta t^4 + \dots \right)\end{aligned}\quad (4.46)$$

onde o erro acha-se entre parênteses, sendo fácil de se verificar, por exemplo, que no caso de aceleração média constante (método trapezoidal), ou seja:

$$\ddot{\rho}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{\rho}_i + \ddot{\rho}_{i+1}) \quad (4.47)$$

cuja integração no intervalo em apreço resulta:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(\tau = \Delta t) &= \dot{\rho}_i + \frac{1}{2}(\ddot{\rho}_i + \ddot{\rho}_{i+1})\Delta t \\ \rho(\tau = \Delta t) &= \rho_i + \dot{\rho}_i\Delta t + \frac{1}{2}(\ddot{\rho}_i + \ddot{\rho}_{i+1})\frac{\Delta t^2}{2}\end{aligned}\quad (4.48)$$

corresponde a  $\delta = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ , resultando-se operadores com erro de terceira ordem (erro local).

No caso de interpolação linear, ou seja:

$$\ddot{\rho}(\tau) = \ddot{\rho}_i + \frac{\ddot{\rho}_{i+1} - \ddot{\rho}_i}{\Delta t}\tau \quad (4.49)$$

resulta  $\delta = 1/2$  e  $\beta = 1/6$ , mas, como no método das diferenças finitas centrais, trata-se de algoritmo também condicionalmente estável.

Tendo-se em conta o equilíbrio nos instantes  $i$  e  $i+1$ , ou seja:

$$\begin{aligned}\ddot{\rho}_i + 2\gamma\omega_n\dot{\rho}_i + \omega_n^2\rho_i &= \omega_n^2f_i \\ \ddot{\rho}_{i+1} + 2\gamma\omega_n\dot{\rho}_{i+1} + \omega_n^2\rho_{i+1} &= \omega_n^2f_{i+1}\end{aligned}\quad (4.50)$$

e também o expresso em (4.46) tem-se em notação matricial:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \delta\theta^2 & 1+2\delta\gamma\theta \\ 1+\beta\theta^2 & 2\beta\gamma\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_{i+1} \\ \dot{\rho}_{i+1}\Delta t \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\delta-1)\theta^2 & 1-2(1-\delta)\gamma\theta \\ 1-(1/2-\beta)\theta^2 & 1-2\gamma\theta(1/2-\beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_i \\ \dot{\rho}_i\Delta t \end{Bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} (1-\delta)\theta^2 & \delta\theta^2 \\ (1/2-\beta)\theta^2 & \beta\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (4.51)$$

exigindo-se, pois, a inversão de uma matriz de coeficientes para explicitar o resultado do passo seguinte.

Exemplificando-se o emprego do método de Newmark trapezoidal ( $\delta = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ ), com a vibração livre não amortecida, como já exposto anteriormente, o expresso em (4.51) fica:

$$\begin{bmatrix} \theta^2 / 2 & 1 \\ 1 + \theta^2 / 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho \\ \dot{\rho}\Delta t \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} -\theta^2 / 2 & 1 \\ 1 + \theta^2 / 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho \\ \dot{\rho}\Delta t \end{Bmatrix}_i \quad (4.52)$$

ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \rho \\ \dot{\rho}\Delta t \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \frac{4 - \theta^2}{4 + \theta^2} & \frac{4}{4 + \theta^2} \\ \frac{-4\theta^2}{4 + \theta^2} & \frac{4 - \theta^2}{4 + \theta^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho \\ \dot{\rho}\Delta t \end{Bmatrix}_i \quad (4.53)$$

cujos resultados para  $\Delta t = T_n / 3$  acham-se arrolados na Tabela 4.3, evidenciando-se o caráter estável da presente solução numérica, embora com erros grosseiros.

**Tabela 4.3**

passo	$t_i = i\Delta t$	$\rho_i$	$\rho_{\text{analítico}}$
1	0	1.0	1.0
2	$T_n / 3$	-0.096193	-0.5
3	$2T_n / 3$	-0.996	-0.5
4	$T_n$	-0.138	1.0
5	$4T_n / 3$	0.983	-0.5

A estabilidade numérica do método de Newmark pode ser examinada considerando-se que o enésimo passo resulta por aplicações sucessivas:

$$\begin{Bmatrix} \rho \\ \dot{\rho}\Delta t \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \frac{4 - \theta^2}{4 + \theta^2} & \frac{4}{4 + \theta^2} \\ \frac{-4\theta^2}{4 + \theta^2} & \frac{4 - \theta^2}{4 + \theta^2} \end{bmatrix}^n \begin{Bmatrix} \rho \\ \dot{\rho}\Delta t \end{Bmatrix}_0 \quad (4.54)$$

e a estabilidade depende então dos autovalores da matriz envolvida. De acordo com a decomposição de Jordan, como mostrado no apêndice, a matriz presente em (4.54) pode ser fatorada como segue:

$$\begin{bmatrix} \frac{4-\theta^2}{4+\theta^2} & \frac{4}{4+\theta^2} \\ -\frac{4\theta^2}{4+\theta^2} & \frac{4-\theta^2}{4+\theta^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.55)$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores da matriz em questão e as colunas da matriz  $y_{ij}$  são os correspondentes autovetores, e, com isso:

$$\begin{bmatrix} \frac{4-\theta^2}{4+\theta^2} & \frac{4}{4+\theta^2} \\ -\frac{4\theta^2}{4+\theta^2} & \frac{4-\theta^2}{4+\theta^2} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.56)$$

ficando-se claro que a magnitude dos autovalores controla os resultados da recorrência (4.53).

Os autovalores da matriz de recorrência (4.55) são as raízes da seguinte equação do segundo grau:

$$\lambda^2 - 2\left(\frac{4-\theta^2}{4+\theta^2}\right)\lambda + 1 = 0 \quad (4.57)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{\beta i} \\ \lambda_2 &= e^{-\beta i} \\ \cos(\beta) &= \frac{4-\theta^2}{4+\theta^2} \end{aligned} \quad (4.58)$$

uma vez que os autovalores são complexos de módulo unitário.

Após manipulação algébrica de grande monta tem-se:

$$\rho_n = \cos n\beta \quad (4.59)$$

cuja ordem de erro do alongamento do período (erro global), seguindo-se os passos expostos no caso do método das diferenças finitas centrais, é dada por:

$$\frac{\theta}{\beta} - 1 = \frac{\frac{\theta^2}{12(1-\theta^2/4)^2} + \frac{0.175\theta^4}{(1-\theta^2/4)^5} + \dots}{1 - \frac{0.333\theta^2}{(1-\theta^2/4)^2} + \frac{0.2\theta^4}{(1-\theta^2/4)^4} + \dots} \approx \frac{\theta^2}{12} \quad (4.60)$$

valendo registrar que, na região estável, o método das diferenças finitas centrais é nesse quesito mais preciso (vide (4.45)).

Um outro parâmetro que também mede o erro da integração numérica é o chamado amortecimento numérico expresso por:

$$\gamma_n = -\frac{\ell_n(\rho)}{\beta} \quad (4.61)$$

em analogia com o amortecimento de sistema estrutural, pois:

$$\lambda^n = \rho^n e^{n\beta i} = e^{-\gamma_n n \beta} e^{n\beta i} \quad (4.62)$$

valendo-se adiantar que, na integração numérica de sistemas com múltiplos graus de liberdade, autovalores com módulo menor que a unidade é de interesse para a eliminação da contribuição de modos de vibração de frequências mais elevadas, que resultam apenas de um refinamento da modelagem. Esse assunto será abordado mais adiante, e em detalhes no próximo capítulo.

### Exemplo de aplicação

Como primeiro exemplo, considere-se o caso de um sistema com massa unitária ( $m=1\text{Kg}$ ), rigidez também unitária ( $k=1.0\text{N/m}$ ) e amortecimento  $c=0.4\text{N/(m/s)}$ . Pede-se a resposta do sistema para uma solicitação  $P(t)=0.5\cos(0.5t)$ , para  $t > 0$ , e com condições iniciais de repouso. Pede-se também formular a solução pelo método de Newmark ( $\delta=1/2$  e  $\beta=1/4$ ) com  $\Delta t = 2\pi/8$ .

Com os dados tem-se

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1 \text{ rad./s.} \quad \omega = 0.5 \text{ rad./s.} \quad \alpha = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{0.5}{1} = 0.5 \quad \gamma = \frac{C}{2m\omega_n} = \frac{0.4}{2 \times 1 \times 1} = 0.2$$

$$\omega_* = 0.98\omega_n = 0.98 \quad \gamma\omega_n = 0.2$$

com solução analítica dada por (vide (2.119)):

$$\rho(t) = \frac{x(t)}{0.5} = \psi(\gamma = 0.2, \alpha = 0.5, \omega_n t = t)$$

e Integração numérica pelo método de Newmark (4.51):

$$\begin{bmatrix} 0.30843 & 1.1571 \\ 1.1542 & 0.07854 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_{i+1} \\ \dot{\rho}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.30843 & 0.8429 \\ 0.84578 & 0.92146 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_i \\ \dot{\rho}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.30842 & 0.30842 \\ 0.15421 & 0.15421 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \end{Bmatrix}$$

ou ainda:

$$\begin{Bmatrix} \rho_{i+1} \\ \dot{\rho}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.76479 & 0.76261 \\ -0.47041 & 0.52521 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_i \\ \dot{\rho}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.11760 & 0.11760 \\ 0.23521 & 0.23521 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \end{Bmatrix}$$

concluindo-se, pois, a formulação procurada.

#### 4.4- Método de Wilson

Tendo-se em conta que a aproximação linear da aceleração resulta em algoritmo de integração mais preciso, mas condicionalmente estável, foi proposto por Wilson (1968) uma solução para tornar incondicionalmente estável a aproximação linear, considerando-se o equilíbrio numa posição genérica  $\varphi\Delta t$  podendo-se ajustar o parâmetro  $\varphi$  de modo a se obter raio espectral menor ou igual a unidade. Assim sendo, no intervalo de tempo  $0 \leq \tau \leq \varphi\Delta t$  têm-se as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(\tau) &= \ddot{x}_i + (\ddot{x}_j - \ddot{x}_i) \frac{\tau}{\Delta t} \\ \dot{x}(\tau) &= \dot{x}_i + (\ddot{x}_j - \ddot{x}_i) \frac{\tau^2}{2\Delta t} \\ x(\tau) &= x_i + \dot{x}_i\tau + (\ddot{x}_j - \ddot{x}_i) \frac{\tau^3}{6\Delta t} \end{aligned} \quad (4.63)$$

resultando-se no passo  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \dot{x}_i + (\ddot{x}_j - \ddot{x}_i) \frac{\Delta t}{2} \\ x_j &= x_i + \dot{x}_i\Delta t + (\ddot{x}_j - \ddot{x}_i) \frac{\Delta t^2}{6} \end{aligned} \quad (4.64)$$

porem, como mencionado, o equilíbrio é considerado na posição genérica  $\varphi\Delta t$ , ou seja:

$$\ddot{x}_\varphi + 2\gamma\omega_n\dot{x}_\varphi + \omega_n^2x_\varphi = \omega_n^2f_\varphi \quad (4.65)$$

e ainda, em vista de (4.63), a equação (4.65) ganha a seguinte redação:

$$\begin{aligned} & \left[ \ddot{x}_i\Delta t^2(1-\varphi) + \varphi\ddot{x}_j\Delta t^2 \right] + 2\gamma\theta \left[ \dot{x}_i\Delta t + \ddot{x}_i\Delta t^2 \left( \varphi - \frac{\varphi^2}{2} \right) + \ddot{x}_j\Delta t^2 \frac{\varphi^2}{2} \right] + \\ & \theta^2 \left[ x_i + \dot{x}_i\Delta t\varphi + \ddot{x}_i\Delta t^2 \left( \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{6} \right) + \ddot{x}_j\Delta t^2 \frac{\varphi^3}{6} \right] = \theta^2 f_\varphi \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde

$$\theta = \omega_n\Delta t \quad (4.67)$$

vem a ser o passo de arco.

A equação de recorrência do método de Wilson é, pois, obtida de (4.64) e (4.66), ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_j \Delta t^2 \\ \dot{x}_j \Delta t \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i \Delta t^2 \\ \dot{x}_i \Delta t \\ x_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Df_\varphi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

onde

$$A = -\frac{1 - \varphi + 2\gamma\theta \left( \kappa - \frac{\varphi^2}{2} \right) + \theta^2 \left( \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{6} \right)}{\varphi + 2\gamma\theta\varphi^2 + \theta^2 \frac{\varphi^3}{6}}$$

$$B = -\frac{2\gamma\theta + \theta^2\varphi}{\varphi + 2\gamma\theta\varphi^2 + \theta^2 \frac{\varphi^3}{6}} \quad (4.69)$$

$$D = -C = \frac{\theta^2}{\varphi + 2\gamma\theta\varphi^2 + \theta^2 \frac{\varphi^3}{6}}$$

e, resolvendo-se (4.68) tem-se finalmente:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_j \Delta t^2 \\ \dot{x}_j \Delta t \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ \frac{1}{2}(A+1) & \frac{1}{2}(B+2) & \frac{C}{2} \\ \frac{1}{6}(A+2) & \frac{1}{6}(B+6) & \frac{1}{6}(C+6) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i \Delta t^2 \\ \dot{x}_i \Delta t \\ x_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Df_\varphi \\ \frac{Df_\varphi}{2} \\ \frac{Df_\varphi}{6} \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

cumprindo assinalar, finalmente, que o fato de ser considerada a equação de equilíbrio em passo adicional implica no aumento de uma incógnita na equação de recorrência (4.70), e, com isso, criando-se um autovalor sempre real e espúrio, causando o chamado efeito overshoot, que consiste numa ampliação dos movimentos nos primeiros passos da integração, decorrente da influência desse autovalor espúrio na resposta.

O trabalho original foi formulado com  $\varphi = 2$ , mas estudos posteriores mostraram que o algoritmo incondicionalmente estável dessa família mais preciso é obtido com  $\varphi = 1.4$ .

#### 4.5-Método HHT- $\alpha$ (Hulbert-Hughes-Taylor)

No sentido de se contar com um parâmetro adicional ao clássico método de Newmark, de modo a se conferir maior amortecimento numérico (autovalor menor que a unidade em módulo) voltado para a abordagem de problemas não lineares, um sem número de métodos foi apresentado, e, dentre eles, ganham destaque os chamados métodos denominados  $\alpha$ , que tomam por base uma equação de equilíbrio modificada convenientemente, originalmente na forma:

$$\ddot{x}_j + (1 + \alpha)\omega_n^2 x_j - \alpha\omega_n^2 x_i = \omega_n^2 f_j \quad (4.71)$$

onde o amortecimento não está sendo aqui considerado.

Em outra redação equivalente:

$$\ddot{x}_j + \omega_n^2 x_j + \alpha\omega_n^2 (x_j - x_i) = \omega_n^2 f_j \quad (4.72)$$

ficando-se claro que a própria equação de equilíbrio é tomada em forma aproximada, e só em situação limite é atendida. Outras formas mais gerais são do tipo:

$$\ddot{x}_j + 2\gamma\omega_n(1 + \alpha)\dot{x}_j - 2\gamma\omega_n\dot{x}_i + \omega_n^2(1 + \alpha)x_j - \omega_n^2\alpha x_i = \omega_n^2(1 + \alpha)f_j - \omega_n^2\alpha f_i \quad (4.73)$$

onde o novo parâmetro aparece em vários termos da equação de equilíbrio modificada.

Como exemplo de aplicação, considerem-se os operadores de Newmark:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \dot{x}_i + \Delta t(1 - \delta)\ddot{x}_i + \Delta t\delta\ddot{x}_j \\ x_j &= x_i + \Delta t\dot{x}_i + \Delta t^2\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{x}_i + \Delta t^2\beta\ddot{x}_j \end{aligned} \quad (4.74)$$

mais a equação (4.72), permitindo-se redigir:

$$\begin{bmatrix} 1 & (1 - \alpha)\theta^2 & 0 \\ \delta & -1 & 0 \\ \beta & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t^2\ddot{x}_j \\ \Delta t\dot{x}_j \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha\theta^2 \\ \delta - 1 & -1 & 0 \\ \beta - \frac{1}{2} & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t^2\ddot{x}_i \\ \Delta t\dot{x}_i \\ x_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \theta^2 f_j \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.75)$$

ou ainda:

$$\begin{Bmatrix} \Delta t^2\ddot{x}_j \\ \Delta t\dot{x}_j \\ x_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 + \delta(1 - \phi)} \theta^2 \begin{bmatrix} (\delta - 1)(1 - \alpha)\theta^2 & (\alpha - 1)\theta^2 & \alpha\theta^2 \\ 1 - \delta & -1 & \delta\alpha\theta^2 \\ A^* & B^* & C^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t^2\ddot{x}_i \\ \Delta t\dot{x}_i \\ x_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \theta^2 f_j \\ \delta\theta^2 f \\ \beta\theta^2 f \end{Bmatrix} \quad (4.76)$$

onde

$$\begin{aligned} A^* &= \beta(\alpha - 1)(1 - \delta)\theta^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(1 + \delta(1 - \alpha)\theta^2) \\ B^* &= \beta(\alpha - 1)\theta^2 + 1 + \delta(1 - \alpha)\theta^2 \\ C^* &= \beta\alpha\theta^2 + 1 + \delta(1 - \alpha)\theta^2 \end{aligned} \quad (4.77)$$

que consiste na equação de recorrência desse método.

Cumpra finalmente assinalar que essa família de algoritmo tri-paramétrico (dois do Newmark -  $\beta$  e  $\delta$ , e mais o  $\alpha$ ) permite um maior número de ajustes, mas até agora tais algoritmos ficaram a desejar, especialmente no quesito precisão. Os parâmetros mais indicados são:  $\alpha = -0.1$  (maior precisão) e  $\alpha = -0.3$  (para aniquilamento assintótico) com  $\beta = 0.3025$  e  $\delta = 0.6$ . Além disso cabe também ressaltar que embora exista uma raiz espúria, pode-se mostrar que, para tais valores dos parâmetros, não há praticamente o fenômeno numérico do overshoot, e o algoritmo apresenta segunda ordem de convergência.

#### 4.6-Método de Houbolt

O método de Houbolt tem por base dois operadores de diferenças finitas lagrangeanas descendentes de três passos, quais sejam:

$$\begin{aligned} \Delta t^2 \ddot{x}_j &= 2x_j - 5x_{j-1} + 4x_{j-2} - x_{j-3} \\ \Delta t \dot{x}_j &= \frac{1}{6}(11x_j - 18x_{j-1} + 9x_{j-2} - 2x_{j-3}) \end{aligned} \quad (4.78)$$

que levados na equação de equilíbrio no tempo  $j$  resulta na seguinte equação de recorrência:

$$x_j = \frac{1}{2 - \frac{11}{3}\gamma\theta + \theta^2} \left[ (5 + 6\gamma\theta)x_{j-1} - (4 + 3\gamma\theta)x_{j-2} + \left(1 + \frac{4}{3}\gamma\theta\right)x_{j-3} \right] \quad (4.79)$$

sendo que o inconveniente de se ter em conta as condições iniciais fica evidente, pelo fato de ser um método de passo triplo. Na versão original são considerados para essa finalidade outros dois operadores de diferenças finitas lagrangeanas, de segunda ordem, quais sejam:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 &= \frac{1}{6\Delta t}(2x_1 + 3x_0 - 6x_{-1} + x_{-2}) \\ \ddot{x}(t=0) = \ddot{x}_0 &= \frac{1}{\Delta t^2}(x_1 - 2x_0 + x_{-1})\end{aligned}\quad (4.80)$$

onde  $x(t=0) = x_0$ . Tendo-se em conta agora que o equilíbrio no tempo  $t = 0$  permite explicitar a aceleração inicial, ou seja:

$$\ddot{x}_0 = -2\gamma\omega_n\dot{x}_0 - \omega_n^2x_0 + \omega_n^2f_0 \quad (4.81)$$

completando-se então as relações necessárias para a obtenção de  $x_{-1}$  e  $x_{-2}$  junto com  $x_1$ , quais sejam, equação (4.79) para  $j = 1$ , e (4.80), tendo-se no conjunto a seguinte redação:

$$\begin{bmatrix} 1 & b/d & -c/d \\ 2 & -6 & 1 \\ 1+2\gamma\theta/3 & 1-2\gamma\theta & \gamma\theta/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ax_0/d \\ 6\Delta t\dot{x}_0 \\ (2-\gamma\theta-\theta^2)x_0 + \theta^2f_0 \end{Bmatrix} \quad (4.82)$$

onde:

$$\begin{aligned}a &= 5 + 6\gamma\theta \\ b &= 4 + 3\gamma\theta \\ c &= 1 + \frac{4}{3}\gamma\theta \\ d &= 2 - \frac{11}{3}\gamma\theta + \theta^2\end{aligned}\quad (4.83)$$

A equação característica decorrente da equação de diferença (4.82) tem a seguinte redação:

$$\lambda^3 - \frac{a}{d}\lambda^2 + \frac{b}{d}\lambda - \frac{c}{d} = 0 \quad (4.84)$$

que tem naturalmente três raízes, uma vez que nesse caso tem-se solução geral de (4.82) do tipo:

$$x_j = C_1\lambda_1^j + C_2\lambda_2^j + C_3\lambda_3^j \quad (4.85)$$

sendo que as constantes de (4.85) são obtidas tendo-se em conta a solução de (4.84). Além disso, vale assinalar que a pequena magnitude da raiz espúria de (4.84) acaba por não acarretar significativo fenômeno de overshoot.

Todavia, o fato desse algoritmo apresentar comportamento de aniquilamento assintótico, ou seja, com autovalores que tendem para zero quando o passo de tempo  $\Delta t$  tende para o infinito, acabou por torná-lo bastante popular nos anos 50.

#### 4.7-Método de Galerkin Descontínuo

O método de Galerkin descontínuo no tempo tem por característica o fato de considerar a descontinuidade do deslocamento e da velocidade nos nós da malha temporal como ilustrado na Figura 4.3, a exemplo de outras formulações não conformes do método dos elementos finitos.

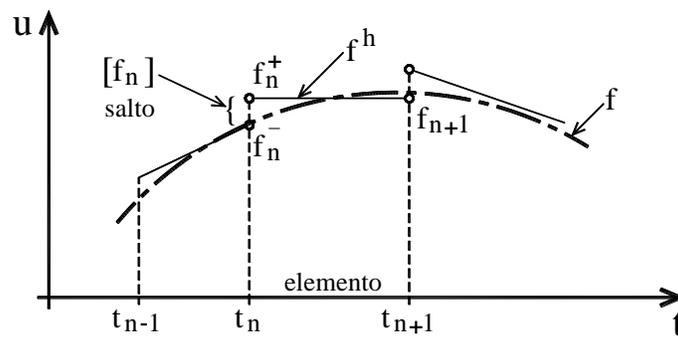


Figura 4.3

No sentido de facilitar a exposição, considere-se o caso da vibração livre não amortecida de um sistema com um grau de liberdade formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} m\dot{v} + kd &= 0 \\ \dot{d} - v &= 0 \end{aligned} \quad (4.86)$$

onde  $m$  é a massa do sistema,  $k$  a rigidez,  $d$  o deslocamento e  $v$  a velocidade, sendo que o ponto superior indica o grau de derivação no tempo. O expresso em (4.86) indica que se trabalha nesse método com duas funções incógnitas ( $d$  e  $v$ ), referenciado nesse caso em língua inglesa como “two-field time finite element formulation”.

No intervalo aberto  $t_i^+$  a  $t_i^-$ , pois no nó  $i$  e no nó  $j$  há descontinuidades em jogo, as funções incógnitas são aproximadas da maneira clássica do método dos elementos finitos, ou seja:

$$\begin{aligned} d(\tau) &= d_1\varphi_1(\tau) + d_2\varphi_2(\tau) \\ v(\tau) &= v_1\varphi_3(\tau) + v_2\varphi_4(\tau) \end{aligned} \quad (4.87)$$

onde as funções  $\varphi_k(\tau)$ , com  $k=1,4$ , são funções de forma,  $d_1$  e  $d_2$  são os deslocamentos em  $t = t_i^+$  e em  $t = t_j^-$  respectivamente, e a mesma notação sendo adotada para a velocidade. No caso de aproximação das duas funções incógnitas por meio de polinômios de primeira ordem, referenciado como aproximação  $P_1P_1$ , têm-se:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\tau) = \varphi_3(\tau) &= 1 - \frac{\tau}{\Delta t} \\ \varphi_2(\tau) = \varphi_4(\tau) &= \frac{\tau}{\Delta t}\end{aligned}\tag{4.88}$$

onde:

$$\begin{aligned}\tau &= t - t_i^+ \\ \Delta t &= t_j^- - t_i^+\end{aligned}\tag{4.89}$$

cumprindo-se ressaltar que as funções de forma  $\varphi_3(\tau)$  e  $\varphi_4(\tau)$  podem ser polinômios de grau zero, por exemplo, como mostrado na Figura 4.3.

Assim sendo, caso o deslocamento seja aproximado por polinômio do primeiro grau e a velocidade por polinômio de grau zero refere-se a esse algoritmo como  $P_1P_0$  e assim por diante.

Por comodidade, a formulação do método de Galerkin descontínuo toma por base uma ligeira modificação de (4.86), ou seja:

$$\begin{aligned}m\dot{v} + kd &= 0 \\ k(\dot{d} - v) &= 0\end{aligned}\tag{4.90}$$

passando-se então a formular as seguintes equações integrais:

$$\begin{aligned}\int_0^{\Delta t} w_i^v(\tau)[m\dot{v} + kd]d\tau + w_i^v m v^+ - w_i^v m v^- &= 0 \\ \int_0^{\Delta t} w_i^d k(\dot{d} - v)d\tau + w_i^d k d^+ - w_i^d k d^- &= 0\end{aligned}\tag{4.91}$$

com  $i = 1,2$ , onde as funções ponderadoras são as funções de forma indicadas em (4.88), ou seja:

$$\begin{aligned}
 w_1^v &= \varphi_3 \\
 w_2^v &= \varphi_4 \\
 w_1^d &= \varphi_1 \\
 w_2^d &= \varphi_2
 \end{aligned}
 \tag{4.92}$$

tendo-se então:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\Delta t} \varphi_3 \left[ m(v_1 \dot{\varphi}_3 + v_2 \dot{\varphi}_4) + k(d_1 \varphi_1 + d_2 \varphi_2) \right] d\tau + m v_1 - m v = 0 \\
 &\int_0^{\Delta t} \varphi_4 \left[ m(v_1 \dot{\varphi}_3 + v_2 \dot{\varphi}_4) + k(d_1 \varphi_1 + d_2 \varphi_2) \right] d\tau = 0 \\
 &\int_0^{\Delta t} \varphi_1 k \left[ d_1 \dot{\varphi}_1 + d_2 \dot{\varphi}_2 - (v_1 \varphi_1 + v_2 \varphi_2) \right] d\tau + k d_1 - k d = 0 \\
 &\int_0^{\Delta t} \varphi_2 k \left[ d_1 \dot{\varphi}_1 + d_2 \dot{\varphi}_2 - (v_1 \varphi_1 + v_2 \varphi_2) \right] d\tau = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.93}$$

onde se considera no tempo  $t_i^-$

$$\begin{aligned}
 v(t = t_i^-) &= v \\
 d(t = t_i^-) &= d
 \end{aligned}
 \tag{4.94}$$

e também o fato de:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(t = t_i^+) &= \varphi_3(t = t_i^+) = \varphi_2(t = t_j^-) = \varphi_4(t = t_j^-) = 1 \\
 \varphi_1(t = t_j^-) &= \varphi_3(t = t_j^-) = \varphi_2(t = t_i^+) = \varphi_4(t = t_i^+) = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.95}$$

que, no caso das funções de forma dadas em (4.88), para as quais têm-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\Delta t} \varphi_1 \varphi_1 d\tau &= \int_0^{\Delta t} \varphi_2 \varphi_2 d\tau = \frac{\Delta t}{2} \\
 \int_0^{\Delta t} \varphi_1 \varphi_2 d\tau &= \frac{\Delta t}{6} \\
 \int_0^{\Delta t} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 d\tau &= \int_0^{\Delta t} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_2 d\tau = \frac{1}{\Delta t^2} \\
 \int_0^{\Delta t} \varphi_1 \dot{\varphi}_1 d\tau &= \int_0^{\Delta t} \varphi_2 \dot{\varphi}_1 d\tau = - \int_0^{\Delta t} \varphi_1 \dot{\varphi}_2 d\tau = \int_0^{\Delta t} \varphi_2 \dot{\varphi}_2 d\tau = \frac{1}{2}
 \end{aligned}
 \tag{4.96}$$

o expresso em (4.93) resulta na seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{3}k & \frac{\Delta t}{6}k & \frac{1}{2}m & \frac{1}{2}m \\ \frac{\Delta t}{6}k & \frac{\Delta t}{3}k & -\frac{1}{2}m & \frac{1}{2}m \\ \frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k & -\frac{\Delta t}{3}k & -\frac{\Delta t}{6}k \\ -\frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k & -\frac{\Delta t}{6}k & -\frac{\Delta t}{3}k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mv \\ 0 \\ kd \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.97)$$

e um exame da equação de recorrência (4.97) mostra que ela tem o dobro da ordem das correspondentes dos métodos implícitos clássicos apresentados na literatura, como o de método de Newmark, por exemplo. A equação (4.97) aceita ainda a redação:

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{6}k & -\frac{\Delta t}{6}k & m & 0 \\ \frac{\Delta t}{2}k & \frac{\Delta t}{2}k & 0 & m \\ k & 0 & -\frac{\Delta t}{6}k & \frac{\Delta t}{6}k \\ 0 & k & -\frac{\Delta t}{2}k & -\frac{\Delta t}{2}k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mv \\ mv \\ kd \\ kd \end{Bmatrix} \quad (4.98)$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & m - \frac{\Delta t^2}{18}k & -\frac{\Delta t^2}{9}k \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{3}k & m + \frac{\Delta t^2}{6}k \\ k & 0 & -\frac{\Delta t}{6}k & \frac{\Delta t}{6}k \\ 0 & k & -\frac{\Delta t}{2}k & -\frac{\Delta t}{2}k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mv \\ mv - kd\Delta t \\ kd \\ kd \end{Bmatrix} \quad (4.99)$$

ou mais ainda:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & m + \frac{\Delta t^2}{6}k & \frac{2}{3}m \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{3}k & m + \frac{\Delta t^2}{6}k \\ k & 0 & -\frac{\Delta t}{6}k & \frac{\Delta t}{6}k \\ 0 & k & -\frac{\Delta t}{2}k & -\frac{\Delta t}{2}k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{3}mv - \frac{2}{3}kd\Delta t \\ mv - kd\Delta t \\ kd \\ kd \end{Bmatrix} \quad (4.100)$$

e, finalmente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 + \frac{\theta^2}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\theta^2}{3} & 1 + \frac{\theta^2}{6} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ v_1\Delta t \\ v_2\Delta t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{3}v\Delta t - \frac{2}{3}\theta^2d \\ v\Delta t - \theta^2d \\ d \\ d \end{Bmatrix} \quad (4.101)$$

onde:

$$\theta = \Delta t \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.102)$$

sendo que a equação de recorrência (4.101) permite redigir, resolvendo-se  $v_2\Delta t$  nas duas primeiras equações de (4.101), ou seja:

$$v_2\Delta t \left[ -\left(1 + \frac{\theta^2}{6}\right)^2 \left(\frac{3}{\theta^2}\right) + \frac{2}{3} \right] = d \left[ 3\left(1 + \frac{\theta^2}{6}\right) - \frac{2}{3}\theta^2 \right] + v\Delta t \left[ \frac{5}{3} - \frac{3}{\theta^2} \left(1 + \frac{\theta^2}{6}\right) \right] \quad (4.103)$$

e, por outro lado, combinando-se a segunda de (4.101) com a última no sentido de se eliminar o termo em  $v_1\Delta t$  tem-se:

$$d_2 + v_2\Delta t \left( \frac{3}{2\theta^2} - \frac{1}{4} \right) = d \left( -\frac{1}{2} \right) + v \left( \frac{3}{2\theta^2} \right) \quad (4.104)$$

já as equações (4.103) e (4.104) permitem, pois, redigir finalmente a equação de recorrência na forma similar às dos demais métodos de integração direta da equação da dinâmica das estruturas:

$$\begin{Bmatrix} d_2 \\ v_2\Delta t \end{Bmatrix} = \frac{1}{36 + 4\theta^2 + \theta^4} \begin{bmatrix} 36 - 14\theta^2 & 36 - 2\theta^2 \\ -(36\theta^2 - 2\theta^4) & 36 - 14\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ v\Delta t \end{Bmatrix} \quad (4.105)$$

cumprindo-se ressaltar em primeiro lugar que a obtenção de  $d_1$  e  $v_1\Delta t$  não tem interesse prático, e mais ainda, que o fato de os autovalores da matriz de recorrência (4.105) tenderem para zero a medida que  $\Delta t$  tende para infinito, o algoritmo em questão apresenta a desejável propriedade do aniquilamento assintótico; e essa propriedade é a que motivou o desenvolvimento desse tipo de algoritmo, especialmente na abordagem de problemas não lineares. Todavia, como os autores já adiantavam, a convergência só é garantida para polinômios de grau zero e primeiro grau. Valendo-se lembrar que o processo iterativo se inicia com as condições iniciais, ou seja:  $d = d(t = 0)$  e  $v\Delta t = v(t = 0)\Delta t$ .

#### 4.8-Método de Padé

O integrador de Padé toma por base a equação diferencial de primeira ordem com a seguinte redação:

$$y' - Ay = f(t) \quad (4.106)$$

para a qual a solução geral pode ser expressa na forma:

$$y = y_0 e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (4.107)$$

uma vez que, por derivação de (4.107), tem-se:

$$y' = Ay_0 e^{At} + \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{t+dt} e^{A(t+dt-\tau)} f(\tau) d\tau - \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right] \quad (4.108)$$

ou seja:

$$y' = Ay_0 e^{At} + \int_0^t \frac{e^{A(t+dt-\tau)} - e^{A(t-\tau)}}{dt} f(\tau) d\tau + \int_t^{t+dt} e^{A(t+dt-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (4.109)$$

resultando:

$$y' = Ay_0 e^{At} + A \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau + f(t) \quad (4.110)$$

ficando-se claro que essa é realmente a solução geral da equação diferencial canônica do primeiro grau, pois, por subtração membro a membro o expresso em (4.110) com o expresso em (4.107) multiplicado por A resulta na nulidade.

Como os algoritmos baseados na aproximação direta do exponencial, ou seja:

$$e^{At} = 1 + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{6} + \dots \quad (4.111)$$

é sabidamente numericamente instável, Padé procurou expressar o exponencial na seguinte forma racional

$$e^{At} = \frac{P(t)}{Q(t)} \quad (4.112)$$

Que, no caso de polinômios  $P(t)$  e  $Q(t)$  do segundo grau (denominado  $P_{22}$ ), tem-se:

$$e^{At} = \frac{1 + \frac{At}{2} + \frac{(At)^2}{12}}{1 - \frac{At}{2} + \frac{(At)^2}{12}} + o(5) \quad (4.113)$$

que, como indicado, apresenta convergência local de ordem 5.

Para se examinar isso de perto vale verificar a convergência da seguinte igualdade:

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \dots = \frac{1 + \alpha u + \beta u^2}{1 + \gamma u + \delta u^2} \quad (4.114)$$

ou seja:

$$1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^5}{120} + \dots + \gamma u + \gamma u^2 + \gamma \frac{u^3}{2} + \gamma \frac{u^4}{6} + \gamma \frac{u^5}{24} + \gamma \frac{u^6}{120} + \dots + \delta u^2 + \delta u^3 + \delta \frac{u^4}{2} + \delta \frac{u^5}{6} + \delta \frac{u^6}{24} + \delta \frac{u^7}{120} + \dots = 1 + \alpha u + \beta u^2 \quad (4.115)$$

ou ainda:

$$1 + (1 + \gamma)u + \left(\frac{1}{2} + \gamma + \delta\right)u^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{\gamma}{2} + \delta\right)u^3 + \left(\frac{1}{24} + \frac{\gamma}{6} + \frac{\delta}{2}\right)u^4 + \left(\frac{1}{120} + \frac{\gamma}{24} + \frac{\delta}{6}\right)u^5 + \dots = 1 + \alpha u + \beta u^2 \quad (4.116)$$

e, assim sendo, para que a aproximação de (4.114) venha a ser de quinta ordem, basta fazer (vide (4.116)):

$$\begin{aligned} 1 + \gamma &= \alpha \\ \frac{1}{2} + \gamma + \delta &= \beta \\ \frac{1}{6} + \frac{\gamma}{2} + \delta &= 0 \\ \frac{1}{24} + \frac{\gamma}{6} + \frac{\delta}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.117)$$

resultando, pois:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\gamma = 1/2 \\ \beta &= \delta = 1/12 \end{aligned} \quad (4.118)$$

e cujo erro da igualdade (4.114) fica sendo, pois, o primeiro termo não nulo da série à esquerda de (4.116), ou seja:

$$\left( \frac{1}{120} + \frac{\gamma}{24} + \frac{\delta}{6} \right) u^5 = \frac{u^5}{240} \quad (4.119)$$

que, com os valores de (4.118), resulta em convergência de quinta ordem como explicitado inicialmente em (4.116).

Operacionalmente, a versão numérica da solução da equação diferencial de primeira ordem explicitada em (4.113) permite explicitar a equação de recorrência:

$$y_{i+1} = \frac{1 + \frac{A\Delta t}{2} + \frac{(A\Delta t)^2}{12}}{1 + \frac{A\Delta t}{2} + \frac{(A\Delta t)^2}{12}} y_i + \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t - \tau)} f(\tau) d\tau \quad (4.120)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{A\Delta t}{2} + \frac{(A\Delta t)^2}{12} \right) y_{i+1} &= \left( 1 + \frac{A\Delta t}{2} + \frac{(A\Delta t)^2}{12} \right) y_i \\ &+ \left( 1 - \frac{A\Delta t}{2} + \frac{(A\Delta t)^2}{12} \right) \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t - \tau)} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.121)$$

ficando-se agora de se providenciar uma versão numérica para o termo convolutivo de (4.120).

Tendo-se em conta uma aproximação cúbica para a solitação tem-se:

$$\begin{aligned} f(\tau) &= f_i \left( 1 - 3 \frac{\tau^2}{\Delta t^2} + 2 \frac{\tau^3}{\Delta t^3} \right) + f_{i+1} \left( 3 \frac{\tau^2}{\Delta t^2} - 2 \frac{\tau^3}{\Delta t^3} \right) \\ &+ f_i' \left( \tau - 2 \frac{\tau^2}{\Delta t} + \frac{\tau^3}{\Delta t^2} \right) + f_{i+1}' \left( -\frac{\tau^2}{\Delta t} + \frac{\tau^3}{\Delta t^2} \right) \end{aligned} \quad (4.122)$$

mas, por outro lado, a convolução expressa em (4.120) pode ser escrita

$$\int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t - \tau)} f(\tau) d\tau = e^{A\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-A\tau} f(\tau) d\tau \quad (4.123)$$

resultando-se para o caso  $f(\tau) = 1$ :

$$\int_0^{\Delta t} e^{-A\tau} d\tau = \frac{1}{A} (1 - e^{-A\Delta t}) \quad (4.124)$$

E, no caso  $f(\tau) = \tau$

$$\int_0^{\Delta t} e^{-A\tau} \tau d\tau = -\frac{1}{A} \left[ \Delta t e^{-A\Delta t} - \frac{1}{A} (1 - e^{-A\Delta t}) \right] \quad (4.125)$$

já para o caso  $f(\tau) = \tau^2$

$$\int_0^{\Delta t} e^{-A\tau} \tau^2 d\tau = -\frac{1}{A} \left\{ \Delta t^2 e^{-A\Delta t} + \frac{2}{A} \left[ \Delta t e^{-A\Delta t} - \frac{1}{A} (1 - e^{-A\Delta t}) \right] \right\} \quad (4.126)$$

e finalmente para  $f(\tau) = \tau^3$

$$\int_0^{\Delta t} e^{-A\tau} \tau^3 d\tau = -\frac{\Delta t^3 e^{-A\Delta t}}{A} + \frac{3}{A} \left\{ \Delta t^2 e^{-A\Delta t} + \frac{2}{A} \left[ \Delta t e^{-A\Delta t} - \frac{1}{A} (1 - e^{-A\Delta t}) \right] \right\} \quad (4.127)$$

e com base nas expressões de (4.123) a (4.127), a equação de recorrência (4.121) passa a ter a seguinte redação:

$$\begin{aligned} \left( 1 - A \frac{\Delta t}{2} + A^2 \frac{\Delta t^2}{12} \right) y_{i+1} &= \left( 1 + A \frac{\Delta t}{2} + A^2 \frac{\Delta t^2}{12} \right) y_i \\ &+ f_i \left( \frac{\Delta t}{2} + A \frac{\Delta t^2}{12} \right) + f_{i+1} \left( \frac{\Delta t}{2} - A \frac{\Delta t^2}{12} \right) + f_i' \left( \frac{\Delta t^2}{12} \right) - f_i' \left( \frac{\Delta t^2}{12} \right) \end{aligned} \quad (4.128)$$

ou escrevendo-se agora a equação de movimento como equação de primeira ordem e em forma matricial, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} x \\ x' \end{Bmatrix}^l = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1}f \end{Bmatrix} \quad (4.129)$$

ficando-se claro que nesse caso tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

porem, antes ao se levar (4.130) em (4.128), é ainda oportuno providenciar a multiplicação de ambos os membros do resultado pela matriz:

$$L = \begin{bmatrix} M & 0 \\ C & M \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

e tendo-se em vista:

$$\begin{aligned} LA &= \begin{bmatrix} 0 & M \\ -K & 0 \end{bmatrix} \\ LAA &= \begin{bmatrix} -K & -C \\ 0 & -K \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.132)$$

a equação de recorrência finalmente ganha a seguinte redação:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} M - K \frac{\Delta t^2}{12} & -\frac{M}{2} - C \frac{\Delta t}{12} \\ C\Delta t + K \frac{\Delta t^2}{2} & M - K \frac{\Delta t^2}{12} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x' \Delta t \end{Bmatrix}_{i+1} = \\
 & \begin{vmatrix} M - K \frac{\Delta t^2}{12} & \frac{M}{2} - C \frac{\Delta t}{12} \\ C\Delta t - K \frac{\Delta t^2}{2} & M - K \frac{\Delta t^2}{12} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x' \Delta t \end{Bmatrix}_i \\
 & + \frac{\Delta t^2}{12} \begin{Bmatrix} f_i - f_{i+1} \\ 6(f_i + f_{i+1}) \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t^3}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ f'_i - f'_{i+1} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.133}$$

e, no caso de um grau de liberdade, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{12} & -\frac{1}{2} - \frac{\gamma\theta}{6} \\ 2\gamma\theta + \frac{\theta^2}{2} & 1 - \frac{\theta^2}{12} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x' \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{12} & \frac{1}{2} - \frac{\gamma\theta}{6} \\ 2\gamma\theta - \frac{\theta^2}{2} & 1 - \frac{\theta^2}{12} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x' \end{Bmatrix}_i \\
 & + \begin{Bmatrix} k^{-1} \frac{\theta^2}{12} (f_i - f_{i+1}) \\ k^{-1} \frac{\theta^2}{2} (f_i + f_{i+1}) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ k^{-1} \frac{\theta^2 \Delta t}{2} (f'_i + f'_{i+1}) \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.134}$$

que é, finalmente, a equação de recorrência procurada.

#### 4.9-Métodos do Autor

O autor desenvolveu dois integradores de passo único, já divulgados em revistas especializadas, empregando-se diferenças finitas hermitianas de ordem de convergência mais elevada. O primeiro<sup>2</sup>, com convergência de quarta ordem, contempla a propriedade de aniquilamento assintótico e assim se expressa:

$$\begin{aligned}
 6x_i + 2\Delta t x'_i - 6x_{i+1} + 4\Delta t x'_{i+1} - \Delta t^2 x''_{i+1} &= 0 + o(\Delta t^4) \\
 2\Delta t x'_i - 2\Delta t x'_{i+1} + 2\Delta t^2 x''_{i+1} - \Delta t^3 x'''_{i+1} &= 0 + o(\Delta t^4)
 \end{aligned} \tag{4.135}$$

resultando-se na equação de recorrência:

<sup>2</sup> Laier, J.E. *Asymptotic annihilation Hermitian algorithm for integration in time*, Computer & Structures, V76, (2000)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t x^I \\ x \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t x^I \\ x \end{Bmatrix}_i - \begin{bmatrix} P & L \\ S & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t f_{i+1}^I \\ f_i \end{Bmatrix} \quad (4.136)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \Delta t C - 4M \left( \frac{\Delta t}{2} C + M \right) \left( \frac{\Delta t}{6} C + \frac{\Delta t^2}{9} K \right) \\ B &= \Delta t^2 K - 6M \left( \frac{\Delta t^2}{2} K \right) \left( M + \frac{2\Delta t}{3} C + \frac{5\Delta t^2}{18} K \right) \\ D &= -2M - (2M + \Delta t C) \Delta t M^{-1} C + \Delta t^2 K \left( \frac{\Delta t}{4} C \right) \left( M + \frac{\Delta t}{6} C - \frac{\Delta t^2}{18} K \right) \\ E &= -(2M + \Delta t C) \Delta t^2 M^{-1} K \left( M + \frac{\Delta t^2}{4} K \right) \left( -M + \frac{\Delta t}{3} C + \frac{7\Delta t^2}{18} K \right) \\ F &= H = -2M \\ G &= -6M \\ J &= P = 0 \\ L &= S = \Delta t^2 [I] \\ R &= -2\Delta t^2 [I] - \Delta t^3 C M^{-1} \end{aligned} \quad (4.137)$$

ressaltando-se que a fatorização da matriz do primeiro membro de (4.136), no caso de matriz de massa diagonal e amortecimento proporcional à matriz de massa, não envolve a inversão de uma matriz de ordem dobrada. Já o outro algoritmo<sup>3</sup> toma por base operadores de diferenças finitas hermitianas de quinta ordem expressos por:

$$\begin{aligned} 12x_i - 12\Delta t x_i^I + 6\Delta t x_i^I + 6\Delta t x_{i+1}^I + \Delta t^2 x_i^{II} - \Delta t^2 x_{i+1}^{II} &= 0 + o(\Delta t^5) \\ 12x_i^I - 12\Delta t x_{i+1}^I + 6\Delta t x_i^{II} + 6\Delta t x_{i+1}^I + \Delta t^2 x_i^{III} - \Delta t^2 x_{i+1}^{III} &= 0 + o(\Delta t^5) \end{aligned} \quad (4.138)$$

resultando-se em equação de recorrência é similar à (4.137), e cuja fatorização igualmente não envolve a inversão de matriz de ordem dobrada.

#### 4.10-Transformada rápida de Fourier

Uma eficiente versão numérica da transformada de Fourier foi desenvolvida nos anos 60, ganhando o nome de Transformada Rápida de Fourier, empregando-se a quadratura de Newton de segunda ordem. Uma rápida apresentação da quadratura de Newton é apresentada, seguindo-se de uma expedita descrição do algoritmo em apreço.

<sup>3</sup> Laier, J.E. *Hermitian one-step numerical integration algorithm for structural dynamic equations*, Advances Engineering Software, (1999)

A Figura 4.4 a) destaca a área desenvolvida no intervalo de a até b por uma função genérica que se expressa:

$$S = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \quad (4.139)$$

onde F(t) é a função primitiva e f(t) a função derivada. Já a Figura 4.4 b) exibe um diferencial de área correspondente a um passo genérico na malha de tempo. A série de Taylor da função primitiva, de sua derivada, o diferencial de área, bem como um operador de passo único assim se expressam:

$$\begin{aligned} F(t) &= F_i + tF_i^I + \frac{t^2}{2}F_i^{II} + \frac{t^3}{6}F_i^{III} + \frac{t^4}{24}F_i^{IV} + \frac{t^5}{120}F_i^V + \dots \\ f(t) &= f_i + tf_i^I + \frac{t^2}{2}f_i^{II} + \frac{t^3}{6}f_i^{III} + \frac{t^4}{24}f_i^{IV} + \frac{t^5}{120}f_i^V + \dots \\ \Delta S &= F_{i+1} - F_i = \Delta t f_i + \frac{\Delta t^2}{2}f_i^I + \frac{\Delta t^3}{6}f_i^{II} + \frac{\Delta t^4}{24}f_i^{III} + \frac{\Delta t^5}{120}f_i^V \\ \Delta S_a &= \alpha \Delta t f_i + \beta \Delta t f_{i+1} \end{aligned} \quad (4.140)$$

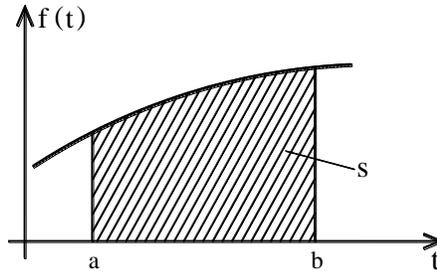
sendo que o erro de aproximação do operador em apreço resulta então:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \Delta S - \Delta S_a &= (1 - \alpha - \beta)\Delta t f_i + (1/2 - \beta)\Delta t^2 f_i^I + (1/6 - \beta/2)\Delta t^3 f_i^{II} + \\ &(1/24 - \alpha/6)\Delta t^4 f_i^{III} + \dots \end{aligned} \quad (4.141)$$

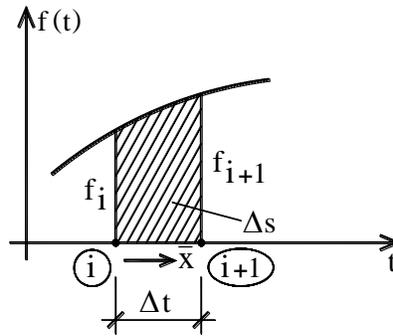
obtendo-se, pois, o operador retangular assumindo-se  $\alpha = 1$  e  $\beta$  nulo, e a área total, como ilustrado na Figura 4.5, fica então expressa por:

$$\begin{aligned} S_a &= \Delta t(f_0 + f_2 + \dots + f_{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2}(f_0^I + f_1^I + \dots + f_{n-1}^I) + \frac{\Delta t^3}{6}(f_0^{II} + \dots) = \\ \Delta t(f_0 + f_2 + \dots + f_{n-1}) &+ \frac{\Delta t^2}{2}Nf^I(t^*) = \Delta t(f_0 + f_2 + \dots + f_{n-1}) + \frac{b-a}{2}\Delta t f^I(t^*) \end{aligned} \quad (4.142)$$

ficando-se claro que a área é avaliada por esse operador com erro de primeira ordem.



a) Área



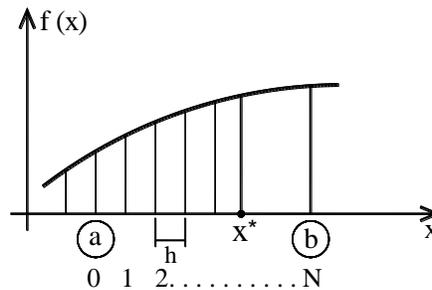
b) Diferencial de área

**Figura 4.4**

Considerando-se agora o operador trapezoidal, que corresponde a assumir  $\alpha = \beta = 1/2$ , verifica-se que:

$$S_{\text{trapezoidal}} = S_{\text{retangular}} + \Delta t \frac{f_n - f_0}{2} \quad (4.143)$$

esclarecendo-se que o operador retangular é então equivalente ao trapezoidal, que tem segunda ordem de convergência para  $f_0 = f_n = 0$ , algo de ocorrência frequente, especialmente na versão numérica da transformada de Fourier.



**Figura 4.5**

A Figura 4.6 a) ilustra a versão discretizada no tempo de uma função genérica e a Figura 4.6 b) esquematicamente uma das componentes da função da transformada discretizada na frequência.

Empregando-se o operador retangular, o equivalente numérico da transformada de Fourier expressa em (3.34), pode ser assim escrito:

$$F(k\Delta\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) e^{-ik\Delta\omega j\Delta t} \quad (4.144)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{T}{N} \\ \Delta\omega &= \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t} \end{aligned} \quad (4.145)$$

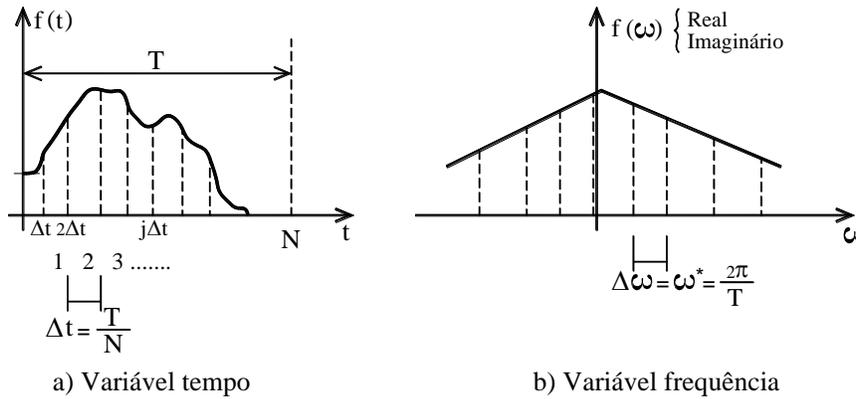


FIGURA 4.6

sendo  $N$  o número de pontos da malha no tempo. As variáveis agora passam a ser  $j$  no tempo e  $k$  na frequência ( $t = j\Delta t$  e  $\omega = k\Delta\omega$ ).

Inicialmente, é fácil verificar que o operador (4.144) goza da seguinte propriedade:

$$F(-k\Delta\omega) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) e^{-i\frac{2\pi}{N}j(-k)} = F((N-k)\Delta\omega) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) e^{-i\frac{2\pi}{N}j(N-k)} \quad (4.146)$$

pois:

$$e^{-i\frac{2\pi}{N}j(-k)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}j(N-k)} = e^{-i2\pi j} e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} = e^{i\frac{2\pi}{N}jk} \quad (4.147)$$

uma vez que:

$$e^{-i2\pi j} = \cos(2\pi j) - i\sin(2\pi j) = 1 \quad (4.148)$$

permitindo-se assim formular a versão numérica da transformada inversa de Fourier com a seguinte escrita:

$$f(j\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=N/2-1}^{N/2} F(k\Delta\omega) e^{i\frac{2\pi}{N}jk} \Delta\omega \quad (4.149)$$

verificando-se que a máxima frequência em jogo é dada por:

$$\omega_{\max} = \frac{N}{2} \Delta\omega = \frac{N\pi}{T} \quad (4.150)$$

e também que:

$$f(j\Delta t) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} F(k\Delta\omega) e^{i\frac{2\pi}{N}jk} \quad (4.151)$$

em razão do exposto em (4.146).

Finalmente, uma versão numérica para a transformada de Fourier pode então ser assim redigida:

$$F(k\Delta\omega) = \sum_{j=0}^{j=N-1} f(j\Delta t) e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} \quad (4.152)$$

$$f(j\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} F(k\Delta\omega) e^{i\frac{2\pi}{N}jk}$$

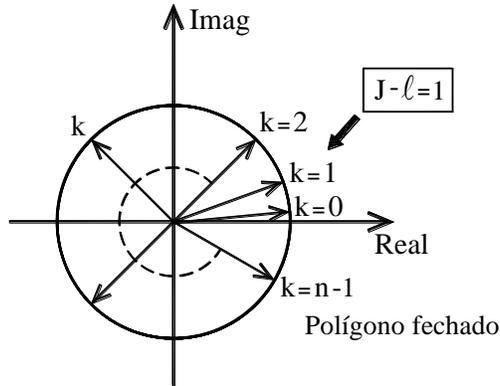
onde o fator comum  $\Delta t$  foi cancelado, e cuja consistência verifica-se facilmente, pois:

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} \left( \sum_{\ell=0}^{\ell=N-1} F(\ell\Delta t) e^{-i\frac{2\pi}{N}\ell k} \right) e^{i\frac{2\pi}{N}jk} = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{\ell=N-1} f(\ell\Delta t) \sum_{k=0}^{k=N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(k-\ell)j} \quad (4.153)$$

uma vez que, conforme ilustra a Figura 4.7, o seguinte resultado verifica-se:

$$\sum_{k=0}^{k=N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(k-\ell)j} = \begin{cases} N \rightarrow k = \ell \\ 0 \rightarrow k \neq \ell \end{cases} \quad (4.154)$$

valendo-se, pois, na versão numérica, também uma relação cíclica como na definição analítica (expressões (3.33) e (3.35)).



**Figura 4.7**

A título de exemplificação, considere-se o caso  $N = 4 = 2^2$ , cuja transformação em forma matricial assim se expressa:

$$\begin{Bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ f(\Delta t) \\ f(2\Delta t) \\ f(3\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (4.155)$$

onde:

$$w = e^{i\frac{2\pi}{4}} = -i \quad (4.156)$$

resultando-se, como ilustrado na Figura 4.8:

$$\begin{aligned} w^0 &= w^4 = 1 \\ w &= w^9 = w^5 = -i \\ w^2 &= w^6 = -1 \\ w^3 &= i \end{aligned} \quad (4.157)$$

verificando-se a relação:

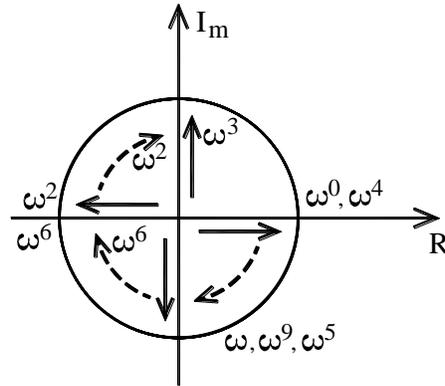


Figura 4.8

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & 1 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^2 & w^5 \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

ou seja, nas colunas ímpares os elementos da primeira metade repetem-se na outra metade; já as colunas pares são obtidas multiplicando-se membro a membro os elementos das colunas ímpares pelos elementos segundo as potências de 0 a 3, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \\ w^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \\ w^3 \end{Bmatrix} \quad (4.159)$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ w^3 \\ w^2 \\ w^5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ w^2 \\ 1 \\ w^2 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \\ w^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ w^3 \\ w^2 \\ w \end{Bmatrix}$$

e, em outras palavras, um vetor genérico pode ser representado pela soma:

$$\{a \ b \ c \ d\} = \{a \ 0 \ c \ 0\} + \{0 \ b \ 0 \ d\} \quad (4.160)$$

portanto, as seguintes transformações se verificam:

$$\begin{aligned} \{a \ 0 \ c \ 0\} &\rightarrow \{A \ B \ A \ B\} \\ \{b \ 0 \ d \ 0\} &\rightarrow \{\bar{A} \ \bar{B} \ \bar{A} \ \bar{B}\} \\ \{0 \ b \ 0 \ d\} &\rightarrow \{\bar{A} \ \bar{B}w \ \bar{A}w^2 \ \bar{B}w^3\} \end{aligned} \quad (4.161)$$

ganhando-se (4.155) a seguinte escrita:

$$\{a \ b \ c \ d\} = \{A \ B \ A \ B\} + \{\bar{A} \ \bar{B}w \ \bar{A}w^2 \ \bar{B}w^3\} \quad (4.162)$$

resultando-se finalmente:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w \\ 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & w^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{Bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w \\ 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.163)$$

mostrando-se que a matriz original presente em (4.155) pode ser fatorada em duas matrizes, pois a última de (4.163) consiste simplesmente em um rearranjo de índices.

Repetindo-se esse estudo para o caso  $N = 8 = 2^3$ , a matriz de transformação correspondente pode ser fatorada em três matrizes, nas quais em nenhuma delas há mais que dois elementos ou nas linhas ou nas colunas, e, assim sendo, tem-se:

$$\{F(k\Delta\omega)\} = |W|_1 |W|_2 \dots |W|_m \{f(j\Delta t)\} \quad (4.164)$$

com número de operações reduzidas para:

$$2N \ell_2 N \quad (4.165)$$

uma vez que:

$$N = 2^m \rightarrow m = \ell_2 N \quad (4.166)$$

com o resultado dos montantes de operação arrolado na Tabela 4.4.

Como se pode perceber, a economia no montante de operações proporcionada pela Transformada Rápida de Fourier (FFT) é notável. Além disso, uma série de outras economias são também possíveis, pois, para vetor  $\{f(j\Delta t)\}$  real, o vetor transformado  $\{F(k\Delta\omega)\}$  apresenta simetrias, e, por essa razão não há a

necessidade de se usar  $2N$  posições de memória para armazenar os complexos. Além disso, a simetria da matriz de transformação  $[w]$  pode ser obtida com senos e cossenos para apenas ângulos menores que  $\pi/8$  (metade de quadrante).

**Tabela 4.4**

N	Operações	4	8	16	32	1024
m		2	3	4	5	10
Normal	NxN	16	64	256	1024	1048576
FFT	Nxm	16	48	128	320	20480
Economia	N/2m	1	1,33	2	3.2	51.2

Exemplificando-se, o emprego na integração da equação de movimento, ou seja:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (4.167)$$

resulta na solução se expressa:

$$x(\omega) = H(\omega)P(\omega) \quad (4.168)$$

onde:

$$\begin{aligned} H(k\Delta\omega) &= [w]\{h(j\Delta t)\} \\ P(k\Delta\omega) &= [w]\{P(j\Delta t)\} \end{aligned} \quad (4.169)$$

resultando:

$$\{x(j\Delta t)\} = [\bar{w}]\{x(k\Delta\omega)\} \quad (4.170)$$

onde:

$$\bar{w} = e^{\frac{2\pi_i}{N}} = \cos \frac{2\pi}{N} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{N} \quad (4.171)$$

que vem a ser o conjugado complexo de  $w$ , e com isso a matriz da transformada numérica inversa consiste na inversa da matriz da transformada numérica de Fourier, ou seja:

$$[\bar{w}] = [w]^{-1} \quad (4.172)$$

e, com isso, o mesmo algoritmo que faz a transformada numérica de Fourier, faz também a menos de pequenas trocas de índice, a transformada inversa.

Como bem sabido, na prática, o tempo não precisa tender para o infinito como matematicamente se coloca, mas apenas que o período seja grande em relação à escala de tempo a ser considerada na integração (a exemplo do que diz o poeta, o amor é infinito enquanto dura!). Como depois do final do carregamento o sistema entra em vibração livre e desaparece pelo efeito do amortecimento, uma grosseira avaliação pode ser:

$$\frac{y(t^* = 0)}{y(t = t^*)} = e^{\gamma \omega_n t^*} \approx 10 \rightarrow \gamma \omega_n t^* = 2.3 \quad (4.173)$$

$$\frac{t^*}{T_n} \approx \frac{0.37}{\gamma} \rightarrow t^* (\gamma = 0.1) \approx 4T_n$$

em outras palavras, se uma solitação unitária constante durar até dois períodos, o vetor  $f(j\Delta t)$ , para  $N = 4$ , passa a ser dado por:

$$f(j\Delta t) \rightarrow \{1.0 \quad 1.0 \quad 1.0 \quad 0.0\} \quad (4.174)$$

e o vetor  $F(k\Delta\omega)$  será fornecido como:

$$F(k\Delta\omega) \rightarrow \{0\Delta\omega \quad \Delta\omega \quad 2\Delta\omega \quad -\Delta\omega\} \quad (4.175)$$

onde indica-se a correspondente frequência de cada elemento, ficando-se a transformada numérica de Fourier:

$$F(k\omega) \rightarrow \begin{Bmatrix} 3 \\ -i \\ 1 \\ i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.176)$$

reforçando-se que cada elemento de  $F(k\Delta\omega)$  em (4.171) em realidade corresponde às frequências reais indicadas em (4.170).

Para simplificar a exposição, adotam-se massa e rigidez unitários, amortecimento 0.1, e com isso:

$$h(t) = \frac{e^{-0.1t}}{0.995} \text{sen}0.995t \quad (4.177)$$

$$h(j\Delta t) \rightarrow \{0. \quad -0.01684 \quad -0.01796 \quad -0.01436\}^T$$

cuja transformada de Fourier se expressa:

$$\begin{Bmatrix} 0.0496 \\ 0.01796 + 0.00248i \\ -0.01324 \\ 0.01796 - 0.00248i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.01684 \\ -0.01796 \\ -0.01436 \end{Bmatrix} \quad (4.178)$$

e, com isso ( $x(k\Delta\omega) = F(k\Delta\omega)H(k\Delta\omega)$ ):

$$\begin{Bmatrix} 0.14748 \\ -0.00248 + 0.01796i \\ -0.1324 \\ -0.00248 + 0.01796i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -i \\ 1 \\ i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0496 \\ 0.01796 + 0.00248i \\ -0.01324 \\ 0.01796 - 0.00248i \end{Bmatrix} \quad (4.179)$$

e, finalmente:

$$\begin{Bmatrix} x(0\Delta t) \\ x(\Delta t) \\ x(2\Delta t) \\ x(3\Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.14748 \\ -0.00248 + 0.01796i \\ -0.1324 \\ -0.00248 + 0.01796i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.13424 + 0.03592i \\ 0.16072 - 0.00496i \\ 0.12424 - 0.03592i \\ 0.16072 + 0.00496i \end{Bmatrix} \quad (4.180)$$

sendo que os valores exatos para comparação são:

$$\begin{Bmatrix} x(0\Delta t) \\ x(\Delta t) \\ x(2\Delta t) \\ x(3\Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0. \\ 0.4684 \\ 0.71776 \\ 0.08503 \end{Bmatrix} \quad (4.181)$$

ficando-se evidente que o erro é de grande magnitude para essa simulação.

Todavia, a parte real dos componentes da solução é positiva, como deveria ser, e a parte complexa, que deveria ser nula acabou ficando com magnitude pequena, o que indica haver alguma aproximação.

Uma eficiente técnica de integração da equação de movimento, empregando-se o algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT), foi desenvolvida por Hall<sup>4</sup>. Todavia, mesmo reduzindo-se enormemente o esforço computacional, as técnicas de integração direta ainda se mostravam bem mais eficientes. Por essa razão, essa alternativa de integração da equação de movimento não foi mais objeto de atenção.

<sup>4</sup> Hall, J.F., *Na FFT Algorithm for Structural Dynamics*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, V 10, (1982)

#### 4.11 – Exemplos de aplicação

1-Sabendo-se que a sollicitação do sistema de um grau de liberdade é dada por  $Pf(t)$  com:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & t \leq 0 \\ f(t) &= (1 - \cos(\omega_n t)) & 0 \leq t \leq T_n / 4 \\ f(t) &= 1 & t \geq T_n / 4 \end{aligned}$$

pede-se a resposta do movimento do sistema com amortecimento adimensional valendo 0.01 (1%) pelo método das diferenças finitas centrais com  $\Delta t = T_n / 8$ .

Resposta:

$$\theta = \omega_n T_n / 4 = 0.7854 \rightarrow \theta^2 = 0.6168 \quad \rho(t) = x(t) / (P / k)$$

$$f_j = 1 - \cos\left(\omega_n j \frac{T_n}{8}\right) = 1 - \cos\left(j \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 0 & f_0 &= 0 \\ \dot{\rho}_0 &= 0 & f_1 &= 0.29289 \\ \rho_1 &= \frac{1}{2} \left[ \theta^2 f_0 + 2(1 - \gamma\theta) \dot{\rho}_0 \Delta t + (2 - \theta^2) \rho_0 \right] = 0 & f_2 &= 1. \\ \rho_{i+1} &= \frac{1}{1 + \gamma\theta} \left[ \theta^2 f_i + (\gamma\theta - 1) \rho_{i-1} + (2 - \theta^2) \rho_i \right] & f_3 &= 1. \\ & & f_4 &= 1. \\ \rho_{i+1} &= 0.612f_i - 0.9844\rho_{i-1} + 1.37\rho_i \end{aligned}$$

Resultados ( $0 \leq t \leq T_n / 4$ )

Tempo ( $j\Delta t$ )	Exato	Diferenças Finitas
0	0.0	0.0
1	0.01522	0.0
2	0.2133	0.1793
3	0.8130	0.8581
4	1.512	1.613

2- Sabendo-se que a aceleração da base do sistema de um grau de liberdade é dada por:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a(t) &= 0 & t \leq 0 \\ \ddot{x}_a(t) &= A(1 - \text{sen}(\omega_n t)) & 0 \leq t \leq T_n / 4 \\ \ddot{x}_a(t) &= 0 & t \geq T_n / 4 \end{aligned}$$

Pede-se formular a resposta pelo método de Newmark ( $\beta = \gamma/2 = 1/4$ ) para  $\Delta t = T_n/8$  e amortecimento  $\gamma = 0.01$ .

Resposta:

$$\theta = \pi/4 = 0.7854 \rightarrow \theta^2 = 0.618 \rightarrow \rho(t) = x(t)/(A/\omega_n^2)$$

$$\begin{bmatrix} 0.3084 & 1.0078 \\ 1.1542 & 0.00393 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho \\ \dot{\rho}\Delta t \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} -0.3084 & 0.9921 \\ 0.8458 & 0.9961 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho \\ \dot{\rho}\Delta t \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} 0.3084 & 0.3084 \\ 0.1542 & 0.1542 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{Bmatrix}$$

$$f_0 = 1$$

$$f_1 = 0.2929$$

$$f_2 = 0$$

$$f_3 = 0$$

$$\dots = \dots$$

$$\begin{Bmatrix} \rho \\ \dot{\rho}\Delta t \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0.734589 & 0.860536 \\ -0.530822 & 0.721072 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho \\ \dot{\rho}\Delta t \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} 0.132705 & 0.132705 \\ 0.265411 & 0.265411 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{Bmatrix}$$

#### Resultados

Tempo ( $j\Delta t$ )	Exato	Newmark
0	0.0	0.0
1	-0.2228	-0.1716
2	-0.5037	-0.4602
3	-0.7134	-0.5395
4	-0.3023	-0.3314

#### 4.12 Exercício proposto

1-Para um sistema de um grau de liberdade, pede-se a resposta para o carregamento:

$$0 \leq t \leq T_n/4 \rightarrow P(t) = P \frac{t}{T_n^2} \left( t - \frac{T_n}{4} \right)$$

$$T_n/4 \leq t \leq T_n/2 \rightarrow P(t) = P \frac{t^*}{T_n^2} \left( t^* - \frac{T_n}{4} \right)$$

$$t^* = t - T_n/4$$

pelo método das diferenças finitas centrais no intervalo  $0 \leq t \leq T_n/2$ , supondo-se amortecimento nulo e com  $\Delta t = T_n/8$ .

Resposta:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2}[0.618f_0] & f_0 &= 0 \\ \rho_{i+1} &= \frac{1}{4}[0.618f_i - \rho_{i-1} + 1.383\rho_1] & f_1 &= -0.015265 \\ & & f_2 &= 0 \\ & & f_3 &= -0.015265 \\ & & f_4 &= 0 \end{aligned}$$

Resultados

Tempo (jΔt)	Exato	Diferenças finitas
0	0.0	0.0
1	-0.002328	0.0
2	-0.01087	-0.009415
3	-0.01148	-0.01300
4	0.03455	-0.01796

2- Sabendo-se que a solitação da estrutura com  $m=1\text{Kg}$ ,  $K=1\text{N/m}$  e  $C=0.4\text{Ns/m}$  é dada por um carregamento expresso por  $p(t) = 0.5\cos(0.5t)\text{N}$  para  $t > 0$ , pede-se a resposta da estrutura pelo método de Newmark ( $\delta = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ ) com  $\Delta t = 2\pi / 8$ .

Resposta:

$$\begin{bmatrix} 0.30843 & 1.1571 \\ 1.1542 & 0.07854 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_{i+1} \\ \dot{\rho}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.30843 & 0.8429 \\ 0.84578 & 0.92146 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_i \\ \dot{\rho}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.30842 & 0.30842 \\ 0.15421 & 0.15421 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \rho_{i+1} \\ \dot{\rho}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.76479 & 0.76261 \\ -0.47041 & 0.52521 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_i \\ \dot{\rho}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.11760 & 0.11760 \\ 0.23521 & 0.23521 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \end{Bmatrix}$$

concluindo-se assim o tema em apreço.

## APÊNDICE

### 4.13- Introdução ao tratamento digital

A medida da vibração em um ponto da estrutura é feita, em geral, por meio de um sensor de aceleração, acelerômetro piezoelétrico, como esquematizado na Figura A1. O fato de o sinal gerado no sensor ser da ordem de milivolts, ele é então trabalhado inicialmente num condicionador de sinal (amplificador de sinal), gerando-se um sinal padronizado equivalente, apropriado para ser digitalizado, e manipulado posteriormente em algoritmos de computador. A digitalização é feita com o emprego de placa do tipo analógico/digital (placa A/D), obtendo-se assim um arquivo binário. Há também placa do tipo digital/analógico (placa D/A), que converte sinal

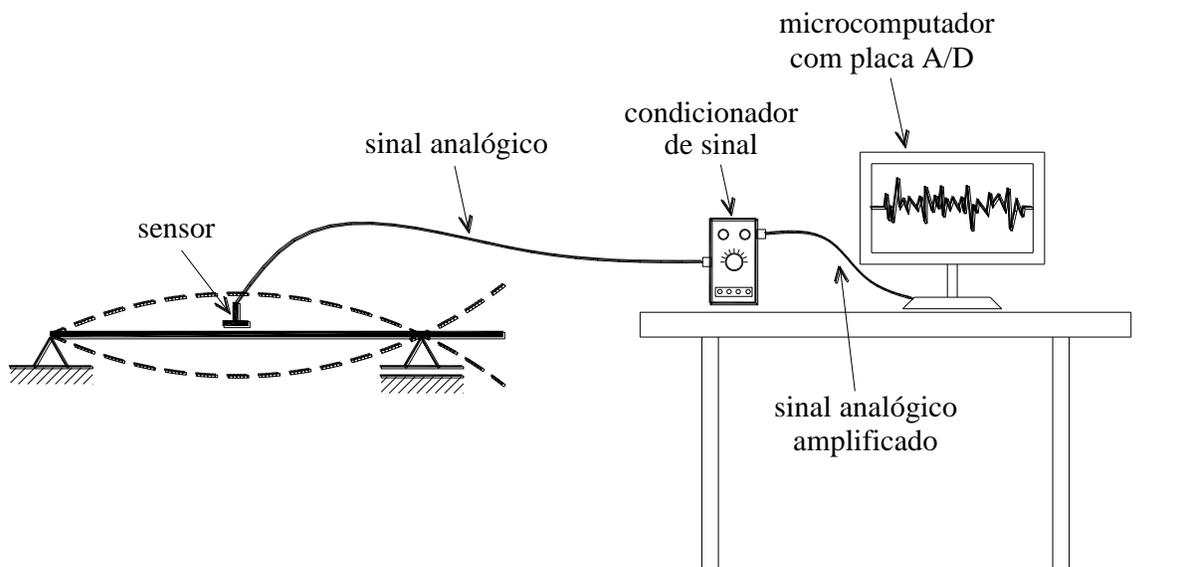
digitalizado em sinal analógico, de modo a acionar, por exemplo, atuadores de vibração.

É importante enfatizar que a grandeza elétrica produzida no sensor é, em geral, proporcional a magnitude da grandeza física sendo medida; por exemplo, a sensibilidade de um acelerômetro, denominada constante do sensor, é dada por  $24.9 \text{ mV/ms}^2$ , ou seja, para cada metro por segundo ao quadrado de aceleração o sensor converte para 24.9 milivolts, já para uma capsula microfona a sensibilidade é indicada como  $4,28 \text{ mV/Pa}$ , significando-se que, cada 4,28 milésimo de volts captado pelo microfona corresponde à pressão de um Pascal, e assim por diante.

. Apresenta-se no que se segue um detalhamento da medição digitalizada, que é a maneira moderna de se abordar a questão de medição de vibração e acústica com mais propriedade.

#### 4.14 Medição digitalizada

A figura A.2 exibe o registro de um sinal de voltagem, que, a menos da constante do sensor, vem a ser o registro do sinal de pressão sonora, sendo o sinal contínuo o analógico e os indicados pelos pontos sendo o correspondente sinal digitalizado. Em ordenadas tem-se a faixa de entrada padrão escolhida, que pode ser  $\pm 2$  volts,  $\pm 5$  volts ou  $\pm 10$  volts, que correspondem à máxima voltagem medida, ou seja, a voltagem que corresponde à máxima pressão sonora a ser medida no caso acústico. Caso a voltagem supere a faixa de entrada vai haver uma saturação do sinal, pondo em risco haver danificação da placa digitalizadora.



**Fig. A.1 – Medição digitalizada**

A resolução digital no eixo de ordenadas depende da configuração da placa digitalizadora, que se apresenta nos padrões 6 bits, 8 bits, e a mais comum 12 bits. Assim, no caso da placa digitalizadora de 12 bits e faixa de entrada  $\pm 5$  volts, tem-se a resolução:

$$r = \text{resolução} = \frac{\text{Faixa}}{2^{12}} = \frac{5 \text{ volts}}{2^{12}} = 1,22 \text{ mV} \quad (4.182)$$

em outras palavras, no caso de 5 volts corresponder a 5 Pascals a mínima fração de precisão será de 1.22 milésimo de Pascal. A resolução no eixo das abcissas depende da taxa de amostragem adotada, ou seja, a quantidade de medidas por unidade de tempo, e essa taxa é definida pelo usuário em função de um prévio conhecimento da faixa de frequência de interesse na medição. A máxima taxa de amostragem depende da placa digitalizadora. No caso de medição acústica o mais comum é uma placa com taxa de amostragem máxima de 100 kHz, o que permitiria medição em três canais com amostragem máxima de 30 kHz em cada um. Assim sendo, a resolução no eixo do tempo (abscissa) será:

$$\text{resolução} = \frac{1}{\text{taxa}} \quad (4.183)$$

que, no caso de uma taxa de 100 medidas por segundo, resulta numa resolução temporal de 0,01 segundos.

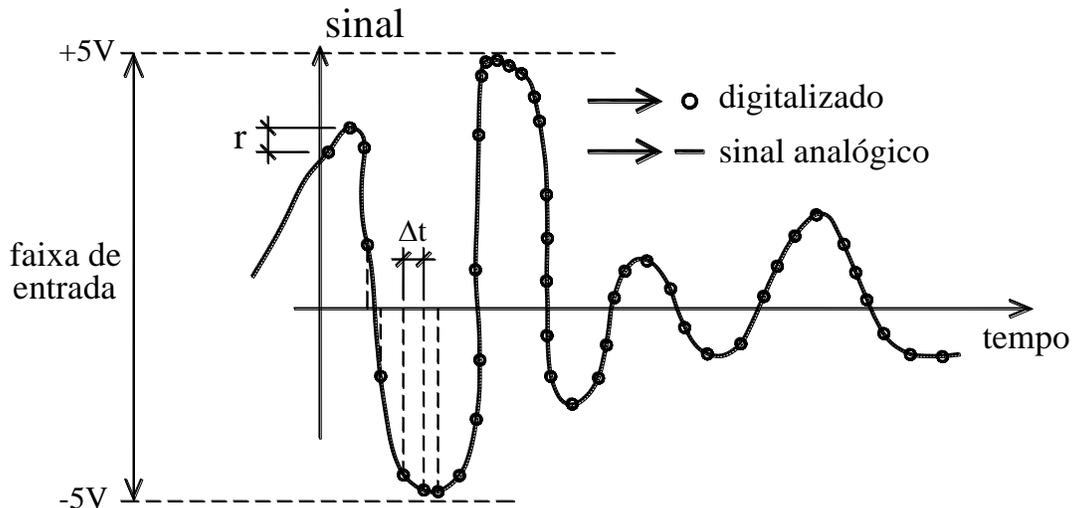


Fig. A.2 – Sinal digitalizado

#### 4.15- Anomalias na amostragem digitalizada

A digitalização de sinal acarreta algumas anomalias que devem ser entendidas e corretamente tratadas. A primeira delas consiste no falseamento do sinal como mostrado na Figura A.3, no caso de um sinal harmônico de frequência de 100 Hz. Para uma taxa de amostragem de 100 Hz o sinal digitalizado indica que não há oscilação, afinal a coincidência em 100 Hz faz com que a medida ocorra sempre na mesma posição do ciclo. Já com taxa de amostragem de 83,3 Hz o sinal aparentemente terá 16,7 Hz, quando digitalizado; afinal os pontos captados na digitalização nesse caso serão os correspondentes aos tempos:

$$\cos\left(2\pi \frac{f}{t_a} j\right) = \cos\left(2\pi \frac{100}{83.33} j\right) = \cos(2.4\pi j) \quad (4.184)$$

onde  $f$  é a frequência do sinal e  $t_a$  a taxa de amostragem, que resulta em um ciclo quando  $0,4j = 2$ , ou seja, frequência digitalizada dada por  $83,33/5 = 16,7\text{Hz}$ .

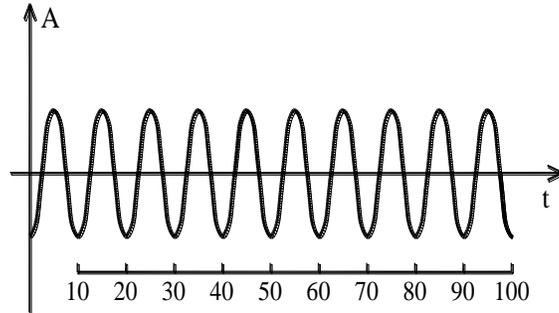
. Essa anomalia, conhecida como aliasing, só é evitada quando a taxa de amostragem for maior que o dobro da frequência de interesse, nesse caso uma taxa de amostragem superior a 200 Hz; conhecida como regra de Nyquist. Nesse caso o ângulo elementar  $2\pi f/t_a$  é menor que  $\pi$  coincidindo a oscilação digitalizada com a do sinal. De qualquer modo, os aparelhos de medida dispõem de um filtro anti-aliasing, que consiste num filtro eletrônico do tipo passa baixa, interno ao aparelho.

No caso de uma medição com interesse numa faixa de frequência que, uma vez definida a maior frequência de interesse, adota-se essa frequência como referência para a filtragem, e com isso, a taxa de amostragem deve ser no mínimo o dobro dela. Caso contrário, a digitalização das frequências acima da metade da taxa de amostragem vai estar contaminada com o efeito do falseamento do sinal (efeito aliasing).

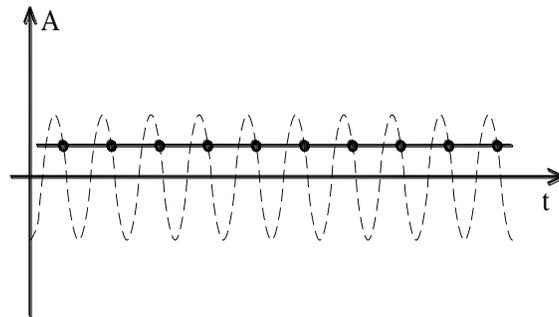
Outra anomalia produzida pela digitalização consiste na presença de oscilações espúrias decorrentes da descontinuidade do sinal amostrado, conhecido como leakage, como mostrado na figura A.4, resultando, nesse caso, da consideração de uma janela retangular para a obtenção do sinal. Afinal, a consideração da janela retangular é o mesmo que a consideração de um trecho do sinal, uma vez que:

$$f^*(t) = w(t)f(t) \quad (4.185)$$

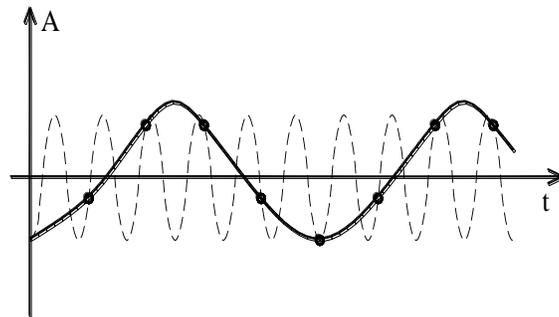
ou seja,  $f^*(t)$  coincide com  $f(t)$  no intervalo da janela, sendo nulo fora desse intervalo.



a) Sinal de 100 Hz



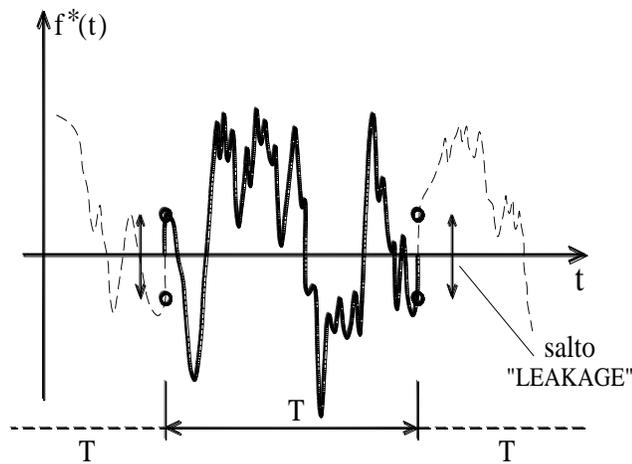
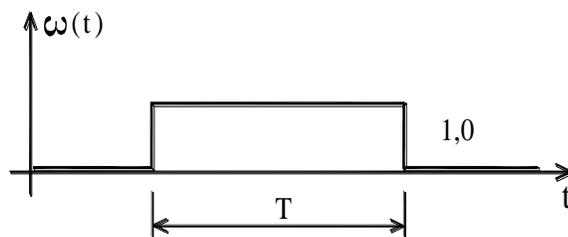
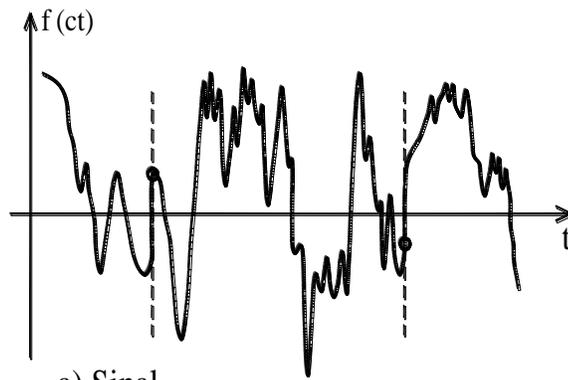
b) Taxa de amostragem 100 Hz



c) Taxa de amostragem 83,3 Hz

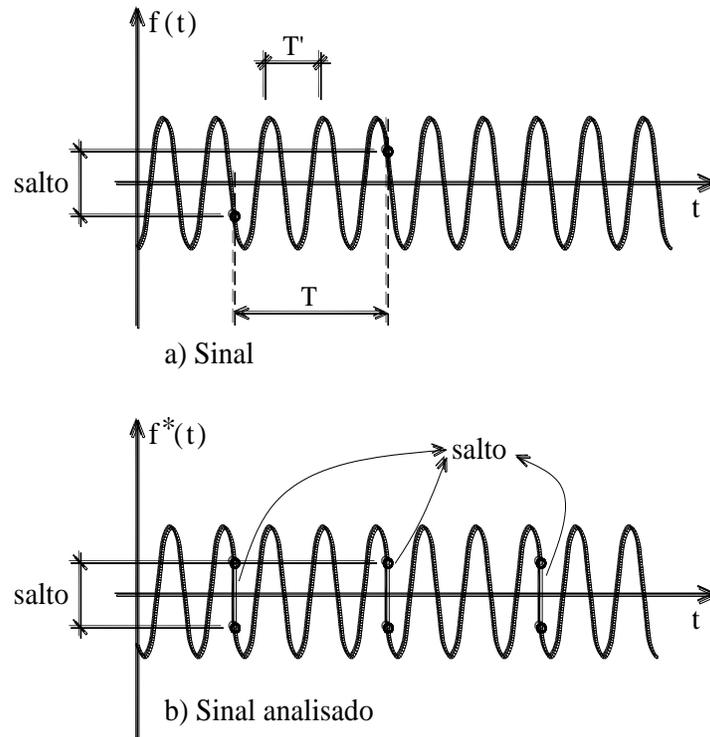
**Fig. A.3 – Falseamento (aliasing)**

Essa descontinuidade no caso de sinal harmônico está ilustrada na Figura A.5, indicando-se que, para tempo amostral  $T$  não coincidindo com o período do sinal, o registro amostrado vai resultar num sinal harmônico com salto nas extremidades. Essa anomalia é em parte atenuada pelo emprego de outras janelas que não a retangular.



**Fig. A.4 – Efeito salto (Leakage)**

As janelas, além de mitigar as oscilações espúrias produzidas pela descontinuidade nas extremidades da amostra, também devem proporcionar uma boa aproximação da transformada de Fourier do sinal, bem como outras propriedades de interesse, como parâmetros estatísticos (valor médio sinal, variância etc.).



**Fig. A.5 – Efeito salto em sinal harmônico**

A amostragem do sinal proporcionada pelo janelamento pode ser melhor entendida, do ponto de vista analítico, tendo-se em vista as transformadas inversas de Fourier da função em estudo e da função janela de amostragem, bem como seu produto, ou seja:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 w(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega} t} d\bar{\omega} \\
 f(t)w(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) w(\bar{\omega}) e^{i(\omega+\bar{\omega})t} d\omega d\bar{\omega}
 \end{aligned} \tag{4.186}$$

sendo que a terceira de (4.186) ganha a seguinte redação:

$$f(t)w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) w(\Omega - \omega) e^{i\Omega t} d\omega d\Omega \tag{4.187}$$

procedendo-se a transformação de coordenadas de  $\omega$  e  $\bar{\omega}$  para  $\omega$  e  $\Omega$ , sendo  $\Omega = \omega + \bar{\omega}$ , cujo jacobiano da transformação é unitário, ou seja:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{d\omega}{d\omega} & \frac{d\omega}{d\Omega} \\ \frac{d\bar{\omega}}{d\omega} & \frac{d\bar{\omega}}{d\Omega} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad (4.188)$$

ganhando (4.187) uma nova redação:

$$f(t)w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} c(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \right] d\omega \quad (4.189)$$

onde:

$$c(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) w(\Omega - \omega) d\omega \quad (4.190)$$

e, assim sendo, (4.189) permite escrever:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) w(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \right] e^{-i\omega t} dt = c(\Omega) \quad (4.191)$$

uma vez que o expresso dentro do colchete é a transformada inversa de Fourier da convolução (4.190), e sobre ela se aplica a transformada direta, com uma operação anulando a outra. A Figura A6 ilustra a convolução (4.190).

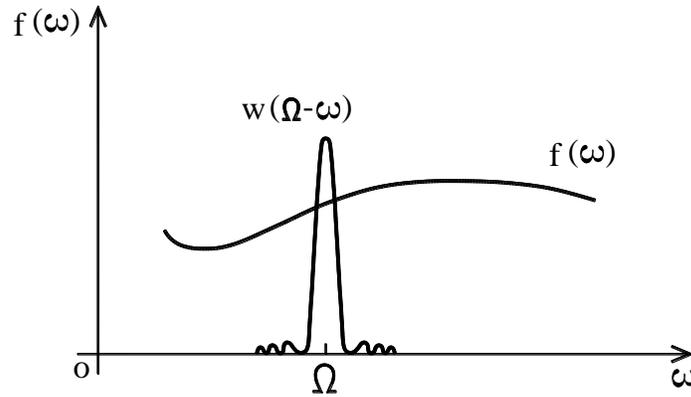


Figura A6

Na definição da janela as seguintes propriedades são de interesse prático:

$$\begin{aligned}
 w(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-i\omega t} dt \\
 w(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(\omega)e^{i\omega t} d\omega \\
 w(t=0) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\omega)d\omega = 1 \\
 w(t) &= 0 \rightarrow |t| \geq \tau \\
 E &= \int_{-\tau}^{\tau} w^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w^2(\omega)d\omega \\
 M_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 w^2(\omega)d\omega = \int_{-\tau}^{\tau} \left( \frac{dw(t)}{dt} \right)^2 dt \\
 m_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 w(\omega)d\omega = -\frac{d^2 w(t=0)}{dt^2}
 \end{aligned} \tag{4.192}$$

onde a terceira de (4.192) é uma condição de normalização, a quarta indica ser a janela de curta duração, a quinta, por ser uma expressão quadrática representa a menos de constante um estado de energia, a sexta é conhecida como o momento de inércia da energia sendo igual à área da velocidade ao quadrado, que decorre de uma propriedade da transformada de Fourier, e a sétima vem a ser o momento de inércia da janela, igualmente igual a menos de sinal ao quadrado da derivada segunda em relação ao tempo da janela (aceleração). Vale assinalar que a medida  $m_2$  fornece uma indicação da concentração da janela próxima da origem.

As janelas mais conhecidas são a de Hamming expressa por:

$$w(t) = \left( 0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi}{\tau} t \right)$$

$$E = 0.79\tau$$

$$M_2 = \infty$$
(4.193)

a de Barlett, que consiste num triângulo com  $E = 3\tau/4$ ,  $M_2 = \pi^2 / 4\tau$ , e de Turkey expressa por:

$$w(t) = \left( 0.5 + 0.5 \cos \frac{\pi t}{\tau} \right)$$

$$E = 3\tau / 4$$

$$M_2 = \pi^2 / 4\tau$$
(4.194)

valendo-se assinalar que existem muitas janelas propostas, tendo-se em conta serem variados os objetivos a serem alcançados, além dos já mencionados.

#### 4.16- Análise de frequência

Tendo-se em conta um sinal harmônico senoidal, ou seja:

$$u(t) = A \sin(\omega t)$$
(4.195)

onde  $A$  é amplitude e  $\omega$  a frequência angular do sinal, a velocidade e a aceleração são expressas respectivamente por:

$$\frac{du(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t) = A\omega \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t) = A\omega^2 \sin(\omega t + \pi)$$
(4.196)

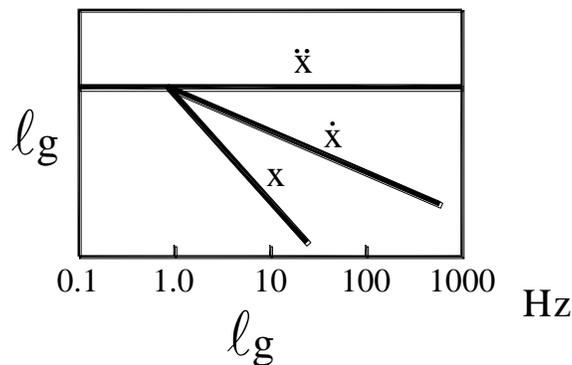
indicando-se que a derivação do sinal tem a sua amplitude multiplicando-se a amplitude do sinal pela frequência angular; no caso inverso, a integração do sinal resulta, por via de consequência, com amplitude do sinal sendo integrado dividida pela frequência angular.

Em escala logarítmica as amplitudes em dB ficam expressas como:

$$\begin{aligned}
 L_u &= 10\log_{10}(A) \\
 L_{du/dt} &= 10\log_{10}(\omega A) = 10\log_{10}(A) + 10\log_{10}(\omega) \\
 L_{d^2u/dt^2} &= 10\log_{10}(\omega^2 A) = 10\log_{10}(A) + 20\log_{10}(\omega)
 \end{aligned}
 \tag{4.197}$$

que são as retas indicadas na Figura A.7 em gráfico log-log.

É importante registrar nesse ponto que esse é tipo de gráfico em escala logarítmica é muito empregado para a descrição de grandezas de natureza acústica e dinâmica.



**Fig. A.7 – Escala logarítmica**

#### 4.17- Decomposição de Jordam

A decomposição de Jordam consiste numa decorrência direta do problema clássico de autovalores matricial, ou seja:

$$[A]\{y\}_i = \{y\}_i \lambda_i
 \tag{4.198}$$

onde  $\lambda_i$  é o autovalor obtido pela relação:

$$\det[[A] - \lambda[I]] = 0
 \tag{4.199}$$

que resulta numa equação algébrica em  $\lambda$ , cujo grau é a ordem da matriz  $[A]$ , e  $\{y\}_i$  é o correspondente autovetor genérico obtido por:

$$[[A] - \lambda_i[I]]\{y\}_i = 0
 \tag{4.200}$$

arbitrando-se o valor de uma de suas componentes, e que, no seu conjunto, ganha a redação:

$$[A][\{y\}_1 \quad \{y\}_2 \quad \dots \quad \{y\}_n] = [\{y\}_1 \quad \{y\}_2 \quad \dots \quad \{y\}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

ou seja:

$$[A][Y] = [Y][\lambda] \quad (4.202)$$

onde as colunas da matriz  $[Y]$  são os autovalores da matriz  $[A]$ , e a matriz diagonal  $[\lambda]$  contempla os autovalores correspondentes.

Decorre de (4.202) de modo imediato:

$$[A] = [Y][\lambda][Y]^{-1} \quad (4.203)$$

sendo oportuno lembrar que a inversa da matriz de autovalores, no caso de matriz  $[A]$  simétrica, vem a ser a sua transposta, em razão da ortogonalidade dos autovetores.

#### 4.18- Decomposição em valores singulares (SVD)

No caso de matriz retangular, o expresso em (4.203) ganha a redação:

$$[A] = [U][\lambda][V]^T \quad (4,204)$$

conhecida como decomposição em valores singulares, onde  $[A]$  é uma matriz retangular de ordem, por exemplo, m por n,  $[U]$  uma matriz de ordem m por m, cujas colunas são autovetores unitários, bem como  $[V]$  de ordem n por n, e a matriz  $[\lambda]$ , de ordem m por n, é uma matriz diagonal contemplando os valores singulares. O entendimento dessa decomposição é facilitado tendo-se em conta que:

$$\begin{aligned} [A][A]^T &= [U][\lambda][V]^T [V][\lambda]^T [U]^T = [U][\lambda]^2 [U]^T \\ [A]^T [A] &= [V][\lambda]^T [U]^T [U][\lambda][V]^T = [V][\lambda]^2 [V]^T \end{aligned} \quad (4.205)$$

vem a ser a decomposição de Jordam das matrizes simétricas indicadas, cujos autovalores são o quadrado dos valores singulares de (4.204), e iguais, sendo que os autovalores da matriz de ordem maior repetem os da matriz de ordem menor com os demais sendo nulos.

Por outro lado, como as matrizes dos autovetores não são únicas, assumindo-se uma das matrizes, a outra vai estar definida. Por exemplo:

$$[A] = [U][\lambda][V]^T \rightarrow [U] = [A][V]^T [\lambda]^{-1} \quad (4.206)$$

sendo que a indicação de inversão da matriz retangular é apenas simbólica, como o exemplo numérico a seguir deixa claro.

Considere-se o caso da matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

resultando-se:

$$\begin{aligned} [A][A]^T &= \begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.386317793 & -0.92236578 \\ 0.92236578 & 0.386317703 \end{bmatrix} \times \\ &\begin{bmatrix} 90.40267253 & 0 \\ 0 & 0.597327473 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.386317793 & 0.92236578 \\ -0.92236578 & 0.386317793 \end{bmatrix} \\ [A]^T [A] &= \begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 27 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.428667133 & -0.85963908 & 0.40824829 \\ 0.566306918 & -0.112382409 & -0.81649658 \\ 0.703946704 & 0.58119908 & 0.40824829 \end{bmatrix} \times \\ &\begin{bmatrix} 90.40267253 & 0 & 0 \\ 0 & 0.597327473 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.428667133 & 0.566306918 & 0.70394604 \\ -0.85963908 & -0.112382409 & 0.58119908 \\ 0.40824829 & -0.81649658 & 0.40824829 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mas, fixando-se os autovetores na matriz  $[V]$ , os autovetores na matriz  $[U]$  segundo (4.206) acabam resultando:

$$[U] = \begin{bmatrix} 0.386317703 & 0.92236578 \\ 0.92236578 & -0.386317703 \end{bmatrix}$$

e a matriz retangular diagonal  $[\lambda]$  em (4.204) expressa por:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \sqrt{90.40267253} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{0.597327473} & 0 \end{bmatrix}$$

e a matriz  $[\lambda]^{-1}$  indicada em (4.206) por

$$[\lambda]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{90.40267253}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{0.597327473}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

encerrando-se a questão, registrando-se que a validade do exposto pode ser aquilatada em exemplo literal, facultando-se uma conjectura via indução.

Para finalizar, é oportuno registrar que o método da decomposição em valores singulares (SVD) tem sido empregado na análise modal operacional com vários pontos de recepção de sinais via formulação espectral mediante o registro digital, resultando numa matriz retangular de dados, sendo os polos os autovalores e os modos de vibrar os autovetores. Outra aplicação consiste na digitalização de figuras, cuja reprodução aproximada depende do número de autovalores considerados. Algo similar a considerar apenas algumas frequências na definição da resposta estrutural

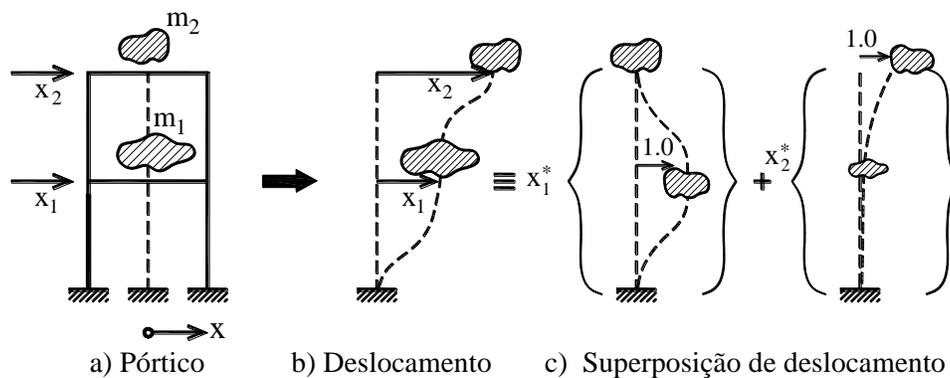
## CAPÍTULO V

### SISTEMAS COM DOIS OU MAIS GRAUS DE LIBERDADE

#### 5.1- Introdução

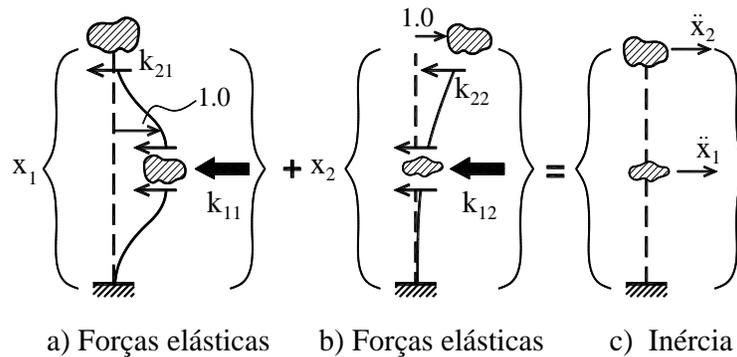
A integração da equação de movimento para vários graus de liberdade vai ser desenvolvida empregando-se como exemplo o caso do sistema com dois graus de liberdade, o qual já contempla os efeitos cruzados. Por outro lado, o emprego da notação matricial permite a imediata extensão do desenvolvimento para sistema com qualquer número de graus de liberdade.

A Figura 5.1a) exibe um sistema de dois graus de liberdade, esquematicamente um pórtico de dois andares, supondo-se que as massas estão localizadas nos andares, a Figura 5.1b) esquematiza o movimento livre do sistema (sem ação de forças externas) e a Figura 5.1c) o movimento decomposto em dois movimentos elementares.



**Figura 5.1**

A Figura 5.2a) exibe a configuração de forças internas para a configuração de deslocamento denominada 1, e a Figura 5.2b) para o deslocamento 2. A Figura 5.2c) ilustra as acelerações experimentadas pelas massas sob a ação das forças em jogo.



**Figura 5.2**

Assumindo-se o modelo linear (pequenos deslocamentos), que é válido na prática corrente da engenharia, para o qual assume-se uma relação linear entre a ação e o deslocamento, o equilíbrio dinâmico das massas (segunda Lei de Newton) implica em:

$$\begin{aligned} x_1 k_{11} + x_2 k_{12} &= m_2 \ddot{x}_1 \\ x_1 k_{21} + x_2 k_{22} &= m_2 \ddot{x}_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde o primeiro índice dos termos de rigidez indica a posição onde ocorre o efeito e o segundo índice a posição onde se localiza a causa. Em notação matricial o expresso em (5.1) ganha a seguinte redação:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

lembrando-se que, pelo teorema de Maxwell (sistema conservativo), a matriz de rigidez é simétrica  $k_{12} = k_{21}$ , e a matriz de massa por ser diagonal é também simétrica, ou ainda (D'Alembert):

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

cuja solução homogênea, a exemplo do caso de um grau de liberdade, se expressa:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \text{sen} \omega t + \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \text{cos} \omega t \quad (5.4)$$

ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = -\omega^2 \left( \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \text{sen}\omega t + \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \text{cos}\omega t \right) = -\omega^2 \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

ganhando-se o equilíbrio expresso em (5.3) a escrita:

$$\left( \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

que consiste num problema de autovalores, cujos autovalores são as raízes do determinante:

$$\det \left( \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (5.7)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2} - \sqrt{\left( \frac{k_{11}}{m_1} - \frac{k_{22}}{m_2} \right)^2 + \frac{4k_{12}^2}{m_1 m_2}} \right] \\ \omega_2^2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2} + \sqrt{\left( \frac{k_{11}}{m_1} - \frac{k_{22}}{m_2} \right)^2 + \frac{4k_{12}^2}{m_1 m_2}} \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

sendo oportuno ressaltar que as raízes dadas em (5.8) são reais e positivas em razão da simetria da matriz de rigidez, bem como do fato de ser definida positiva, uma vez que todos os seus determinantes menores são positivos, pois o primeiro menor  $k_{11} > 0$  é positivo por natureza (conservação da energia) e segundo  $k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0$  igualmente positivo, resultando do fato de que:

$$\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2} > \sqrt{\left( \frac{k_{11}}{m_1} - \frac{k_{22}}{m_2} \right)^2 + \frac{4k_{12}^2}{m_1 m_2}} \quad (5.9)$$

como facilmente, após manipulação algébrica, se verifica. Maiores detalhes vão ser objeto de exame no apêndice, onde tais propriedades vão ser estudadas para

sistemas com qualquer número de graus de liberdade, bem como também mais adiante (vide (5.26)).

Os autovetores de (5.6) são obtidos com base na correspondente relação matricial:

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_1 \omega_i^2 & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} - m_2 \omega_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

ou seja:

$$\beta_i = \frac{m_1 \omega_i^2 - k_{11}}{k_{12}} \quad (5.11)$$

e com isso, os autovetores, ou modos de vibrar, passam a ser expressos por:

$$\begin{aligned} \omega_1 &\rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} \\ \omega_2 &\rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

e o expresso em (5.4) passa a escrever-se:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = (A \text{sen} \omega_1 t + B \text{cos} \omega_1 t) \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} + (C \text{sen} \omega_2 t + D \text{cos} \omega_2 t) \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

ou ainda em notação matricial:

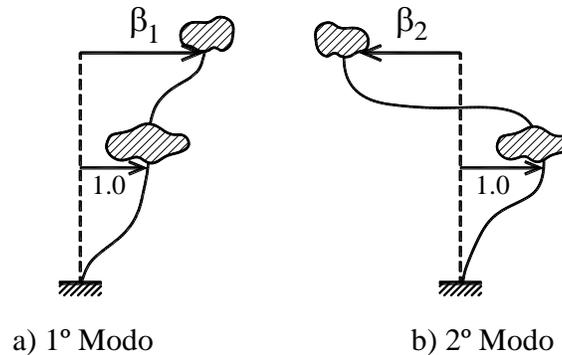
$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} \rightarrow \{x\} = [A]\{q\} \quad (5.14)$$

onde as colunas da matriz  $[A]$  são os autovetores (modos de vibrar), e as funções  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$  são funções harmônicas com frequência angular  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , respectivamente. A Figura 5.3 ilustra modos típicos de vibração.

## 5.2- Ortogonalidade dos modos e superposição modal

A integração da equação de movimento é bastante facilitada tendo-se em conta a ortogonalidade dos modos de vibração, o que permite o desacoplamento da

equação de movimento, obtendo-se a solução mediante a soma de soluções elementares de um grau de liberdade, que consiste na chamada técnica da superposição modal. Tal ortogonalidade é facilmente verificada em razão da simetria das matrizes de rigidez e de massa, porquanto o problema de autovalor (5.6), permite genericamente escrever-se:



**Figura 5.3**

$$\begin{aligned}
 ([k] - \omega_1^2 [m]) \{A\}_1 &= \{0\} \rightarrow \{A\}_2^T [k] \{A\}_1 = \omega_1^2 \{A\}_2^T [m] \{A\}_1 \\
 ([k] - \omega_2^2 [m]) \{A\}_2 &= \{0\} \rightarrow \{A\}_1^T [k] \{A\}_2 = \omega_2^2 \{A\}_1^T [m] \{A\}_2 \\
 \{A\}_1^T [k] \{A\}_2 &= \{A\}_2^T [k] \{A\}_1 \\
 \{A\}_2^T [m] \{A\}_1 &= \{A\}_1^T [m] \{A\}_2
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

sendo que subtraindo-se, membro a membro, a primeira de (5.15) menos a segunda acaba resultando:

$$0 = (\omega_1^2 - \omega_2^2) \{A\}_2^T [m] \{A\}_1 \tag{5.16}$$

indicando-se a ortogonalidade dos modos em relação à matriz de massa, uma vez que as frequências naturais são distintas, ou seja:

$$\{A\}_2^T [m] \{A\}_1 = 0 = \{A\}_1^T [m] \{A\}_2 \tag{5.17}$$

bem como, tendo-se em conta as duas primeiras de (5.15), a ortogonalidade em relação também em relação à matriz de rigidez, bem como vale também registrar a outras relações de interesse:

$$\begin{aligned} i \neq j &\rightarrow \{A\}_j^T [k] \{A\}_i = 0 = \{A\}_i^T [k] \{A\}_j \\ i = j &\rightarrow \{A\}_i^T [k] \{A\}_i = \omega_i^2 \{A\}_i^T [m] \{A\}_i \end{aligned} \quad (5.18)$$

registrando-se que, no caso de raiz dupla, a ortogonalidade continua válida, examinando-se o limite com as raízes coincidindo. Além disso, a notação matricial simbólica deixa claro que tais propriedades valem para qualquer número de graus de liberdade. Além disso, é oportuno chamar a atenção para o fato de que a ortogonalidade depende apenas do fato de serem as matrizes de rigidez e de massa simétricas.

Tendo-se em conta a ortogonalidade dos modos de vibração, aproveita-se agora para apresentar uma nova abordagem da equação de movimento livre, ou seja:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (5.19)$$

cuja solução, no caso de dois graus de liberdade, por exemplo, pode ser então formulada por superposição modal, ou seja:

$$\{x(t)\} = q_1(t)\{A\}_1 + q_2(t)\{A\}_2 \quad (5.20)$$

onde  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$  são as contribuições temporais correspondentes a cada um dos modos de vibração. Tendo-se em conta (5.20), o expresso em (5.19) permite que se escreva:

$$\{A\}_1^T \left[ [m](\ddot{q}_1 \{A\}_1 + \ddot{q}_2 \{A\}_2) + [k](q_1 \{A\}_1 + q_2 \{A\}_2) \right] = 0 \quad (5.21)$$

ou ainda, em razão da ortogonalidade dos modos de vibração:

$$\ddot{q}_1 \{A\}_1^T [m] \{A\}_1 + q_1 \{A\}_1^T [k] \{A\}_1 = 0 \quad (5.22)$$

resultando-se, face a segunda de (5.18):

$$\{A\}_1^T [m] \{A\}_1 (\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1) = 0 \quad (5.23)$$

ou ainda:

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0 \quad (5.24)$$

cuja solução, como sabido, é do tipo harmônico, ou seja:

$$q_1 = A_1 \text{sen} \omega t + B_1 \text{cos} \omega t \quad (5.25)$$

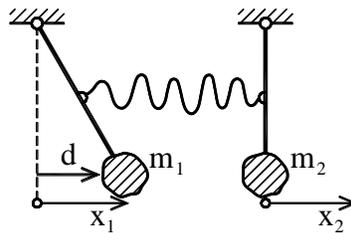
onde  $A_1$  e  $B_1$  são as constantes de integração, e  $\omega$  a frequência natural angular.

Tendo-se em conta (5.25) o expresso em (5.24) ganha a redação:

$$q_1(-\omega^2 + \omega_1^2) = 0 \quad (5.26)$$

resultando-se no fato de ser  $\omega_1^2$  real e positivo, uma vez que se ele fosse negativo  $\omega$  seria complexo e a solução (5.25) passa a ser não oscilante, complexa e hiperbólica, do tipo  $q = A(\text{isenh} \omega t + \text{cosh} \omega t) + B(-\text{isenh} \omega t + \text{cosh} \omega t)$ , o que não é compatível com as condições iniciais reais do movimento (vide (5.20)); e igualmente no caso de  $\omega_1^2$  complexo. Vale ressaltar que essa abordagem vale para qualquer ordem das matrizes envolvidas, ficando-se assim garantido que todos os autovalores (frequências naturais) são reais e positivos

A título de exemplo, considere-se agora o caso do duplo pêndulo exibido na Figura 5.4 com as seguintes condições iniciais  $x_1 = d$ ,  $x_2 = 0$  e  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ . Assim, expresso em (5.14) implica em:



**Figura 5.4**

$$\begin{aligned} d &= B_1 + B_2 \\ 0 &= \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 \\ 0 &= A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2 \\ 0 &= A_1 \beta_1 \omega_1 + A_2 \beta_2 \omega_2 \end{aligned}$$

resultando:

$$x_1 = \frac{d}{\beta_2 - \beta_1} (\beta_2 \cos \omega_1 t - \beta_1 \cos \omega_2 t)$$

$$x_2 = \frac{\beta_1 \beta_2 d}{\beta_2 - \beta_1} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$$

verificando-se tratar-se do clássico problema do batimento para  $k_{11} = k_{22} = k$ ,  $k_{12} \ll k$  ( $k \approx 0$ ),  $\omega_2 \approx \omega_1$ , ou seja  $\beta_1 = 1 = -\beta_2$  resultando-se:

$$x_1 = \frac{d}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$

$$x_2 = \frac{d}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$$

cuja representação gráfica acha-se na Figura 5.5a) e a defasagem  $\theta = \omega_2 t - \omega_1 t$  na Figura 5.5b), com período de batimento  $T^* = 2\pi / (\omega_2 - \omega_1)$ . Cumpre assinalar que esse fenômeno é de utilidade no afinamento de instrumentos musicais. O que a Figura 5.5b) indica é que, enquanto a massa  $m_1$  está oscilando com grande amplitude, a massa  $m_2$  oscila com pequena amplitude, e vice-versa.

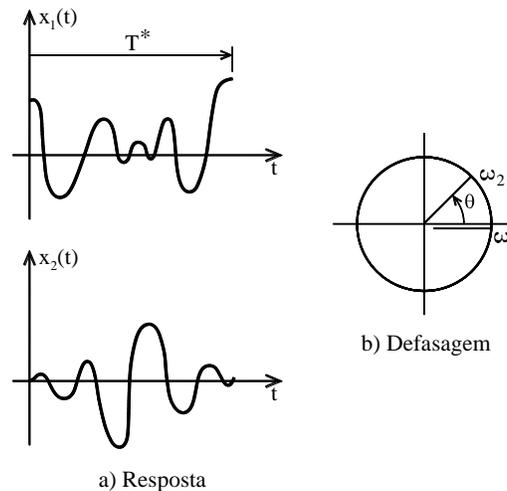


Figura 5.5

### 5.3- Vibração forçada

A Figura 5.6 exhibe um sistema de dois graus de liberdade sob a ação de força externa, ficando o equilíbrio dinâmico com a seguinte redação:

$$\begin{aligned}
 [m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} &= \{P\} \\
 \{P\} &= \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{5.27}$$

cuja solução é também alcançada pela superposição modal, expressa em (5.20), permitindo-se escrever:

$$\begin{aligned}
 \{x(t)\} &= q_1(t)\{A\}_1 + q_2(t)\{A\}_2 = q_1(t)\begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} + q_2(t)\begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \\
 \{A\}_j^T \left( [m] \left( \sum_{i=1}^2 \ddot{q}_i \{A\}_i \right) + [k] \left( \sum_{i=1}^2 q_i \{A\}_i \right) \right) &= \{A\}_j^T \{P\}
 \end{aligned}
 \tag{5.28}$$

sendo que a segunda de (5.28), face a ortogonalidade dos modos de vibração resulta na seguinte relação:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \frac{\{A\}_j^T \{P\}}{\{A\}_j^T [m] \{A\}_j}
 \tag{5.29}$$

indicando-se que o termo de carregamento é, em termos modais, dado pela projeção do vetor de carregamento na direção do modo correspondente (produto escalar dos vetores); e escalonado pelo modo correspondente nos termos do produto com a matriz de massa. O numerador de (5.29) é conhecido como carregamento modal e o denominador como massa modal. As condições iniciais implicam em:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{5.30}$$

evidenciando-se que, no caso de condições iniciais de repouso (condições iniciais nulas), as condições iniciais nas componentes  $q_i$  também o são.

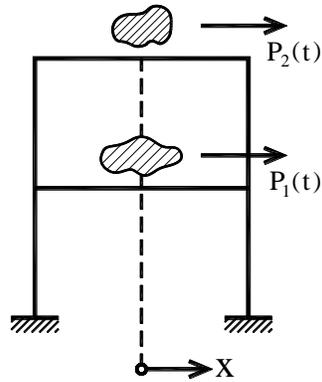


Figura 5.6

A título de exemplificação, considere-se o caso em que:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= m_2 = m \\
 k_{11} &= 2k = 2k_{22} \\
 k_{12} &= -k \\
 P_1(t) &= P \sin \omega t \\
 P_2(t) &= 0
 \end{aligned}$$

com condições iniciais de repouso. Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= 0.618 \sqrt{\frac{k}{m}} \\
 \omega_2 &= 1.618 \sqrt{\frac{k}{m}} \\
 \beta_1 &= 1.618 \\
 \beta_2 &= -0.618
 \end{aligned}$$

e com isso as equações modais, considerando-se carregamento harmônico senoidal de frequência angular  $\omega$  aplicado apenas no primeiro grau de liberdade 1 ( $P_1 = P \sin \omega t$ , como ilustrado lá na Figura 5.6), ficam:

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= \frac{P \sin \omega t}{3.618m} \\
 \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= \frac{P \sin \omega t}{1.382m}
 \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0.7236 \frac{P}{k} \omega_1^2 \text{sen} \omega t$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0.2764 \frac{P}{k} \omega_2^2 \text{sen} \omega t$$

de sorte a empregar a função  $\psi(\alpha, \gamma_1 = 0, \omega, t)$  expressa em (2.119), ou seja:

$$q_1 = 0.7236 \frac{P}{k} \left[ \frac{1}{(1-\alpha^2)^2} ((\alpha^3 - \alpha) \text{sen} \omega_1 t + (1 - \alpha^2) \text{sen} \omega t) \right]$$

$$q_2 = 0.2764 \frac{P}{k} \left[ \frac{1}{(1-\bar{\alpha}^2)^2} ((\bar{\alpha}^3 - \bar{\alpha}) \text{sen} \omega_2 t + (1 - \bar{\alpha}^2) \text{sen} \omega t) \right]$$

onde  $\alpha = \omega/\omega_1$  e  $\bar{\alpha} = \omega/\omega_2$ , ou ainda:

$$q_1 = \frac{P}{k} \frac{0.2764}{0.382 - (\alpha^*)^2} [-1.618 \alpha^* \text{sen} \omega_1 t + \text{sen} \omega t]$$

$$q_2 = \frac{P}{k} \frac{0.7236}{2.618 - (\alpha^*)^2} [-0.618 \alpha^* \text{sen} \omega_2 t + \text{sen} \omega t]$$

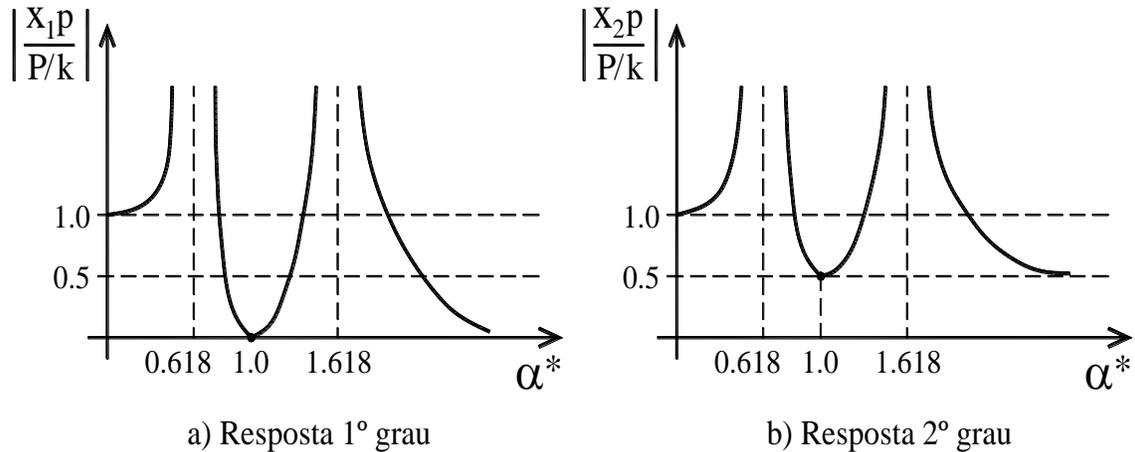
onde  $\alpha^* = \omega \sqrt{m/k}$ .

Examinando-se, por exemplo, a resposta do sistema tendo-se em conta apenas o termo do carregamento que, neste caso, consiste na resposta permanente com amortecimento desprezível, ou seja, termos que multiplicam  $\text{sen} \omega t$ , tem-se:

$$\frac{x_1}{P/k} = q_1 + q_2 = \frac{P}{k} \frac{0.2764}{0.382 - (\alpha^*)^2} + \frac{P}{k} \frac{0.7236}{2.618 - (\alpha^*)^2}$$

$$\frac{x_1}{P/k} = q_1 + q_2 = \frac{P}{k} \frac{0.44472}{0.382 - (\alpha^*)^2} - \frac{P}{k} \frac{0.44472}{2.618 - (\alpha^*)^2}$$

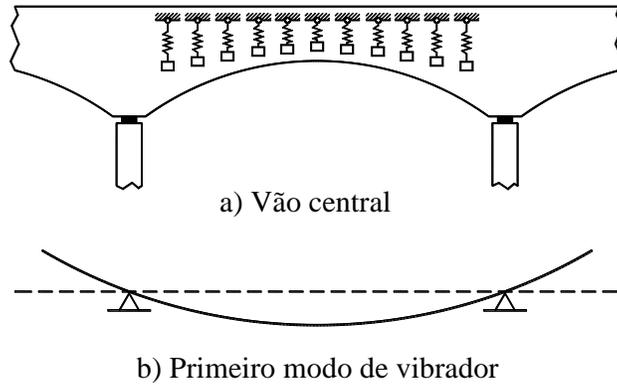
resultando-se nos gráficos da Figura 5.7



**Figura 5.7.**

A leitura especialmente do gráfico da Figura 5.7 a) constitui um paradoxo, pois a carga está aplicada no grau de liberdade 1 e esse grau de liberdade não se move! De onde vem então a energia que movimentava o grau de liberdade 2? A resposta é simples, pois aí não está sendo considerada a parte homogênea da resposta, que contém os termos contemplando  $\text{sen}\omega_1 t$  e  $\text{sen}\omega_2 t$ , que, no caso de haver amortecimento, vão desaparecer com tempo crescente, como visto no Capítulo II. Esse fenômeno é conhecido como *isolação por absorvedor dinâmico* (mass tuned vibration absorber – TVA), que consiste em se reduzir drasticamente a movimentação (mitigação do movimento) de um dos graus de liberdade do sistema. Trata-se de fenômeno similar ao que ocorre com o eletrodo sacrifício, que, ao ser corroído (oxidação), faz com que a estrutura metálica seja poupada de corrosão em ambientes agressivos. Valendo-se ressaltar ainda que a consideração de amortecimento desprezível deixa o fenômeno da absorção dinâmica mais visível, sem a complexidade de se trabalhar com a expressão completa.

A Figura 5.8 ilustra um absorvedor dinâmico empregado na conhecida Ponte Rio-Niterói, tendo-se as seguintes características: massa total da ponte 13000t, massa modal (primeiro modo) 6000t, massa dos absorvedores 60t (1%). A frequência do primeiro modo era originalmente 0.32 Hz, passando-se a 0.34 Hz depois da reforma, correspondendo à frequência induzida por um vento crítico de 55km/h.



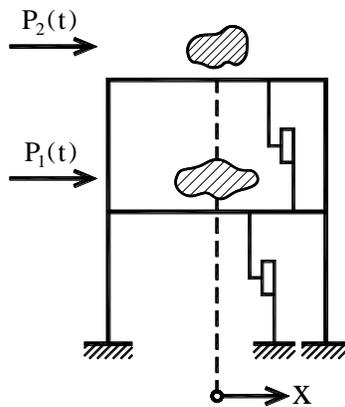
**Figura 5.8**

#### 5.4- Vibração forçada amortecida

A Figura 5.9 exibe um sistema de dois graus de liberdade, com amortecimento, cuja equação de movimento se escreve:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

sendo de ressaltar ser a matriz de amortecimento  $[C]$  também simétrica em razão do princípio da conservação da energia, uma vez que o teorema de Maxwell pode ser estendido para as forças que dependem da velocidade.



**Figura 5.9**

Pois bem, o modelo mais simples de amortecimento consiste em se assumir que a matriz de amortecimento venha a ser proporcional à matriz de rigidez, ou seja:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} = \lambda_k \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

que decorre do modelo reológico da viscoelasticidade, no qual a tensão é proporcional tanto à deformação como à velocidade da deformação. Um modelo proporcional mais completo consiste em se levar em conta também a matriz de massa, ou seja:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} = \lambda_k \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} + \lambda_m \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

tendo-se em conta que também toda a massa contribui para o amortecimento, afinal todo os objetos na construção ao se movimentarem mobilizam atrito. A popularidade do método proporcional exposto em (5.33) decorre do fato de que a solução pode continuar sendo obtida pela técnica da superposição modal, pois a ortogonalidade vale também, nesse caso, para a matriz de amortecimento assim formulada, visto que:

$$\begin{aligned} \{A\}_i^T [\lambda_k [k] + \lambda_m [m]] \{A\}_j &= 0 \\ \{A\}_i^T [\lambda_k [k] + \lambda_m [m]] \{A\}_i &= (\lambda_k \omega_i^2 + \lambda_m) \{A\}_i^T [m] \{A\}_i \end{aligned} \quad (5.34)$$

resultando-se

$$\ddot{q}_i + (\lambda_k \omega_i^2 + \lambda_m) \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{\{A\}_i^T \{P\}}{\{A\}_i^T [m] \{A\}_i} \quad (5.35)$$

ou ainda na forma canônica:

$$\ddot{q}_i + 2\gamma_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = f_i \quad (5.36)$$

onde:

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{\{A\}_i^T \{P\}}{\{A\}_i^T [m] \{A\}_i} = \frac{\{A\}_i^T \{P\}}{m_i} \\ \gamma_i &= \frac{\lambda_k}{2} \omega_i + \frac{\lambda_m}{2\omega_i} \\ m_i &= \{A\}_i^T [m] \{A\}_i \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde  $\hat{f}_i$  é a chamada força modal,  $\gamma_i$  denominado amortecimento modal, bem como  $m_i$  a massa modal. A segunda de (5.37) sinaliza que o amortecimento modal cresce linearmente com a frequência natural para o modelo proporcional à matriz de rigidez, que vem a ser o modelo viscoelástico, e acrescido de um termo que cresce inversamente proporcional à frequência natural para o modelo proporcional à matriz de massa.

Resultados experimentais de um edifício apresentados por Chopra<sup>1</sup> em 1980 estão arrolados na Tabela 5.1.

**Tabela 5.1**

$\omega$ (rad./s)	2.21	2.27	7.06	7.14	13.32
$\gamma$	0.038	0.036	0.081	0.056	0.047

Esses amortecimentos medidos estão a indicar o quanto é irregular a evolução do amortecimento modal com a frequência angular natural. Em outras palavras, a natureza dos 'ladrões de energia' é um tanto caótica e de difícil modelagem.

De qualquer modo, assumindo-se, por exemplo, o modelo viscoelástico, e tendo-se em conta o amortecimento do primeiro modo, tem-se:

$$\gamma_1 = 0.038 = \frac{\lambda_k}{2} 2.21 \rightarrow \lambda_k = 0.0344$$

$$\gamma_i = \frac{\lambda_k}{2} \omega_i = 0.0172 \omega_i$$

e com os dados dos dois primeiros modos, o modelo proporcional resulta:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 = 0.038 &= \frac{\lambda_m}{2 \times 2.21} + \frac{\lambda_k}{2} 2.21 \\ \gamma_2 = 0.036 &= \frac{\lambda_m}{2 \times 2.27} + \frac{\lambda_k}{2} 2.27 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda_k = 0.168 \\ \lambda_m = 0.250 \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{0.125}{\omega_i} - 0.0084 \omega_i$$

podendo-se no caso geral ser adotada a aproximação do tipo:

<sup>1</sup> Chopra, A.K., *Dynamics of Structures-A Primer*, Earthquake Eng. Research Inst. (1980).

$$\gamma_i = \frac{a_1}{\omega_i} + a_2\omega_i + \frac{a_3}{\omega_i^2} + a_4\omega_i^2 + \dots \quad (5.38)$$

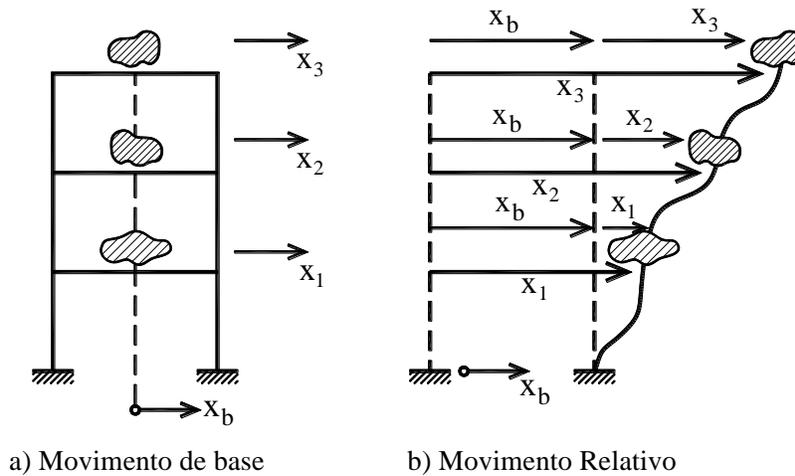
de modo a se ajustar a resultados conhecidos. Vale registrar que notícias dão conta de que, no projeto de uma usina nuclear brasileira, foi adotado, por exemplo, um modelo com nove termos.

### 5.5- Movimento de base

A Figura 5.10 a) ilustra o caso de um pórtico de três andares submetido à movimento de base  $X_0(t)$ , e a Figura 5.10 b) os movimentos relativos dos andares  $X_i(t)$ . O movimento absoluto fica então expresso por:

$$\{D(t)\} = \{D(t)\}_1 + \{D(t)\}_2 \quad (5.39)$$

onde:



**Figura 5.10**

$$\begin{aligned} \{D(t)\} &= \begin{Bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{Bmatrix} \\ \{D(t)\}_1 &= \begin{Bmatrix} x_b(t) \\ x_b(t) \\ x_b(t) \end{Bmatrix} \\ \{D(t)\}_2 &= \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.40)$$

com  $X_i$  representando-se o deslocamento absoluto dos andares, ficando-se a equação de movimento com a seguinte redação:

$$[m]\{\{\ddot{D}(t)\}_1 + \{\ddot{D}(t)\}_2\} + [c]\{\dot{D}(t)\}_2 + [k]\{D(t)\}_2 = \{0\} \quad (5.41)$$

pois as forças de amortecimento e de rigidez são proporcionais ao movimento relativo, mas as de inércia, pela segunda Lei de Newton, são proporcionais ao movimento absoluto. O expresso em (5.41) permite ainda a redação clássica:

$$[m]\{\{\ddot{D}\}_2\} + [c]\{\dot{D}\}_2 + [k]\{D\}_2 = -[m]\{\ddot{D}\}_1 \quad (5.42)$$

cujas integração resulta no deslocamento relativo.

A Figura 5.11 a) ilustra o caso de movimentação angular  $\theta(t)$  na base de uma coluna, e a Figura 5.11 b) a deformada elástica estática para um movimento unitário. O deslocamento horizontal dos andares fica então vetorialmente expressos por:

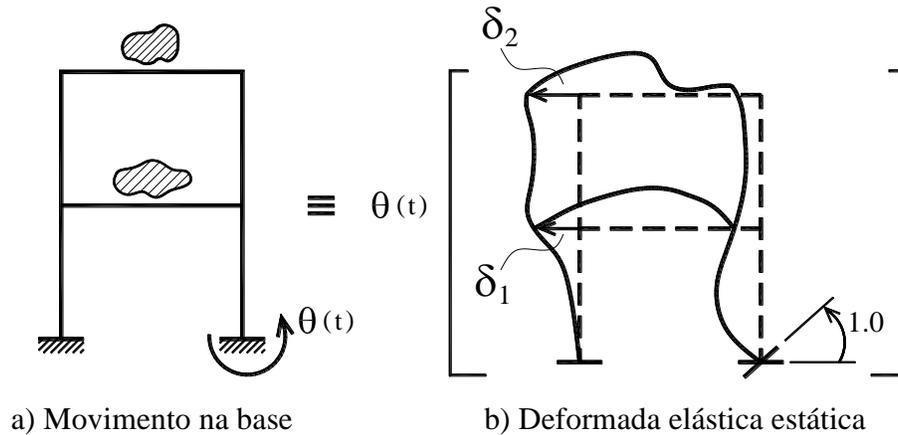
$$\{D\}_1 = \theta(t) \begin{Bmatrix} -\delta_1 \\ -\delta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.43)$$

e, dessa forma outros movimentos de base podem ser formulados, com o movimento relativo resultante obtido segundo (5.42).

Como exemplo de aplicação, considere-se o caso do pórtico ilustrado na Figura 5.12 a) submetido a um movimento de base dado por:

$$x_0(t) = (0.1)\text{sen} \frac{\pi t}{t_0} \rightarrow 0 < t < t_0$$

$$x_0(t) = 0 \rightarrow t > t_0$$



**Figura 5.11**

partindo-se de condições iniciais de repouso, tendo-se em conta dois casos de movimento de base, ou seja:

$$t_0 = 0.2\text{s}$$

$$t_0 = 0.075\text{s}$$

bem como:

$$m_1 = m_2 = 10^4\text{kg}$$

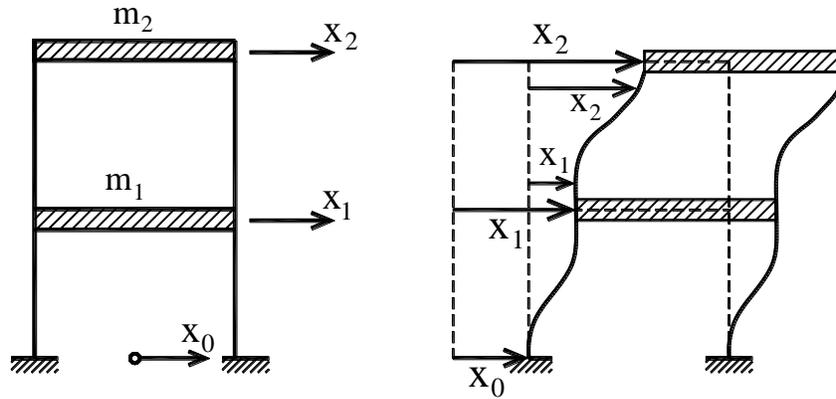
$$k_{11} = 2 \times 10^7\text{N/m}$$

$$k_{22} = -k_{12} = -k_{21} = 10^7\text{N/m}$$

e sem amortecimento. Trata-se do exemplo exposto na página 72 do livro do Warburton já referenciado no Capítulo II.

A Figura 5.12 b) ilustra os deslocamentos absolutos (letras maiúsculas) e relativos (letras minúsculas). A equação de movimento fica então expressa em termos do movimento relativo por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + 10^3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} x_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



a) Movimento de base                      b) Movimentos absoluto e relativo

**Figura 5.12**

cujas frequências naturais e modos de vibrar normalizados (fazendo-se  $\{A_i\}^T [m] \{A_i\} = [I]$ ) ficam:

$$\omega_1 = 19.345 \text{r / s} \rightarrow \{A_1\} = \frac{1}{190.2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 51.167 \text{r / s} \rightarrow \{A_2\} = \frac{1}{117.5} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{Bmatrix}$$

e as equações modais:

$$\ddot{q}_1 + \omega_1 q_1 = 525.7 \text{sen} \frac{\pi t}{t_0}$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2 q_2 = 850.6 \text{sen} \frac{\pi t}{t_0}$$

cujas integrações resultam para  $0 < t < t_0$ :

$$t_0 = 0.2 \text{s} \rightarrow \begin{cases} q_1 = 3.8877 [\text{sen} 5\pi t - 0.8037 \text{sen} 19.54t] \\ q_2 = 0.3249 [\text{sen} 5\pi t - 0.3070 \text{sen} 51.17t] \end{cases}$$

$$t_0 = 0.075 \text{s} \rightarrow \begin{cases} q_1 = -0.383 \left[ \text{sen} \frac{40\pi t}{3} - 2.1433 \text{sen} 19.54t \right] \\ q_2 = 0.3249 \left[ \text{sen} \frac{40\pi t}{3} - 0.8186 \text{sen} 51.17t \right] \end{cases}$$

e para  $t > t_0$ :

$$t_0 = 0.2s \rightarrow \begin{cases} \bar{q}_1 = -0.8755\text{sen}(19.54(t - t_0)) + 2.8691\text{cos}(19.54(t - t_0)) \\ \bar{q}_2 = -0.0341\text{sen}(51.17(t - t_0)) + 0.0796\text{cos}(51.17(t - t_0)) \end{cases}$$

$$t_0 = 0.075s \rightarrow \begin{cases} \bar{q}_1 = 0.9069\text{sen}(19.54(t - t_0)) + 0.8164\text{cos}(19.54(t - t_0)) \\ \bar{q}_2 = -0.1877\text{sen}(51.17(t - t_0)) + 0.5172\text{cos}(51.17(t - t_0)) \end{cases}$$

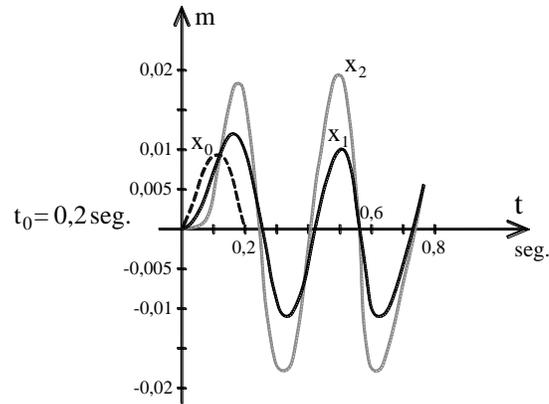
sendo o resultado final exposto nos gráficos das Figuras 5.13 a) e b). Devendo-se chamar a atenção para o fato de que a aplicação de movimento de base com menor duração mobiliza mais o modo de vibrar mais alto, como deveria de se esperar, indicando-se que, no caso, por exemplo, de um tiro no vidro apresentar ruptura apenas na região do impacto, visto que a solitação nesse caso tem duração extremamente curta, excitando-se modos muito altos, rompendo-se o vidro nessa região. Esse fato está contido nesse exemplo de maneira subliminar numa brilhante lição do professor Warburton.

### 5.6- Sistematização da solução para amortecimento proporcional

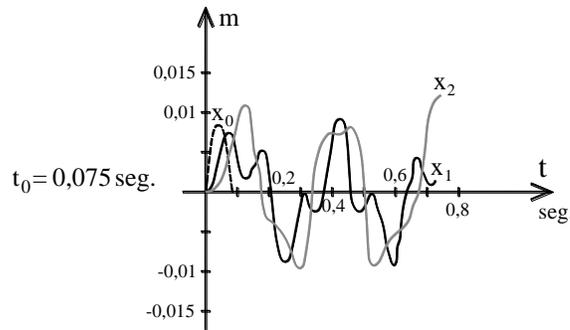
A Figura 5.14 exhibe novamente um sistema de dois graus de liberdade cuja equação de movimento se escreve:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{P\} \quad (5.44)$$

## VIBRAÇÃO DAS ESTRUTURAS



a) Resposta com componentes de baixa frequência



b) Resposta com mobilização de alta frequência

**Figura 5.13.**

e cuja solução via método da superposição modal expresso em (5.14) no caso de amortecimento proporcional também se escreve:

$$\{x\} = [A]\{q\} \quad (5.45)$$

onde  $[A]$  é a matriz cujas colunas são os modos de vibração, resultando-se na equação de equilíbrio modal:

$$\ddot{q}_i + 2\gamma_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = f_i \quad (5.46)$$

onde

$$\begin{aligned}\gamma_i &= \frac{\lambda_k \omega_i}{2} + \frac{\lambda_m}{2\omega_i} \\ f_i &= \frac{\{A\}_i^T \{P\}}{m_i} \\ m_i &= \{A\}_i^T [m] \{A\}_i \\ q_i &= \int_0^t h_i(t-\tau) \{A\}_i^T \{P(\tau)\} d\tau\end{aligned}\tag{5.46}$$

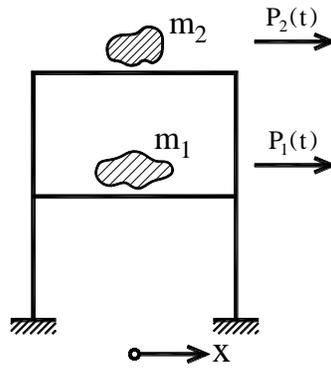


Figura 5.14

são as características modais já referidas anteriormente (vide (5.37)).

A integração de (5.46) para condições iniciais de repouso se escreve:

$$\begin{aligned}\{q\} &= \int_0^t [h(t-\tau)] [A]^T \{P(\tau)\} d\tau \rightarrow \begin{cases} i = j \rightarrow h_{ij}(t-\tau) = h_i(t-\tau) \\ i \neq j \rightarrow h_{ij}(t-\tau) = 0 \end{cases} \\ h_i(t-\tau) &= \frac{e^{-\gamma_i \omega_i (t-\tau)}}{m_i \omega_i \sqrt{1-\gamma_i^2}} \text{sen}(\omega_i \sqrt{1-\gamma_i^2} (t-\tau))\end{aligned}\tag{5.47}$$

resultando-se:

$$\begin{aligned}\{x\} &= [A] \{q\} = \int_0^t [A] [h(t-\tau)] [A]^T \{P(\tau)\} d\tau = \int_0^t [H(t-\tau)] \{P(\tau)\} d\tau \\ [H(t-\tau)] &= [A] [h(t-\tau)] [A]^T\end{aligned}\tag{5.48}$$

onde  $[H(t-\tau)]$  é denominada matriz de flexibilidade dinâmica. Cumpre esclarecer que, no caso de carregamento segundo a função de Dirac no tempo  $\tau = 0$ , ou seja,  $P(t=0)d\tau = 1$  aplicado no grau de liberdade  $i$ , a resposta do sistema dada pela primeira de (5.48) é exatamente a coluna  $i$  da matriz  $H(t-\tau)$ , uma vez que, no caso genérico de vários graus de liberdade, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = [H(t - \tau)] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{1i}(t - \tau) \\ H_{2i}(t - \tau) \\ \dots \\ H_{ii}(t - \tau) \\ \dots \\ H_{ni}(t - \tau) \end{Bmatrix} \quad (5.49)$$

que corresponde a resposta ao se aplicar um impulso unitário apenas no grau de liberdade  $i$ , ou seja,  $\dot{x}_i = 1/m_i$ .

### 5.7- Resposta no domínio da frequência

Voltando-se novamente à equação de equilíbrio dinâmico, ou seja:

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{P(t)\} \quad (5.50)$$

e procedendo-se a transformada de Fourier de ambos os membros de (5.50), tem-se:

$$-\omega^2 [m]\{x(\omega)\} + i\omega [c]\{x(\omega)\} + [k]\{x(\omega)\} = \{P(\omega)\} \quad (5.51)$$

assumindo-se condições iniciais de repouso ( $\{x(t=0)\}$  e  $\{\dot{x}(t=0)\}$  nulos), resultando-se:

$$\{x(\omega)\} = [-\omega^2 [m] + i\omega [c] + [k]]^{-1} \{P(\omega)\} = H(\omega) \{P(\omega)\} \quad (5.52)$$

sendo a matriz complexa:

$$[-\omega^2 [m] + i\omega [c] + [k]] \quad (5.53)$$

denominada matriz de rigidez dinâmica.

Como curiosidade, é fácil ao leitor, após manipulações algébricas de certa monta, constatar, no caso de dois graus de liberdade, que

$$[H(\omega)] = [-\omega^2 [m] + i\omega [c] + [k]]^{-1} \quad (5.54)$$

ou seja, a transformada de Fourier da matriz de flexibilidade dinâmica  $[H(t)]$  resulta na inversa da matriz de rigidez dinâmica  $[H(\omega)]$ .

No caso de amortecimento proporcional tem-se de imediato, em vista da segunda de (5.48), que:

$$\int_0^{\infty} [H(t)] e^{-i\omega t} dt = [H(\omega)] = [A][h(\omega)][A]^T \quad (5.55)$$

onde a matriz  $[h(\omega)]$  é diagonal, com os elementos da diagonal redigidos como em (A6) do apêndice da Capítulo III, bem como em outra redação como expresso em (A11) do apêndice daquele memo capítulo.

Para completar o estudo em apreço, resta ainda proceder a transformada inversa da resposta no domínio da frequência de sorte a se ter a resposta procurada, ou seja:

$$\{x(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{x(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega \quad (5.55)$$

deixando-se claro que se trata de uma técnica envolvendo um grande volume de cálculos, pois, no domínio complexo dobra-se o número de operações.

Todavia, essa formulação é de grande utilidade operacional no desenvolvimento teórico da dinâmica das estruturas, especialmente na abordagem de solicitações aleatórias (análise estocástica), bem como em análise modal (identificação estrutural e detecção de dano, etc.).

### 5.8- Métodos diretos de integração numérica

A formulação da integração numérica para dois ou mais graus de liberdade não oferece novidades, uma vez que se trata apenas de se considerar o envolvimento de vetores com componentes função do tempo. No caso do método das diferenças centrais os operadores (4.11) e (4.12) em forma vetorial ficam:

$$\begin{aligned} \{x\}_{i+1} - \{x\}_{i-1} - 2\Delta t \{\dot{x}\}_i &= \{0\} \\ \{x\}_{i+1} - 2\{x\}_i + \{x\}_{i-1} - \Delta t^2 \{\ddot{x}\}_i &= \{0\} \end{aligned} \quad (5.56)$$

e, com isso, mais a seguinte redação apropriada da equação de equilíbrio dinâmico:

$$[M]\Delta t^2 \{\ddot{x}\}_i = -[c]\Delta t^2 \{\dot{x}\}_i - [k]\Delta t^2 \{x\}_i + \Delta t^2 \{P\}_i \quad (5.57)$$

resulta na expressão vetorial de recorrência:

$$\left( [m] + \frac{\Delta t}{2} [c] \right) \{x\}_{i+1} = (2[m] - \Delta t^2 [k]) \{x\}_i - \left( [m] - \frac{\Delta t}{2} [c] \right) \{x\}_{i-1} + \Delta t^2 \{P\}_i \quad (5.58)$$

com o primeiro passo dados por:

$$2[m] \{x\}_1 = (2[m] - \Delta t^2 [k]) \{x\}_0 - (2[m] - \Delta t [c]) \Delta t \{\dot{x}\}_0 + \Delta t^2 \{P\}_0 \quad (5.59)$$

uma vez que a condição inicial de velocidade se escreve:

$$\{x\}_{-1} = \{x\}_1 - 2\Delta t \{\dot{x}\}_0 \quad (5.60)$$

cabendo-se enfatizar que a solução da equação de recorrência (5.58) envolve a inversão de uma combinação da matriz de massa com a matriz de amortecimento, algo expedito no caso em que a matriz de amortecimento venha a ser proporcional à matriz de massa, que por sua vez, é diagonal; o mesmo ocorrendo com a equação (5.59) do primeiro passo. Por essa razão, o algoritmo de integração das diferenças finitas centrais é denominado explícito.

A formulação da integração via método de Newmark envolve em forma vetorial os operadores expressos em (4.46), ou seja:

$$\begin{aligned} \Delta t \{\dot{x}\}_{i+1} - \Delta t \{\dot{x}\}_i - (1-\delta)\Delta t^2 \{\ddot{x}\}_i - \delta\Delta t^2 \{\ddot{x}\}_{i+1} &= \{0\} \\ \{x\}_{i+1} - \{x\}_i - \Delta t \{\dot{x}\}_i - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \{\ddot{x}\}_i - \beta\Delta t^2 \{\ddot{x}\}_{i+1} &= \{0\} \end{aligned} \quad (5.61)$$

mais a consideração de apropriadas equações de equilíbrio nos passos  $i$  e  $i+1$ , ou seja:

$$\begin{aligned} [m] \Delta t^2 \{\ddot{x}\}_i &= -[c] \Delta t^2 \{\dot{x}\}_i - [k] \Delta t^2 \{x\}_i + \Delta t^2 \{P\}_i \\ [m] \Delta t^2 \{\ddot{x}\}_{i+1} &= -[c] \Delta t^2 \{\dot{x}\}_{i+1} - [k] \Delta t^2 \{x\}_{i+1} + \Delta t^2 \{P\}_{i+1} \end{aligned} \quad (5.62)$$

resultando na equação de recorrência:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [m] + \delta\Delta t [c] & \delta\Delta t^2 [k] \\ \beta\Delta t [c] & [m] + \beta\Delta t^2 [k] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix}_{i+1} &= \\ \begin{bmatrix} [m] - (1-\delta)\Delta t [c] & -(1-\delta)\Delta t^2 [k] \\ [m] - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t [c] & [m] - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 [k] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix}_i &+ \begin{bmatrix} 1-\delta & \delta \\ \frac{1}{2} - \beta & \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t^2 \{P\}_i \\ \Delta t^2 \{P\}_{i+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.63)$$

valendo-se notar que essa expressão de recorrência não envolve a inversão de uma matriz de ordem dobrada em relação ao grau de liberdade, uma vez que a decomposição de Choleski do sistema:

$$\begin{bmatrix} [m] + \delta\Delta t [c] & \delta\Delta t^2 [k] \\ \beta\Delta t [c] & [m] + \beta\Delta t^2 [k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{\ell} & 0 \\ A_{21}^{\ell} & A_{22}^{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}^u & B_{12}^u \\ 0 & B_{22}^u \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

resolve-se facilmente, pois:

$$\begin{aligned} A_{11}^{\ell} B_{11}^u &= [m] + \delta\Delta t [c] \\ A_{11}^{\ell} B_{12}^u &= \delta\Delta t^2 [k] \\ A_{21}^{\ell} B_{11}^u &= \beta\Delta t [c] \\ A_{21}^{\ell} B_{12}^u + A_{22}^{\ell} B_{22}^u &= [m] + \beta\Delta t^2 [k] \end{aligned} \quad (5.65)$$

e que, por outro lado, assumindo-se como identidade a matriz  $A_{11}^{\ell}$ , o expresso em (5.65) permite escrever-se:

$$\begin{aligned} B_{12}^u &= \delta\Delta t^2 [k] \\ B_{11}^u &= [m] + \delta\Delta t [c] \\ A_{21}^{\ell} &= (\beta\Delta t [c]) ([m] + \delta\Delta t [c])^{-1} \\ A_{22}^{\ell} B_{22}^u &= [m] + \beta\Delta t^2 [k] + (\beta\Delta t [c]) ([m] + \delta\Delta t [c])^{-1} (\delta\Delta t^2 [k]) \end{aligned} \quad (5.66)$$

exigindo-se, pois, para a obtenção da matriz  $A_{22}^{\ell} B_{22}^u$ , apenas a decomposição de uma matriz, como mostra a quarta equação de (5.66), cuja ordem é exatamente dada pelo número de graus de liberdade. Além disso, por envolver a inversão de uma matriz que contempla a matriz de rigidez, o método de Newmark é então dito implícito.

Uma versão de passo duplo do método de Newmark foi desenvolvida por Warburton<sup>2</sup> com a seguinte escrita:

<sup>2</sup> Warburton G. B., *The dynamic Behaviour of Structures*, Pergamon Press. 2a. Ed. (1976).

$$\begin{aligned}
 & \left( [m] + \frac{\Delta t}{2} [c] + \beta \Delta t^2 [k] \right) \{x\}_{i+1} = \Delta t^2 \left[ \beta \{P\}_{i+1} + (1-2\beta) \beta \{P\}_i + \beta \{P\}_{i-1} \right] + \\
 & \left( 2[m] - \Delta t^2 (1-2\beta) [k] \right) \{x\}_i - \left( [m] - \frac{\Delta t}{2} [c] + \beta \Delta t^2 [k] \right) \{x\}_{i-1} \\
 & \left( [m] + \frac{\Delta t}{2} [c] + \beta \Delta t^2 [k] \right) \{x\}_1 = \\
 & \Delta t^2 \left( \beta \{P\}_1 + \left[ (1-2\beta) [I] + \left( \frac{1}{4} - \beta \right) \Delta t [c] [m]^{-1} \right] \{P\}_0 \right)
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

sendo que a matriz a ser invertida é a mesma na expressão de recorrência e na determinação do primeiro passo.

### 5.9- Estabilidade dos métodos diretos de integração numérica

A equação de equilíbrio dinâmico sendo escrita na forma:

$$[A]^T \left( [m][A] \{\ddot{q}\} + (\lambda_m [m] + \lambda_k [k])[A] \{\dot{q}\} + [k][A] \{q\} \right) = [A]^T \{P\} \tag{5.68}$$

resulta, face à ortogonalidade dos modos de vibração, nas equações modais desacopladas, ou seja:

$$\{\ddot{q}\} + (\lambda_m [I] + \lambda_k [\Omega^2]) \{\dot{q}\} + [\Omega^2] \{q\} = ([A]^T [m][A])^{-1} [A]^T \{P\} \tag{5.69}$$

onde:

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{5.70}$$

ficando-se evidente que, no caso de estabilidade condicional, a exemplo do método das diferenças finitas centrais exposto em (4.30), cuja estabilidade é expressa pela condição ( $\theta_i < 2$ ), ou seja:

$$\frac{\Delta t}{T_i} < \frac{1}{\pi} \tag{5.71}$$

acaba sendo um tremendo inconveniente, pois a malha no tempo acaba ficando extremamente refinada em razão da mais alta frequência em jogo, quando na prática apenas os movimentos envolvendo algumas poucas frequências são significativas, e de interesse. Por essa razão torna-se necessário contar com integradores incondicionalmente estáveis. Em verdade, algoritmos providos de aniquilamento assintótico, nos quais o módulo dos autovalores no limite tende para zero com  $\Delta t$  tendendo para o infinito, são ainda preferidos; afinal, nessas condições as contribuições das componentes de frequência mais alta são aniquiladas na integração.

É oportuno ainda assinalar que a inversão matricial indicada em (5.69) é trivial, pois se trata de matriz diagonal em razão da ortogonalidade dos modos de vibração.

### 5.10- Método do autovalor complexo

O método de integração da equação de movimento conhecido como método do autovalor complexo tem a vantagem de contemplar amortecimento não proporcional, mas a desvantagem de se trabalhar com notação complexa, resultando-se no aumento em dobro da ordem das matrizes envolvidas.

O método em questão toma por base uma nova escrita da equação de movimento, qual seja:

$$\begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} \quad (5.72)$$

que consiste numa equação equilíbrio mediante formulação matricial com ordem dobrada em relação à formulação até aqui empregada, escrevendo-se ainda como:

$$[M]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{\bar{P}\} \quad (5.73)$$

onde

$$\begin{aligned} \{y\} &= \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix} \\ \{\bar{P}\} &= \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} \\ [M] &= \begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix} \\ [K] &= \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.74)$$

que consiste numa equação diferencial de primeira ordem, cuja solução pode ser formulada em termos de superposição modal, mas com modos complexos, como exposto no que se segue. Tal formulação foi inicialmente sugerida para integração da equação de movimento por Hurty e Rubinstein<sup>3</sup>.

A vibração livre é, pois, expressa por:

$$[M]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{0\} \quad (5.75)$$

cuja solução, por inspeção, é sabidamente do tipo:

$$\{y\} = \{A^*\} e^{-\lambda t} \quad (5.76)$$

resultando-se no problema de autovalor:

$$([K] - \lambda[M])\{A^*\} = \{0\} \quad (5.77)$$

cujos autovalores, em número igualmente dobrado, são complexos, d'aí o nome do método, bem como igualmente os autovetores, ou seja:

$$\begin{aligned} j &= 1 \dots n \rightarrow \lambda_j \\ \ell &= n/2 + 1 \dots 2n \rightarrow \lambda_\ell = \bar{\lambda}_j \\ j &= 1 \dots n \rightarrow \{A^*\}_j \\ \ell &= n/2 + 1 \dots, 2n \rightarrow \{A^*\}_\ell = \{\bar{A}^*\}_j \end{aligned} \quad (5.78)$$

<sup>3</sup> Hurty, W.C. e Rubinstein, M.F., *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. (1964).

adotando-se o seguinte arranjo: na primeira metade consideram-se os  $n$  primeiros autovalores, e na segunda os autovalores conjugados complexos correspondentes, indicados por barras superiores, na mesma ordem; o mesmo valendo para os correspondentes autovetores, lembrando-se que, na determinação das componentes dos autovetores segundo (5.77), estão envolvidos sistemas lineares de equação, proporcionando-se a correspondência dos autovalores conjugados complexos e seus conjugados complexos autovetores.

Os autovetores de (5.77) são ortogonais em relação às matrizes envolvidas em decorrência do fato de serem ambas simétrica (vide (5.72)), facultando-se a redação da superposição modal:

$$\{y\} = \sum_{\ell=1}^{2n} q_{\ell} \{A^*\}_{\ell} = [A^*] \{q\} \quad (5.79)$$

sendo os autovetores as colunas da matriz  $[A^*]$ , resultando-se na equação de equilíbrio modal:

$$\dot{q}_{\ell} + \lambda_{\ell} q_{\ell} = \frac{\{A^*\}_{\ell}^T \{\bar{P}\}}{\{A^*\}_{\ell}^T [M] \{A^*\}_{\ell}} \quad (5.80)$$

cuja solução é dada pela convolução (vide (4.107)):

$$q_{\ell} = q_{\ell 0} e^{-\lambda_{\ell} t} + \int_0^t e^{-\lambda_{\ell}(t-\tau)} \frac{\{A^*\}_{\ell}^T \{\bar{P}(\tau)\}}{\{A^*\}_{\ell}^T [M] \{A^*\}_{\ell}} d\tau \quad (5.81)$$

onde  $q_{\ell 0}$  vem a ser a condição inicial modal.

A título de exemplificação, no caso de um grau de liberdade, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & m \\ m & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix}$$

resultando-se no problema de autovalores:

$$\begin{bmatrix} -m & -\lambda m \\ -\lambda m & k - c\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

sendo a correspondente equação característica:

$$-mk + mc\lambda - m\lambda^2 = 0$$

cujos autovalores, também denominados polos do sistema, são expressos por:

$$\lambda_{1,2} = \gamma\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\gamma^2}$$

e os correspondentes autovetores:

$$\lambda_1 \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ -1/\lambda_1 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ -1/\lambda_2 \end{Bmatrix}$$

e os equilíbrios modais por:

$$\dot{q}_1 + \lambda_1 q_1 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & -1/\lambda_1 \end{Bmatrix}}{m_1} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

$$\dot{q}_2 + \lambda_2 q_2 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & -1/\lambda_2 \end{Bmatrix}}{m_2} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

onde:

$$m_1 = -m/\lambda_1 + c/\lambda_1^2$$

$$m_2 = -m/\lambda_2 + c/\lambda_2^2$$

cuja integração resulta:

$$q_1 = q_{10}e^{-\lambda_1 t} + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-\tau)} \frac{\begin{Bmatrix} 1 & -1/\lambda_1 \end{Bmatrix}}{m_1} \begin{Bmatrix} 0 \\ P(\tau) \end{Bmatrix} d\tau$$

$$q_2 = q_{20}e^{-\lambda_2 t} + \int_0^t e^{-\lambda_2(t-\tau)} \frac{\begin{Bmatrix} 1 & -1/\lambda_2 \end{Bmatrix}}{m_2} \begin{Bmatrix} 0 \\ P(\tau) \end{Bmatrix} d\tau$$

onde, em decorrência de (5.79) que tem, nesse caso, a redação:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/\lambda_1 & -1/\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

as correspondentes condições iniciais modais ganham a escrita:

$$q_{10} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{\dot{x}_0}{\lambda_2} + x_0 \right)$$

$$q_{20} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{\dot{x}_0}{\lambda_1} + x_0 \right)$$

e, assim sendo, tem-se:

$$x = \left\{ -1/\lambda_1 \quad -1/\lambda_2 \right\} \left[ \begin{array}{l} \left\{ q_{10} e^{-\lambda_1 t} \right\} \\ \left\{ q_{20} e^{-\lambda_2 t} \right\} \end{array} + \int_0^t \left[ \begin{array}{l} e^{-\lambda_1(t-\tau)} \frac{\{1 \quad -1/\lambda_1\}}{m_1} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ P(\tau) \end{array} \right\} d\tau \\ e^{-\lambda_2(t-\tau)} \frac{\{1 \quad -1/\lambda_1\}}{m_2} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ P(\tau) \end{array} \right\} d\tau \end{array} \right] \right]$$

resultando-se, depois de operações algébricas de certa monta, no exposto em (3.20); ficando-se evidente que esse caminho para integração no tempo não é lá muito prático.

Todavia, no domínio da frequência, essa formulação tem sido empregada em análise modal, referida como “pole/residual form”, porquanto as transformadas de Fourier dos equilíbrios modais são expressas por:

$$q_1(\omega) = \frac{1}{\lambda_1 + i\omega} \frac{\{1 \quad -1/\lambda_1\}}{m_1} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ P(\omega) \end{array} \right\}$$

$$q_2(\omega) = \frac{1}{\lambda_2 + i\omega} \frac{\{1 \quad -1/\lambda_2\}}{-m/\lambda_2 + c/\lambda_2^2} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ P(\omega) \end{array} \right\}$$

assumindo-se condições iniciais de repouso, e assim sendo, tem-se:

$$x(\omega) = \left\{ -1/\lambda_1 \quad -1/\lambda_2 \right\} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda_1 + i\omega} \frac{\{1 \quad -1/\lambda_1\}}{m_1} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ P(\omega) \end{array} \right\} \\ \frac{1}{\lambda_2 + i\omega} \frac{\{1 \quad -1/\lambda_2\}}{m_2} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ P(\omega) \end{array} \right\} \end{array} \right]$$

ou seja:

$$\mathbf{x}(\omega) = \left( \frac{\mathbf{R}_1}{\lambda_1 + i\omega} + \frac{\mathbf{R}_2}{\lambda_2 + i\omega} \right) \mathbf{P}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{P}(\omega)$$

onde:

$$\mathbf{R}_1 = (-1/\lambda_1) \frac{-1/\lambda_1}{m_1}$$

$$\mathbf{R}_2 = (-1/\lambda_2) \frac{-1/\lambda_2}{m_2}$$

são denominados os resíduos correspondentes, aproveitando-se da notação do teorema dos resíduos, objeto do apêndice do Capítulo III no item 3.11; sendo oportuno chamar a atenção para o fato de que  $\lambda_2$  é o conjugado complexo de  $\lambda_1$ , bem como  $\mathbf{R}_2$  é o conjugado complexo de  $\mathbf{R}_1$ .

No caso de vários graus de liberdade tem-se, por extensão:

$$\{\mathbf{x}(\omega)\} = [\mathbf{A}^*][\tilde{\mathbf{A}}] \left\{ \begin{array}{l} \{0\} \\ \{\mathbf{P}(\omega)\} \end{array} \right\}$$

onde os elementos da matriz  $[\tilde{\mathbf{A}}]$  são dados por:

$$\tilde{a}_{jk} = \frac{1}{\lambda_k + i\omega} \frac{a_{kj}^*}{m_k}$$

resultando-se, por exemplo, que a resposta do grau liberdade  $j$  provocada por uma carga aplicada no grau de liberdade  $k$  é expressa por:

$$x_j(\omega) = \left[ \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mathbf{R}_k}{\lambda_k + i\omega} + \frac{\bar{\mathbf{R}}_k}{\bar{\lambda}_k + i\omega} \right) \right] \mathbf{P}_k(\omega)$$

onde:

$$\mathbf{R}_k = \{\mathbf{A}^*\} \{\tilde{\mathbf{A}}^*\}^T$$

$$\bar{\mathbf{R}}_k = \{\bar{\mathbf{A}}^*\} \{\tilde{\mathbf{A}}^*\}^T$$

com os elementos do vetor  $\{\tilde{A}^*\}$  dados por:

$$\tilde{a}_k^* = \frac{a_k^*}{m_k}$$

valendo-se assinalar que se trata de uma notação um pouco estranha, mas comumente empregada em textos sobre o tema. Cumpre notar que, a exemplo do algoritmo exposto em (5.7), a ordem das matrizes complexas é também igual ao número de graus de liberdade do sistema, o que torna essa variante atrativa, pois, além disso não há a restrição de amortecimento proporcional

### 5.11- Estudo da solução harmônica permanente em notação complexa

Em notação complexa, a equação de movimento pode ser escrita na forma:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{P\}e^{i\omega t} = P(\cos\omega t + isen\omega t) \quad (5.82)$$

e, supondo-se amortecimento proporcional, a solução permanente formulada em termos da superposição modal se escreve:

$$\begin{aligned} \{x_p\} &= [A]\{q_p\} \\ q_{pj} &= \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\{A\}_j^T \{P\}}{\{A\}_j^T [m] \{A\}_j} \frac{e^{i(\omega t - \theta_j)}}{\sqrt{(1 - \alpha_j^2)^2 - 4\gamma_j^2 \alpha_j^2}} \\ \alpha_j &= \frac{\omega}{\omega_j} \\ \theta_j &= \text{arc.tg} \frac{2\gamma_j \alpha_j}{1 - \alpha_j^2} \end{aligned} \quad (5.83)$$

devendo-se ressaltar a parte real de  $q_{pj}$  é a solução da solicitação cossenoidal e a parte complexa a solução da solicitação senoidal, como já mencionado no item 5.6. Assim, no caso de solicitação senoidal tem-se:

$$q_{pj} = \bar{A}_j \text{sen}(\omega t - \theta_j) \quad (5.84)$$

onde:

$$\dot{\mathbf{q}}_\ell + \lambda_\ell \mathbf{q}_\ell = \frac{\{\mathbf{A}^*\}_\ell^T \{\bar{\mathbf{P}}\}}{\{\mathbf{A}^*\}_\ell^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{A}^*\}_\ell} \quad (5.85)$$

resultando, no caso de dois graus de liberdade, por exemplo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{A}_1 \text{sen}(\omega t - \theta_1) + \bar{A}_2 \text{sen}(\omega t - \theta_2) = A_1^* \text{sen}(\omega t - \psi_1) \\ x_2 &= \bar{A}_1 \beta_1 \text{sen}(\omega t - \theta_1) + \bar{A}_2 \beta_2 \text{sen}(\omega t - \theta_2) = A_2^* \text{sen}(\omega t - \psi_2) \end{aligned} \quad (5.86)$$

onde

$$\begin{aligned} A_1^* &= \sqrt{\bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2 + 2\bar{A}_1\bar{A}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\ A_2^* &= \sqrt{\bar{A}_1^2 \beta_1^2 + \bar{A}_2^2 \beta_2^2 + 2\bar{A}_1\bar{A}_2 \beta_1 \beta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\ \text{arc.tg} \psi_1 &= \frac{\bar{A}_1 \text{sen} \theta_1 + \bar{A}_2 \text{sen} \theta_2}{\bar{A}_1 \cos \theta_1 + \bar{A}_2 \cos \theta_2} \\ \text{arc.tg} \psi_2 &= \frac{\bar{A}_1 \beta_1 \text{sen} \theta_1 + \bar{A}_2 \beta_2 \text{sen} \theta_2}{\bar{A}_1 \beta_1 \cos \theta_1 + \bar{A}_2 \beta_2 \cos \theta_2} \end{aligned} \quad (5.87)$$

podendo-se, pois, concluir que no caso de n graus de liberdade a resposta permanente pode ser expressa na forma:

$$x_j = \tilde{A}_j \text{sen}(\omega t - \tilde{\psi}_j) \quad (5.88)$$

onde a amplitude do movimento se expressa genericamente:

$$\tilde{A}_j = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 + \delta_1 A_1 A_2 \cos(\psi_2 - \tilde{\theta}_j) + \dots} \quad (5.89)$$

que consiste na relação que dá origem ao critério chamado da raiz quadrada da combinação quadrática (SRSS) para avaliar a resposta permanente de sistemas com vários graus de liberdade ao se desprezar os termos cruzados ou seja:

$$\tilde{A}_j = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2} \quad (5.90)$$

ou ainda o critério da combinação quadrática completa (CQC):

$$\tilde{A}_j = \sqrt{\sum_k \sum_{\ell} \rho_{j\ell} A_{jk} A_{j\ell}} \quad (5.91)$$

sendo o fator de combinação expresso, por exemplo, no caso de terremotos com espectro suave, por:

$$\rho_{k\ell} = \frac{8\gamma^2(1+\alpha)\alpha^{3/2}}{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha(1+\alpha)^2} \quad (5.92)$$

onde  $\alpha = \omega_\ell / \omega_k$  e assumindo-se amortecimento constante com a frequência.

Um exemplo interessante de dois graus de liberdade foi apresentado na página 83 do livro já citado do Warburton, cujos dados são:

$$\begin{aligned} m_1 &= 2m_2 = 2m \\ k_{11} &= 3k_{22} = -3k_{12} = 3k \\ c_{11} &= 1.5c_{22} = -1.5c_{12} = 3c \\ \{P\} &= \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \text{sen}\omega t \end{aligned}$$

sendo que a solução particular em notação complexa pode ser assumida como:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

e sendo que a solução particular procurada é a parte complexa do resultado final.

A equação de movimento para essa solução particular fica então:

$$\left( \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} 3c & -2c \\ -2c & 2c \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} [(3-2\alpha^2) + 3\alpha\gamma i] & [-1-2\alpha\gamma i] \\ [-1-2\alpha\gamma i] & [(1-\alpha^2) + 2\alpha\gamma i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1/k \\ P_2/k \end{Bmatrix}$$

onde:

$$\alpha = \omega / \omega_0$$

$$\gamma = c / m\omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{k / m}$$

cuja solução, fazendo-se a inversão formulada pela técnica da transposta da cofator, se expressa:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} [(1-\alpha^2) + 2\alpha\gamma i] & [1 + 2\alpha\gamma i] \\ [1 + 2\alpha\gamma i] & [(3-2\alpha^2) + 3\alpha\gamma i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 / k \\ P_2 / k \end{Bmatrix}$$

onde:

$$\det[J] = 2 - 5\alpha^2 + 2\alpha^4 - 2\gamma\alpha^2 + \gamma(5\alpha - 7\alpha^2)i$$

ou seja:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{P_2}{k} \begin{Bmatrix} \frac{\eta(1-\alpha^2) + 1 + 2\gamma\alpha(1+\eta)i}{2 - 5\alpha^2 + 2\alpha^4 - 2\gamma\alpha^2 + \gamma(5\alpha - 7\alpha^3)i} \\ \frac{\eta + 3 - 2\alpha^2 + \gamma\alpha(3 + 2\eta)i}{2 - 5\alpha^2 + 2\alpha^4 - 2\gamma\alpha^2 + \gamma(5\alpha - 7\alpha^3)i} \end{Bmatrix}$$

onde se considera  $P_1 = \eta P_2$ . Tomando-se agora em módulo essa solução complexa, tem-se:

$$|x_1| = \sqrt{\frac{(\eta(1-\alpha^2) + 1)^2 + (2\gamma\alpha(1+\eta))^2}{(2 - 5\alpha^2 + 2\alpha^4 - 2\gamma\alpha^2)^2 + (\gamma(5\alpha - 7\alpha^3))^2}}$$

$$|x_2| = \sqrt{\frac{(\eta + 3 - 2\alpha^2)^2 + (\gamma\alpha(3 + 2\eta))^2}{(2 - 5\alpha^2 + 2\alpha^4 - 2\gamma\alpha^2)^2 + (\gamma(5\alpha - 7\alpha^3))^2}}$$

bem como as correspondentes fases:

$$\theta_1 = \text{arc.tg} \frac{B_1 C - A_1 D}{A_1 C + B_1 D}$$

$$\theta_2 = \text{arc.tg} \frac{B_2 C - A_2 D}{A_2 C + B_2 D}$$

onde:

$$\begin{aligned} A_1 &= \eta(1 - \alpha^2) + 1 \\ A_2 &= \eta + 3 - 2\alpha^2 \\ B_1 &= 2\gamma\alpha(1 + \eta) \\ B_2 &= \gamma\alpha(3 + 2\eta) \\ C &= 2 - 5\alpha^2 + 2\alpha^4 - 2\gamma\alpha^2 \\ D &= \gamma(5\alpha - 7\alpha^3) \end{aligned}$$

ficando-se claro que a igualdade das fases, ou seja:

$$\frac{B_1(C - DA_1 / B_1)}{A_1(C + DB_1 / A_1)} = \frac{B_2(C - DA_2 / B_2)}{A_2(C + DB_2 / A_2)}$$

implicando-se:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2}$$

ou seja:

$$2\alpha^2\eta^2 + (3 - \alpha^2)\eta - 4\alpha^2$$

indicando-se que, para um dado valor de  $\eta$ , existem duas frequências nas quais os movimentos  $X_1$  e  $X_2$  estão em fase; o mesmo ocorrendo para uma dada frequência implicando duas proporções  $\eta$  nas quais o movimento dos dois graus de liberdade também estarão em fase. Essas propriedades, que continuam válidas para qualquer número de graus de liberdade, são exploradas em estudos da análise modal.

### 5.12- Estudo da solução harmônica permanente com amortecimento histerético.

Um outro exemplo de aplicação apresentado no livro de Warburton já citado, consiste numa variante do método do autovalor complexo, considerando-se amortecimento histerético proporcional à rigidez. A equação de movimento nesse caso é expressa por

$$m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \frac{(0.1)k}{\omega} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

e, tendo-se em conta que:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = i\omega \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

e a equação de movimento ganhando a redação:

$$m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \left( 0.1k \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

na qual a matriz de rigidez agora é complexa, e cuja solução pode ser formulada em termos de superposição modal. Os autovalores são dados por:

$$\det \begin{vmatrix} k(3+0.3i) - 2m\omega^2 & -k(1+0.2i) \\ -k(1+0.2i) & k(1+0.2i) - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

ou ainda:

$$\det \begin{vmatrix} (3+0.3i) - 2m\alpha^2 & -(1+0.2i) \\ -(1+0.2i) & (1+0.2i) - m\alpha^2 \end{vmatrix} = 0$$

onde  $\alpha = \omega / \omega_0$  e  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , resultando na equação característica:

$$2\alpha^4 - (5+0.7i)\alpha^2 + (3+0.3i)(1+0.2i) - (1-0.2i)^2 = 0$$

cujas raízes e correspondentes autovetores são:

$$\alpha_1 = 1.997 + 0.3005i \rightarrow \begin{Bmatrix} 1.955 - 0.19i \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\alpha_2 = 0.5032 + 0.04946i \rightarrow \begin{Bmatrix} -1.013 - 0.09845i \\ 1 \end{Bmatrix}$$

A título de exemplificação, considere-se o caso de solicitação em ressonância com a primeira frequência natural, ou seja  $\omega = \omega_1 = \omega_0 / \sqrt{2}$  e  $P_1 = -0.5P_2$ , tem-se:

$$q_1 = \frac{\{1.955 - 0.19i \quad 1\} \begin{Bmatrix} -0.5P_2 \\ P_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}}{\omega_0^2(\alpha^2 - 0.5)[m(3.017 + 0.1995i)]}$$

$$q_2 = \frac{\{-1.013 - 0.09845i \quad 1\} \begin{Bmatrix} -0.5P_2 \\ P_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}}{\omega_0^2(\alpha^2 - 0.5)[m(5.788 - 0.7431i)]}$$

resultando-se na solução:

$$x_1 = q_1 + q_2 = -5i \frac{P_2}{k} e^{i\omega t} = -5 \frac{P_2}{k} [i(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t)]$$

$$x_2 = (1.955 - 0.19i)q_1 + (-1.013 - 0.09845i)q_2 =$$

$$-5 = 10i \frac{P_2}{k} e^{i\omega t} = -10 \frac{P_2}{k} [i(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t)]$$

ou ainda, considerando-se solicitação senoidal:

$$x_1 = 5 \frac{P_2}{k} \operatorname{sen}(\omega t - \pi / 2)$$

$$x_1 = 10 \frac{P_2}{k} \operatorname{sen}(\omega t - \pi / 2)$$

uma vez que a parte complexa da solução é  $-\cos \omega t = \operatorname{sen}(\omega t - \pi / 2)$ .

Vale finalmente assinalar que alguns autores introduzem o amortecimento complexando o módulo de elasticidade, ou seja:

$$E = E(1 + i\omega\gamma)$$

trabalhando-se assim com matriz de rigidez complexa. Trata-se, pois, apenas de uma elegância analítica, uma vez que a abordagem com notação complexa aumenta desnecessariamente o volume de operações.

### 5.13-Exemplo de aplicação

Um sistema de dois graus de liberdade submetido a uma aceleração de base  $\ddot{x}_0 = x_0 \omega_0^2 e^{-\omega_0 t}$  tem as seguintes características:

$$\begin{aligned} \gamma(\omega = \omega_1) \\ m_{11} = 2m_{22} = m \\ k_1 = 3k_{22} = 3k \\ k_{12} = k_{21} = -k \\ [C] = \lambda_m [M] \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{aligned}$$

sendo  $\omega_1$  a primeira frequência natural, e a matriz de amortecimento é proporcional à matriz de massa, pede-se a resposta sabendo-se que as condições iniciais são as de repouso.

Solução:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \lambda_m \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} m \omega_0^2 x_0 e^{-\omega_0 t}$$

$$\det \left[ \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\omega^4 - 2.5\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \omega_0 / \sqrt{2} \\ \omega_2 = \sqrt{2}\omega_0 \end{cases} \rightarrow \text{autovetores} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}_1 \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}_2$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$P_1 = - \{1 \ 2\} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} m \omega_0^2 x_0 e^{-\omega_0 t} = -4m \omega_0^2 x_0 e^{-\omega_0 t}$$

$$P_1 = - \{1 \ -1\} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} m \omega_0^2 x_0 e^{-\omega_0 t} = -m \omega_0^2 x_0 e^{-\omega_0 t}$$

$$\{1 \ 2\} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 6m \quad \{1 \ -1\} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 3m$$

$$\gamma_i = \frac{\lambda_1}{2\omega_1} \quad \gamma_1 = 0.01 = \frac{\lambda_m}{2\omega_1} \rightarrow \lambda_m = 0.02\omega_1 \rightarrow \gamma_2 = \frac{\lambda_m}{\omega_2} = 0.05$$

$$\Omega_1 = \omega_1 \sqrt{1 - \gamma^2} \approx \omega_1 \rightarrow \Omega_2 \approx \omega_2$$

$$\ddot{q}_1 + 0.02\omega_1\dot{q}_1 + \omega_1^2q_1 = -\frac{4x_0}{3}\omega_1^2e^{-\omega_0 t} \quad \alpha_1 = \frac{\omega_0}{\omega_1} = \sqrt{2}$$

$$\ddot{q}_2 + 0.01\omega_1\dot{q}_2 + \omega_2^2q_2 = -\frac{x_0}{6}\omega_2^2e^{-\omega_0 t} \quad \alpha_2 = \frac{\omega_0}{\omega_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\omega_0}{\omega_1} = \sqrt{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega_0}{\omega_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$q_1 = -\frac{4x_0}{3} [E(\omega_1 t, \alpha_1, \gamma_1)]$$

$$q_2 = -\frac{x_0}{6} [E(\omega_2 t, \alpha_2, \gamma_2)]$$

$$E(\omega_n t, \alpha, \gamma) = \frac{1}{\alpha^2 - 2\gamma\alpha + 1} \left[ e^{-\gamma\omega_n t} \left( \frac{\alpha - \gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \text{sen}(\Omega t) - \cos(\Omega t) \right) + e^{-\omega t} \right]$$

e o movimento absoluto dado por:

$$\dot{x}_0 = \int \ddot{x} dt = x_0 \omega_0^2 \int \frac{1}{-\omega_0} e^{-\omega_0 t} (-\omega_0) dt = x_0 \omega_0^2 \left( C - \frac{1}{\omega_0} e^{-\omega_0 t} \right)$$

$$\dot{x}_0(t=0) = 0$$

$$x_0 = \int \dot{x} dt$$

$$x_0(t=0) = 0$$

$$\ddot{x}_0 = x_0 \omega_0^2 e^{-\omega_0 t}$$

$$\dot{x}_0 = x_0 (\omega_0 - \omega_0 e^{-\omega_0 t})$$

$$x_0 = x_0 (-1 + \omega_0 t + e^{-\omega_0 t})$$

$$X_1 = x_1 + x_0$$

$$X_2 = x_2 + x_0$$

onde  $X_1$  e  $X_2$  são os movimentos absolutos.

### 5.14- Exercícios propostos

1- Para o sistema de dois graus de liberdade do exemplo de aplicação pede-se a resposta sabendo-se que a sollicitação é dada por:

$$\begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix} f(t) \rightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq T_0/4 \rightarrow f(t) = 1 - \cos \omega_0 t \\ t \geq T_0/4 \rightarrow f(t) = 1 \\ T_0 = 2\pi / \omega_0 \end{cases}$$

Resposta.

$$0 \leq t \leq T_0/4$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

$$q_1 = \frac{5P}{3k} [(F(\omega_1 t, \gamma_1) - \phi(\omega_1 t, \alpha_1, \gamma_1))]$$

$$q_2 = -\frac{P}{6k} [(F(\omega_2 t, \gamma_2) - \phi(\omega_2 t, \alpha_2, \gamma_2))]$$

$$t \geq T_0/4$$

$$q_1(t^*) = \frac{5P}{3k} [(F(\omega_1 t^*, \gamma_1))] + q_{1h}(t^*)$$

$$q_2(t^*) = -\frac{P}{6k} [(F(\omega_2 t^*, \gamma_2))] + q_{2h}(t^*)$$

$$t^* = t - T_0/4$$

$$q_i(t = T_0/4) = q_i(t^* = 0)$$

$$\dot{q}_i(t = T_0/4) = \dot{q}_i(t^* = 0)$$

2-Sabendo-se que a solicitação da estrutura ( $m_1 = 2m = 2m_2$ ,  $k_{11} = 2k_{22} = -2k_{12} = 2k$ ) e amortecimento proporcional à matriz de massa, com amortecimento do primeiro modo valendo 0.02 é dada por um carregamento expresso por  $P_1(t) = Pf(t)$  e  $P_2(t) = 0$ , com  $f(t) = 0$  para  $t \leq 0$ ,  $f(t) = |\text{sen} \omega_0 t|$  para  $0 \leq t \leq T_0$ , com  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  e  $f(t) = 0$  para  $t \geq T_0$ , pede-se a resposta da estrutura  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ . As condições iniciais são de repouso. Pede-se também formular a solução pelo método das diferenças centrais com  $\Delta t = T_0/8$ .

Resposta

VIBRAÇÃO DAS ESTRUTURAS

$$\omega_1 = 0.542\omega_0 \rightarrow \gamma_1 = 0.02$$

$$\omega_2 = 0.1307\omega_0 \rightarrow \gamma_2 = 0.000818$$

$$\sqrt{1-\gamma_i^2} \approx 1 \rightarrow \omega_1 = \Omega_1 \rightarrow \omega_2 = \Omega_2$$

$$\beta_1 = -\beta_2 = 1.414$$

$$0 \leq t \leq T_0/2$$

$$q_i(t) = A_i \psi_i(\alpha_i, \gamma_i, \omega_i t) = \frac{A_i}{(1-\alpha_i^2)^2 + 4\gamma_i^2 \alpha_i^2} \left[ e^{-\gamma_i \omega_i t} \left( \frac{(2\gamma_i^2 + \alpha_i^2 - 1)\alpha_i}{\sqrt{1-\gamma_i^2}} \text{sen}(\Omega_i t) + 2\gamma_i \alpha_i \cos(\Omega_i t) \right) + (1-\alpha_i^2) \text{sen}(\omega_0 t) - 2\gamma_i \alpha_i \cos(\omega_0 t) \right]$$

$$A_1 = 0.8535P/k$$

$$A_2 = 0.146P/k$$

$$T_0/2 \leq t \leq T_0$$

$$q_i(t^*) = A_i \psi(t^*) + q_{ih}(t^*)$$

$$t^* = t - T_0/4$$

$$q_{ih}(t^*) = e^{-\gamma \omega_n t^*} \left[ \frac{\dot{q}_i(t = T_0/2) - \gamma \omega_n q_i(t = T_0/2)}{\Omega_i} \text{sen}(\Omega_i t^*) + q_i(t = T_0/2) \cos(\Omega_i t^*) \right]$$

$$t \geq T_0$$

$$q_{ih}(t^{**}) = e^{-\gamma \omega_n t^{**}} \left[ \frac{\dot{q}_i(t^* = T_0) + \gamma_i \omega_i q_i(t^* = T_0)}{\Omega_i} \text{sen}(\Omega_i t^{**}) + q_i(t = T_0/2) \cos(\Omega_i t^{**}) \right]$$

$$t^{**} = t - T_0$$

Diferenças centrais

$$\begin{bmatrix} 1.983 & 0 \\ 0 & 0.9150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0.5042 & 0 \\ 0 & 0.5042 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (0.6168P/k)f(t=0) \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} (0.3110P/k) \operatorname{sen}(0\pi/4) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.983 & 0 \\ 0 & 0.9150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 2.766 & 0.6168 \\ 0.6168 & 1.3832 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_i - \begin{bmatrix} 1.983 & 0 \\ 0 & 0.9150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{i-1}$$

$$+ \begin{Bmatrix} (0.6168P/k) \operatorname{sen}(i\pi/4) \\ 0 \end{Bmatrix}_i$$

3- Para um sistema estrutural de dois graus de liberdade com as seguintes características:

$$m_{11} = 2m_{22} = 2m$$

$$k_1 = 3k_{22} = 3k$$

$$k_{12} = k_{21} = -k$$

$$[C] = \lambda_m [M]$$

$$\gamma = 0.01(\text{para } \omega = \omega_1)$$

$$\begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix} f(t)$$

sendo

$$0 \leq t \leq T_1/4 \quad f(t) = \frac{t}{T_1^2} \left( t - \frac{T_1}{4} \right) \quad t^* = t - T_1/4$$

$$T_1/4 \leq t \leq T_1/2 \quad f(t) = \frac{t^*}{T_1^2} \left( t^* - \frac{T_1}{4} \right) \quad \omega_1 T_1 = 2\pi$$

e  $f(t) = 0$  para  $t \geq T_1/2$  com  $t^* = t - T_1/4$  sendo  $T_1$  o primeiro período natural, pede-se a resposta da estrutura para  $t \geq 0$  sabendo-se que as condições iniciais são de repouso. Resolver esse mesmo problema com o Método das Diferenças Finitas com  $\Delta t = T_1/8$ .

Resposta:

$$0 \leq t \leq T_1/2$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

$$q_1 = \frac{5P}{3k} [P(\omega_1 t, \gamma_1)]$$

$$q_2 = -\frac{P}{6k} [P(\omega_2 t, \gamma_2)]$$

$$P(\omega_i t, \gamma_i) = e^{-\gamma_i \omega_i t} \left[ \left( \frac{1-2\gamma_i^2}{4\Omega_i T_1} + \frac{6\gamma_i - 8\gamma_i^2}{\Omega_i \omega_i T_1^2} \right) \text{sen} \Omega_i t + \left( \frac{2-8\gamma_i^2}{(\omega_i T_1)^2} + \frac{2\gamma_i}{4\omega_i T_1} \right) \text{cos} \Omega_i t \right] \\ + \frac{2\gamma_i}{4\omega_i T_1} + \frac{8\gamma_i^2 - 2}{(\omega_i T_1)^2} - \left( \frac{1}{4T_1} + \frac{4\gamma_i}{\omega_i T_1^2} \right) t + \frac{1}{T_1^2} t^2$$

onde  $\Omega_i = \omega_i \sqrt{1-\gamma_i^2} \cong \omega_i$ ,  $\gamma_1 = 0.01$  e  $\gamma_2 = 0.005$ .

$$T_1/4 \leq t \leq T_1/2$$

$$q_1(t^*) = \frac{5P}{3k} [P(\omega_1 t^*, \gamma_1)] + q_{1h}(t^*)$$

$$q_2(t^*) = -\frac{P}{6k} [P(\omega_2 t^*, \gamma_2)] + q_{2h}(t^*)$$

$$t^* = t - T_1/4$$

$$q_{ih}(t^*) = e^{-\gamma_i \omega_i t^*} \left[ \frac{\dot{q}_i(t = T_1/4) + \gamma_i \omega_i q_i(t = T_1/4)}{\Omega_i} \text{sen}(\Omega_i t^*) + q_i(t = T_1/4) \text{cos}(\Omega_i t^*) \right]$$

$$t \geq T_1/2$$

$$q_1(t^{**}) = q_{1h}(t^{**})$$

$$q_2(t^{**}) = q_{2h}(t^{**})$$

$$t^{**} = t - T_1/2$$

$$q_{ih}(t^{**}) = e^{-\gamma_i \omega_i t^{**}} \left[ \frac{\dot{q}_i(t^* = T_1/2) + \gamma_i \omega_i q_i(t^* = T_1/2)}{\Omega_i} \text{sen}(\Omega_i t^{**}) + q_i(t^* = T_1/2) \text{cos}(\Omega_i t^{**}) \right]$$

Diferenças finitas:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} 2m & 0 \\ 0 & m \end{array} \right] - \frac{2\pi}{16} \lambda_m \left[ \begin{array}{cc} 2m & 0 \\ 0 & m \end{array} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ & \left[ \begin{array}{cc} 2m & 0 \\ 0 & m \end{array} \right] - \frac{2\pi}{16} \lambda_m \left[ \begin{array}{cc} 2m & 0 \\ 0 & m \end{array} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{i+1} = \left[ 2 \left[ \begin{array}{cc} 2m & 0 \\ 0 & m \end{array} \right] - \frac{4\pi^2}{64} \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_i - \\ & \left[ \begin{array}{cc} 2m & 0 \\ 0 & m \end{array} \right] - \frac{2\pi}{16} \lambda_m \left[ \begin{array}{cc} 2m & 0 \\ 0 & m \end{array} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{i-1} + \frac{4\pi^2}{64} \begin{Bmatrix} 2P \\ P \end{Bmatrix} \left( -\frac{jT_1/8}{4T_1} + \frac{(jT_1/8)^2}{T_1^2} \right) \end{aligned}$$

onde  $\lambda_m = 0.02\omega_1$ .

## APÊNDICE

### 5.15 – Formas quadráticas e matriz definida positiva

A expressão clássica das denominadas formas quadráticas, assunto bastante trabalhado pelo matemático inglês James Josef Sylvester, tem a seguinte redação:

$$Q(x, y, z, \dots) = a_{xx}x^2 + a_{xy}xy + a_{yx}yx + a_{yy}y^2 + \dots + a_{\alpha\beta}\alpha\beta + \dots \quad (5.93)$$

onde, sem perda de generalidade,  $a_{ij} = a_{ji}$ , uma vez que sendo eles diferentes a soma não será alterada tomando-se a média deles como  $a_{ij}$ .

Em forma matricial o expresso em (5.93) fica:

$$Q(x, y, \dots, \omega) = \{x, y, \dots, \omega\} \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & \dots & a_{x\omega} \\ a_{xy} & a_{yy} & \dots & a_{y\omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{x\omega} & a_{y\omega} & \dots & a_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \dots \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (5.94)$$

sendo simétrica a matriz em questão.

A condição para que a forma quadrática seja sempre positiva quaisquer que sejam os valores de  $x, y, \dots$  é que o determinante da matriz presente em (5.94) seja positivo, e essa condição é atendida quando todos os determinantes menores sejam positivos, ou seja:

$$\begin{aligned}
 & a_{xx} > 0 \\
 & \det \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{bmatrix} > 0 \\
 & \dots \\
 & \det \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & \dots & a_{x\omega} \\ a_{xy} & a_{yy} & \dots & a_{y\omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{x\omega} & a_{y\omega} & \dots & a_{\omega\omega} \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

com o expresso em (5.95) podendo ser alcançado existindo uma transformação de variáveis do tipo:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ \dots \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & \dots & b_{x\omega} \\ b_{yx} & b_{yy} & \dots & b_{y\omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\omega x} & b_{\omega y} & \dots & b_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ \dots \\ p_\omega \end{Bmatrix} \tag{5.96}$$

onde a matriz em (5.96) é também simétrica, de sorte a se ter:

$$Q(x, y, \dots, \omega) = \begin{Bmatrix} p_x, p_y, \dots, p_\omega \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{yx} & \dots & b_{\omega x} \\ b_{xy} & b_{yy} & \dots & b_{\omega y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{x\omega} & b_{y\omega} & \dots & b_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & \dots & a_{x\omega} \\ a_{xy} & a_{yy} & \dots & a_{y\omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{x\omega} & a_{y\omega} & \dots & a_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & \dots & b_{x\omega} \\ b_{yx} & b_{yy} & \dots & b_{y\omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\omega x} & b_{\omega y} & \dots & b_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ \dots \\ p_\omega \end{Bmatrix} \tag{5.97}$$

resultando-se:

$$Q(x, y, \dots, \omega) = \alpha_x p_x^2 + \alpha_y p_y^2 + \dots + \alpha_\omega p_\omega^2 \tag{5.98}$$

ou seja, a forma quadrática será sempre positiva para:

$$\alpha_i > 0 \tag{5.99}$$

cabendo-se agora examinar as condições para que essa forma quadrática seja sempre positiva, independente dos valores das variáveis em jogo.

De qualquer modo vale registrar que existe muitas maneiras de se conseguir a forma quadrática (5.98). Uma delas é apresentada no que se segue.

Para tanto, o que se procura é expresso por:

$$\begin{bmatrix} b_{xx} & b_{yx} & \dots & b_{\omega x} \\ b_{xy} & b_{yy} & \dots & b_{\omega y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{x\omega} & b_{y\omega} & \dots & b_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & \dots & a_{x\omega} \\ a_{xy} & a_{yy} & \dots & a_{y\omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{x\omega} & a_{y\omega} & \dots & a_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & \dots & b_{x\omega} \\ b_{yx} & b_{yy} & \dots & b_{y\omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\omega x} & b_{\omega y} & \dots & b_{\omega\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_y & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_\omega \end{bmatrix} \quad (5.100)$$

e, além disso, como os determinantes menores de ordem um da matriz em (5.94), ou seja, os elementos da diagonal, devem ser positivos, resultando-se:

$$a_{ij} > 0 \quad (5.101)$$

podendo-se, pois, arbitrar:

$$\alpha_x = a_{xx} \quad (5.106)$$

e, na sequência, a expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} b_{xx} & b_{yx} \\ b_{xy} & b_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} \\ b_{yx} & b_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & 0 \\ 0 & \alpha_y \end{bmatrix} \quad (5.107)$$

mais o fato de ser o determinante do produto de matrizes o produto dos determinantes de cada matriz envolvida e mais o fato de que o determinante da matriz transposta é igual ao determinante da própria matriz, podendo-se admitir-se unitário nesse caso, sem perda de generalidade:

$$\det \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{yx} \\ b_{xy} & b_{yy} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} \\ b_{yx} & b_{yy} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{bmatrix} = a_x \alpha_y \quad (5.108)$$

ou seja:

$$\alpha_y = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{bmatrix}}{a_{xx}} \quad (5.109)$$

continuando-se:

$$\det \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{yx} & b_{zx} \\ b_{xy} & b_{yy} & b_{zy} \\ b_{xz} & b_{yz} & b_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_z \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

resultando-se:

$$\alpha_z = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{bmatrix}} \quad (5.111)$$

e assim sucessivamente, mostrando-se que todos os determinantes menores devem ser positivos para que a matriz original venha a ser definida positiva.

Vale assinalar que as matrizes de rigidez e de massa devem ser definidas positivamente, de sorte a qualquer que seja o deslocamento imposto venha a resultar energia positiva armazenada na forma de energia de deformação, bem como a matriz de massa no caso de qualquer velocidade imposta resultar energia cinética igualmente positiva. Assim sendo, quaisquer que sejam as matrizes de massa e de rigidez seus determinantes menores devem ser positivos.

## CAPÍTULO VI

### INTRODUÇÃO À VIBRAÇÕES ALEATÓRIAS

#### 6.1- Introdução

Como bem sabido, a natureza é caprichosa nas suas manifestações, especialmente em se tratando de acontecimentos aleatórios, ou seja, acontecimentos imprevisíveis. A Tabela 6.1 exibe algumas probabilidades ilustrativas que nos dizem respeito.

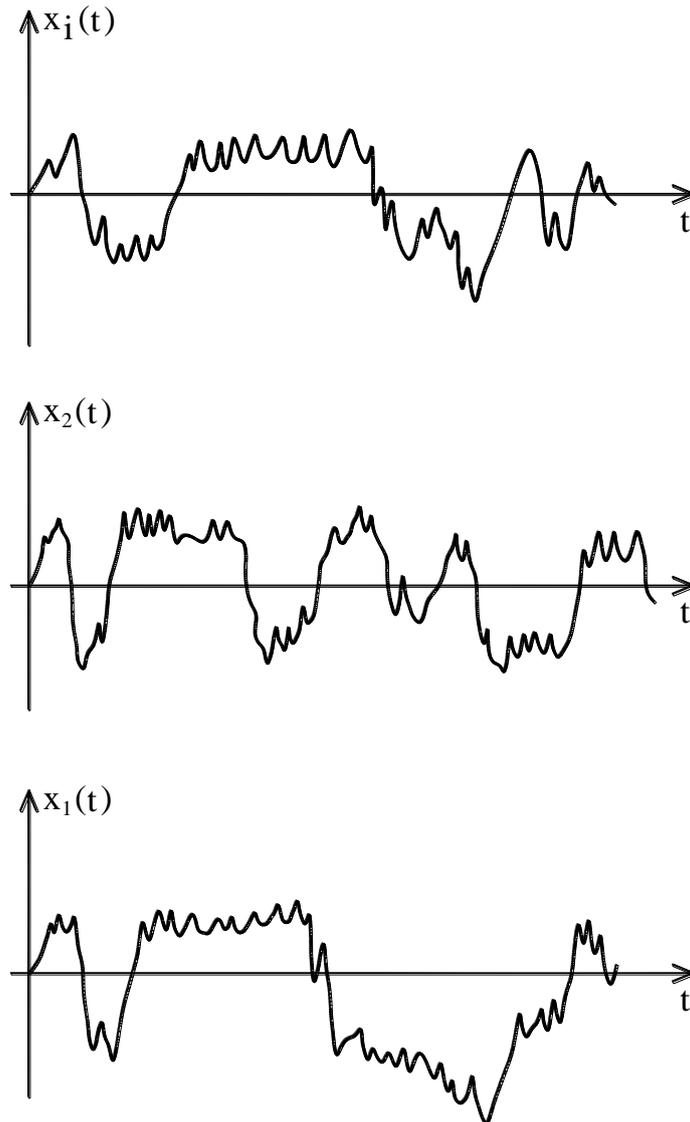
Tabela 6.1 – Probabilidade de uma pessoa morrer das causas abaixo

Câncer	Acidente De Carro	Incêndio	Acidente Aéreo	Enchente	Furacão	Raio	Terremoto	Tsunami	Queda Asteroide
1 em 7	1 em 100	1 em 1000	1 em 20000	1 em 30000	1 em 60000	1 em 80000	1 em 130000	1 em 50000	1 em 500000

As probabilidades arroladas na Tabela 6.1 indicam as frequências relativas (estatística) observadas de cada acontecimento, tratando-se, pois, de uma expectativa, e não de uma certeza. Uma probabilidade importante do ponto de vista da engenharia diz respeito à noção das pessoas sobre a própria morte até o fim do dia presente, entendida com algo insignificante em termos probabilísticos, algo como 1 em 10000 ( $10^{-4}$ ) a 1 em 100000 ( $10^{-5}$ ).

A Figura 6.1 exibe uma coleção de registros típicos da medida ao longo do tempo de um fenômeno aleatório, que pode ser, por exemplo, a posição de uma partícula, uma velocidade da partícula, a pressão do vento num determinado ponto, aceleração de terremotos, altura das ondas do mar etc. Em comum, o que se verifica é que nenhum registro do mesmo fenômeno é igual ao outro, e também que um trecho de um dos registros não se repete ao longo do mesmo registro. Tais fatos caracterizam a natureza aleatória do fenômeno em apreço

(imprevisibilidade). Se todos os registros fossem iguais, mesmo que se mostrando errático, o que se tem é uma certeza, pois em qualquer tempo a magnitude é determinada. Nesse caso, face a certeza faz-se apenas uma escolha, ou seja, qual dos registros considerar. Por outro lado, no caso de registros aleatórios o que se tem a fazer é a tomada de decisão (uma aposta) de qual magnitude do fenômeno ter-se em conta com segurança. Ou seja, face a incerteza só resta mesmo tomar uma decisão. Vale registrar que a variável independente poderia ser também o espaço, como no caso da pressão do vento em pontos diferentes de uma estrutura.



**Figura 6.1**

Na abordagem de fenômenos aleatórios, o modelo matemático empregado é o denominado teoria da probabilidade, e os juízos formulados são igualmente probabilísticos. De um modo geral, as pessoas têm uma certa aversão contra a probabilidade, por se associar de imediato com os jogos de azar, mas isso deve ser superado, visto que a natureza escolheu esse caminho em muitas de suas manifestações.

No que se segue, as noções básicas da teoria da probabilidade são objeto de apresentação, seguido de uma discussão sobre os chamados processos aleatórios, ou processos estocásticos. Afinal, a natureza pode ser vista com uma fábrica de vento, chuva, terremoto etc. e o processo natural de produção desses fenômenos caracterizam-se eminentemente como aleatórios. Uma chuva nunca é igual à outra, por exemplo.

## 6.2 - Noções básicas da teoria da probabilidade

Antes de explicitar os axiomas da teoria da probabilidade, e em atenção à orientação de se abordar o assunto num ritmo crescente de dificuldades, partindo-se de noções mais simples a exemplo do jogo de dados que é bastante ilustrativo e de fácil entendimento. Como bem sabido, a cada arremesso do dado um número de 1 a 6 é produzido, ou seja, a mobilização do processo de produção de número do dado, produz um número de 1 a 6.

O conjunto  $\{x\}$  dado pelos números  $\{1,2,3,4,5,6\}$  é chamado nesse caso de espaço amostral, ou universo dos eventos observáveis, entendido que a cada mobilização do processo um desses números ocorre, e não outros, e nesse caso ocorre um evento elementar como, por exemplo, o número  $x = 3$ . Todavia, eventos compostos podem também ser formulados, como, por exemplo, a ocorrência de um número par, ou seja,  $x = 2$ , ou  $x = 4$ , ou  $x = 6$ ; ou então um número entre 1 e 4, ou seja  $1 < x < 4$ , que consiste na ocorrência de  $x = 2$  ou  $x = 3$ , e assim por diante.

Importante é destacar que sempre será observado que o número gerado é menor ou igual a 6, ou seja o evento  $x \leq 6$ , portanto esse evento é chamado de evento certo, cuja probabilidade é definida pela unidade ( $P(x \leq 6) = 1.0$ ); já a geração de um número menor que 1, ou seja  $x < 1$ , é impossível, e definida pela nulidade ( $P(x < 1) = 0.0$ ). Assim, qualquer evento realizável tem sua probabilidade entre 0 e 1 ( $0.0 \leq P(x) \leq 1.0$ ).

Assumindo-se que o dado não é viciado, a probabilidade de se observar qualquer um dos eventos ao mobilizar o processo, arremesso do dado, é igual, e naturalmente igual a  $1/6$ , ou seja:

$$P(x = 1) = P(x = 2) = P(x = 3) = P(x = 4) = P(x = 5) = P(x = 6) = 1/6 \quad (6.1)$$

uma vez que se admite não haver nenhum evento com probabilidade diferente.

Chamando-se de  $E_1$  o evento  $1 < x < 4$ , ou seja, as realizações  $x = 2$  ou  $x = 3$ , sua probabilidade é dada, pois, por:

$$P(E_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad (6.2)$$

e considerando-se o  $E_2$  o evento  $2 < x < 5$ , ou seja, a realização  $x = 3$  ou  $x = 4$ , tem-se igualmente:

$$P(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad (6.3)$$

já a união desses dois eventos denotada por  $E_1 \cup E_2$ , ou seja, a realização  $x = 2$  ou  $x = 3$ , ou  $x = 4$ , tem, pois, probabilidade de ocorrência dada por:

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \quad (6.4)$$

tendo-se o evento interseção denotado por  $E_1 \cap E_2$ , que consiste na ocorrência simultânea do evento  $E_1$  e  $E_2$ , ou seja,  $x = 3$ , naturalmente probabilidade dada por:

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6} \quad (6.5)$$

verificando-se então:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \quad (6.6)$$

uma vez que o evento interseção foi computado duas vezes ao se somar as probabilidades individuais de cada um dos eventos originais em conta.

Dois eventos são ditos excludentes quando não podem ocorrer simultaneamente. Assim sendo, tem-se que a probabilidade da interseção deles é nula, ou seja;

$$P(E_i \cap E_j) = P(\phi) = 0 \quad (6.7)$$

sendo  $\phi$  o conjunto vazio, significando-se a não existência desse evento ao se mobilizar o processo, ou seja, evento impossível.

Outro conceito importante consiste na chamada probabilidade condicional denominada  $E_i / E_j$ , indicando-se tratar-se da ocorrência do evento  $E_i$  condicionada à ocorrência do evento  $E_j$ . Em outras palavras, esse evento está sendo formulado tendo-se por universo os elementos do evento  $E_j$ . Assim sendo, define-se:

$$P(E_i / E_j) = \frac{P(E_i \cap E_j)}{P(E_j)} \quad (6.8)$$

admitindo-se naturalmente  $P(E_j) \neq 0$ . A expressão (6.8) representa a relação entre os elementos comuns dos dois eventos com os elementos do evento

condicionante. Em sendo a probabilidade condicionada uma probabilidade, a condição:

$$0 \leq P(E_i / E_j) \leq 1 \quad (6.9)$$

está sendo satisfeita, pois num extremo,  $E_i$  não tem elemento comum com  $E_j$ , e no outro todos os elementos de  $E_i$  coincidem com os elementos de  $E_j$ . Exemplificando-se com os eventos  $E_1$  e  $E_2$  já trabalhados tem-se:

$$\begin{aligned} P(E_1 / E_2) &= \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{2} \\ P(E_2 / E_1) &= \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6.10)$$

havendo coincidência dessas probabilidades condicionadas nesse caso.

Considere-se agora os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} E_3 &\rightarrow 1 \leq x \leq 3 \rightarrow P(E_3) = 1/2 \\ E_4 &\rightarrow 3 \leq x \leq 4 \rightarrow P(E_4) = 1/3 \end{aligned} \quad (6.11)$$

resultando-se:

$$E_3 \cap E_4 \rightarrow x = 3 \rightarrow P(E_3 \cap E_4) = \frac{1}{6} \quad (6.12)$$

sendo, pois:

$$\begin{aligned} P(E_3 / E_4) &= \frac{P(E_3 \cap E_4)}{P(E_4)} = \frac{1}{2} = P(E_3) \\ P(E_4 / E_3) &= \frac{P(E_3 \cap E_4)}{P(E_3)} = \frac{1}{3} = P(E_4) \end{aligned} \quad (6.13)$$

em outras palavras, o condicionamento não alterou as probabilidades dos eventos em questão, indicando-se, em verdade, independência em relação ao condicionamento. Diz-se então que esses eventos, são independentes, resultand0-se:

$$P(E_3 \cap E_4) = P(E_3)P(E_4) \quad (6.14)$$

sendo esta propriedade facilmente verificada na ocorrência de um mesmo evento elementar ao se arremessar dois dados; por exemplo a ocorrência do número 3 nos dois dados, pois, dos 36 resultados possíveis, apenas 1 é o que interessa, ou seja:

$$\begin{aligned}
 E_1 \rightarrow x = 3 &\rightarrow P(E_1) = 1/6 \\
 E_2 \rightarrow x = 3 &\rightarrow P(E_2) = 1/6 \\
 P(E_1 \cap E_2) &= (1/6)(1/6) = 1/36
 \end{aligned}
 \tag{6.15}$$

uma vez que se tratam de eventos presumidamente independentes.

### 6.3 - Axiomas da teoria da probabilidade

O primeiro axioma da teoria da probabilidade, e o mais importante, consiste no fato de que a probabilidade de um evento é um número entre zero e um, ou seja:

$$0 \leq P(E_i) \leq 1 \tag{6.16}$$

não fazendo sentido falar-se em probabilidade de segunda ordem, algo como:

$$P(P(E_i)) = ? \tag{6.17}$$

uma vez que  $P(E_i)$  é um número bem definido entre zero e um, não sendo, pois, aleatório, embora na maioria vezes seu valor é desconhecido.

O segundo axioma consiste em se assumir que a ocorrência de um evento do universo ao ser mobilizado o processo tem probabilidade unitária, ou seja:

$$P(\Omega) = 1 \tag{6.18}$$

sendo  $\Omega$  o espaço amostral, uma vez que a mobilização do processo sempre vai gerar um evento do universo; não sendo admitido que a mobilização do processo não venha a gerar nada.

A exemplo das leis de Newton em número de três, o terceiro axioma estabelece que a probabilidade da união de eventos mutuamente exclusivos, que são desprovidos de interseção, é a soma das probabilidades individuais, ou seja:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) \tag{6.19}$$

algo visualizado em (6.4).

Vários teoremas podem ser demonstrados facilmente com esses axiomas, sendo o primeiro:

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) \tag{6.20}$$

sendo  $\bar{E}$  o evento complementar de  $E$ , ou seja:

$$E + \bar{E} = \Omega \quad (6.21)$$

resultando-se de (6.19):

$$P(\bar{E} \cup E) = P(\Omega) = 1 = P(\bar{E}) + P(E) \quad (6.22)$$

afinal, os eventos  $\bar{E}$  e  $E$  são naturalmente independentes.

O segundo teorema consiste no fato de ser nula a probabilidade do conjunto vazio:

$$P(\phi) = 0 \quad (6.23)$$

pois:

$$\begin{aligned} \Omega + \phi &= \Omega \\ P(\Omega + \phi) &= 1 = P(\Omega) + P(\phi) \end{aligned} \quad (6.24)$$

conforme prescrevem (6.18) e (6.19).

O terceiro teorema consiste na relação:

$$P(E_i \cup E_j) = P(E_i) + P(E_j) - P(E_i \cap E_j) \quad (6.25)$$

que decorre do fato de que, definindo-se o evento:

$$E^* = E_j - E_i \cap E_j \quad (6.26)$$

ou seja, o evento  $E_i$  e o evento  $E^*$  são independentes (não tem elementos em comum), e com isso:

$$\begin{aligned} P(E_i \cup E^*) &= P(E_i) + P(E^*) \\ E_j &= E^* + E_i \cap E_j \\ P(E_j) &= P(E^*) + P(E_i \cap E_j) \\ P(E^*) &= P(E_j) - P(E_i \cap E_j) \end{aligned} \quad (6.27)$$

pois os eventos  $E^*$  e  $E_i \cap E_j$  são independentes, pois também não têm elementos em comum, resultando-se:

$$P(E_i \cup E^*) = P(E_i) + P(E^*) = P(E_i) + P(E_j) - P(E_i \cap E_j) = P(E_i \cup E_j) \quad (6.28)$$

uma vez que  $E_i \cup E_j$  e  $E_i \cup E^*$  contemplam os mesmos elementos. A relação expressa em (6.25) pode ser facilmente estendida para a união de um número maior de eventos.

A probabilidade condicional, definida por:

$$P(E_i / E_j) = \frac{P(E_i \cap E_j)}{P(E_j)} \quad (6.29)$$

$$P(E_j) \neq 0$$

é, sem dúvida, a questão mais delicada da teoria da probabilidade, pois caracterizar a dependência de duas variáveis aleatórias não é, na prática, tarefa das mais fáceis. Por outro lado, caracterizar a independência já é tarefa menos complicada, pois nesse caso tem-se;

$$P(E_i / E_j) = \frac{P(E_i \cap E_j)}{P(E_j)} = P(E_i) \quad (6.30)$$

$$P(E_i \cap E_j) = P(E_j)P(E_i)$$

ou seja, a probabilidade de ocorrência simultânea dos dois eventos é dada pelo produto das probabilidades individuais. A segunda de (6.30) é fundamental na formulação de muitos modelos de probabilidades, e pode de maneira mais ampla ser expressa por:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1)P(E_2)\dots P(E_n) \quad (6.31)$$

assumindo-se tratar-se de eventos mutuamente excludentes.

A noção de probabilidade está muito atrelada à frequência relativa verificada ao se mobilizar o processo. No caso de N mobilizações tem-se então:

$$f_E = \frac{N_E}{N} \quad (6.32)$$

onde  $N_E$  é o número de ocorrências do evento E ao se mobilizar N vezes o processo, e  $f_E$  a frequência relativa correspondente. A frequência relativa é objeto da chamada Lei do Grandes Números, de autoria do matemático suíço Jakob Bernouilli, que assim se expressa:

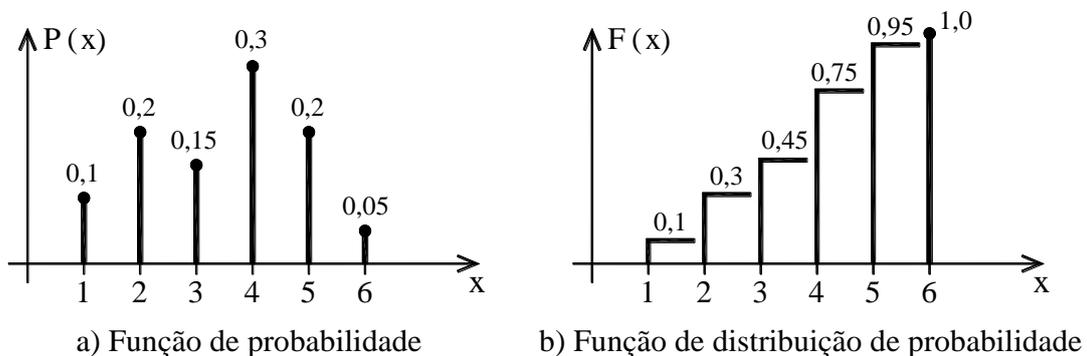
$$P\left(\lim_{N \rightarrow \infty} |f_E - P(E)| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad (6.33)$$

em outras palavras, em havendo-se regularidade estatística, ou seja estabilidade dos parâmetros probabilísticos, a probabilidade da frequência relativa se afastar da probabilidade do evento é desprezível, quando o número de mobilização do processo tende para o infinito. Vale enfatizar que o limite formulado na expressão (6.33) é expresso também em termos probabilístico.

A representação gráfica é sabidamente a maneira mais comunicativa de se tratar qualquer tema, uma vez que, como também bem sabido, o cérebro está mais preparado para lidar com imagens. Nesse sentido, a função de probabilidade, definida por  $P(x)$ , acha-se representada na Figura 6.2 a) para um jogo de dado viciado, entendido que a variável é o evento e a magnitude da probabilidade do evento denotado por  $P(x)$ . Já a função de distribuição de probabilidade desse jogo de dado é expressa por:

$$F(x) = P(x_i \leq x) = \sum_i P(x_i) \quad (6.34)$$

e acha-se representada na Figura 6.2 b).



**Figura 6.2**

De início é possível vislumbrar que a representação da função de probabilidade só tem sentido prático para universo de poucos eventos, pois as probabilidades vão ficando cada vez menores com o aumento do número de eventos, tendendo para zero no caso de variáveis contínuas (uma infinidade); e, por essa razão, não tem muita utilidade. Todavia, a função de distribuição de probabilidade não apresenta esse inconveniente e é de grande utilidade, particularmente, no caso de variável contínua, como é o caso da resistência do concreto, que pode assumir, em princípio, qualquer valor positivo. Em outras palavras, o expresso em (6.34) para variável contínua assume a forma:

$$F(x) = P(x_i \leq x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx \quad (6.35)$$

onde o símbolo integral indica uma soma infinita até o valor especificado. Por outro lado, a derivada da função de distribuição, no caso de variáveis contínuas, resulta na função de densidade de probabilidade, ou seja:

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{F(x + dx) - F(x)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P(x_i \leq x \leq x_i + dx)}{dx} \quad (6.36)$$

ou ainda:

$$P(x_i \leq x \leq x_j) = \int_{x_i}^{x_j} p(x) dx \quad (6.37)$$

como ilustrados na Figura 6.3.

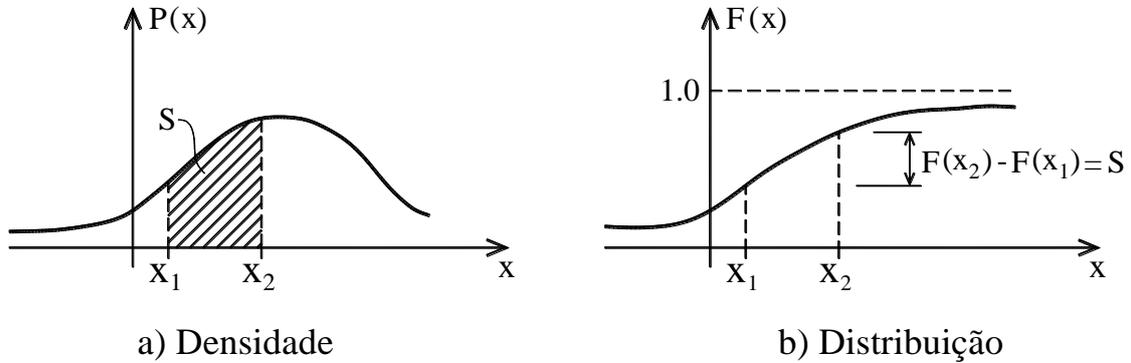


Figura 6.3

Tendo-se em vista que, para caracterizar uma função é necessário o conhecimento de sua magnitude para todos os valores da variável, essa tarefa não é, em geral, apropriada, visto haver uma infinidade de pontos. Assim sendo, no sentido de se caracterizar com poucos parâmetros a função de densidade de probabilidade, alguns parâmetros são definidos, como os estatísticos dado pela média, ou seja:

$$\mu = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx} \quad (6.38)$$

uma vez que a integral no denominador é unitária, por definição. O expresso em (6.38) é uma média ponderada, que define a posição do centro de gravidade da superfície definida pela função de densidade de probabilidade, como ilustra a Figura 6.4.

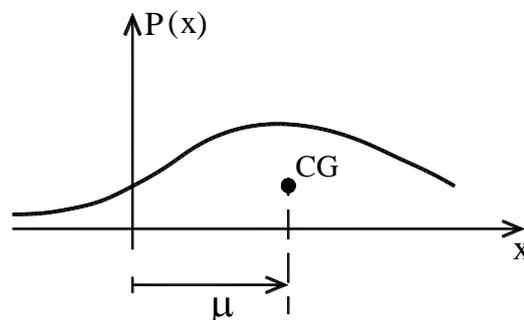


Figura 6.4

O outro parâmetro importante é a variância, expressa por:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx \quad (6.39)$$

sendo o parâmetro  $\sigma$  denominado desvio padrão, podendo-se também ser entendido como o raio de giração da superfície definida pela densidade de probabilidade, pois:

$$\sigma = \sqrt{\frac{I}{S}} = \sqrt{I} = r \quad (6.40)$$

sendo  $I$  o momento de inércia da área em questão em relação ao centro de gravidade, e  $r$  o raio de giração. A relação  $\sigma/\mu$  é denominada coeficiente de variação.

Do ponto de vista analítico, são interessantes os chamados momentos, expressos por:

$$E(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx \quad (6.41)$$

em especial para função  $f(x)$  expressa por potências da variável, ou seja:

$$\begin{aligned} E(x^0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 p(x) dx = 1 \\ E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \mu \\ E(x^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \sigma^2 + \mu^2 \\ &\dots\dots\dots \\ E(x^n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x) dx \end{aligned} \quad (6.42)$$

uma vez que:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2)^2 p(x) dx = E(x^2) - \mu^2 \quad (6.43)$$

ou ainda, a função característica que consiste na transformada de Fourier da função de densidade de probabilidade, ou seja:

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta x} p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\theta x) p(x) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen}(\theta x) p(x) dx \quad (6.44)$$

com a seguinte propriedade:

$$E(x^n) = \frac{1}{i^n} \left( \frac{d^n M(\theta)}{d\theta^n} \right)_{\theta=0} \quad (6.45)$$

pois:

$$\frac{dM}{d\theta} = \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{i\theta x} p(x) dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{i\theta x} p(x) dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx \quad (6.46)$$

para  $\theta$  nulo, e suas derivadas sucessivas resultam no expresseo em (6.45). Por outro lado, a expansão em série de Taylor da função característica se exprime:

$$M(\theta) = M(0) + \theta M'(0) + \frac{\theta^2}{2!} M''(0) + \dots \quad (6.47)$$

ou ainda:

$$M(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} E(x^n) \quad (6.48)$$

visto que:

$$M(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(0)x} p(x) dx = 1 \quad (6.49)$$

mostrando-se que o conhecimento dos momentos define a função de densidade de probabilidade procedendo-se a transformada inversa de Fourier de (6.48).

É importante ressaltar que a maioria das funções de densidade probabilidade de interesse na prática são definidas pelos momentos até ordem 4, ou seja, média, variância, momento de terceira ordem, medida de assimetria (skewness) e momento de quarta ordem, denominado curtose (kurtosis).

A Figura 6.5 a) exhibe a função de probabilidade do jogo de dois dados não viciados e a Figura 6.5 b) a correspondente função de distribuição de probabilidade, que tem a seguinte redação:

$$F(x_1, x_2) = P(\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq x_2\}) \quad (6.50)$$

ou ainda, para variáveis aleatórias contínuas, a exemplo de uma versão bidimensional de (6.37):

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (6.51)$$

com a seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
 F(-\infty, x_2) &= P(\{X_1 \leq -\infty\} \cap \{X_2 \leq x_2\}) = 0 \rightarrow \text{evento : impossível} \\
 F(x_1, -\infty) &= P(\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq -\infty\}) = 0 \rightarrow \text{evento : impossível} \\
 F(\infty, \infty) &= P(\{X_1 \leq \infty\} \cap \{X_2 \leq \infty\}) = 1 \rightarrow \text{evento : certo} \\
 F(x_1, \infty) &= P(\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq \infty\}) = \int_{-\infty}^{x_1} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{-\infty}^{x_1} \bar{p}(x_1) dx_1 = \\
 &G(x_1) \\
 F(\infty, x_2) &= P(\{X_1 \leq \infty\} \cap \{X_2 \leq x_2\}) = \int_{-\infty}^{x_2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = \int_{-\infty}^{x_2} p^*(x_2) dx_2 = \\
 &H(x_2)
 \end{aligned}
 \tag{6.52}$$

sendo  $G(x_1)$  e  $H(x_2)$  as funções de distribuição individual de probabilidades,  $\bar{p}(x_1)$  e  $p^*(x_2)$  as funções de densidade individual de probabilidades, uma vez que para a outra variável a probabilidade constitui evento certo. Decorrendo de (6.51):

$$p(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}
 \tag{6.53}$$

lembrando-se que a derivada segunda numa mesma variável não tem significado algum, e que as duas últimas de (6.52) são denominadas equações de compatibilidade.

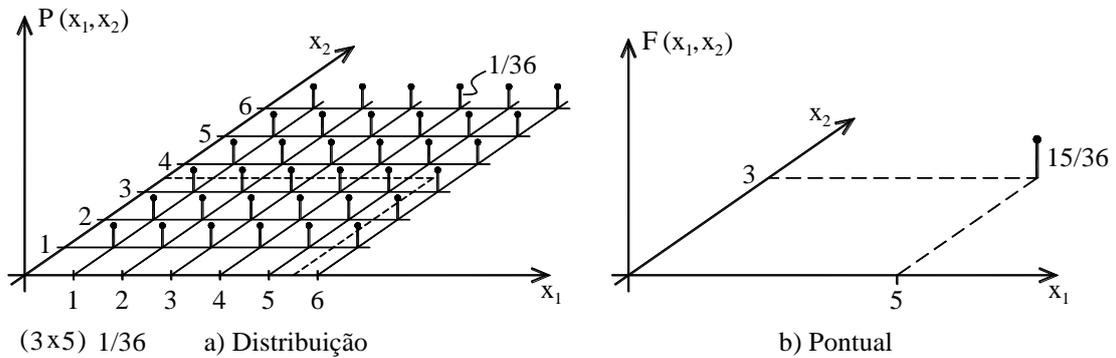


Figura 6.5

A probabilidade condicional expressa em (2.69) permite escrever-se:

$$\begin{aligned}
 P(\{x_1 \leq X \leq x_1 + dx_1\} / \{x_2 \leq Y \leq x_2 + dx_2\}) &= \frac{p(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{p^*(x_2) dx_2} = \frac{p(x_1, x_2) dx_1}{p^*(x_2)} \\
 \frac{P(\{x_1 \leq X \leq x_1 + dx_1\} / \{x_2 \leq Y \leq x_2 + dx_2\})}{dx_1} &= p(x_1 / x_2) = \frac{p(x_1, x_2)}{p^*(x_2)}
 \end{aligned}
 \tag{6.54}$$

sendo que a função de densidade condicional  $p(x_1 / x_2)$  varia naturalmente com  $x_1$  e  $x_2$ . No caso de as variáveis serem independentes, tem-se da segunda de (6.54):

$$p(x_1 / x_2) = \bar{p}(x_1) = \frac{p(x_1, x_2)}{p^*(x_2)} \quad (6.55)$$

$$p(x_1, x_2) = \bar{p}(x_1)p^*(x_2)$$

ou seja, a distribuição de densidade conjunta consiste no produto das densidades de probabilidade individuais. Vale assinalar que o exposto na segunda de (6.55) é ponto de partida de vários modelos probabilísticos.

A transformação de variáveis aleatórias expressa por:

$$y_k = g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.56)$$

Implica em:

$$p(y_1, y_2, \dots, y_n) = p(x_1, x_2, \dots, x_n) \det |J_n| \quad (6.57)$$

sendo  $|J_n|$  o jacobiano da transformação, ou seja:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dy_1} & \frac{dx_1}{dy_2} & \dots & \frac{dx_1}{dy_n} \\ \frac{dx_2}{dy_1} & \frac{dx_2}{dy_2} & \dots & \frac{dx_2}{dy_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_n}{dy_1} & \frac{dx_n}{dy_2} & \dots & \frac{dx_n}{dy_n} \end{vmatrix} \quad (6.58)$$

valendo também (6.57) para o caso de  $m$  variáveis  $y$  e  $n$  variáveis  $x$ , com  $m < n$ , via integração parcial nas variáveis excedentes (de  $m+1$  a  $n$ ), ou seja:

$$p(y_1, y_2, \dots, y_m) = \int_{m+1} \int_{m+2} \dots \int_n p(x_1, x_2, \dots, x_n) |J_m| dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n \quad (6.59)$$

que consiste numa expressão também ponto de partida de muitos modelos probabilísticos.

De modo similar às expressões desenvolvidas para uma variável, no caso de  $n$  variáveis os momentos são definidos como:

$$E(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \int_R f(x_1, x_2, \dots, x_n) p(x_1, x_2, \dots, x_n) dR \quad (6.60)$$

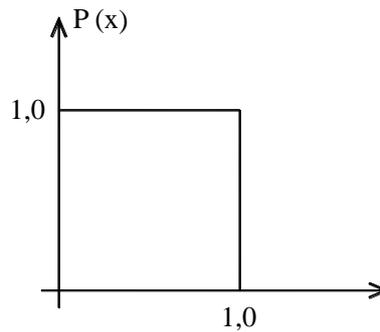
sendo R a região de integração, interessando-se de perto o caso de duas variáveis:

$$E((x_1 - \mu_{x_1})(x_2 - \mu_{x_2})) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_{x_1})(x_2 - \mu_{x_2})p(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \quad (6.61)$$

$$E(x_1, x_2) - \mu_{x_1}\mu_{x_2} = k_{x_1x_2}$$

que consiste na covariância das variáveis em jogo.

Considere-se o caso da densidade de probabilidade uniforme mostrada na Figura 6.6 e a seguinte transformação de variáveis:



**Figura 6.6**

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{sen}(2\pi x) \\ x_2 &= \text{cos}(2\pi x) \end{aligned} \quad (6.62)$$

ou seja,  $x_1$  e  $x_2$  são não linearmente dependentes, pois:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad (6.63)$$

com:

$$\begin{aligned} E(x_1) &= \mu_{x_1} \int_0^1 \text{sen}(2\pi x) dx = 0 \\ E(x_2) &= \mu_{x_2} \int_0^1 \text{cos}(2\pi x) dx = 0 \\ E(x_1 x_2) &= \int_0^1 \text{cos}(2\pi x) \text{sen}(2\pi x) dx = 0 \\ k_{x_1 x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (6.64)$$

todavia, se a correlação é nula verifica-se facilmente que as variáveis são linearmente independentes.

Por fim, define-se o coeficiente de correlação:

$$\rho_{x_1 x_2} = \frac{k_{x_1 x_2}}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} \quad (6.65)$$

e a função característica da densidade de probabilidade de várias variáveis como uma extensão de (6.44), ou seja:

$$M_{x_1 x_2 \dots x_n}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \int_{\mathbb{R}} p(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-i(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_n x_n)} d\mathbb{R} \quad (6.66)$$

cujas propriedades são similares à (6.48), ou seja:

$$M_{x_1 x_2 \dots x_n}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = 1 + (i\theta_j)E(x_j) + \dots + \frac{1}{2!}(i\theta_j)(i\theta_k)E(x_j x_k) + \dots \quad (6.67)$$

que consiste no polinômio nas variáveis  $\theta_j$ , cuja transformada inversa de Fourier resulta na densidade de probabilidade para  $n$  variáveis aleatórias.

A importância do conhecimento dos parâmetros média e o desvio padrão fica ressaltada no teorema de Chebyshev (matemático russo Pafnuty Chebyshev), que se expressa:

$$P(|x - \mu_x| \geq h\sigma_x) \leq \frac{1}{h^2} \quad (6.68)$$

ou seja, a probabilidade da varável aleatória se afastar da média  $h$  vezes o desvio padrão é menor que  $1/h^2$  qualquer que seja a função de densidade de probabilidade. Em outras palavras conhecida a média e o desvio padrão já é possível formular juízo probabilístico, mesmo sem conhecer a distribuição de probabilidade.

A demonstração é bastante expedita, pois:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) dx \geq \int_{-\infty}^{\mu_x - h\sigma_x} (x - \mu_x)^2 p(x) dx + \int_{\mu_x + h\sigma_x}^{\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) dx \quad (6.69)$$

mas:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq \mu_x - h\sigma_x \\ x \geq \mu_x + h\sigma_x \end{array} \right\} \rightarrow (x - \mu_x)^2 \geq h^2 \sigma_x^2 \quad (6.70)$$

que permite reescrever (6.69) como:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &\geq h^2 \sigma_x^2 (P(x \leq \mu_x - h\sigma_x) + P(x \geq \mu_x + h\sigma_x)) \\ P(x \leq \mu_x - h\sigma_x) + P(x \geq \mu_x + h\sigma_x) &\leq \frac{1}{h^2} \end{aligned} \quad (6.71)$$

sendo que a segunda de (6.71) indica ser a razão  $1/h^2$  o limite superior da probabilidade em questão.

Embora muitas são as distribuições de probabilidade, a atenção aqui vai ser voltada para a distribuição de Gauss (matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss), por se tratar da mais empregada na prática da engenharia. A redação da função de densidade de probabilidade, doravante referida apenas como distribuição de Gauss, é a seguinte:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (6.72)$$

válida no domínio  $-\infty < x < \infty$ , e cuja função característica se expressa:

$$M(\theta) = e^{(i\mu\theta - \frac{\sigma^2\theta^2}{2})} \quad (6.73)$$

mostrando que apenas os momentos de primeira e segunda ordem estão envolvidos, pois, como a demonstração do teorema do limite central prova, os demais momentos são negligenciáveis.

Procedendo-se agora a seguinte transformação de variável (vide (6.56)):

$$\eta = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow |J| = \sigma \rightarrow d\eta = dx / \sigma \quad (6.74)$$

a média e a variância nessa nova variável ficam:

$$\begin{aligned} \mu_\eta &= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta p(\eta) d\eta = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) p(x) dx = 0 \\ \sigma_\eta^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\eta - \mu_\eta)^2 p(\eta) d\eta = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x) dx = 1 \end{aligned} \quad (6.75)$$

resultando-se:

$$p(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \quad (6.76)$$

que vem a ser a distribuição de probabilidade reduzida de Gauss. A Tabela 6.1 reproduz os resultados da probabilidade:

$$P(\bar{\eta}) = \int_{-\infty}^{\bar{\eta}} p(\eta) d\eta \quad (6.77)$$

para uma gama de interesse prático de  $\bar{\eta}$ , envolvendo, devido à simetria da distribuição, apenas a metade do domínio.

VIBRAÇÃO DAS ESTRUTURAS

Tabela 6.1

$(x - \mu)/\sigma$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0010	0.0080	0.0120	0.0159	0.0193	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621	
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3718	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4083	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4430	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4485	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4758	0.4762	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4865	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.7	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.8	0.4065	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4070	0.4971	0.4072	0.4973	0.4074
2.9	0.4074	0.4975	0.4076	0.4077	0.4977	0.4078	0.4079	0.4980	0.4980	0.4981
3.0	0.4986	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4088	0.4989	0.4989	0.4089	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993									
3.3	0.4995									
3.4	0.4996									
3.5	0.4997									
3.6	0.4998									
3.7	0.4998									
3.8	0.4999									
3.9	0.4999									

Em decorrência da simetria da função de densidade em apreço, os valores lançados na Tabela 6.1 são dados por:  $P(x) - P(\mu) = P(x) - 0.5$ . Ou seja, para:

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = 0.43 \rightarrow P(x) - 0.5 = 0.1664 \rightarrow P(x) = 0.6664$$

o que permite tabelar apenas a metade

A distribuição de Gauss com mais de uma variável é dada por:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det[\mu])^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\{x\} - \{\bar{x}\})^T [\mu]^{-1} (\{x\} - \{\bar{x}\})} \quad (6.78)$$

onde:

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & k_{x_1 x_2} & \dots & k_{x_1 x_n} \\ k_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2}^2 & \dots & k_{x_2 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{x_1 x_n} & k_{x_2 x_n} & \dots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix}$$

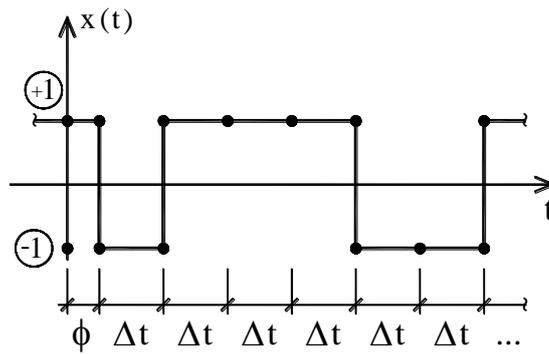
$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (6.79)$$

$$\{\bar{x}\} = \begin{Bmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \\ \dots \\ \mu_{x_n} \end{Bmatrix}$$

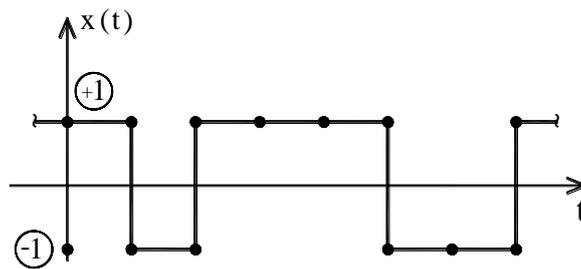
sendo que é possível encontrar uma mudança de variável tornando a matriz  $[\mu]$  diagonal, e para essas novas variáveis as probabilidades são independentes (eixos centrais do tensor de segunda ordem  $[\mu]$ ).

#### 6.4- Processo aleatório binário (arremesso de moeda)

Para maior clareza na abordagem dos processos aleatórios, a construção de um processo aleatório binário simples, que consiste no jogo de uma moeda, é agora objeto de atenção. A Figura 6.7 exibe em gráfico o resultado de um jogo de moeda ao longo do tempo, assumindo-se o valor numérico unitário positivo para resultado cara e valor numérico unitário negativo para resultado coroa; assumindo-se também que a probabilidade do evento cara e do evento coroa sejam iguais, valendo-se 0.5 (moeda não viciada). Além disso, considera-se que o registro dessas jogadas é iniciado com uma defasagem denotada por  $\phi_i$ , e que uma nova jogada da moeda ocorre a cada  $\Delta t$ .



Registro de um jogador



Registro de outro jogador

**Figura 6.7**

A Figura 6.8 mostra os registros de outros jogos de moeda, supondo-se uma infinidade deles.

Assim sendo, a chamada estrutura probabilística do processo de jogo de moedas fica definida quando se tem resposta para qualquer probabilidade do jogo, começando-se pelo conhecimento da probabilidade dos eventos cara e coroa em qualquer tempo  $t_j$ , no caso:

$$\begin{aligned} P(x_{t_j} = \text{cara}) &= 0.5 \\ P(x_{t_j} = \text{coroa}) &= 0.5 \end{aligned} \tag{6.80}$$

onde  $x_{t_j}$  é a variável aleatória no tempo  $t_j$ . A Figura 6.9 ilustra as funções de probabilidade nas variáveis aleatórias  $x_{t_j}$  e  $x_{t_k}$ .

Já a função de probabilidade conjunta  $x_{t_j}$  e  $x_{t_k}$  vai depender da função de defasagem  $\phi$ , assumida aqui uniforme como exhibe a Figura 6.10, e da distância temporal  $\tau$  das variáveis em questão, ou seja:

VIBRAÇÃO DAS ESTRUTURAS

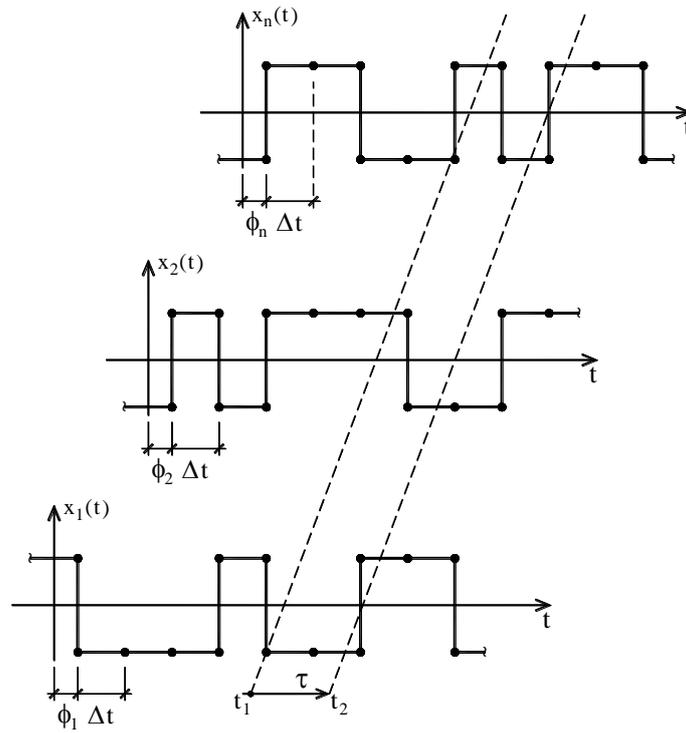


Figura 6.8

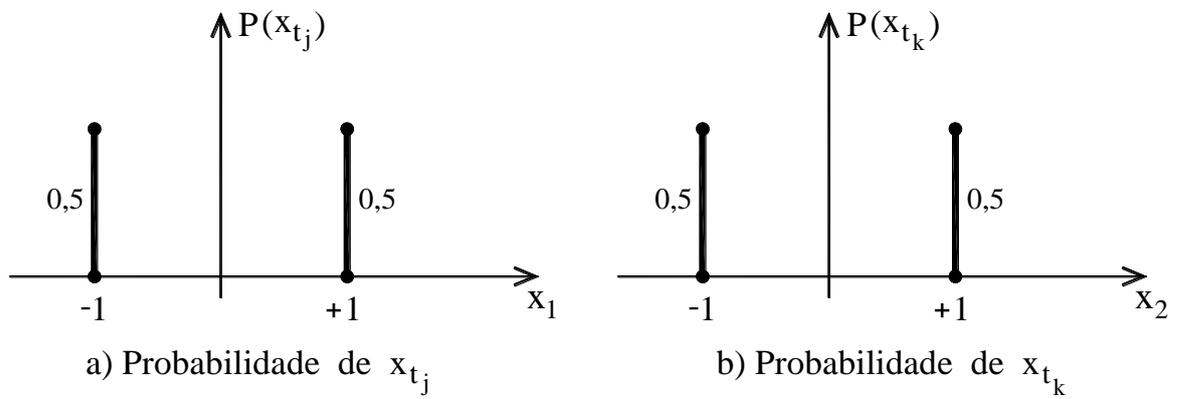


Figura 6.9

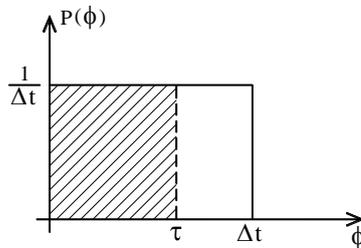


Figura 6.10

$$\tau = t_k - t_j$$

$$(6.81)$$

entendendo-se que, para  $\tau$  nulo,  $x_{t_j}$  e  $x_{t_k}$  coincidem, pois não houve mobilização do processo, ficando a distribuição de probabilidade conjunta como mostra a Figura 6.11, ou seja metade das moedas estão em cara e metade em coroa.

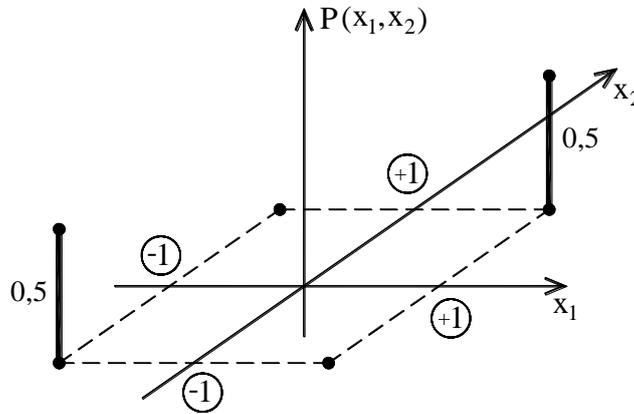


Figura 6.11

A distribuição conjunta de probabilidade para  $0 \leq \tau \leq \Delta t$  está mostrada na Figura 6.12, e a explicação é a seguinte: a fração de registros em nova jogada é dado por  $\tau / \Delta t$ , e, portanto, para essa fração, a variável que era cara agora pode ter virado coroa com probabilidade 0.5 ou permanecido cara com probabilidade 0.5, mas tais probabilidades dizem respeito a variável que já assumia valor 0.5 (assim  $0.5 \times 0.5 = 1/4$ ). Em outras palavras, metade dos jogos para  $\tau = 0$  tinham como resultado cara e outra metade coroa. Todavia, a fração  $\tau / \Delta t$  da metade que estava cara pode ter mudado para coroa com probabilidade 0.5, ou permanecido cara com probabilidade 0.5.

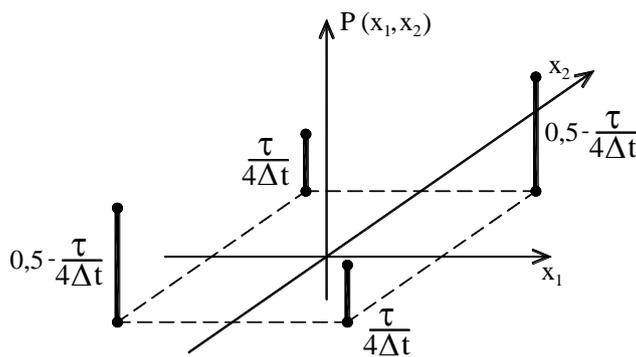
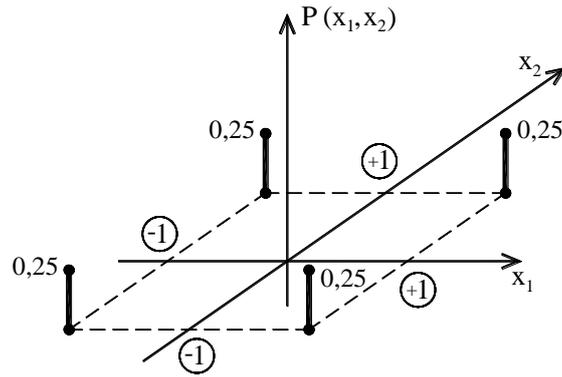


Figura 6.12

A figura 6.13 mostra a distribuição de probabilidade conjunta para  $\tau \geq \Delta t$ , uma vez que para essa situação todos os registros dizem respeito a registros de resultados em nova jogada.



**Figura 6.13**

Em resumo, para  $\tau=0$  as variáveis  $x_{t_j}$  e  $x_{t_k}$  são totalmente dependentes, ou seja, coincidentes; para  $0 \leq \tau \leq \Delta t$  as variáveis são dependentes, e, para  $\tau \geq \Delta t$  independentes. A covariância para das variáveis em questão é dada por:

$$k_{x_{t_j}, x_{t_k}} = \sum_j \sum_k x_{t_j} x_{t_k} P(x_{t_j}, x_{t_k}) = (1)(1)(0.5 - \tau / 4\Delta t) + (-1)(-1)(0.5 - \tau / 4\Delta t) + (1)(-1)(\tau / 4\Delta t) + (-1)(1)(\tau / 4\Delta t) = 1 - \tau / \Delta t \quad (6.82)$$

com covariância nula para  $\tau \geq \Delta t$ . Em verdade, a covariância mede o grau de dependência entre as variáveis aleatórias.

Cabe registrar que as distribuições conjuntas tendo em conta um número maior de variáveis pode ser obtido de maneira similar, e com isso, a estrutura probabilística do processo fica conhecida, uma vez que o conhecimento de todas as distribuições de probabilidade conjuntas, ou seja:

$$\begin{aligned} &P(x_{t_j}) \\ &P(x_{t_j}, x_{t_k}) \\ &P(x_{t_j}, x_{t_k}, x_{t_l}) \\ &\text{etc.} \end{aligned} \quad (6.83)$$

permite formular qualquer juízo probabilístico sobre o processo aleatório em questão.

Quando as moedas de todos os jogos são iguais, os históricos são também probabilisticamente equivalentes, ou seja, o processo pode ser definido examinando-se apenas um registro. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
 P(x = \text{cara} = 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum \Delta t(\text{cara})}{n\Delta t} \approx 0.5 \\
 P(x = \text{coroa} = -1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum \Delta t(\text{coroa})}{n\Delta t} \approx 0.5
 \end{aligned}
 \tag{6.84}$$

uma vez que ao longo do registro vai verificar-se que na metade do tempo o registro acusa cara e na outra metade coroa; ou ainda:

$$k_{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{-n}^{+n} x(\Delta t_n) x(\Delta t_n + \tau) = k(\tau) = 1 - \frac{\tau}{\Delta t}
 \tag{6.85}$$

como expresso em (6.82).

Quando a estrutura probabilística do processo aleatório pode ser obtida a partir do exame de um único registro, como aqui realizado, diz-se que o processo é ergódico, ou seja, o universo de eventos é o mesmo para todos os registros, como se todas as moedas fossem iguais.

### 6.5 – Processo Aleatório

A Figura 6.14 exhibe um conjunto de registros de um fenômeno aleatório, que pode ser, por exemplo, medidas de uma aceleração do solo em terremotos, de uma pressão do vento num dado ponto de uma estrutura, altura das ondas do mar etc. Como já mencionado, um registro não é igual ao outro. Além disso, para se formular qualquer juízo probabilístico sobre o processo aleatório, por exemplo:

$$P(x_1 \leq \bar{x}_1, x_2 \leq \bar{x}_2, \dots, x_n \leq \bar{x}_n) ?
 \tag{6.86}$$

onde  $x_i = x(t = t_i)$  é a variável aleatória no tempo  $t_i$  e  $\bar{x}_i = \bar{x}(t = t_i)$  são valores de referência, é necessário, como já mencionado, o conhecimento da estrutura probabilística do processo, ou seja, do conhecimento de todas as distribuições conjuntas:

$$\begin{aligned}
 &P(x_i) \\
 &P(x_i, x_j) \\
 &\dots \\
 &P(x_i, x_j, x_k, \dots, x_n)
 \end{aligned}
 \tag{6.87}$$

podendo-se, em geral, a variável aleatória ser função das variáveis independentes tempo e espaço, ou seja  $x_i = x_i(t, x, y, z)$ . O processo é dito homogêneo quando a estrutura probabilística do processo não se altera com uma translação, ou seja:

$$\begin{aligned}
 P(x_i) &= P(x_j) \\
 P(x_i, x_j) &= P(x_i + a, x_j + a) \\
 &\dots \\
 P(x_i, x_j, x_k, \dots, x_n) &= P(x_i + a, x_j + a, x_k + a, \dots, x_n + a)
 \end{aligned}
 \tag{6.88}$$

sendo denominado estacionário quando a variável independente for o tempo.

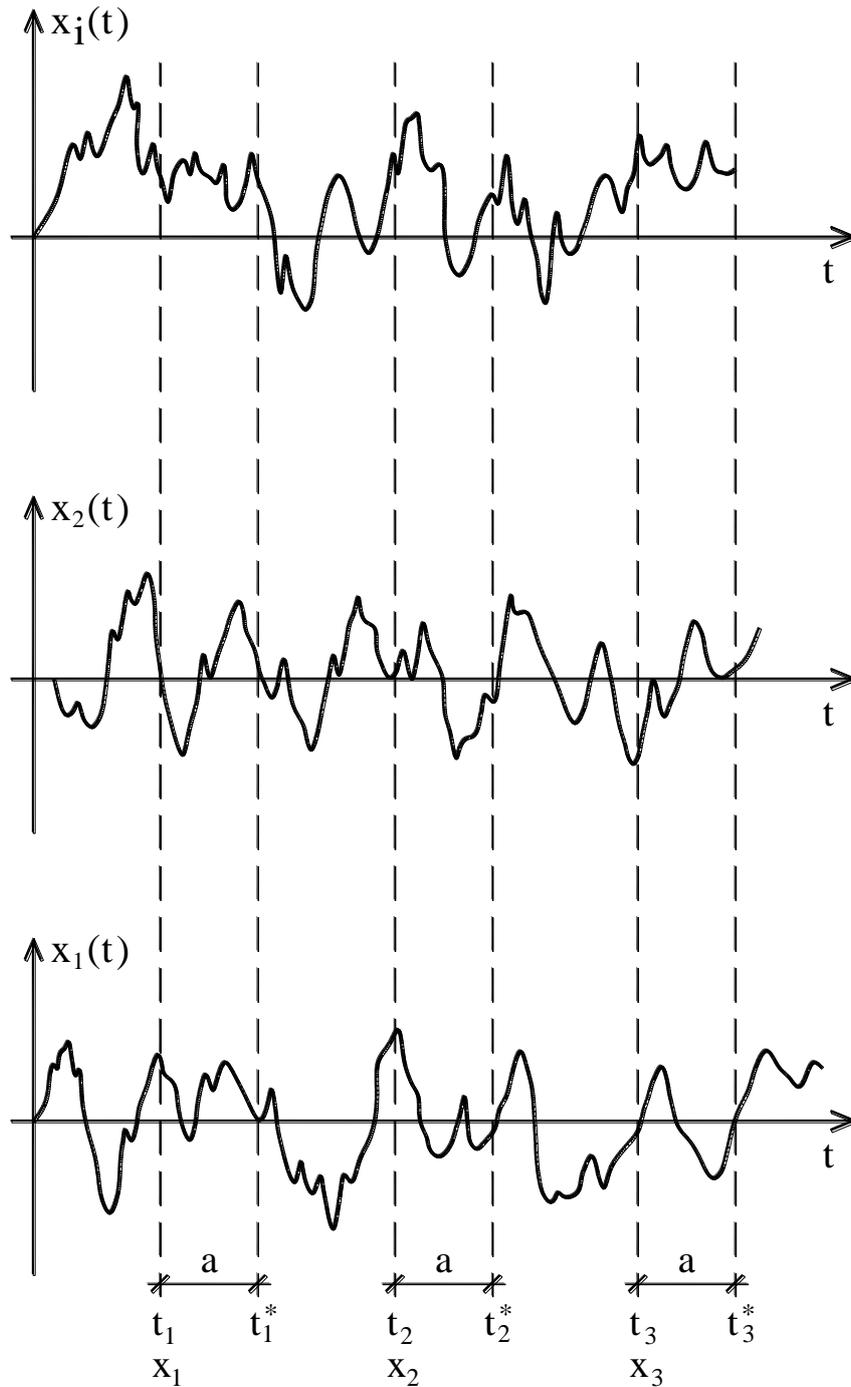


Figura 6.14

Na prática, como ilustrado na Figura 6.15, a avaliação do valor médio das variáveis aleatórias é dada, mediante amostragem, por:

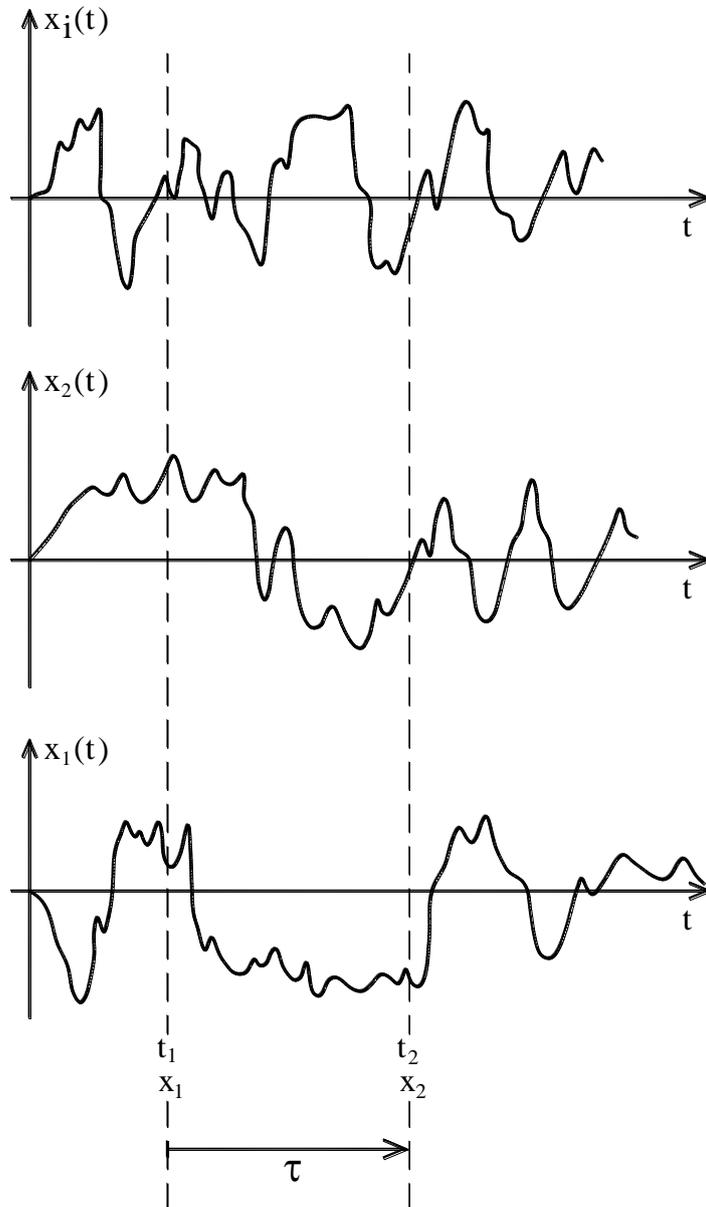


Figura 6.15

$$\mu(t_i) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(t_i)}{n} \quad (6.89)$$

caracterizando-se estacionariedade do processo em relação à média, quando as médias calculadas em todos os tempos forem iguais, ou seja:

$$\mu(t_i) = \mu(t_j) = \mu \quad (6.90)$$

e ergódico quando:

$$\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) dt \quad (6.91)$$

sendo claro que todo processo ergódico é estacionário, mas o contrário pode não ser verdadeiro, pois cada registro pode ter média estacionária, mas diferente.

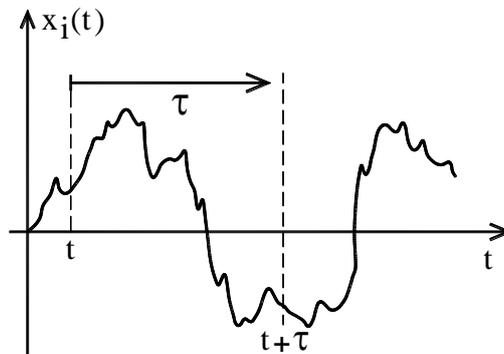
A função de autocorrelação para processo ergódico, como ilustrado na Figura 6.16, assim se expressa:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (6.92)$$

sendo que, no caso de média nula, tem-se:

$$R_x(\tau = 0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t) dt = \sigma_x^2 \quad (6.93)$$

valendo-se ressaltar que, para processo gaussiano (bi paramétrico), só interessa o conhecimento da média e variância., sem contar o fato de que, pelo teorema de Chebyshev, esses parâmetros são o suficiente para formular juízos probabilísticos quaisquer que sejam as funções de distribuição.



**Figura 6.16**

A Figura 6.17 exhibe graficamente uma técnica de amostragem para a obtenção da função de densidade de probabilidade com base num registro do processo aleatório, ou seja:

$$p(x) = \frac{\sum \Delta t}{T dx} \quad (6.94)$$

e também a média e a variância, ou seja:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} xp(x)dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x \frac{\sum \Delta t}{T dx} dx = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ \sigma_x^2 &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \mu_x)^2 p(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T (x - \mu_x)^2 dt \end{aligned} \quad (6.95)$$

devendo-se assinalar que o expresso em (6.94) e (6.95) representam apenas uma amostragem desses parâmetros, cuja precisão remete-se ao estudo da teoria da amostragem.

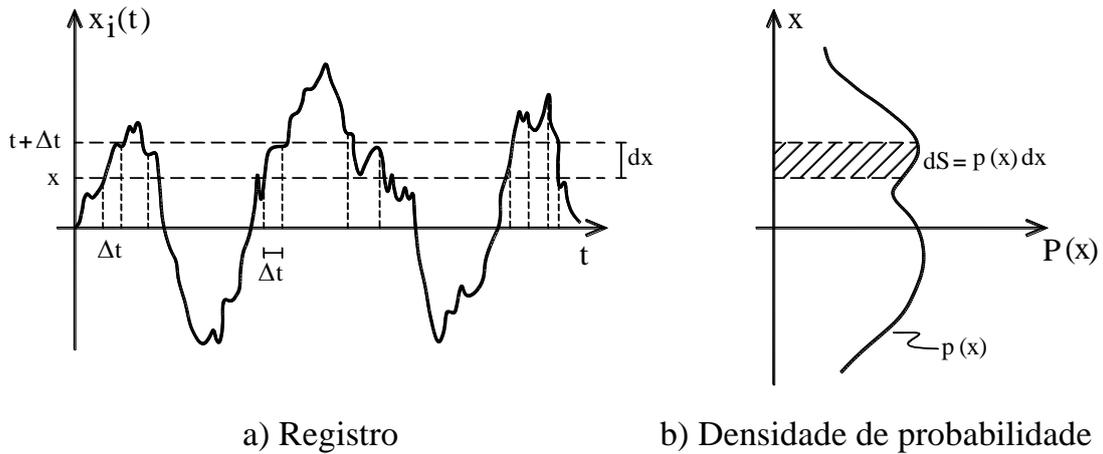


Figura 6.17

### 6.6 – Relações espectrais

Como visto, em se tratando de um processo aleatório egódigo, a seguinte relação se verifica para a função de auto correlação:

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau)x(t) dt \quad (6.96)$$

cuja transformada de Fourier se escreve:

$$R(\omega) = \int_0^\infty r(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{T} x(\omega)x(-\omega) \quad (6.97)$$

admitindo-se que a integral (6.96) seja limitada, uma vez que:

$$\begin{aligned} x(\omega) &= \int_0^\infty x(t)e^{-i\omega t} dt \\ x(-\omega) &= \int_0^\infty x(t^*)e^{i\omega t^*} dt^* \\ x(\omega)x(-\omega) &= \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty x(t)x(t^*)e^{-i\omega(t-t^*)} dt \right] dt^* = \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty x(t)x(t^*) dt^* \right] e^{-i\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (6.98)$$

onde  $\tau = t - t^*$ .

É importante registrar que o espectro expresso em (6.97) é real, pois a parte complexa se anula, ou seja:

$$\begin{aligned} x(\omega) &= \int_0^{\infty} x(t)(\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) dt = A(\omega) - iB(\omega) \\ x(\omega) &= \int_0^{\infty} x(t)(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) dt = A(\omega) + iB(\omega) \\ R(\omega) &= \frac{1}{T} x(\omega)x(-\omega) = \frac{1}{T} [A^2(\omega) + B^2(\omega)] \end{aligned} \quad (6.99)$$

constatando-se também a simetria, ou seja:

$$R(\omega) = R(-\omega) \quad (6.100)$$

e, assim, a transformada inversa de (6.97) fica então:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (6.101)$$

resultando-se, no caso de média nula:

$$R_x(0) = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) d\omega \quad (6.102)$$

em razão da simetria. Além disso, em razão da simetria exposta em (6.100) é também comum empregar-se a representação do espectro só no semiespaço positivo indicada por  $S(\omega)$ , ou seja  $S(\omega) = 2R(\omega)$ .

## 6.7 – Solicitações aleatórias

A equação de movimento de um grau de liberdade, considerando-se carregamento aleatório, tem a seguinte redação:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p^*(t) = \bar{p} + p(t) \quad (6.103)$$

onde  $\bar{p}$  é o valor médio da solicitação  $p^*(t)$ , ou seja:

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p^*(t) dt \quad (6.104)$$

e a parcela  $p(t)$ , com média nula, contempla a parte aleatória da solicitação, atendendo-se a condição para a existência de sua transformada de Fourier.

A solução da equação de movimento (6.103) é expressa por:

$$x(t) = \frac{\bar{p}}{k} + \int_0^t p(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (6.105)$$

uma vez que a solução permanente da função  $F(t)$  é o deslocamento estático (vide (2.150)). Trabalhando-se no domínio da frequência a parte aleatória de (6.103), ou seja, a segunda parcela de (6.105), tem-se:

$$\begin{aligned} x(\omega) &= h(\omega)p(\omega) \\ x(-\omega) &= h(-\omega)p(-\omega) \end{aligned} \quad (6.106)$$

e o espectro da resposta por:

$$\begin{aligned} R_x(\omega) &= \frac{1}{T} x(\omega)x(-\omega) = h(\omega)h(-\omega) \left[ \frac{1}{T} p(\omega)p(-\omega) \right] = \\ &|h(\omega)|R_p(\omega) \end{aligned} \quad (6.107)$$

que consiste na relação entre o espectro da resposta e o espectro da solicitação.

No caso em que o processo aleatório do carregamento tem média nula (6.107) ganha a redação:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |h(\omega)|^2 R_p(\omega) d\omega \quad (6.108)$$

obtendo-se assim a variância do processo aleatório da resposta, como permite (6.102). No caso de média não nula, a resposta é dada pela resposta aleatória acrescida do deslocamento estático como em (6.105).

É oportuno assinalar que a resposta é um processo aleatório gaussiano no caso em que a solicitação também o for, uma vez que a equação de movimento é linear, e em sendo a solicitação uma soma infinita de processos aleatórios, caracterizando-se ser o processo gaussiano, a resposta também vai ser, uma vez que a equação de movimento (6.103) é linear.

A Figura 6.18 exhibe vários casos de espectro da solicitação. A Figura 6.18 a) ilustra o chamado ruído branco, ficando-se a integral (6.108) dada por:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\pi} R_p \int_0^\infty |h(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} R_p \int_{-\infty}^\infty |h(\omega)|^2 d\omega = \frac{R_p \omega_n}{4k^2 \gamma} \quad (6.109)$$

e a Figura 6.18 b) exhibe o ruído com variação linear suave resultando-se:

$$\sigma_x^2 \approx \frac{R_p(\omega_n)\omega_n}{4\gamma k^2} \quad (6.110)$$

bem como a Figura 6.18 c) exhibe o ruído com variação parabólica, resultando-se, nesse caso novamente uma integração exata:

$$\sigma_x^2 = \frac{R_p(\omega_n)\omega_n}{4\gamma k^2} \quad (6.111)$$

e finalmente Figura 6.18 d) exibe o ruído com frequência de corte  $\omega_c$  :

$$\sigma_x^2 \approx \frac{R_p\omega_n}{4\gamma k^2} \left[ 1 - \frac{4\gamma}{3\pi(\omega_c / \omega_n)^3} - \frac{8\gamma(1-2\gamma^2)}{5\pi(\omega_c / \omega_n)^5} - \dots \right] \quad (6.112)$$

sendo que a demonstração de (6.109) vai ser objeto de apresentação em apêndice (uma aplicação do chamado teorema dos resíduos).

Uma vez conhecidos o valor médio e a variância da resposta, é possível, pois, formular juízos probabilísticos da resposta do sistema no caso da função de distribuição de probabilidades de Gauss, e em caso contrário, pelo menos um juízo conservador empregando-se o teorema de Chebyshev. A título de ilustração, a Tabela 6.2 compara a probabilidade do módulo da resposta se afastar  $h$  vezes do valor médio, ou seja:

$$P(x \leq \mu_x - h\sigma_x) + P(x \geq \mu_x + h\sigma_x) \quad (6.113)$$

Tabela 6.2

h	Gauss %	Chebyshev %
1	31,7	100
2	4.6	25
3	0.3	11
4	0.006	6.2

verificando-se que a previsão dada pelo teorema de Chebyshev é exageradamente conservadora, aumentando-se a diferença com o aumento do afastamento.

Um exemplo de aplicação bastante ilustrativo, que consiste no décimo primeiro exemplo proposto, página 36, do livro do Warburton já mencionado, acha-se ilustrado na Figura 6.19 a), na qual exibe-se um pórtico modelado por um sistema de um grau de liberdade, com a rigidez de cada coluna valendo  $k = 10^6 \text{N/m}$ , amortecimento  $\gamma = 0.02$  e massa  $2000 \text{kg}$ . O espectro da aceleração da base acha-se ilustrado na Figura 6.19 b) com frequência de corte em  $50 \text{rd/s}$ , e tem média nula. Pedem-se o valor médio quadrático da força cortante na coluna, bem como sua raiz quadrada, e também no caso de ruído branco. Pede-se também a probabilidade de a magnitude dessa força exceder  $40 \text{kN}$ . Além disso, se a aceleração da base for harmônica, ou seja,  $\ddot{x} = \ddot{X} \sin \omega t$ , qual o valor de  $\ddot{X}$  para que a raiz do valor médio quadrático seja igual ao do espectro. Nesse caso encontrar o valor da amplitude da força cortante na coluna.

VIBRAÇÃO DAS ESTRUTURAS

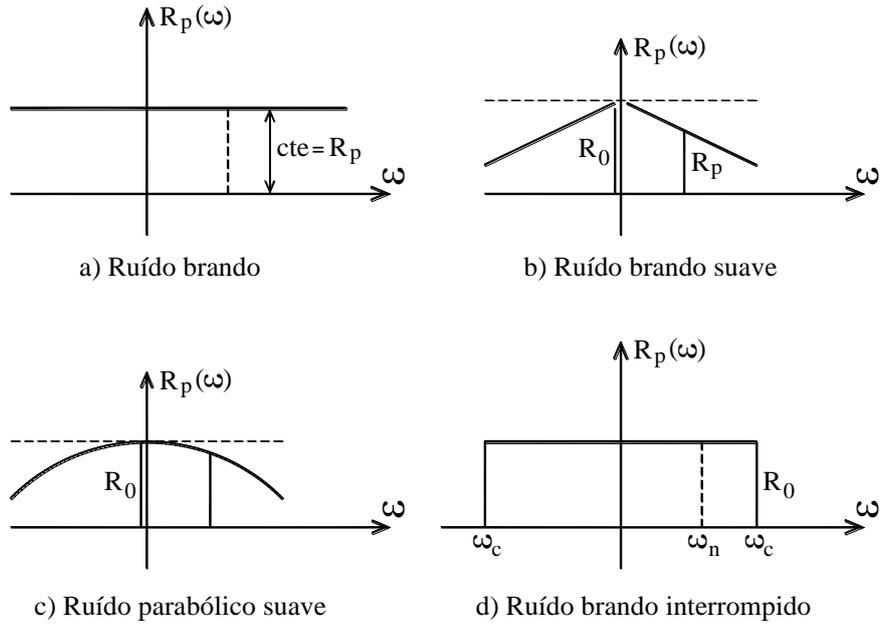


Figura 6.18

Com esses dados, tem-se:

$$\omega = \sqrt{\frac{2(10^6)}{2000}} = 31.62 \text{ rd/s}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_b$$

$$x(\omega) = -h(\omega)m\ddot{x}_b(\omega)$$

$$R(\omega) = |h(\omega)|^2 m^2 R_{\ddot{x}_b}(\omega)$$

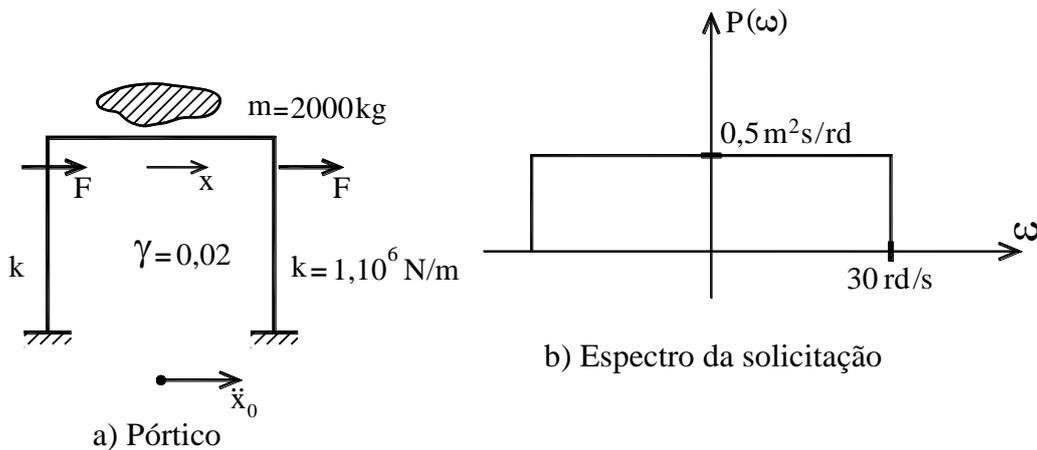


Figura 6.19

ficando-se o valor médio quadrático da resposta para ruído branco:

$$\sigma_x^2 = \frac{0.5(2000)^2}{4(2.10^6)^2 0.02} = 1.976 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

e com frequência de corte:

$$\sigma_x^2 = 1.976 \times 10^{-4} \left( 1 - \frac{4 \times 0.2}{3\pi \left( \frac{50}{31.62} \right)^3} - \frac{8(1 - 2 \times 0.02^2) 0.02}{5\pi \left( \frac{50}{31.62} \right)^5} - \dots \right) = 1.970 \times 10^{-4}$$

com diferença irrisória.

Como o processo aleatório da força cortante na coluna igualmente tem média nula, tem-se:

$$F = kx$$

$$\sigma_F^2 = k^2 \sigma_x^2 = (10^6)^2 1.976 \times 10^{-4} = 1.976 \times 10^8 \text{ N}^2$$

$$\sigma_F = 14.06 \text{ kN}$$

$$\left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \rightarrow \frac{40 - 0}{14.06} = 2.845 \rightarrow (F(x) - F(0.5) = 0.4978)$$

$$P(F \leq 40 \text{ kN}) = 2(0.5 - 0.4978) = 0.0044 (0.44\%)$$

e o movimento harmônico tem por valor médio quadrático:

$$\ddot{x}_b(t) = \ddot{X}_b \text{ sen } \omega_n t \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{x}_b^2(t) dt = 0.5 \ddot{X}_b^2$$

e o valor médio quadrático pelo espectro vale:

$$\sigma_{\ddot{x}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\ddot{x}}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} (0.4 \times 50) = 7.957 = 0.5 \ddot{X}_b^2$$

$$\ddot{X}_b^2 = 15.91 \rightarrow \ddot{X}_b = 3.9894 \rightarrow X_{\text{max}} = \frac{3.9894}{2 \times 0.02} = 99.73 \text{ m}$$

encerrando-se, pois, as respostas às questões formuladas. Valendo-se assinalar que no caso harmônico a amplitude máxima é limitada, enquanto que no caso aleatório ilimitada.

## 6.8 – Sistemas com vários graus de liberdade

A Figura 6.20 exibe um pórtico de vários andares, sendo modelado por um sistema estrutural, cujos graus de liberdade são constituídos pelo movimento horizontal dos andares. A equação de movimento, em notação matricial, é expressa por:

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{\bar{p}\} + \{p(t)\} \quad (6.114)$$

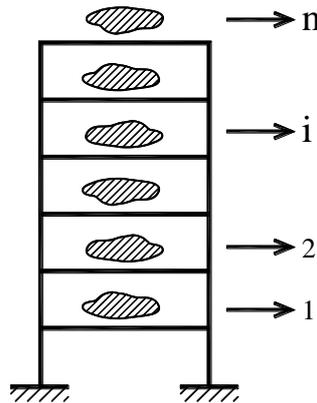
onde, a exemplo de (6.103), o vetor de carregamento é expresso separando-se o valor médio do carregamento, segundo cada grau de liberdade, e, com isso, o valor médio da resposta se expressa:

$$\{\bar{x}\} = [k]^{-1} \{\bar{p}\} \quad (6.115)$$

e a solução de (6.114) ganha então seguinte redação:

$$\{x^*(t)\} = \{\bar{x}(t)\} + \{x(t)\} \quad (6.116)$$

ou seja, o processo aleatório  $\{x(t)\}$  tem média nula, satisfazendo-se a condição para a existência de sua transformada de Fourier, e, mais que isso, no caso em que o carregamento apresenta distribuição de Gauss (soma de uma infinidade de carregamentos aleatórios), este processo aleatório é também gaussiano, pois resposta é também a soma de uma infinidade de processos, dado que a equação de movimento, no caso, é linear.



**Figura 6.20**

Em notação matricial, a semelhança de (6.106), tem-se:

$$\{x(\omega)\} = [h(\omega)]\{p(\omega)\} \quad (6.117)$$

resultando-se:

$$R_x(\omega) = \frac{1}{T} \{x(\omega)\} \{x(-\omega)\}^T = [h(\omega)] \left( \frac{1}{T} \{p(\omega)\} \{p(\omega)\}^T \right) [h(-\omega)]^T = [h(\omega)] (R_p(\omega)) [h(-\omega)]^T \quad (6.118)$$

sendo oportuno lembrar que trabalhar a probabilidade conjunta não é tarefa fácil, a não ser em alguns casos, como no de terremoto, cuja variável aleatória é a aceleração da base da estrutura, como ilustra-se na Figura 6.21 a), bem como no caso de solicitação pelo movimento ondulatório do mar em plataformas marítimas como ilustrado na Figura 6.21 b), cuja solicitação se expressa:

$$p_i(t) = f(z_i)g(t) \quad (6.119)$$

onde  $f(z_i)$  é uma função conhecida com a variação com a profundidade (Teoria linear de Airy, ou então de segunda e de quinta ordem de Stokes), e o espectro expresso por:

$$R_p(\omega) = \frac{1}{T} \{p(\omega)\} \{p(-\omega)\}^T = \{f(z_i)\} \{f(z_i)\}^T \frac{1}{T} g(\omega)g(-\omega) \quad (6.120)$$

bem como o espectro da resposta:

$$[R_x(\omega)] = [h(\omega)] \left[ \{f(z_i)\} \{f(z_i)\}^T \right] [h(-\omega)]^T R_g(\omega) \quad (6.121)$$

onde:

$$R_g(\omega) = \frac{1}{T} g(\omega)g(-\omega) \quad (6.122)$$

vem a ser o espectro da variável aleatória  $g(t)$ . No caso de movimentação de base (terremoto)  $f(z)$  é constante e igual a valor unitário ao longo da altura da construção, e no caso das ondas de mar a função  $f(z)$  varia com a profundidade de maneira conhecida segundo o modelo de onda adotado (teoria linear de Airy ou então de segunda e quinta ordens de Stokes).

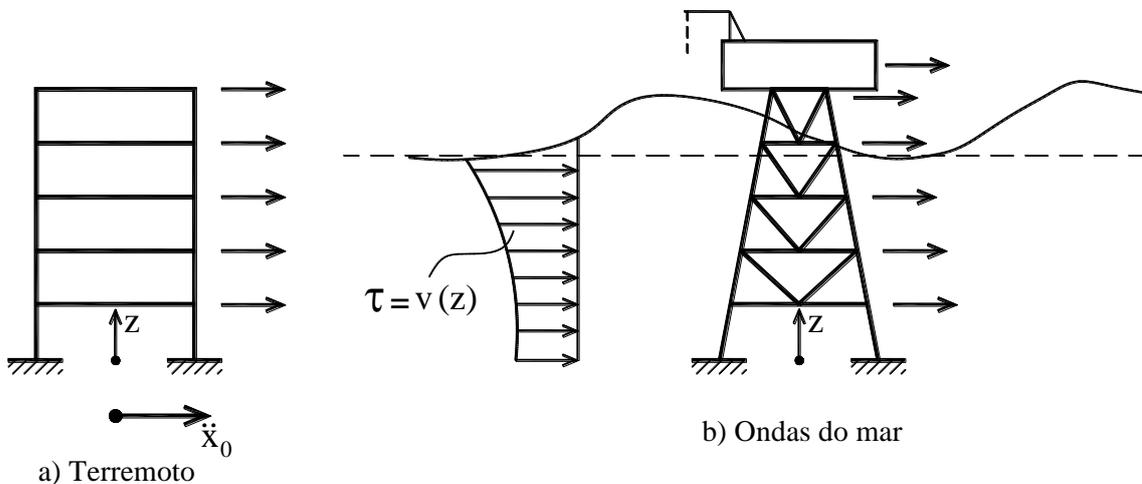


Figura 6.21

Como exemplo de aplicação adota-se o caso do pórtico ilustrado na Figura 6.22, apresentado por Warburton em livro já citado, submetido ao movimento aleatório de base com o seguinte espectro:

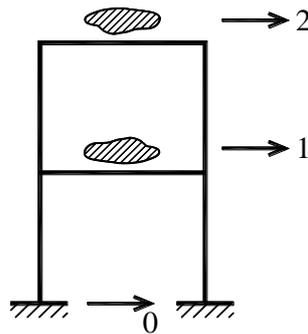
$$-100\text{rd/s} \leq \omega \leq 100\text{rd/s} \rightarrow R_{x_0}(\omega) = 2 \cdot 10^{-6} (1 - 0.0001\omega^2) \text{m}^2\text{s}$$

$$100\text{rd/s} \leq |\omega| \rightarrow R_{x_0}(\omega) = 0$$

sendo adotado o modelo de amortecimento hysterético, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 10^4 & 0 \\ 0 & 10^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\mu}{\omega} \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^7 & -10^7 \\ -10^7 & 10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^7 & -10^7 \\ -10^7 & 10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10^7 x_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10^7 \dot{x}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\mu}{\omega}$$

sendo as respostas  $x_1$  e  $x_2$  movimentos absolutos dos andares.



**Figura 6.22**

Resolvendo pela técnica da superposição modal têm-se as frequências angulares naturais e respectivos modos de vibração:

$$\omega_1 = 19.54\text{Hz} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 51.17\text{Hz} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{Bmatrix}$$

e as equações de equilíbrio modal:

$$\ddot{q}_1 + \frac{\mu}{\omega} \omega_1^2 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0.5257 \cdot 10^{-2} \left( 10^7 x_0 + 10^7 \frac{\mu}{\omega} \dot{x}_0 \right)$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{\mu}{\omega} \omega_2^2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0.506 \cdot 10^{-2} \left( 10^7 x_0 + 10^7 \frac{\mu}{\omega} \dot{x}_0 \right)$$

ou suas transformadas de Fourier:

$$-\omega^2 \ddot{q}_1(\omega) + \frac{\mu}{\omega} \omega_1^2 i \omega q_1(\omega) + \omega_1^2 q_1(\omega) = 0.5257 \cdot 10^{-5} \left( x_0(\omega) + i \omega \frac{\mu}{\omega} x_0(\omega) \right)$$

$$-\omega^2 \ddot{q}_2(\omega) + \frac{\mu}{\omega} \omega_2^2 i \omega q_2(\omega) + \omega_2^2 q_2(\omega) = 0.8506 \cdot 10^{-5} \left( x_0(\omega) + i \omega \frac{\mu}{\omega} x_0(\omega) \right)$$

resultando-se:

$$q_1(\omega) = \frac{0.5257 x_0(\omega) \left( 1 + i \omega \frac{\mu}{\omega} \right) 10^5}{\omega_1^2 \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 + i \omega \frac{\mu}{\omega} \right)}$$

$$q_2(\omega) = \frac{0.5257 x_0(\omega) \left( 1 + i \omega \frac{\mu}{\omega} \right) 10^5}{\omega_2^2 \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 + i \omega \frac{\mu}{\omega} \right)}$$

onde se mantém a constante histerética  $\mu/\omega$  (não se cancelando o fator  $\omega$ ) e a resposta em frequência do primeiro grau de liberdade:

$$x_1(\omega) = 0.5257 q_1(\omega) 10^{-2} + 0.8506 q_2(\omega) 10^{-2} =$$

$$10^{-3} \left[ \frac{0.2764}{\omega_1^2 \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 + i \omega \frac{\mu}{\omega} \right)} + \frac{0.7235}{\omega_2^2 \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 + i \omega \frac{\mu}{\omega} \right)} \right] \left( 1 + i \omega \frac{\mu}{\omega} \right) x_0(\omega)$$

bem como o espectro da resposta do primeiro grau de liberdade:

$$R_{x_1}(\omega) = \frac{1}{T} x_1(\omega) x_1(-\omega) = 10^6 [0.2764 h_1(\omega) + 0.7235 h_2(\omega)]$$

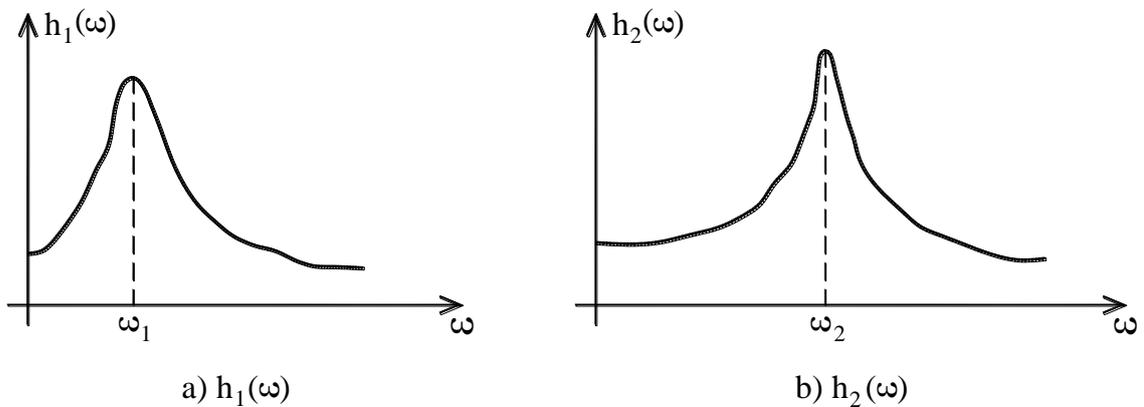
$$[0.2764 h_1(-\omega) + 0.7235 h_2(-\omega)] (1 + i\mu)(1 - i\mu) \frac{1}{T} x_0(\omega) x_0(-\omega)$$

onde:

$$h_1(\omega) = \frac{1}{\omega_1^2 \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 + i\omega \frac{\mu}{\omega} \right)}$$

$$h_2(\omega) = \frac{1}{\omega_2^2 \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 + i\omega \frac{\mu}{\omega} \right)}$$

cujos gráficos são ilustrados, respectivamente, na Figura 6.23.



**Figura 6.23**

O módulo da resposta em frequência fica então:

$$h_i(\omega)h_i(-\omega) = |h_i(\omega)| = \frac{1}{\omega_i^4 \left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_i} \right)^2 \right)^2 + \mu^2 \right]}$$

e o teorema dos resíduos para o caso de amortecimento histerético e espectro variando suavemente na região da ressonância permitem escrever-se:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) |h(\omega)|^2 d\omega = \frac{R(\omega_i)}{2\mu\omega_i^3}$$

resultando-se então para a resposta  $x_1$

$$\sigma_{x_1}^2 \approx \left[ \frac{R(\omega_1)(0.5254)^2}{2\mu\omega_1^3} + \frac{R(\omega_2)(0.8506)^2}{2\mu\omega_2^3} \right] (1 + \mu^2) 10^6$$

ou ainda, desprezando-se as integrais com produtos cruzados, ou seja:

$$\omega_i \neq \omega_j \rightarrow \begin{cases} \int_0^\infty R(\omega)h_i(\omega)h_j(-\omega)d\omega \approx 0 \\ \int_0^\infty R(\omega)h_i(-\omega)h_j(\omega)d\omega \approx 0 \end{cases}$$

quando os picos de  $R(\omega)$  são distantes como ilustra a Figura 6.23. De modo similar, para o movimento  $x_2$  tem-se:

$$x_2(\omega) = 10^{-2} (0.8506q_1(\omega) - 0.5257q_2(\omega))$$

$$\sigma_{x_2}^2 \approx \left[ \frac{R(\omega_1)(0.8506)^4}{2\mu\omega_1^3} + \frac{R(\omega_2)(-0.5257)^4}{2\mu\omega_2^3} \right] (1 + \mu^2) 10^6$$

e os resultados são arrolados na Tabela 6.3 considerando-se também a variância do movimento da base, ou seja:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty 2(1 - 0.0001\omega^2)d\omega$$

Tabela 6.3

$\mu$	$\sigma_0^2$ m <sup>2</sup>	$\sigma_{x_1}^2$		$\sigma_{x_2}^2$	
		Numérico	Aproximado	Numérico	Aproximado
0.01	10.61	318.7	318.3	672.7	672.1
0.1	10.61	32.45	32.14	67.32	67.87

sendo a solução numérica obtida por quadratura envolvendo as integrais cruzadas e a solução aproximada negligenciando-se as integrais cruzadas, como se valesse para o cálculo da variância a superposição das variâncias individuais.

No sentido de aproximar os picos das respostas em frequência, considere-se agora a equação de movimento:

$$\begin{bmatrix} 10^3 & 0 \\ 0 & 2.271 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\mu}{\omega} \begin{bmatrix} 343.08 & -238.2 \\ -238.2 & 238.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 343.08 & -238.2 \\ -238.2 & 238.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} 10^7 x_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10^7 \dot{x}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\mu}{\omega}$$

com o espectro do movimento da base dado por:

$$-30\text{rd/s} \leq \omega \leq 30\text{rd/s} \rightarrow R_{x_0}(\omega) = 2 \cdot 10^{-6} (1 - 0.001\omega^2) \text{m}^2\text{s}$$

$$30\text{rd/s} \leq |\omega| \rightarrow R_{x_0}(\omega) = 0$$

resultando-se as frequências naturais:

$$\omega_1 = 10 \text{rd/s}$$

$$\omega_2 = 10.448 \text{rd/s}$$

cujos resultados acham-se arrolados na Tabela 6.4.

Tabela 6.4

$\mu$	$\sigma_0^2$ $\text{m}^2$	$\sigma_{x_1}^2$		$\sigma_{x_2}^2$	
		Numérico	Aproximado	Numérico	Aproximado
0.01	3.34	119.5	114.6	48470.0	50500.0
0.1	3.34	20.9	11.6	958.0	5108.0

Os resultados mostrados nas Tabelas 6.3 e 6.4 sinalizam claramente que mesmo no caso de frequências naturais bem próximas, para amortecimento pequeno é válido desprezar as integrais cruzadas no cálculo da variância, podendo-se com boa aproximação simplesmente superpor a contribuição individual de cada modo de vibração.

### 6.9 – Processos derivados

Como já mostrado em (6.96), a função de auto correlação de um processo ergódico permite, por derivação, a seguinte redação:

$$\begin{aligned} \frac{dR(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \frac{dx(t+\tau)}{d\tau} dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \dot{x}(t) dt = R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t^* - \tau) \dot{x}(t^*) dt^* \end{aligned} \quad (6.123)$$

cuja transformada se escreve:

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) = \frac{1}{T} x(\omega) \dot{x}(-\omega) = \frac{1}{T} x(\omega) [-i\omega x(-\omega)] = -i\omega R_x(\omega) \quad (6.124)$$

e cuja transformada inversa resulta nula:

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega R_x(\omega) d\omega = 0 \quad (6.125)$$

em razão da simetria de  $R_x(\omega)$ , ou seja, para processo ergódico o deslocamento e a velocidade não são correlacionados e, portanto, independentes.

Considerando-se agora a correlação de velocidade, ou seja:

$$R_{\dot{x}}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) \dot{x}(t+\tau) dt \quad (6.126)$$

a transformada de Fourier é então dada por:

$$R_{\dot{x}}(\omega) = \frac{1}{T} \dot{x}(\omega) \dot{x}(-\omega) = \frac{1}{T} i\omega x(\omega) x(-\omega) (-i\omega) = \frac{1}{T} \omega^2 x(\omega) x(-\omega) \quad (6.127)$$

ficando-se a inversa:

$$R_{\dot{x}}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 R_x(\omega) d\omega \quad (6.128)$$

cujo integrando pode ser entendido como sendo o momento de inércia do espectro.

Continuando, a correlação da aceleração se escreve:

$$R_{\ddot{x}}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 R_x(\omega) d\omega \quad (6.129)$$

cujo integrando vem a ser o momento de inércia de quarta ordem do espectro.

### 6.10 – Processo probabilístico de banda estreita

A Figura 6.24 esquematiza a obtenção do espectro da resposta, evidenciando-se o fato de que a função de resposta em frequência realça as componentes com frequências próximas da frequência natural do sistema, e, portanto, a resposta apresenta banda estreita como ilustra a forma simplificada da Figura 6.24 f), resultando-se para a correlação:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} R_0 \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta\omega}{2} \tau\right)}{\tau} \cos \omega_n t \quad (6.130)$$

cuja representação típica ilustra-se na Figura 6.25.

A figura 6.26 ilustra o registro de um movimento de banda estreita  $y(t)$ , indicando-se o cruzamento positivo em um nível 'a' durante um período de tempo  $T$ , ou seja, com a função  $y(t)$  em situação crescente. Chamando-se  $\eta_a^+(T)$  o número de cruzamentos positivos durante o período de tempo  $T$ , a seguinte hipótese pode ser formulada sobre o valor médio de  $\eta_a^+(T)$ , denominado  $N_a^+(T)$ :

$$N_a^+(T) = \frac{\sum_{i=1}^m \eta_a^+(T)}{m} = v_a^+ T \quad (6.131)$$

sendo  $m$  o número de amostras de  $\eta_a^+(T)$  cruzamentos no período de tempo  $T$ , tratando-se, pois, de uma aproximação mediante relação linear.

VIBRAÇÃO DAS ESTRUTURAS

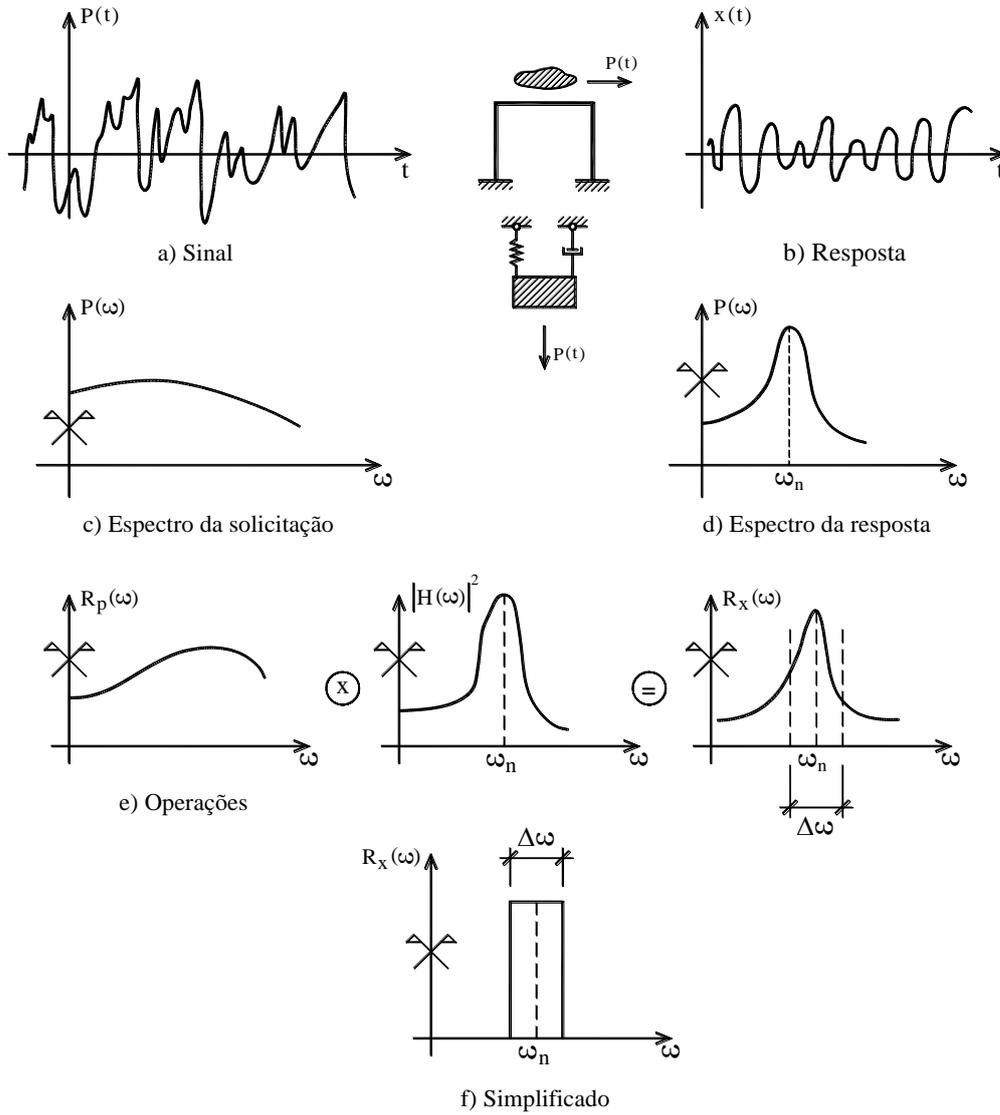


Figura 6.24

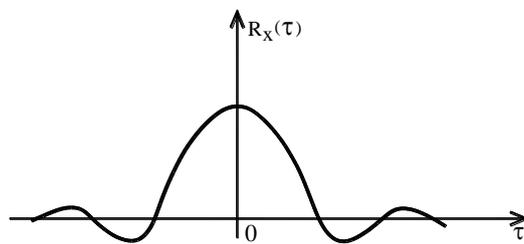


Figura 6.25

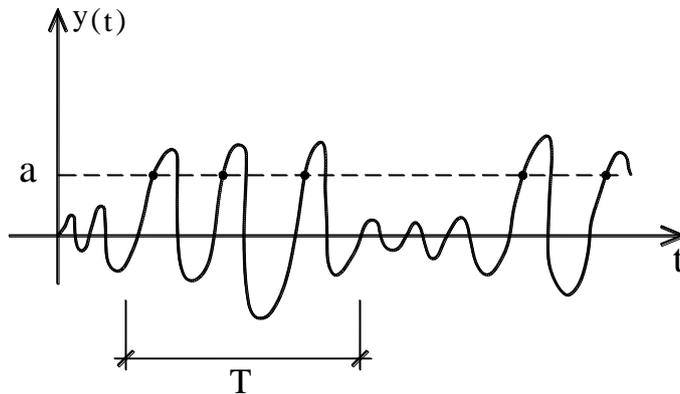


Figura 6.26

**6.11 – Análise de cruzamentos em processos aleatórios de banda estreita**

Como ilustrado na Figura 6.27, a condição para haver cruzamentos positivos no nível 'a' no intervalo diferencial de tempo dt é estabelecida pela seguinte relação:

$$dy = \dot{y}dt \geq a - y \tag{6.132}$$

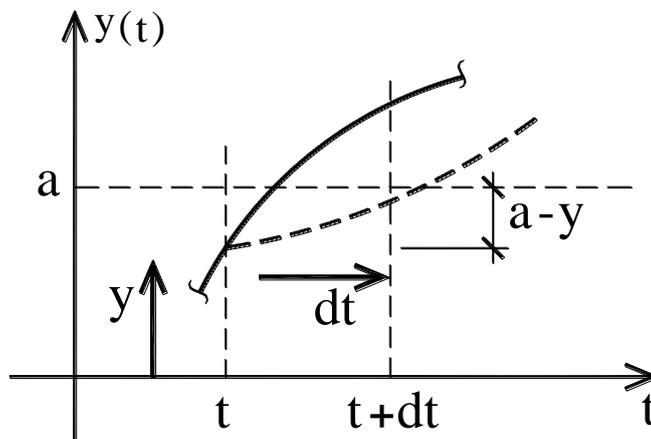


Figura 6.27

mas, por outro lado, a distribuição conjunta do deslocamento y e da velocidade  $\dot{y}$  mostrada na Figura 6.28 indica que tal condição é atendida na área tracejada lá exibida.

Além disso, tendo-se em vista que os processos ergódicos de deslocamentos y e de velocidade  $\dot{y}$  são independentes (não correlacionados), como exposto em (6.125), tem-se então:

$$\int_0^{\infty} \left( \int_{a-\dot{y}t}^a p(y, \dot{y}) dy \right) d\dot{y} = \int_0^{\infty} (p(a, \dot{y}) \dot{y} dt) d\dot{y} = dt \int_0^{\infty} p(a, \dot{y}) \dot{y} d\dot{y} = v_a^+ dt \quad (6.133)$$

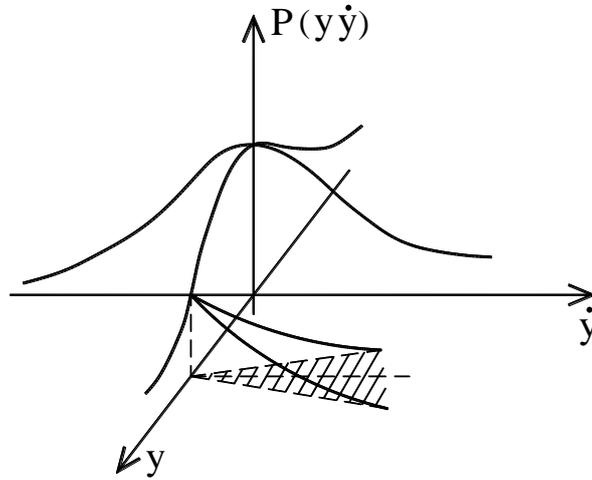


Figura 6.28

ou seja:

$$v_a^+ = \int_0^{\infty} p(a, \dot{y}) \dot{y} d\dot{y} = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} \right) \left( \frac{e^{-\frac{\dot{y}^2}{2\sigma_{\dot{y}}^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_{\dot{y}}}} \right) \dot{y} d\dot{y} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}} \quad (6.134)$$

onde se assume que os processos aleatórios em questão são gaussianos. Além disso, o expresso em (6.134) mostra que a frequência média ao longo do período de tempo considerado, como ilustra-se na Figura 6.29, ou seja, cruzamentos em zero, é dada por:

$$v_{a=0}^+ \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (6.135)$$

uma vez que:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) d\omega \\ \sigma_{\dot{y}}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \omega^2 d\omega \approx \omega_n^2 \sigma_y^2 \end{aligned} \quad (6.136)$$

no caso de banda estreita (vide Figura 6.24).

A Figura 6.30 ilustra os picos entre os níveis 'a' e 'a + da' de um processo aleatório de banda estreita valendo aproximadamente a relação:

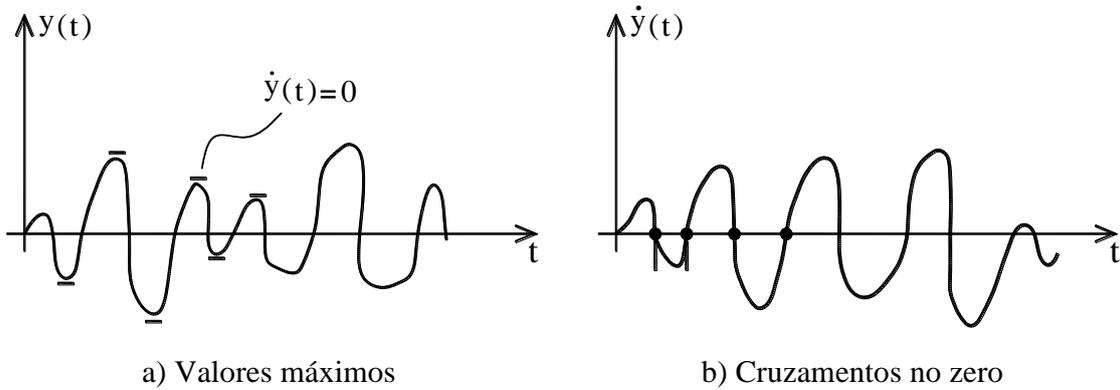


Figura 6.29

$$P_p(\text{pico} = y \geq a) = \int_a^\infty p_p(a) da \approx \frac{v_a^+}{v_0^+} \quad (6.137)$$

uma vez que essa é a fração dos picos maiores que 'a' em relação aos picos totais (àqueles que cruzaram zero). Por derivação, o expresso em (6.137) permite escrever-se:

$$\frac{dP_p(a)}{da} = -p_p(a) = \frac{1}{v_0^+} \frac{d(v_a^+)}{da} = \frac{1}{v_0^+} \frac{d}{da} \left( e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}} \right) = -\frac{a}{\sigma_y^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}} \quad (6.138)$$

que vem a ser a conhecida distribuição de Rayleigh, que prescreve serem raros os picos pequenos e grandes, como ilustra a Figura 6.31.

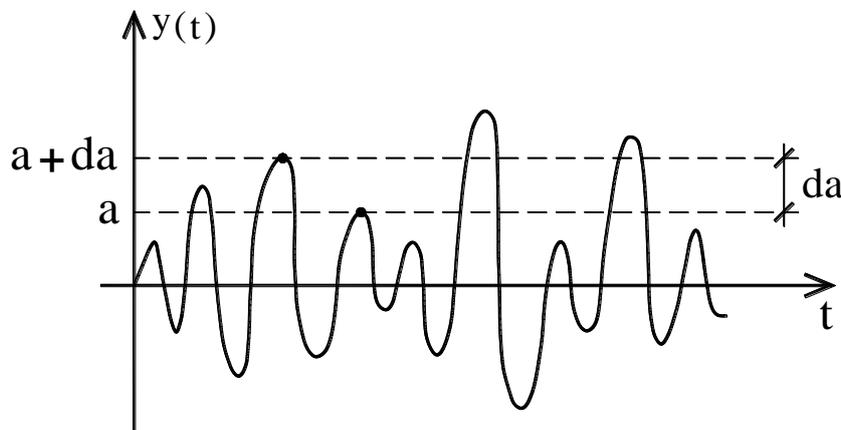
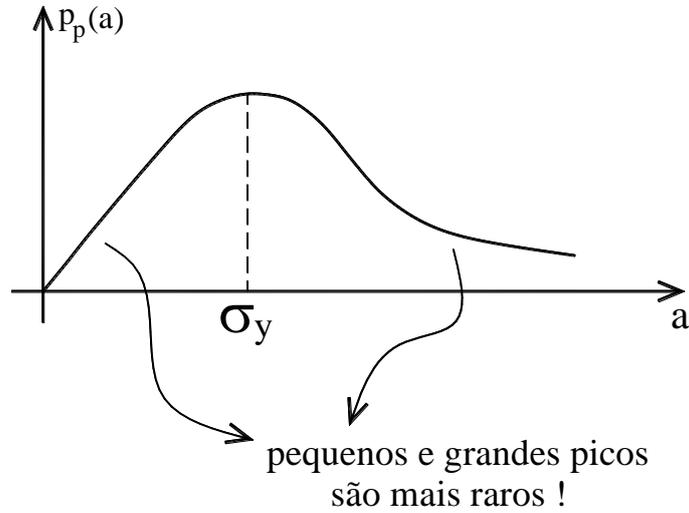


Figura 6.30



**Figura 6.31**

A frequência de máximos, ou seja,  $\dot{y}(t) = 0$ , vem a ser o cruzamento em zero da velocidade dado por (vide (6.135)):

$$v_{\dot{y}(t)=0}^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} = \mu \quad (6.139)$$

que, no caso de banda estreita, vem a ser igual ao expresso em (6.135), uma vez que, a exemplo de (6.136):

$$\sigma_{\dot{y}}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) \omega^4 d\omega \approx \omega_n^4 \sigma_y^2 \quad (6.140)$$

esclarecendo-se que a notação  $\mu$  em (1.139) vai ser melhor entendida no que se segue.

A Figura 6.32 exhibe um espectro de banda larga (broad band) para o qual valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} R(\omega_2 - \omega_1) \\ \sigma_{\dot{y}}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) \omega^2 d\omega = \frac{1}{3\pi} R(\omega_2^3 - \omega_1^3) \\ \sigma_{\ddot{y}}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) \omega^4 d\omega = \frac{1}{5\pi} R(\omega_2^5 - \omega_1^5) \end{aligned} \quad (6.141)$$

que, no caso  $\omega_1 = (2\pi)70.7\text{Hz}$  e  $\omega_2 = (2\pi)141.4\text{Hz}$  resulta:

$$v_{y=0}^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega_2^3 - \omega_1^3}{3(\omega_2 - \omega_1)}} = 108\text{Hz}$$

$$v_{y=0}^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} = \mu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega_2^5 - \omega_1^5}{3(\omega_2^3 - \omega_1^3)}} = 115\text{Hz}$$
(6.142)

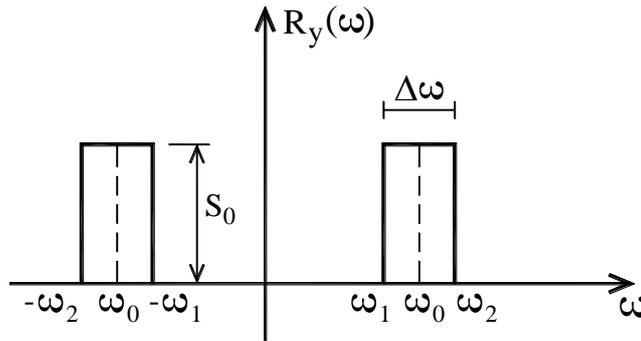


Figura 6.32

cuja diferença evidencia-se na Figura 6.33, indicando-se eventual crescimento da resposta antes de cruzar o nível zero.

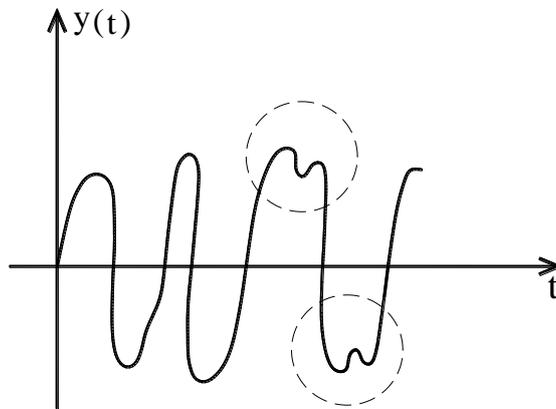


Figura 6.33

### 6.12 – Estados limites (colapso) sob vibração aleatória

A garantia de qualidade tecnológica (qualidade de engenharia) de um produto como estrutura, por exemplo, depende do atendimento de três estados denominados limites, quais sejam: Estado Limite Último, que corresponde ao nível de tensionamento acima do qual a estrutura não pode mais ser reparada, pois se encontra em situação de colapso. A Figura 6.34 ilustra essa situação de não colapso quando  $y(t) < a$ , sendo “a” o nível em questão. No caso ilustrado na Figura 6.34 a história da estrutura só tem sentido para  $0 < t < T_j$ , sendo  $T_j$  o tempo de vida da estrutura que, em princípio, vem a ser uma variável aleatória.

A Figura 6.35 ilustra o chamado Estado Limite Último de Utilização, ou de mal funcionamento, que se caracteriza pelo fato de que em uma fração do tempo o nível “a” é ultrapassado, ou seja:

$$\frac{\sum \Delta t(y > a)}{T} > \varepsilon \quad (6.143)$$

onde  $\varepsilon$  é o limite prescrito de mal funcionamento.

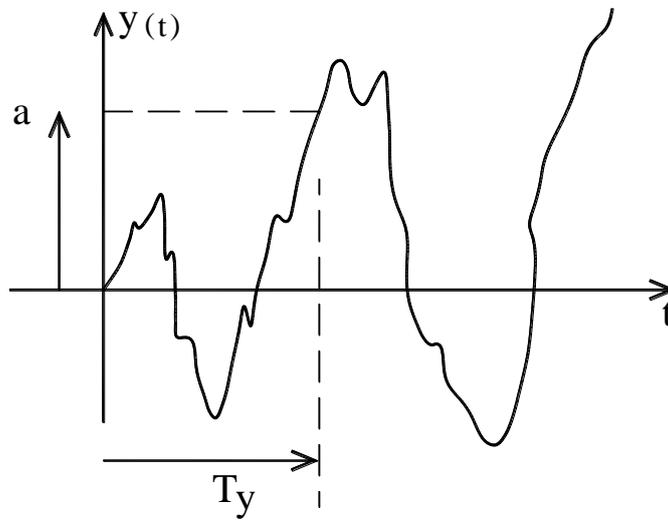


Figura 6.34

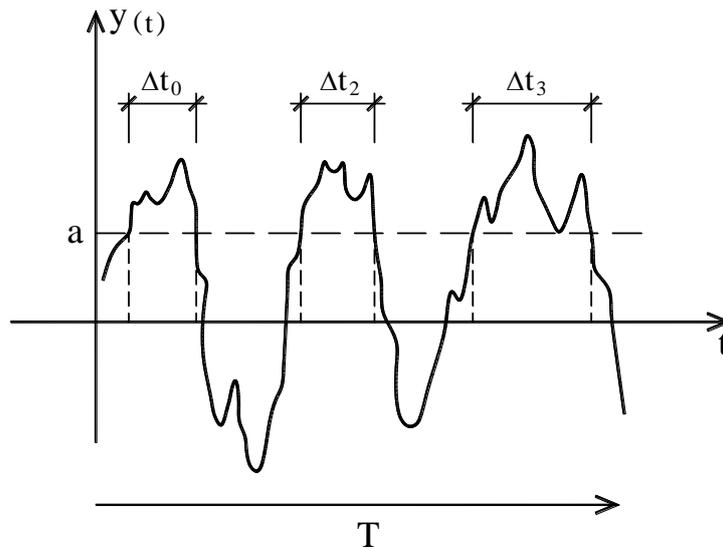


Figura 6.35

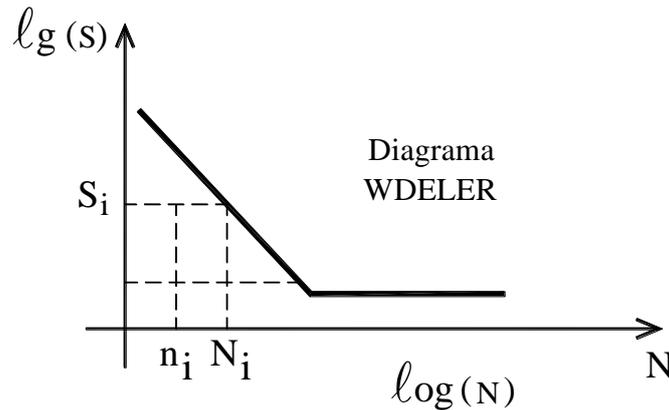
O Estado Limite Último de fadiga, ou vida útil, acha-se ilustrado na Figura 6.36, diagrama de Wöhler (engenheiro alemão August Wöhler), definido por:

$$D = \sum \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (6.144)$$

que consiste no esgotamento da vida útil, ou acumulação linear de dano, onde:

$$\frac{n_i}{N_i} \quad (6.145)$$

vem a ser o chamado dano parcial, sendo  $n_i$  o número de vezes (ciclo) que a tensão atinge o nível  $S_i$  e  $N_i$  o número de vezes que leva a fadiga do material nesse nível de tensão. O expresso em (6.144) é a conhecida Lei da acumulação linear de dano da regra de Palmgren-Miner (N A Palmgren - 1927, engenheiro mecânico sueco, e A M Miner - 1945, engenheiro americano).



**Figura 6.36**

O tratamento estocástico mais simples para a abordagem do Estado Limite Último consiste na consideração de que a probabilidade de não haver cruzamento positivo no nível "a" é dada por:

$$P(dT) = 1 - v_a^+ dt \quad (6.146)$$

sendo  $v_a^+ dt$  o número médio de cruzamentos positivos no nível "a" no intervalo de tempo  $dt$ , como já examinado.

Assumindo-se agora que esses eventos são independentes, tem-se:

$$P(t + dt) = P(t)P(dt) \quad (6.147)$$

ou ainda:

$$\frac{dP(t)}{dT} = \frac{P(T + dT) - P(T)}{dT} = \frac{P(T)}{dT} ((1 - v_a^+) - 1) \quad (6.148)$$

mais ainda:

$$\frac{dP(T)}{dT} = -v_a^+ P(T) \quad (6.149)$$

cuja integração resulta:

$$P(T) = e^{-v_a^+ T} \quad (6.150)$$

que consiste na distribuição de probabilidade exponencial negativa (a constante de integração é unitária, pelo fato de ser nula a probabilidade de não cruzamento positivo para T nulo). A título de curiosidade, essa é também a probabilidade da vida útil de lâmpadas, por exemplo.

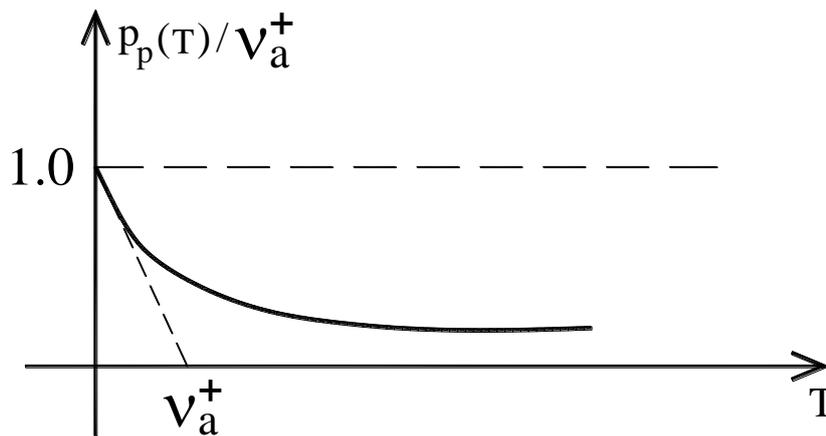
Por outro lado, a probabilidade de colapso (ruptura) é então expressa por:

$$P_R(T) = 1 - P(T) \quad (6.151)$$

e a densidade de probabilidade por:

$$p(T) = \frac{dP(T)}{dT} = v_a^+ e^{-v_a^+ T} \quad (6.152)$$

cujo gráfico ilustra-se na Figura 6.37.



**Figura 6.37**

e cuja média e variância são expressas, respectivamente, por:

$$\mu_T = \int_0^\infty T p(T) dT = \int_0^\infty T v_a^+ e^{-v_a^+ T} dT = \frac{1}{v_a^+}$$

$$\sigma_T^2 = \int_0^\infty \left(T - \frac{1}{v_a^+}\right)^2 p(T) dT = \left(\frac{1}{v_a^+}\right)^2 \quad (6.153)$$

havendo, pois, coincidência numérica entre a média e o desvio padrão.

Como exemplo, considere-se o caso de um processo de banda estreita  $y(t)$  com frequência média de 100 Hz, para o qual deseja-se saber qual o tempo médio  $T_0$  que, com 99% de acerto,  $y(t)$  não supere  $5\sigma_y$ . Com esses dados tem-se:

$$v_0^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4\pi} R_0 \omega_n^2} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

$$v_a^+ = \frac{\omega_n}{2\pi} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}} = 100e^{-\frac{(5\sigma_y)^2}{2\sigma_y^2}} = 100e^{-\frac{25}{2}} = 10^{-4} 3.73$$

mas, para pequenas probabilidades (0.01) vale a aproximação:

$$P_R(T_0) \approx v_a^+ T_0 \approx 1 - e^{-v_a^+ T_0}$$

$$T_0 \approx \frac{P_R(T_0)}{v_a^+} = \frac{0.01}{10^{-4} 3.73} = 27s$$

ou seja, a cada 27 segundos somente 1 em 100 em média  $y(t)$  supera  $5\sigma_y$ .

Sucedo que a hipótese (6.147) não é muito válida para processos de banda estreita, como ilustrado na Figura 6.38, pois a superação positiva de um dado nível se repete em bloco mostrando haver dependência, mas o resultado está do lado seguro (a probabilidade expressa por esse modelo é maior que a real).

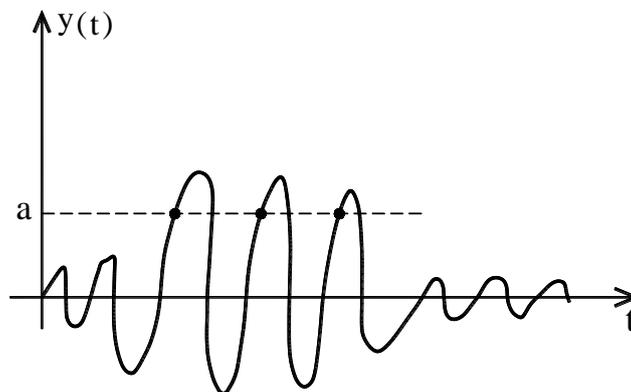


Figura 6.38

A figura 6.35 ilustra o registro de um processo com a indicação duração dos tempos em que um dado nível “a” é ultrapassado caracterizando-se a fração de mal funcionamento, resultando-se:

$$\frac{\sum \Delta t_i}{T} \approx \varphi(a) = \int_a^{\infty} p(y)dy \quad (6.154)$$

que, no caso de processo gaussiano de média nula, tem-se, por exemplo:

$$\varphi(a) = \int_a^{\infty} p(y)dy = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{a}{\sigma_y \sqrt{2}} \right) \right] \quad (6.155)$$

sendo erf a clássica função erro, cujo resultado acha-se arrolado na Tabela 6.5.

Tabela 6.5

h	Prob(y > hσ <sub>y</sub> )
1.28	0.1
1.65	0.05
2.34	0.01
3.09	0.001
3.72	0.0001
4.27	0.00001

Assumindo-se a taxa de mal funcionamento um milésimo, ou seja:

$$\varphi(a) \leq 0.001$$

tem-se então:

$$\operatorname{Prob}(y > 3.09\sigma_y) = 0.001$$

implica

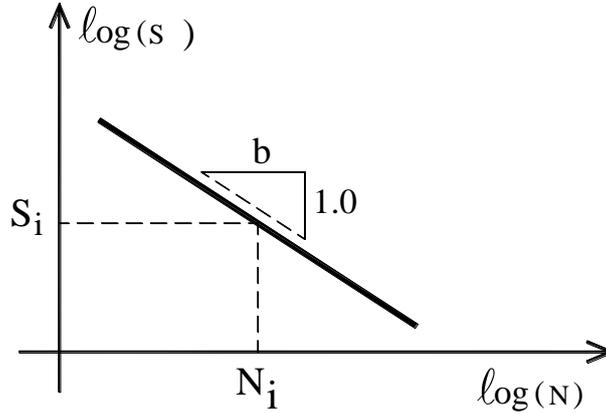
$$\sigma_y < \frac{y}{3.09} = \frac{a}{3.09}$$

ou seja, menos de 1 em 1000 é a fração de mal funcionamento, lembrando-se que em verdade  $\varphi(a)$  é uma variável aleatória, pois depende do tempo T considerado, e se está considerando  $E[\varphi(a)] \approx \varphi(a)$ .

Finalmente, a Figura 6.39 ilustra uma curva de fadiga típica, na qual  $S_i$  é o nível de tensão que leva a fadiga com N ciclos, sendo b o parâmetro de inclinação da curva em escala logarítmica, que depende do material, resultando:

$$N_i S_i^b = C \quad (6.156)$$

onde  $C$  é uma constante que igualmente depende do material. No caso da clássica liga de alumínio denominada T55-T6, tem-se:  $b = 6.09$  e  $C = 10^{32} 1.92$ .



**Figura 6.39**

A Figura 6.40 exibe a configuração de picos entre os níveis  $a$  e  $a+da$  para um processo aleatório de banda estreita resultando-se:

$$\eta(a) = (v_0^+ T) p(a) da \quad (6.157)$$

onde  $\eta(a)$  é o número de ciclos no nível  $a$ ,  $v_0^+ T$  é o número médio de ciclos do processo e  $p(a)da$  a fração de picos no nível  $a$ , sendo  $p(a)$  a distribuição de Rayleigh já estudada, tendo-se então:

$$\frac{\eta(a)}{N(a)} = v_0^+ \frac{p(a)}{N(a)} da = v_0^+ T \frac{\frac{a}{\sigma_y^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}}}{Ca^{-b}} = \frac{v_0^+ T}{C\sigma_y^2} a^{b+1} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}} \quad (6.158)$$

ficando-se, nesse caso, a regra de Palmgren-Miner assim expressa:

$$\sum \frac{\eta_i}{N_i} = \int_0^\infty \frac{\eta(a)}{N(a)} da = \frac{v_0^+ T}{C\sigma_y^2} \int_0^\infty a^{b+1} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}} da = 1 \quad (6.159)$$

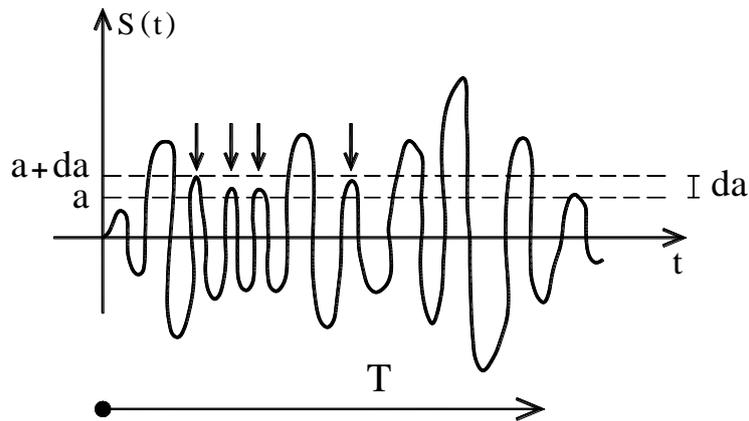
cuja integração resulta:

$$\frac{v_0^+ T}{C} (\sigma_y \sqrt{2})^b \Gamma(1 + b/2) = 1 \quad (6.160)$$

e a vida útil média de fadiga vale então:

$$T = \frac{C}{v_0^+ (\sigma_y \sqrt{2})^b \Gamma(1+b/2)} \quad (6.161)$$

sendo  $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$  a clássica função gama.



**Figura 6.40**

Como exemplo e aplicação, considere-se a estrutura mostrada na Figura 6.41 a), cuja massa vale 0.127 Kg, a coluna feita em liga de alumínio 755-T6, tem seção quadrada de lado 0.00615m, módulo de elasticidade de  $E = 10^{10} 7.1 \text{N/m}^2$ , sob aceleração gaussiana da base dada pelo espectro exibido na Figura 6.41 b). Assim sendo, o produto de inércia da coluna vale:

$$EI = 7.1 \frac{0.000635^4}{12} 10^{10} = 9.62 \text{Nm}^2$$

a rigidez e a frequência natural:

$$k = \frac{3EI}{\ell^3} = 27518 \text{N/m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{27518}{0.127}} = 4655.5 \text{rd/s} (74.08 \text{Hz})$$

a tensão máxima na base da coluna:

$$\sigma = \frac{Kx\ell}{I} \frac{0.00615}{2} = 10^{10} 6.55x$$

e com isso o espectro da tensão na base vale

$$R_{\sigma}(\omega) = \frac{1}{T} \sigma(\omega)\sigma(-\omega) = \frac{1}{T} 10^{21} 4.29 x(\omega)x(-\omega) = 10^{21} 4.29 R_x(\omega)$$

Como a equação de movimento em termos do deslocamento relativo é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) = -m\ddot{x}_0$$

resulta:

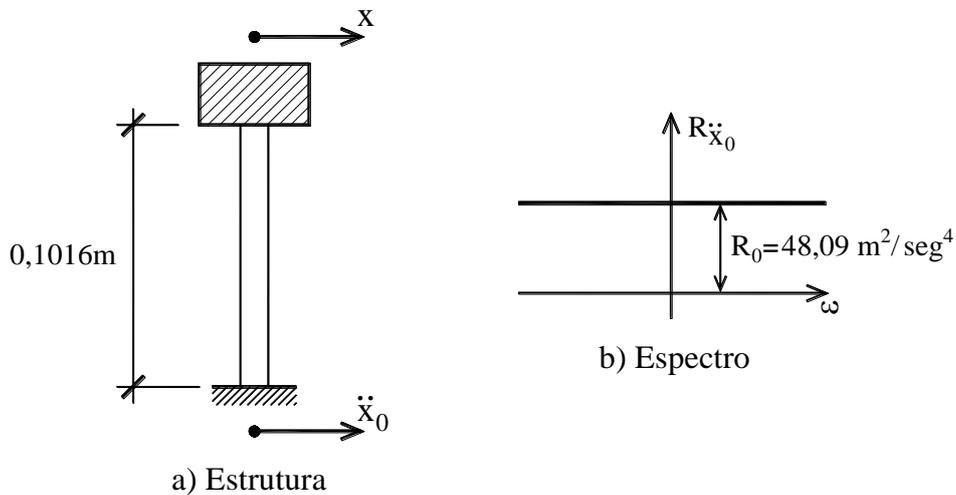
$$R_p = m^2 R_{\ddot{x}}$$

$$R_{\sigma} = 10^{21} 4.29 |h(\omega)|^2 m^2 R_{\ddot{x}}$$

e também a variância e desvio padrão da tensão:

$$\sigma_{\sigma}^2 = 10^{21} 4.29 \frac{48.09}{8\gamma k^2}$$

$$\sigma_{\sigma} = \frac{10^7 1.6}{\sqrt{\gamma}}$$



**Figura 6.41**

Para a liga de alumínio em questão tem-se:

$$b = 6.09$$

$$C = (10^5 \text{psi})^{6.09} = (10^5 13800)^{6.09}$$

ou reescrevendo (6.161)

$$\frac{v_0^+ T}{(10^5 13800)^{6.09}} \left( \frac{10^7 1.6}{\sqrt{\gamma}} \right)^{6.09} \Gamma\left(1 + \frac{6.09}{2}\right) = 1$$

conclui-se:

$$T = \frac{10^6 1.35}{74.88} = 18220s \approx 5hs$$

assumindo-se amortecimento  $\gamma = 0.05$ , bem como:

$$v_0^+ = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

$$\Gamma(4.045) \approx 3! = 6$$

restando-se agora a avaliação do desvio padrão da vida útil em fadiga.

Para tanto, Crandall<sup>1</sup> desenvolveu a seguinte formula para o caso de amortecimento pequeno ( $\gamma < 0.05$ ):

$$\sigma_T = \frac{1}{\sqrt{v_0^+ T}} \left[ \frac{f_1(b)}{\gamma} + \frac{f_2(b)}{v_0^+ T \gamma^2} + \frac{f_3(b)}{v_0^+ T} \right]^{1/2}$$

simplificando-se:

$$\sigma_T \approx \left( \frac{f_1(b)}{\gamma v_0^+ T} \right)^{1/2}$$

para  $\gamma v_0^+ T \gg 1$ . As funções em jogo estão arroladas na Tabela 6.6.

Tabela 6.6

b	$f_1(b)$	$f_2(b)$	$f_3(b)$
1	0.0414	0.00323	0.0796
3	0.369	0.0290	0.212
5	1.28	0.0904	0.679
7	3.72	0.223	2.33
9	6.70	0.518	8,78
11	31.5	1.23	30.0
13	96.7	3.06	111.2
15	300.0	8.11	415.0

Como exemplo de aplicação considere-se aquela liga de alumínio para a qual  $b = 6.09$ . Por interpolação entre  $b = 5.0$  e  $b = 7.0$  tem-se  $f_1(b) = 2.32$ , e com isso:

<sup>1</sup> Crandall, S.H., *Random Vibration*, MIT Press, (1959)

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{2.32}{0.05(10^6 \cdot 1.35)}} = 10^3 5.86s.$$

ou seja, tem-se vida útil média 5 horas, e desvio padrão de 5.86 milésimo de segundos.

## APÊNDICE

### 6.13-Aplicação do Teorema dos Resíduos

A resposta em frequência se expressa:

$$h(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\omega c} \quad (6.162)$$

resultando-se:

$$|h(\omega)|^2 = h(\omega)h(-\omega) = \frac{1}{k^2 + (c^2 - 2km)\omega^2 + m^2\omega^4} \quad (6.163)$$

ou ainda:

$$|h(\omega)|^2 = \frac{1}{m^2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} = \frac{1}{m^2(\omega + \omega_1)(\omega - \omega_1)(\omega + \omega_2)(\omega - \omega_2)} \quad (6.164)$$

onde:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_n^2 \left[ 1 - 2\gamma^2 + i2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2} \right] \\ \omega_2^2 &= \omega_n^2 \left[ 1 - 2\gamma^2 - i2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2} \right] \end{aligned} \quad (6.165)$$

como ilustra-se na Figura 6.42 (plano de Gauss), com  $\cos\theta = 1 - 2\gamma^2$ , tendo-se em conta que o módulo dos complexos  $\omega_1^2$  e  $\omega_2^2$  vem a ser  $\omega_n^2$ .

A figura 6.43 exhibe o plano de Gauss com os polos  $\pm\omega_1$  e  $\pm\omega_2$ , sendo:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_n \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \\ \omega_2 &= \omega_n \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.166)$$

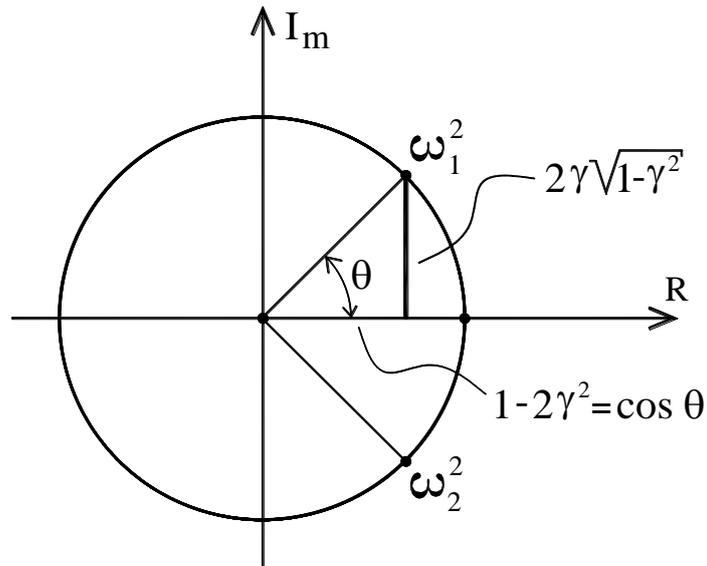


Figura 6.42

verificando-se, pois, as seguintes relações:

$$\cos \theta = 1 - 2\gamma^2$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \gamma^2}$$

$$\text{sen} \frac{\theta}{2} = \gamma$$

$$2\omega_1 = 2\omega_n \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \text{sen} \frac{\theta}{2} \right) \quad (6.167)$$

$$2\omega_2 = 2\omega_n \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \text{sen} \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_n \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = 2\omega_n i \text{sen} \frac{\theta}{2}$$

de utilidade mais adiante.

No caso em apreço, o teorema dos resíduos se expressa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\omega)|^2 d\omega = 2\pi i (R_1 + R_2) \quad (6.168)$$

onde:

$$R_1 = \frac{1}{m^2(\omega_1 + \omega_1)(\omega_1 + \omega_2)(\omega_1 - \omega_2)} = \frac{1}{8m^2\omega_n^3(\sqrt{1-\gamma^2} + i\gamma)(\sqrt{1-\gamma^2})(i\gamma)} \quad (6.169)$$

$$R_2 = \frac{1}{m^2(-\omega_2 + \omega_1)(-\omega_1 - \omega_2)(-\omega_2 - \omega_2)} = \frac{1}{8m^2\omega_n^3(\sqrt{1-\gamma^2} - i\gamma)(\sqrt{1-\gamma^2})(i\gamma)}$$

sendo  $R_1$  o resto na posição  $\omega = \omega_1$ , isto é, eliminando-se em (6.164) a singularidade causada pelo termo  $(\omega - \omega_1)$ , e o resto  $R_2$  calculado na posição  $\omega = -\omega_2$ , pois a integral indefinida vai ser feita circundando as singularidades da parte positiva do eixo complexo. Tendo-se em conta (6.169), o expresso em (6.168) se escreve:

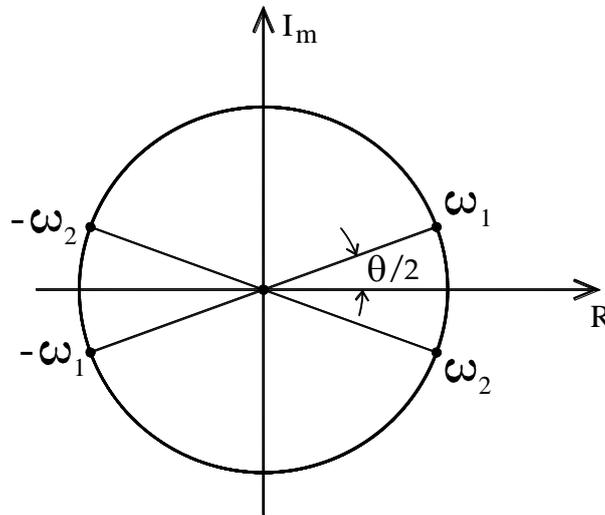


Figura 6.43

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\omega)|^2 d\omega = 2\pi i \left( \frac{1}{4\omega^3 m^2 i \gamma} \right) = \frac{\pi \omega_n}{2k^2 \gamma} \quad (6.170)$$

esclarecendo-se assim o expresso em (6.109).

## CAPÍTULO VII

### VIBRAÇÃO DE ESTRUTURAS CONTÍNUAS BARRAS E VIGAS

#### 7.1 - Introdução

O presente capítulo é dedicado ao estudo da integração das equações de movimento de sistemas contínuos pela técnica da integração em termos finitos (superposição modal), iniciando-se com o caso de vibração axial de barras, seguido do estudo de vibração flexional e integração exata com formulação para sistemas formado por barras. O modelo de flexão de Timoshenko mais o efeito da força normal, bem como vibração de vigas sobre base elástica, completam o temário.

#### 7.2 – Vibração longitudinal de barras

A Figura 7.1 a) exibe uma barra genérica sob solicitação dinâmica distribuída, com destaque para a configuração de ações no elemento diferencial ilustrada na Figura 7.1 b). O equilíbrio dinâmico fica então expresso por:

$$N + dN + p(x, t)dx - N = m\ddot{u}(x, t)dx \quad (7.1)$$

ou seja:

$$\frac{dN}{dx} - m\ddot{u}(x, t) = -p(x, t) \quad (7.2)$$

onde  $N$  denota a força normal na barra,  $m$  a massa por unidade de comprimento,  $u(x, t)$  o deslocamento longitudinal e  $p(x, t)$  o carregamento longitudinal distribuído.

Por outro lado, a elasticidade linear permite expressar as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= E\varepsilon_x = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = Eu'(x, t) \\ N &= \sigma(x, t)S \end{aligned} \quad (7.3)$$

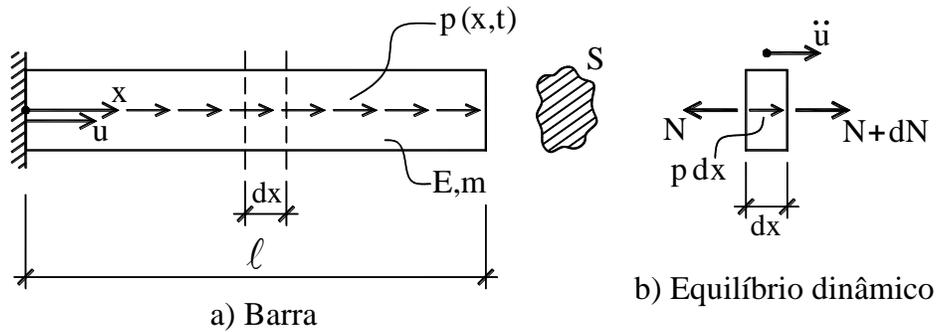


Figura 7.1

supondo-se inicialmente ausência de amortecimento (vibração livre), onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\sigma(x,t)$  a tensão normal e  $S$  a área da seção da barra. A notação com numeral romano como expoente indica o grau de derivação em relação à variável  $x$ . Tendo-se em vista (7.3), o expresso em (7.2) ganha a seguinte redação:

$$u''(x,t) - \frac{m}{ES} \ddot{u}(x,t) = -p(x,t) \quad (7.4)$$

cuja integração pela técnica da superposição modal (integração em termos finitos) apresenta-se no que se segue.

A vibração livre (não amortecida) tem, pois, a seguinte redação:

$$u''(x,t) - \frac{m}{ES} \ddot{u}(x,t) = 0 \quad (7.5)$$

cuja integração por separação de variáveis, ou seja:

$$u(x,t) = u(x)T(t) \quad (7.6)$$

onde  $u(x)$  é uma função agora só de  $x$  e  $T(t)$  só do tempo, permitindo-se uma nova redação para (7.5), ou seja:

$$u''(x)T(t) - \frac{m}{ES} u(x)\ddot{T}(t) = 0 \quad (7.7)$$

ou ainda:

$$\frac{m}{ES} \frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2 \quad (7.8)$$

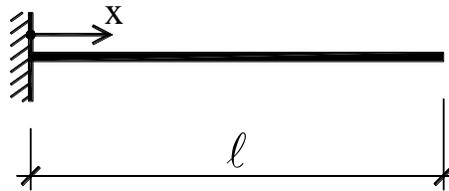
sendo  $-\omega^2$  a constante de separação, resultando-se nas duas equações diferenciais:

$$\begin{aligned} u''(x) + \frac{m}{ES} \omega^2 u(x) &= 0 \\ \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

cujas integrações resultam, respectivamente:

$$\begin{aligned} u(x) &= A \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{m}{ES}} \omega x \right) + B \cos \left( \sqrt{\frac{m}{ES}} \omega x \right) \\ T(t) &= A^* \operatorname{sen} \omega t + B^* \cos \omega t \end{aligned} \quad (7.10)$$

sendo que a frequência angular natural  $\omega$  vai depender das condições de contorno, como no caso da barra da Figura 7.2. ou seja:



**Figura 7.2**

$$\begin{aligned} u(x=0, t) = u(0)T(t) &\rightarrow u(0) = 0 \\ \sigma(x=l, t) = 0 &\rightarrow E u'(l)T(t) = 0 \rightarrow u'(l) = 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

implicando-se em:

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ A \sqrt{\frac{m}{ES}} \omega \cos \sqrt{\frac{m}{ES}} \omega l &= 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

resultando-se na equação de frequência:

$$\cos \sqrt{\frac{m}{ES}} \omega l = 0 \rightarrow \sqrt{\frac{m}{ES}} \omega l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \quad (7.13)$$

ou seja:

$$\omega_i = \frac{2i-1}{2} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{m}{ES}} \rightarrow u_i(x) = A_i \text{sen} \frac{2i-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \quad (7.14)$$

$$T_i(t) = A^* \text{sen} \omega_i t + B^* \text{cos} \omega_i t$$

sendo as constantes  $A_i$  são arbitrárias e consistem nas amplitudes dos modos de vibrar, e as constantes  $A_i^*$  e  $B_i^*$  dependem das condições iniciais do movimento a ser melhor estudadas mais adiante (item 7.2.2). A título de curiosidade, considere-se que a barra da figura 7.2 tenha 3m de comprimento, feita com aço, com densidade  $10^3 7.85 \text{Kg/m}^3$  e módulo de elasticidade  $10^{11} 2.1 \text{KN/m}^2$ , a primeira frequência natural vale  $\omega_1 = 2710 \text{rd/s}$  (431Hz); e as demais  $\omega_j = (2j-1)\omega_1$ .

### 7.2.1 – Ortogonalidade dos modos de vibrar

A primeira de (7.9) permite escrever para os modos de vibrar  $i$  e  $j$ :

$$u_j \left[ u_i'' + \frac{m}{ES} \omega_i^2 u_i \right] = 0 \rightarrow \int_0^\ell u_i'' u_j dx = -\omega_i^2 \int_0^\ell \frac{m}{ES} u_i u_j dx \quad (7.15)$$

$$u_i \left[ u_j'' + \frac{m}{ES} \omega_j^2 u_j \right] = 0 \rightarrow \int_0^\ell u_j'' u_i dx = -\omega_j^2 \int_0^\ell \frac{m}{ES} u_i u_j dx$$

onde já se supõe  $u = u(x)$  no sentido de se reduzir as expressões. A integração por partes do expresso em (7.15) implica, respectivamente, em:

$$\int_0^\ell u_i'' u_j dx = u_i' u_j \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u_i' u_j' dx \quad (7.16)$$

$$\int_0^\ell u_j'' u_i dx = u_j' u_i \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u_j' u_i' dx$$

visto que nas extremidades ou movimento  $u_k$  (engaste) ou sua derivada  $u_k'$  (extremidade livre) são nulos, o que que implica em:

$$\int_0^\ell u_i'' u_j dx - \int_0^\ell u_j'' u_i dx = 0 = (\omega_j^2 - \omega_i^2) \int_0^\ell \frac{m}{ES} u_i u_j dx \quad (7.17)$$

ou seja:

$$\int_0^\ell \frac{m}{ES} u_i u_j dx = 0 \quad (7.18)$$

visto que as frequências naturais angulares (primeira das (7.14)) são distintas ( $\omega_i \neq \omega_j$ ). Em decorrência de (7.18), vale também:

$$\int_0^\ell u_i'' u_j dx = \int_0^\ell u_j'' u_i dx = 0 \quad (7.19)$$

e de (7.15):

$$\int_0^\ell u_i'' u_i dx = -\omega_i^2 \int_0^\ell \frac{m}{ES} u_i u_i dx \quad (7.20)$$

completando-se assim as relações necessárias para a formulação da integração de (7.4) pela técnica da Superposição Modal.

### 7.2.2 – Superposição modal

As relações (7.18), (7.19) e (7.20) permitem formular a solução de (7.4) na forma:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) u_i(x) \quad (7.21)$$

uma vez que:

$$\int_0^\ell u_j \left[ ES \sum_{i=1}^{\infty} q_i u_i'' + m \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i u_i \right] dx = - \int_0^\ell p(x,t) u_j dx \quad (7.22)$$

ou seja:

$$q_i \int_0^\ell u_i'' u_i dx - \ddot{q}_i \int_0^\ell \frac{m}{ES} u_i u_i dx = - \int_0^\ell \frac{p(x,t)}{ES} u_i dx \quad (7.23)$$

supondo-se que os parâmetros ES e m não variem com x. Em face de (7.20), o expresso em (7.23) ganha a redação:

$$q_i \left( -\omega_i^2 \int_0^\ell \frac{m}{ES} u_i^2 dx \right) - \ddot{q}_i \int_0^\ell \frac{m}{ES} u_i^2 dx = - \int_0^\ell \frac{p(x,t)}{ES} u_i dx \quad (7.24)$$

ou, finalmente, ainda:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{\int_0^\ell p(x,t) u_i dx}{\int_0^\ell m u_i^2 dx} \quad (7.25)$$

cuja integração no tempo remete ao que já foi tratado no Capítulo II. As condições iniciais de (7.25) são também obtidas lançando-se mão da ortogonalidade dos modos, quais sejam:

$$u(x, t = 0) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t = 0)u_i \rightarrow q_i(t = 0) = \frac{\int_0^{\ell} u(x, t = 0)u_i dx}{\int_0^{\ell} u_i^2} \quad (7.26)$$

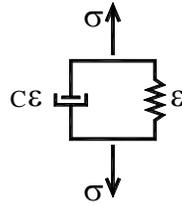
$$\dot{u}(x, t = 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i(t = 0)u_i \rightarrow \dot{q}_i(t = 0) = \frac{\int_0^{\ell} \dot{u}(x, t = 0)u_i dx}{\int_0^{\ell} u_i^2}$$

sendo evidente que no caso de repouso as condições iniciais de (7.25) são nulas.

Há vários modelos de amortecimento estrutural, mas a atenção aqui vai estar voltada para o modelo de Kelvin (físico e engenheiro Irlandês William Thomson – Lord Kelvin), por ser o mais simples, e servir de base para os demais. A Figura 7.3 ilustra o modelo reológico em questão, ou seja:

$$\sigma = E(\varepsilon + c\dot{\varepsilon}) \quad (7.27)$$

entendendo-se que a tensão no material é dada pela contribuição de uma matriz sólida mais a contribuição de uma matriz líquida em fluxo.



**Figura 7.3**

Tendo-se em vista (7.27), a primeira de (7.3) passa a se expressar:

$$\sigma(x, t) = E(\varepsilon_x(x, t) + c\dot{\varepsilon}_x(x, t)) = E\left(\frac{du(x, t)}{dx} + c\frac{d\dot{u}(x, t)}{dx}\right) = E(u'(x, t) + c\dot{u}'(x, t)) \quad (7.28)$$

e a equação de equilíbrio fica então:

$$ESu''(x, t) + cES\dot{u}''(x, t) - mu(x, t) = -p(x, t) \quad (7.29)$$

cuja integração via (7.21) resulta:

$$\ddot{q}_i + c\omega_i^2\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = \frac{\int_0^{\ell} p(x, t)u_i dx}{\int_0^{\ell} mu_i^2 dx} \quad (7.30)$$

ou ainda:

$$\ddot{q}_i + 2\gamma_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = \omega_i^2f_i(t) \quad (7.31)$$

onde:

$$f_i(t) = \frac{\int_0^\ell p(x,t)u_i dx}{\omega_i^2 \int_0^\ell m u_i^2 dx} \quad (7.32)$$

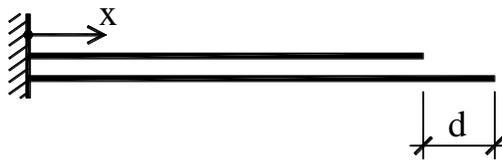
$$\gamma_i = \frac{c\omega_i}{2}$$

resultando-se em amortecimento modal proporcional à frequência angular natural correspondente. Vale assinalar que os quinhões  $q_i$  são proporcionais à  $A_i^{-1}$ , mas ao se multiplicar os quinhões novamente por  $A_i$  em (7.21), o resultado passa a não depender mais da magnitude de  $A_i$ . Em outras palavras, a amplitude  $A_i$  pode ser assumida unitária, pois isso não influi no resultado final.

A Figura 7.4 ilustra o exemplo de uma barra esticada estaticamente com alongamento  $d$ , e, ao se soltar, a barra entra em vibração livre. As condições iniciais são então:

$$u(x,t=0) = d \frac{x}{\ell}$$

$$\dot{u}(x,t=0) = 0$$



**Figura 7.4**

resultando-se com o emprego da superposição modal:

$$\sum_{j=1}^{\infty} q_j(t=0)u_j = d \frac{x}{\ell}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_j(t=0)u_j = 0$$

ou ainda:

$$\int_0^\ell u_i \left( \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t=0) u_j \right) dx = \int_0^\ell d \frac{x}{\ell} u_i dx$$

$$\int_0^\ell u_i \left( \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_j(t=0) u_j \right) dx = 0$$

resultando-se:

$$q_i(0) = \frac{\int_0^\ell d \frac{x}{\ell} u_i dx}{\int_0^\ell u_i^2} = \frac{8d(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2 \pi^2}$$

$$\dot{q}_i(0) = 0$$

que são, pois, as condições iniciais que  $q_i(t) = A \sin \omega_i t + B \cos \omega_i t$  deve atender, ou seja;

$$q(0) = B = \frac{8d(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2 \pi^2}$$

$$\dot{q}(0) = A \omega_i = 0 \rightarrow A = 0$$

resultando-se

$$q_i(t) = \frac{8d(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2 \pi^2} \cos \omega_i t$$

e finalmente:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{8d(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2 \pi^2} \cos \omega_i t \right) \left( \sin \frac{2i-1}{2} \pi \frac{x}{\ell} \right)$$

valendo-se observar que um exame dessa série mostra que a convergência é um tanto lenta, a exemplo do que ocorre com a série de Fourier.

Como outro exemplo de aplicação, considere-se a barra exibida na Figura 7.5 solicitada por uma carga distribuída que não varia com  $x$ , mas harmonicamente com o tempo, ou seja  $p(x,t) = p \sin \omega t$ , com condições iniciais nulas. Por outro lado, sabendo-se que:

$$u_i = \sin \frac{2i-1}{2} \pi \frac{x}{\ell}$$

$$\omega_i = \frac{\pi}{2\ell} \sqrt{\frac{ES}{m}}$$

tem-se:

$$f_i(t) = \frac{p(t)}{\omega_i^2 m} \frac{4}{\pi(2i-1)^3}$$

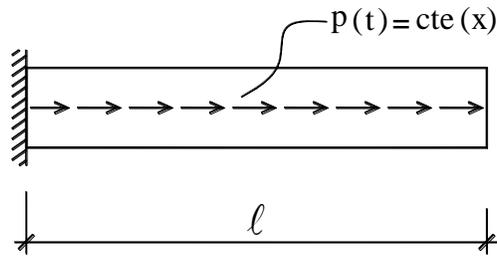


Figura 7.5

pois:

$$\int_0^l u_i dx = \frac{2l}{\pi(2i-1)}$$

$$\int_0^l u_i^2 dx = \frac{l}{2}$$

resultando:

$$q_i = \frac{4}{\pi(2i-1)} \frac{P}{m\omega_i^2} \psi_i$$

sendo  $\psi_i$  a função do tempo já examinada no Capítulo II, e assim a resposta é dada então por:

$$u(x,t) = \frac{p\ell^2}{2ES} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{32}{[\pi(2i-1)]^3} \psi_i u_i$$

onde o fator do somatório é o deslocamento estático da extremidade livre. A solitação normal ganha assim a redação:

$$N(x,t) - ESu'(x,t) = p\ell \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{[\pi(2i-1)]^2} \psi_i \cos\left(\frac{2i-1}{2} \pi \frac{x}{\ell}\right)$$

onde o fator do somatório é agora a resultante estática do carregamento na base.

### 7.3 – Vibração de vigas

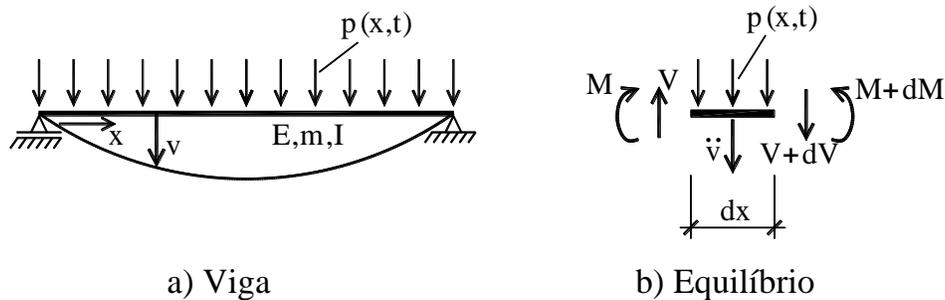
A Figura 7.6 a) ilustra o caso de vibração flexional de viga em balanço e a Figura 7.6 b) a configuração infinitesimal das ações envolvidas. A segunda Lei de Newton implica em:

$$dV + p(x,t)dx = m\ddot{v}(x,t)dx \quad (7.33)$$

ou seja:

$$\frac{dV}{dx} - m\ddot{v}(x,t) = -p(x,t) \quad (7.34)$$

onde  $V$  é a força cortante,  $m$  a massa por unidade de comprimento da viga,  $p(x,t)$  o carregamento e  $v(x,t)$  o deslocamento transversal.



**Figura 7.6**

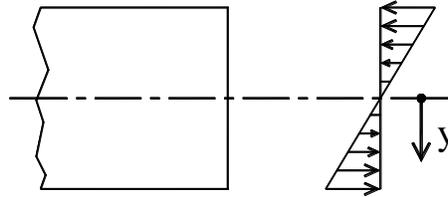
Além disso, desprezando-se a inércia de rotação, o equilíbrio de momentos implica na relação estática:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (7.35)$$

sendo  $M$  o momento fletor. Por outro lado, como ilustra a Figura 7.7, a teoria técnica da flexão prescreve:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x,t) &= -y \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = -yv''(x,t) \\ \sigma_x(x,t) &= -Eyv''(x,t) \\ M &= \int_S \sigma_x(x,t)y dS = Ev''(x,t) \int_S y^2 dS = -EIv''(x,t) \end{aligned} \quad (7.36)$$

onde  $I$  denota o momento de inércia da seção transversal da viga.



**Figura 7.7**

Tendo-se em vista (7.35) e a terceira de (7.36), o equilíbrio dinâmico expresso em (7.34) ganha a seguinte redação:

$$\frac{d}{dx^2} EI v''(x, t) + m \ddot{v}(x, t) = p(x, t) \quad (7.37)$$

e a vibração livre:

$$v^{IV}(x, t) + \frac{m}{EI} \ddot{v}(x, t) = 0 \quad (7.38)$$

supondo-se que o produto de inércia  $EI$  e a massa por unidade de comprimento não variem ao longo da viga. A integração pela técnica da separação de variáveis  $v(x, t) = v(x)T(t)$  resulta:

$$\frac{v^{IV}(x)}{\frac{m}{EI} v(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2 \quad (7.39)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} v^{IV}(x) - \omega^2 \frac{m}{EI} v(x) &= 0 \\ \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \end{aligned} \quad (7.40)$$

cujas soluções se expressam, respectivamente:

$$\begin{aligned} v(x) &= A \sin \lambda^* x + B \cos \lambda^* x + C \sinh \lambda^* x + D \cosh \lambda^* x \\ T(t) &= A^* \sin \omega t + B^* \cos \omega t \end{aligned} \quad (7.41)$$

onde:

$$\lambda^* = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}} \quad (7.42)$$

cujo valor depende das condições de contorno. Por exemplo, no caso da vinculação indicada na Figura 7.8, ou seja:

$$\begin{aligned} v(x=0) &= 0 \\ v'(x=0) &= 0 \\ v''(x=l) &= 0 \\ v'''(x=l) &= 0 \end{aligned} \quad (7.43)$$

sendo que a primeira e segunda de (7.43) decorre da vinculação da extremidade da esquerda e as duas seguintes do fato de ser nulo o momento fletor (última das (7.35)) e a força cortante (expressão (7.35)) na extremidade da direita.

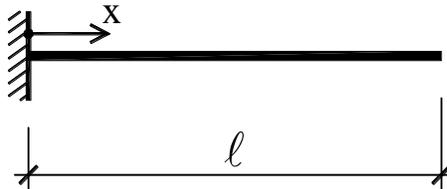


Figura 7.8

O exposto em (7.43) tendo-se em vista a primeira de (7.41), resulta no problema de autovalor:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda^* & 0 & \lambda^* & 0 \\ -\lambda^{*2}\text{sen}\lambda^*l & -\lambda^{*2}\text{cos}\lambda^*l & \lambda^{*2}\text{senh}\lambda^*l & \lambda^{*2}\text{cosh}\lambda^*l \\ -\lambda^{*3}\text{cos}\lambda^*l & \lambda^{*3}\text{sen}\lambda^*l & \lambda^{*3}\text{cosh}\lambda^*l & \lambda^{*3}\text{senh}\lambda^*l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.44)$$

resultando na equação característica:

$$\text{cosh}\lambda^*l \text{cos}\lambda^*l = 0 \quad (7.45)$$

cujas três primeiras raízes são  $\lambda^*l = 1.875$ ,  $\lambda^*l = 4.694$  e  $\lambda^*l = 7.855$ , correspondendo-se às três primeiras frequências naturais:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{3.516}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \\ \omega_1 &= \frac{22.03}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \\ \omega_1 &= \frac{61.7}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}\end{aligned}\tag{7.46}$$

com as demais raízes aproximadamente dadas por  $\lambda^* \ell \approx (2i-1)\pi/2$ .

Assumindo-se em (7.44) a constante  $D = 1$ , os modos de vibração passam a ser expressos por:

$$v_i = \cosh \frac{\lambda_i^* x}{\ell} - \cos \frac{\lambda_i^* x}{\ell} - \eta_i \left( \sinh \frac{\lambda_i^* x}{\ell} - \sen \frac{\lambda_i^* x}{\ell} \right)\tag{7.47}$$

onde:

$$\eta_i = \frac{\cosh \lambda^* \ell + \cos \lambda^* \ell}{\sinh \lambda^* \ell + \sen \lambda^* \ell} \Rightarrow \begin{cases} i = 1 \rightarrow 0.73409 \\ i = 2 \rightarrow 1.01847 \\ i = 3 \rightarrow 0.99922 \\ i \geq 4 \rightarrow \approx 1.0 \end{cases}\tag{7.48}$$

e as correspondentes integrais de interesse para a superposição modal dadas por:

$$\begin{aligned}\int_0^\ell v_i dx &= \frac{2\eta_i}{\lambda^*} \\ \int_0^\ell v_i^2 dx &= \ell\end{aligned}\tag{7.49}$$

valendo-se notar que, para outras condições de contorno, procedimento similar no caso de viga simplesmente apoiada resulta:

$$\begin{aligned}\lambda_i \ell &= i\pi \\ v_i &= \sen \frac{i\pi x}{\ell} \\ \int_0^\ell v_i dx &= (1 + (-i)^{i+1}) \frac{\ell}{i\pi} \\ \int_0^\ell v_i^2 dx &= \frac{\ell}{2}\end{aligned}\tag{7.50}$$

e assim para as outras condições de contorno como engaste nas duas extremidades e outras os resultados expressos em (7.50) igualmente podem ser formulados.

### 7.3.1 – Ortogonalidade dos modos de vibrar

A primeira equação de (7.40) permite escrever-se para os modos de vibrar  $i$  e  $j$ :

$$\int_0^\ell v_j \left( v_i^{IV} - \omega_i^2 \frac{m}{EI} v_i \right) dx = 0 \rightarrow \int_0^\ell v_i^{IV} v_j dx = \int_0^\ell \omega_i^2 \frac{m}{EI} v_i v_j dx \quad (7.51)$$

$$\int_0^\ell v_i \left( v_j^{IV} - \omega_j^2 \frac{m}{EI} v_j \right) dx = 0 \rightarrow \int_0^\ell v_j^{IV} v_i dx = \int_0^\ell \omega_j^2 \frac{m}{EI} v_i v_j dx$$

mas, a integração por partes permite redigir as seguintes relações, respectivamente:

$$\int_0^\ell v_i^{IV} v_j dx = v_i^{III} v_j \Big|_0^\ell - v_i^{II} v_j' \Big|_0^\ell + \int_0^\ell v_i^{II} v_j'' dx = \int_0^\ell v_i^{II} v_j'' dx \quad (7.52)$$

$$\int_0^\ell v_j^{IV} v_i dx = v_j^{III} v_i \Big|_0^\ell - v_j^{II} v_i' \Big|_0^\ell + \int_0^\ell v_j^{II} v_i'' dx = \int_0^\ell v_j^{II} v_i'' dx$$

tendo-se que os termos envolvendo o contorno são nulos, uma vez que ou a força cortante é nula e o deslocamento não nulo, e vice-versa, ou no contorno a momento fletor é nulo e a rotação não nula e vice-versa. Assim sendo, (7.51) e (7.52) permitem escrever:

$$\int_0^\ell v_i^{IV} v_j dx - \int_0^\ell v_j^{IV} v_i dx = 0 = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^\ell \frac{m}{EI} v_i v_j dx \quad (7.53)$$

e, como as frequências naturais são distintas, resulta:

$$\int_0^\ell \frac{m}{EI} v_i v_j dx = 0 \quad (7.54)$$

bem como (7.51) e (7.52) permitem também escrever-se:

$$\int_0^\ell v_i^{IV} v_j dx = \int_0^\ell v_j^{IV} v_i dx = 0 \quad (7.55)$$

$$\int_0^\ell v_i^{IV} v_i dx = \omega_i^2 \int_0^\ell \frac{m}{EI} v_i^2 dx$$

completando-se, pois, as relações de ortogonalidade.

Assumindo-se a superposição modal como solução da equação de equilíbrio dinâmico (7.37), ou seja:

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_i v_i^{IV} + \frac{m}{EI} \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i v_i = \frac{p(x,t)}{EI} \quad (7.56)$$

resultando-se da ortogonalidade dos modos de vibração:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{\int_0^{\ell} p(x,t) v_i dx}{\int_0^{\ell} m v_i^2 dx} \quad (7.57)$$

cujas condições iniciais podem ser redigidas, como exposto no primeiro exemplo de aplicação.

O amortecimento via modelo Kelvin pode ser incluído reescrevendo (7.36), ou seja:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x,t) &= -y(v''(x,t) + c\dot{v}''(x,t)) \\ \sigma_x(x,t) &= E(\varepsilon_x(x,t) + c\dot{\varepsilon}_x(x,t)) = -Ey(v''(x,t) + c\dot{v}''(x,t)) \\ M &= \int_S \sigma_x(x,t) y dS = E(v''(x,t) + c\dot{v}''(x,t)) \int_S y^2 dS = -EI(v''(x,t) + c\dot{v}''(x,t)) \end{aligned} \quad (7.58)$$

e conseqüentemente (7.37):

$$\frac{d}{dx^2} EI(v''(x,t) + c\dot{v}''(x,t)) + m\ddot{v}(x,t) = p(x,t) \quad (7.59)$$

ganhando (7.57), finalmente, a redação:

$$\ddot{q}_i + 2\gamma_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{\int_0^{\ell} p(x,t) v_i dx}{\int_0^{\ell} m v_i^2 dx} \quad (7.60)$$

onde o amortecimento modal é dado por:

$$\gamma_i = \frac{c\omega_i}{2} \quad (7.61)$$

lembrando-se que foi assumido que o produto de inércia EI e a massa por unidade de comprimento m não variam ao longo do comprimento da viga.

Como terceiro exemplo de aplicação, considere-se o caso de uma viga em balanço como ilustrado na Figura 7.8, com carregamento harmônico transversal uniforme ao longo do comprimento, ou seja:  $p(x,t) = p \sin \omega t$ , e condições iniciais nulas (vide (7.26)).

Nesse caso, (7.60) permite escrever-se:

$$\ddot{q}_i + 2\gamma_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = \omega_i^2 \frac{p\ell^4}{8EI} \beta_i \text{sen}\omega t$$

onde

$$\beta_i = \frac{8 \int_0^\ell v_i dx}{\lambda_i^4 \int_0^\ell v_i^2 dx}$$

cuja integração resulta:

$$q_i = \frac{p\ell^4}{8EI} \beta_i \psi_i$$

e conseqüentemente:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p\ell^4}{8EI} \beta_i \psi_i v_i$$

$$M(x, t) = -EI(v''(x, t) + c\dot{v}''(x, t)) = \frac{p\ell^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \frac{\lambda_i^2}{4} (\psi_i + c\dot{\psi}_i) v_i^*$$

$$V(x, t) = -EI(v'''(x, t) + c\dot{v}'''(x, t)) = p\ell \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \frac{\lambda_i^3}{8} (\psi_i + c\dot{\psi}_i) v_i^{**}$$

onde:

$$v_i^* = -\cosh \frac{\lambda_i^* x}{\ell} - \cos \frac{\lambda_i^* x}{\ell} + \eta_i \left( \sinh \frac{\lambda_i^* x}{\ell} + \text{sen} \frac{\lambda_i^* x}{\ell} \right)$$

$$v_i^{**} = -\sinh \frac{\lambda_i^* x}{\ell} + \text{sen} \frac{\lambda_i^* x}{\ell} + \eta_i \left( \cos \frac{\lambda_i^* x}{\ell} + \cos \frac{\lambda_i^* x}{\ell} \right)$$

sendo de ressaltar novamente que a convergência das séries em questão não é lá muito acentuada.

O quarto exemplo de aplicação é aquele da página 136 do livro do Warburton já mencionado, que consiste numa viga em balanço desprovida de amortecimento e com carga concentrada na extremidade livre como ilustrado na Figura 7.9, bem como a variação no tempo do carregamento se expressa:

$$0 \leq t \leq T \rightarrow f(t) = \text{sen} \frac{\pi t}{T} = \text{sen} \frac{\omega_1 t}{2}$$

$$t \geq T \rightarrow f(t) = 0$$

sendo  $\omega_1$  a primeira frequência angular natural.

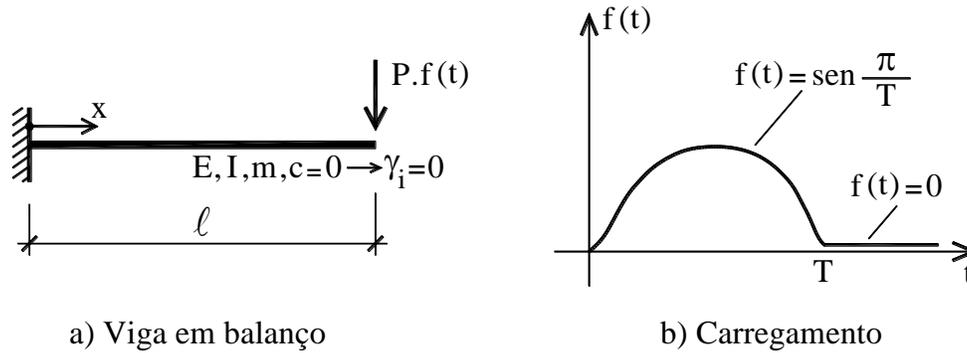


Figura 7.9

A resposta da viga em balanço pela técnica da superposição modal é então dada por:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i v_i$$

com  $v_i$  expresso em (7.47) e  $q_i$  a solução da equação diferencial para  $0 \leq t \leq T$ :

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \omega_i^2 \left( \frac{2P(-1)^{i+1}}{\omega_i^2 m l} \right) \text{sen} \frac{\omega_i t}{2}$$

lembrando-se que:

$$\int_0^{\ell} p(x, y) v_i dx = P v_i(x = \ell) = P(2(-1)^{i+1})$$

$$\int_0^{\ell} v_i^2 = \ell$$

e, assim sendo:

$$q_i = \frac{P \ell^3}{EI} \frac{2(-1)^{i+1}}{\lambda_i^4} \frac{1}{1 - \alpha_i^2} \left( \text{sen} \frac{\omega_i t}{2} - \alpha_i \text{sen} \omega_i t \right)$$

sendo  $\alpha_i = \frac{\omega_1}{2\omega_i}$

O deslocamento na extremidade livre da viga, bem como o momento fletor  $M = -EI \sum_{i=1}^{\infty} q_i v_i''$  e a força cortante  $V = -EI \sum_{i=1}^{\infty} q_i v_i'''$  ficam então expressos por:

$$v(x = l, t) = \frac{P\ell^3}{EI} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda_i^4(1-\alpha_i^2)} \left( \text{sen} \frac{\omega_i t}{2} - \alpha_i \text{sen} \omega_i t \right) =$$

$$\frac{P\ell^3}{EI} \left[ \begin{array}{l} 0.431 \text{sen} \frac{\pi t}{T} - 0.216 \text{sen} \omega_1 t + 0.00829 \text{sen} \frac{\pi t}{T} - 0.0006614 \text{sen} \omega_2 t + \\ 0.00105 \text{sen} \frac{\pi t}{T} - 0.00002996 \text{sen} \omega_3 t + \dots \end{array} \right]$$

$$M = -P\ell \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{i+1}}{\lambda_i(1-\alpha_i^2)} \left( \text{sen} \frac{\omega_i t}{2} - \alpha_i \text{sen} \omega_i t \right)$$

$$V = P \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4\eta_i(-1)^{i+1}}{\lambda_i(1-\alpha_i^2)} \left( \text{sen} \frac{\omega_i t}{2} - \alpha_i \text{sen} \omega_i t \right)$$

A integração para  $t \geq T$ , que consiste na vibração livre da viga com as condições iniciais dadas pela resposta do fim do intervalo de tempo anterior, ou seja:

$$v(x, t = T) = \bar{v}(x, t^* = 0)$$

$$\dot{v}(x, t = T) = \dot{\bar{v}}(x, t^* = 0)$$

onde  $t^* = t - T$ , ou ainda:

$$\int_0^{\ell} v_j \sum_{i=1}^{\infty} q_i v_i dx = \int_0^{\ell} v_j \sum_{i=1}^{\infty} \bar{q}_i v_i dx \rightarrow q_i v_i^2 = \bar{q}_i v_i^2 \rightarrow q_i = \bar{q}_i$$

igualmente  $\dot{q}_i = \dot{\bar{q}}_i$ , e com isso:

$$v(x = l, t) = \frac{P\ell^3}{EI} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{4}{\lambda_i^4(1-\alpha_i^2)} \left( \begin{array}{l} (\text{sen} \frac{\omega_i T}{2} - \alpha_i \text{sen} \omega_i T) \cos \omega_i t^* + \\ (\alpha_i \cos \frac{\omega_i T}{2} - \alpha_i \cos \omega_i T) \text{sen} \omega_i t^* \end{array} \right) \right) \right] =$$

$$\frac{P\ell^3}{EI} \left[ -0.431 \text{sen} \omega_1 t^* - 0.000164 \cos \omega_2 t^* - 0.0013 \text{sen} \omega_2 t^* + \dots \right]$$

valendo assinalar que há diferenças entre alguns desses números e os do Warburton.

### 7.3.2 – Viga sob carga móvel

A Figura 7.10 exibe uma viga simplesmente apoiada sendo solicitada por uma carga  $P(t)$  deslocando-se com velocidade  $u(t)$ . Nesse caso, a expressão (7.60) se escreve:

$$\ddot{q}_i + 2\gamma_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = \frac{P(t)v_i\left(x = \int_0^t u(t) dt\right)}{\int_0^\ell mv_1^2 dx} \quad (7.62)$$

cuja redação para carga não variando no tempo ( $P(t) = P$ ), amortecimento nulo e velocidade constante ( $u(t) = u$ ) se escreve (vide (7.50)):

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2q_i = \frac{2P}{m\ell} \text{sen} \frac{i\pi u t}{\ell} \quad (7.63)$$

considerando-se que o tempo passa a ser contado a partir do instante em que a carga entra na viga. A integração de (7.63) fica então:

$$q_i = \frac{2P}{m\ell\omega_i^2} \left[ \frac{\text{sen} \frac{i\pi u t}{\ell} - \frac{i\pi u}{\ell\omega_i} \text{sen} \omega_i t}{1 - \left(\frac{i\pi u}{\ell\omega_i}\right)^2} \right] \quad (7.64)$$

e a resposta só levando-se em conta o primeiro modo no meio do vão:

$$v(x = \ell / 2, t) = v_1q_1 = \frac{2P\ell^3}{\pi^4 EI} \left[ \frac{\text{sen} \psi \omega_1 t - \psi \text{sen} \omega_1 t}{1 - \psi^2} \right] \quad (7.65)$$

resultando-se nos gráficos da Figura 7.11, onde:

$$v_e = \frac{P\ell^3}{48EI} \quad (7.66)$$

$$0 \leq \psi = \frac{\pi u}{\ell\omega_1} \leq 1$$

considerando-se o fato de que, no intervalo de tempo considerado, o carregamento está sobre a viga ( $u \leq \omega_1\ell/\pi$ ). Os gráficos da Figura 7.11 indicam que a busca da velocidade crítica é tarefa um tanto laboriosa.

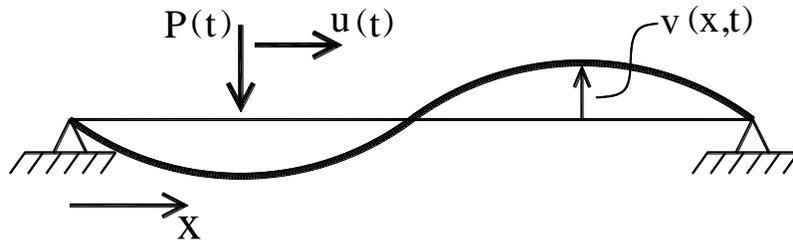


Figura 7.10

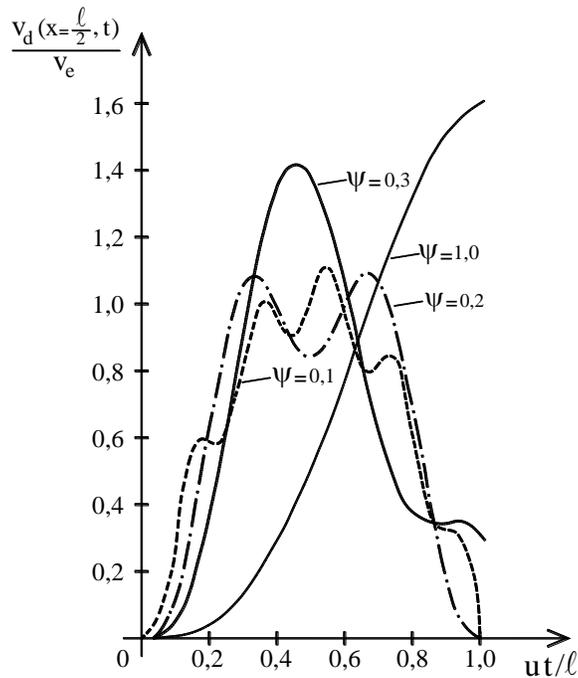


Figura 7.11

Examinando-se agora o momento fletor, que se expressa:

$$M = -EIv''(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2PEI^2\pi^2}{m\ell^3\omega_i^2} \left( \frac{\text{sen} \frac{i\pi ut}{\ell} - \frac{i\pi u}{\ell\omega_i} \text{sen} \omega_i t}{1 - \left(\frac{i\pi u}{\ell\omega_i}\right)^2} \right) \text{sen} \frac{i\pi x}{\ell} \quad (7.67)$$

tem-se como resultado para o momento máximo no meio da viga:

$$M_{\max} = 1.434 \frac{P\ell}{4} \quad (7.68)$$

considerando-se só o primeiro modo, e:

$$M_{\max} = 1.55 \frac{P\ell}{4} \quad (7.69)$$

considerando-se 7 modos, ocorrendo-se o máximo para  $\psi = 0.525$  e na posição  $x = 0.636\ell$ , ou seja, numa posição mais próxima da extremidade da direita!

No caso do carregamento móvel harmônico  $P\text{sen}\omega t$  tem-se:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{P\text{sen}\omega t \text{sen} \frac{i\pi x u t}{\ell}}{m\ell/2} \quad (7.70)$$

cuja integração resulta:

$$q_i = A_i \text{sen}\omega_i t + B_i \text{cos}\omega_i t + \frac{P}{m\ell} \left[ \frac{\text{cos}\left(\omega - \frac{i\pi u}{\ell}\right)t}{\omega_i^2 - \left(\omega - \frac{i\pi u}{\ell}\right)^2} - \frac{\text{cos}\left(\omega + \frac{i\pi u}{\ell}\right)t}{\omega_i^2 - \left(\omega + \frac{i\pi u}{\ell}\right)^2} \right] \quad (7.71)$$

lembrando-se que:

$$\text{sen}\omega t \text{sen} \frac{i\pi u t}{\ell} = \frac{1}{2} \left[ \text{cos}\left(\omega t - \frac{i\pi u t}{\ell}\right) - \text{cos}\left(\omega t + \frac{i\pi u t}{\ell}\right) \right] \quad (7.72)$$

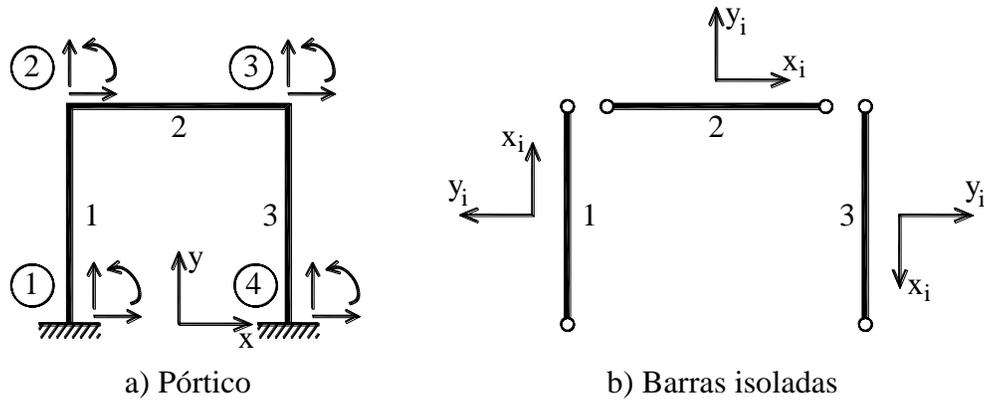
cabendo-se ainda observar que grandes valores de  $q_i$  ocorrem agora para:

$$\begin{aligned} \omega_i^2 &= \left(\omega - \frac{i\pi u}{\ell}\right)^2 \\ \omega_i^2 &= \left(\omega + \frac{i\pi u}{\ell}\right)^2 \end{aligned} \quad (7.73)$$

dobrando-se, pois, o número de velocidades críticas pelo exame da parte permanente da solução (7.70).

#### 7.4 – Sistema de barras (pórticos)

A Figura 7.12 a) ilustra um pórtico (sistema de três barras) indicando-se os movimentos dos nós segundo o sistema de referência global (duas translações e uma rotação), a numeração das barras e dos nós; e a Figura 7.12 b) mostra isoladamente as barras com seus sistemas de referência locais, bem como destacando-se os locais de conexão das barras e apoios.

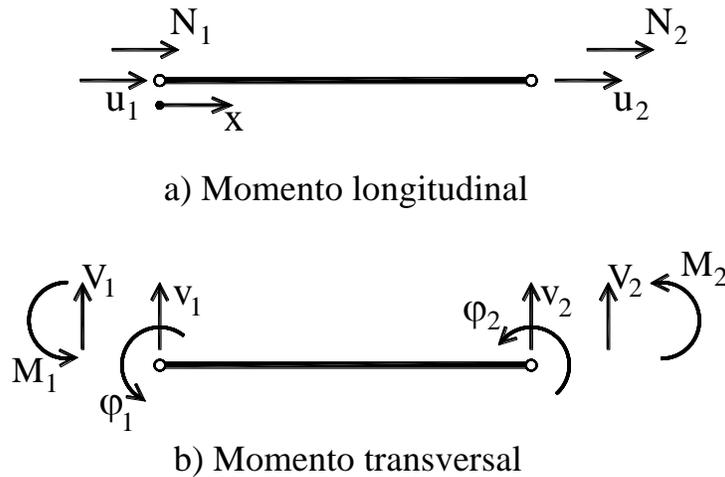


**Figura 7.12**

A Figura 7.13 a) indica os deslocamentos e esforços nas extremidades de uma barra considerando-se também o movimento longitudinal, e a Figura 7.13 b) os movimentos e esforços nas extremidades considerando-se o movimento transversal (flexão).

Tendo-se em conta a vibração livre não amortecida no sentido longitudinal, a equação de equilíbrio se escreve (vide primeira da (7.9)):

$$u'' + \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 u = 0 \quad (7.74)$$



**Figura 7.13**

considerando-se que o produto  $ES$  não varie ao longo da barra, e onde:

$$c_1 = \sqrt{\frac{ES}{m}} \quad (7.75)$$

cuja integração resulta (vide primeira da (7.10)):

$$u = A_1 \operatorname{sen} \frac{\omega}{c_1} x + A_2 \operatorname{cos} \frac{\omega}{c_1} x \quad (7.76)$$

permitindo-se a redação da equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \frac{ES\omega}{c_1} \begin{bmatrix} \cot g \frac{\omega l}{c_1} & -\operatorname{cosec} \frac{\omega l}{c_1} \\ -\operatorname{cosec} \frac{\omega l}{c_1} & \cot g \frac{\omega l}{c_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (7.77)$$

onde:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x=0) \\ u_2 &= u(x=l) \\ N_1 &= -ESu'(x=0) \\ N_2 &= -ESu'(x=l) \end{aligned} \quad (7.78)$$

tendo-se em vista que as duas primeira de (7.78) permitem expressar as constantes de integração de (7.76) em termos dos deslocamentos nas extremidades, bem como, em decorrência, as ações (as duas últimas de (7.78)).

A equação de equilíbrio transversal igualmente (vide primeira de (7.40)) escreve-se:

$$v^{IV} - \left( \frac{\omega}{c_2} \right)^2 v = 0 \quad (7.79)$$

onde:

$$c_2 = \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (7.80)$$

cuja integração resulta:

$$v = A_3 \operatorname{sen} \lambda x + A_4 \operatorname{cos} \lambda x + A_5 \operatorname{senh} \lambda x + A_6 \operatorname{cosh} \lambda x \quad (7.81)$$

onde

$$\lambda = \sqrt{\frac{\omega}{c_2}} \quad (7.82)$$

conduzindo-se a seguinte equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_a & j_c & j_b & j_d \\ j_c & j_e & -j_d & j_f \\ j_b & -j_d & j_a & -j_c \\ j_d & j_f & -j_c & j_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (7.83)$$

onde os deslocamentos e esforços são expressos por:

$$\begin{aligned} v_1 &= v(x=0) \\ v_2 &= v(x=\ell) \\ \varphi_1 &= v'(x=0) \\ \varphi_2 &= v'(x=\ell) \\ V_1 &= EIv'''(x=0) \\ V_2 &= -EIv'''(x=\ell) \\ M_1 &= EIv''(x=0) \\ M_2 &= EIv''(x=\ell) \end{aligned} \quad (7.84)$$

sendo que as quatro primeiras de (7.84) via (7.81) permitem expressar as constantes de integração contempladas em (7.19) em função das translações e rotação das extremidades da viga, e as quatro últimas de (7.84) podem também ser expressas em decorrência também nos termos desses mesmos deslocamentos. Os membros da matriz de (7.83) são expressos, após essas operações algébricas, por:

$$\begin{aligned}
 j_a &= -\frac{EI\lambda^3}{\cosh\lambda l \cos\lambda l - 1}(\cos\lambda l \operatorname{senh}\lambda l + \operatorname{sen}\lambda l \cosh\lambda l) \\
 j_b &= \frac{EI\lambda^3}{\cosh\lambda l \cos\lambda l - 1}(\operatorname{sen}\lambda l + \operatorname{senh}\lambda l) \\
 j_c &= -\frac{EI\lambda^2}{\cosh\lambda l \cos\lambda l - 1}(\operatorname{sen}\lambda l \operatorname{senh}\lambda l) \\
 j_d &= \frac{EI\lambda^2}{\cosh\lambda l \cos\lambda l - 1}(\cos\lambda l - \cosh\lambda l) \\
 j_e &= \frac{EI\lambda}{\cosh\lambda l \cos\lambda l - 1}(\cos\lambda l \operatorname{senh}\lambda l - \operatorname{sen}\lambda l \cosh\lambda l) \\
 j_f &= \frac{EI\lambda}{\cosh\lambda l \cos\lambda l - 1}(\operatorname{sen}\lambda l - \operatorname{senh}\lambda l)
 \end{aligned} \tag{7.85}$$

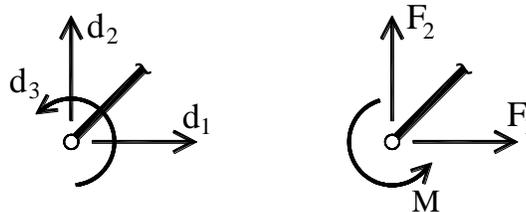
sendo que as quatro primeiras de (7.85) permitem expressar as constantes de integração de (7.19) em função das translações e rotação das extremidades da viga.

Pois bem, colocando o expresso em (7.77) e o expresso em (7.83) numa única expressão matricial tem-se:

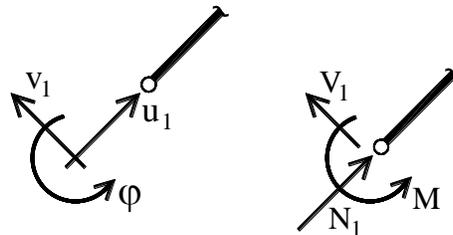
$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES\omega}{c_1} \cot g \frac{\omega l}{c_1} & 0 & 0 & -\frac{ES\omega}{c_1} \operatorname{cosec} \frac{\omega l}{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & j_a & j_c & 0 & j_b & j_d \\ 0 & j_c & j_e & 0 & -j_d & j_f \\ -\frac{ES\omega}{c_1} \operatorname{cosec} \frac{\omega l}{c_1} & 0 & 0 & \frac{ES\omega}{c_1} \cot g \frac{\omega l}{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & j_b & -j_d & 0 & j_a & -j_c \\ 0 & j_d & j_f & 0 & -j_c & j_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \tag{7.86}$$

cuja matriz é denominada matriz de rigidez dinâmica de barra.

A figura 7.14 a) exhibe os deslocamentos e ações no sistema de referência global na extremidade esquerda da barra, e a Figura 7.14 b) os correspondentes deslocamentos e ações correspondentes no sistema de referência tema local. A relação entre os deslocamentos e ações nos dois sistemas de referência são expressas pelas seguintes relações matriciais:



a) Deslocamentos e ações no sistema global



b) Deslocamentos e ações no sistema local

**Figura 7.14**

$$\begin{cases} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \end{cases} \quad (7.87)$$

$$\begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{cases}$$

ressaltando-se que essas mesmas transformações se aplicam aos correspondentes deslocamentos e ações da extremidade direita da barra. As seguintes equações matriciais podem ser escritas:

$$\begin{cases} \{d\}_1 \\ \{d\}_2 \end{cases}_b = \begin{bmatrix} [T] & [0] \\ [0] & [T] \end{bmatrix} \begin{cases} \{u\}_1 \\ \{u\}_2 \end{cases}_b \quad (7.88)$$

$$\begin{cases} \{F\}_1 \\ \{F\}_2 \end{cases}_b = \begin{bmatrix} [T] & [0] \\ [0] & [T] \end{bmatrix} \begin{cases} \{V\}_1 \\ \{V\}_2 \end{cases}_b$$

onde o índice b refere-se aos deslocamentos e ações na barra, sendo que 1 representa os movimentos e ações da extremidade da esquerda, 2 os correspondentes da extremidade da direita, e a submatriz [T] representa a matriz comum de (7.88). Tendo-se em vista (7.87) a relação (7.86) expressa no sistema referência local ganha no sistema global a seguinte redação:

$$\begin{Bmatrix} \{F\}_1 \\ \{F\}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T] & [0] \\ [0] & [T] \end{bmatrix} [k] \begin{bmatrix} [T]^T & [0] \\ [0] & [T]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\}_1 \\ \{d\}_2 \end{Bmatrix} \quad (7.89)$$

onde  $[k]$  é a matriz de rigidez dinâmica no sistema de referência local, lembrando-se que a inversa da matriz de transformação  $[T]$  é a sua transposta. O expresso em (7.89) pode ser redigido de uma forma mais conveniente, ou seja:

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (7.90)$$

sendo  $[K]$  a matriz de rigidez dinâmica no sistema global.

A Figura 7.15 exibe um sistema estrutural formado por duas barras, indicando-se os deslocamentos e as ações nos nós da estrutura, que são o ponto de conexão e os apoios das barras. O equilíbrio dinâmico do conjunto no sistema de referência global passa a ser expresso pela equação matricial:

$$\{\bar{F}\} = [\bar{K}]\{\bar{d}\} \quad (7.91)$$

onde os vetores de ação e de deslocamentos são ordenados segundo a numeração adotada na Figura 7.15, e a matriz de rigidez do conjunto montada superpondo-se particionadamente as matrizes individuais (7.87) nos nós, seguindo-se as conexões e numeração adotada para os deslocamentos e ações.

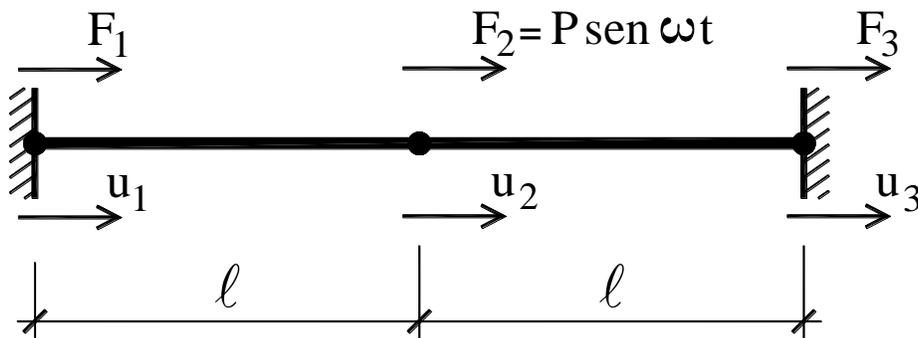


Figura 7.15

O equilíbrio nos nós é dado então pela seguinte expressão matricial:

$$\begin{Bmatrix} -R_1 \\ F_2 \text{sen} \omega t \\ -R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES\omega}{c_1} \cot g \frac{\omega l}{c_1} & -\frac{ES\omega}{c_1} \text{cosec} \frac{\omega l}{c_1} & \\ -\frac{ES\omega}{c_1} \text{cosec} \frac{\omega l}{c_1} & 2 \frac{ES\omega}{c_1} \cot g \frac{\omega l}{c_1} & -\frac{ES\omega}{c_1} \text{cosec} \frac{\omega l}{c_1} \\ & -\frac{ES\omega}{c_1} \text{cosec} \frac{\omega l}{c_1} & \frac{ES\omega}{c_1} \cot g \frac{\omega l}{c_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

onde  $R_i$  são as reações de apoio, e o problema de vibração livre se escreve:

$$2 \frac{ES\omega}{c_1} \cot g \frac{\omega l}{c_1} u_2 = 0$$

ou seja:

$$2 \frac{ES\omega}{c_1} \cot g \frac{\omega l}{c_1} = 0 \rightarrow \frac{\omega l}{c_1} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

verificando-se que apenas as frequências com modos de vibrar anulando-se no meio do vão são contemplados, como foi prescrito (ao se comparar as frequências naturais de uma barra com comprimento  $2l$  e extremidades fixadas, os modos simétricos que têm  $u_2 \neq 0$  são omitidos).

A vibração forçada por seu lado escreve-se:

$$2 \frac{ES\omega}{c_1} \cot g \frac{\omega l}{c_1} u_2 = P \text{sen} \omega t$$

cuja solução resulta:

$$u_2(t) = \frac{P \text{sen} \omega t}{2 \frac{ES\omega}{c_1} \cot g \frac{\omega l}{c_1}}$$

lembrando-se que a solução permanente contempla termos com a frequência do carregamento. A solução transitória não tem como ser obtida diretamente com essa formulação, até porque os modos de vibrar assim obtidos não atendem ao princípio da completividade, pois apenas parte dos modos livres de vibrar são aí contemplados. E além disso cumpre também assinalar que o movimento prescrito de apoio é diretamente contemplado reescrevendo-se a equação de equilíbrio: ou seja:

$$\begin{Bmatrix} -R_1 \\ 0 \\ -R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES\omega}{c_1} \cot g \frac{\omega l}{c_1} & -\frac{ES\omega}{c_1} \operatorname{cosec} \frac{\omega l}{c_1} & 0 \\ -\frac{ES\omega}{c_1} \operatorname{cosec} \frac{\omega l}{c_1} & 2 \frac{ES\omega}{c_1} \cot g \frac{\omega l}{c_1} & -\frac{ES\omega}{c_1} \operatorname{cosec} \frac{\omega l}{c_1} \\ 0 & -\frac{ES\omega}{c_1} \operatorname{cosec} \frac{\omega l}{c_1} & \frac{ES\omega}{c_1} \cot g \frac{\omega l}{c_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = d \operatorname{sen} \omega t \\ u_2 \\ u_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

resultando:

$$u_2 = \frac{-\frac{ES\omega}{c_1} \operatorname{cosec} \frac{\omega l}{c_1}}{2 \frac{ES\omega}{c_1} \cot g \frac{\omega l}{c_1}} d \operatorname{sen} \omega t$$

devendo-se finalmente notar que essa formulação é operacionalmente bastante limitada na busca de solução geral, sem contar um tanto trabalhosa envolvendo tarefas algébricas de grande monta em casos de estruturas mais complexas. O fato de se considerar parâmetros discretos acaba por deixar implícito toda uma parte algébrica de grande monta.

### 7.5 – Vibração de vigas com movimentos de apoio

A Figura 7.16 a) mostra uma viga simplesmente apoiada com movimento prescrito no apoio da direita executando um movimento estático expresso por:

$$v_e(x,t) = \frac{x}{l} d.f(t) \quad (7.92)$$

e a vibração correspondente sendo provocada pode ser obtida superpondo-se o movimento vibratório  $v(x,t)$ , e reescrevendo-se a equação de equilíbrio, ou seja:

$$\left( v + \frac{x}{l} d.f(t) \right)^{IV} + \frac{EI}{m} \left( v + \frac{x}{l} d.f(t) \right) = 0 \quad (7.93)$$

ou seja:

$$v^{IV}(x,t) + \frac{m}{EI} \ddot{v}(x,t) = -\frac{m}{EI} \frac{x}{l} f(t) \quad (7.94)$$

cuja integração já tem sido abordada em itens anteriores. Em outras palavras, a vibração introduzida por movimento apoio obtém-se simplesmente acrescentando-se o movimento estático correspondente ao movimento de vibração. A Figura 7.16 b) exibe o caso do movimento estático de uma viga engastada e apoiada com movimento prescrito no apoio. De modo similar outros movimentos de apoio podem ser considerados, bem como em estruturas mais complexas.

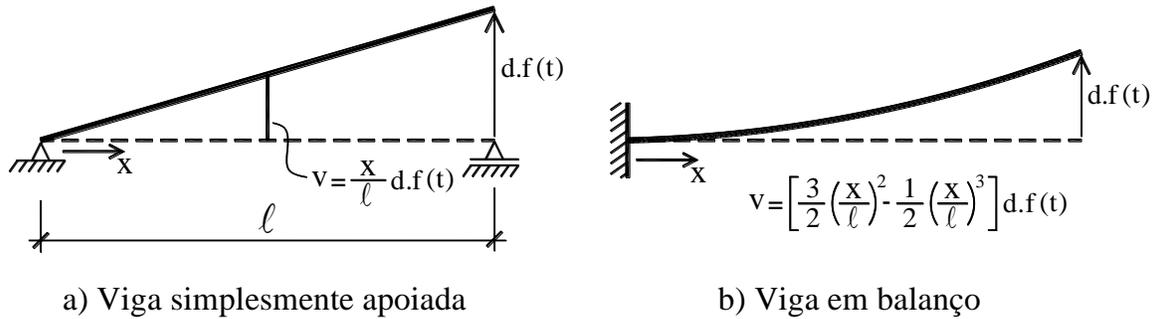


Figura 7.16

### 7.5.1 – Vibração de vigas com o modelo de Timoshenko

O modelo de flexão proposto por Timoshenko toma por base o fato de que a deformada da viga por flexão tem duas componentes, quais sejam: a deformada considerada na teoria técnica de flexão de Bernoulli  $v_b$ , acrescida da deformação por força cortante  $v_s$ . Em outras palavras, a deformado total  $v$  é dada por:

$$v = v_b + v_s \quad (7.95)$$

ou sua derivação:

$$\frac{dv}{dx} = \alpha + \gamma \quad (7.96)$$

onde:

$$\alpha = \frac{dv_b}{dx} \quad (7.97)$$

$$\gamma = \frac{dv_s}{dx}$$

sendo  $\alpha$  a rotação da seção transversal da viga provocada pela flexão e  $\gamma$  a distorção provocada pela força cortante. Além disso, as relações constitutivas são dadas, tendo-se em conta (7.96) e (7.97), por:

$$M = -j \frac{d\alpha}{dx} \tag{7.98}$$

$$V = s\gamma = s \left( \frac{dv}{dx} - \alpha \right)$$

onde  $M$  é o momento fletor,  $V$  é a força cortante,  $j = EI$  vem a ser o produto de inércia e  $s = kGS$  o módulo de deformação por força cortante; sendo  $k$  o coeficiente que depende da forma da seção transversal da viga: por exemplo, para seção retangular  $k=0.8333$ , para seção circular  $k=0.9091$  e para seção do tipo duplo T tem-se  $k=0.4762$ .

O equilíbrio dinâmico (segunda lei de Newton) de um elemento diferencial de viga passa a ser expresso por (Fig. 17):

$$dV + p dx = (m dx) \ddot{v} \tag{7.99}$$

$$V dx - dM = -(mr^2 dx) \ddot{\alpha}$$

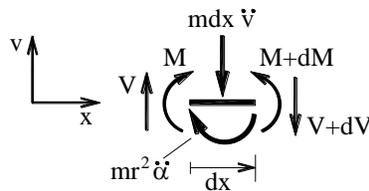


Figura 7.17

onde  $p$  é o carregamento transversal. Cumpre ressaltar que a aceleração angular considerada é apenas aquela dada pela contribuição da flexão, uma vez que a contribuição da força cortante constitui uma distorção, que não contribui para a rotação da seção transversal da viga. O expresso em (7.96) pode ficar assim redigido:

$$\frac{dV}{dx} - m \ddot{v} = -p \tag{7.100}$$

$$\frac{dM}{dx} - V + mr^2 \ddot{\alpha} = 0$$

ou ainda, tendo-se em conta o expresso em (7.98)

$$s(v'' - \alpha') - m \ddot{v} = -p \tag{7.101}$$

$$j \alpha'' + s(v' - \alpha) - mr^2 \ddot{\alpha} = 0$$

sendo oportuno assinalar que eventual carregamento por momento distribuído não está sendo considerado (tal carregamento, como bem sabido, não ocorre em casos

da prática), e que para simplificar a redação adota-se em (7.101) a clássica notação de derivada em relação à variável espaço por meio de expoente em numeral romano.

### 7.5.2- Vibração livre

Considerando-se agora o caso de vibração livre, ou seja (ausência de carregamento):

$$\begin{aligned} s(v'' - \alpha') - m\ddot{v} &= 0 \\ j\alpha'' + s(v' - \alpha) - mr^2\ddot{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (7.102)$$

onde o grau de derivação em x (variável de espaço) é representada por expoentes em números romanos, verifica-se que a solução pode ser expressa na forma clássica de separação de variáveis, ou seja:

$$\begin{aligned} v(x,t) &= v(x)T(t) \\ \alpha(x,t) &= \alpha(x)T(t) \end{aligned} \quad (7.103)$$

uma vez que levada em (7.102) resulta:

$$\begin{aligned} s(v'' - \alpha')T(t) - mv\ddot{T}(t) &= 0 \\ j\alpha''T(t) + s(v' - \alpha)T(t) - mr^2\alpha\ddot{T}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (7.104)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \frac{s(v'' - \alpha')}{mv} &= \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2 \\ \frac{j\alpha'' + s(v' - \alpha)}{mr^2\alpha} &= \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2 \end{aligned} \quad (7.105)$$

onde  $-\omega^2$  é a constante de separação. Assim sendo de (7.102) resulta a seguinte equação de frequência:

$$\begin{aligned} s(v'' - \alpha') + m\omega^2v &= 0 \\ j\alpha'' + s(v' - \alpha) + mr^2\omega^2\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (7.106)$$

cuja solução, como bem sabido, é do tipo exponencial, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{A}e^{\lambda x} \\ \alpha &= \mathbf{B}e^{\lambda x} \end{aligned} \quad (7.107)$$

onde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\lambda$  são constantes. Levando-se (7.107) em (7.106) tem-se o seguinte problema de autovalor:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 s + m\omega^2 & -s\lambda \\ s\lambda & j\lambda^2 - s + mr^2\omega^2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.108)$$

cuja equação característica é dada por:

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0 \quad (7.109)$$

onde:

$$\begin{aligned} a &= \frac{m\omega^2}{s} + \frac{mr^2\omega^2}{j} \\ b &= \frac{m\omega^2}{s} \left( \frac{mr^2\omega^2}{j} - \frac{s}{j} \right) \end{aligned} \quad (7.110)$$

e com isso os autovalores são dados por:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \\ \lambda_{3,4} &= \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \end{aligned} \quad (7.111)$$

e, assim sendo, a solução do sistema de equação diferencial (7.106) assim se expressa:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{A}_1 e^{\lambda_1 x} + \mathbf{A}_2 e^{\lambda_2 x} + \mathbf{A}_3 e^{\lambda_3 x} + \mathbf{A}_4 e^{\lambda_4 x} \\ \alpha &= \mathbf{B}_1 e^{\lambda_1 x} + \mathbf{B}_2 e^{\lambda_2 x} + \mathbf{B}_3 e^{\lambda_3 x} + \mathbf{B}_4 e^{\lambda_4 x} \end{aligned} \quad (7.112)$$

sendo que, por força de (7.111), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= \frac{s\lambda_i^2 + m\omega^2}{s\lambda_i} \mathbf{A}_i \\ i &= 1, 4 \end{aligned} \quad (7.113)$$

Um exame do expresso em (7.110) permite constatar em primeiro lugar que o termo  $a^2 - 4b$  é sempre positivo, pois

$$\left(\frac{m\omega^2}{s} + \frac{mr^2\omega^2}{j}\right)^2 - 4\left[\frac{m\omega^2}{s}\left(\frac{mr^2\omega^2}{j} - \frac{s}{j}\right)\right] = \quad (7.114)$$

$$\left(\frac{m\omega^2}{s} - \frac{mr^2\omega^2}{j}\right)^2 + 4\frac{m\omega^2}{j} > 0$$

Além disso, as raízes  $\lambda_{1,2}$  são complexas com parte real nula do tipo  $\pm\lambda_n i$ , e  $\lambda_{3,4}$  são raízes reais do tipo  $\pm\lambda_b$  para b negativo, ou seja:

$$b = \frac{mr^2\omega^2}{j} - \frac{s}{j} < 0 \quad (7.115)$$

o que implica em:

$$\omega < \sqrt{\frac{s}{mr^2}} = \omega_b \quad (7.116)$$

sendo  $\omega_b$  a frequência de bifurcação da solução expressa em (7.114), com:

$$\lambda_a = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \quad (7.117)$$

$$\lambda_b = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}$$

De maneira mais cômoda, o expresso em (7.112), para  $\omega < \omega_b$  ganha a seguinte redação:

$$v = A \cos(\lambda_a x) + B \sin(\lambda_a x) + C \cosh(\lambda_b x) + D \sinh(\lambda_b x)$$

$$\alpha = \frac{s\lambda_a^2 - m\omega^2}{s\lambda_a} (B \cos(\lambda_a x) - A \sin(\lambda_a x)) + \frac{s\lambda_b^2 + m\omega^2}{s\lambda_b} \begin{pmatrix} D \cosh(\lambda_b x) \\ + C \sinh(\lambda_b x) \end{pmatrix} \quad (7.118)$$

Já no caso  $\omega > \omega_b$ , ou seja, b positivo tem-se que as raízes  $\lambda_{3,4}$  também são complexas com parte real nula do tipo  $\pm\lambda_n i$ , conferindo-se à equação (7.111) uma nova e mais cômoda redação:

$$v = A \cos(\lambda_a x) + B \sin(\lambda_a x) + C \cos(\lambda_c x) + D \sin(\lambda_c x)$$

$$\alpha = \frac{s\lambda_a^2 - m\omega^2}{s\lambda_a} (B \cos(\lambda_a x) - A \sin(\lambda_a x)) + \frac{s\lambda_c^2 - m\omega^2}{s\lambda_c} (D \cos(\lambda_c x) - C \sin(\lambda_c x)) \quad (7.119)$$

com:

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \quad (7.120)$$

Um caso singular ocorre para b nulo ( $\omega = \omega_b$ ) resultando  $\lambda_b$  também nulo o que permite redigir (7.118) na forma limite:

$$\begin{aligned} v &= A \cos(\lambda_a x) + B \operatorname{sen}(\lambda_a x) + C \\ \alpha &= \frac{s\lambda_a^2 - m\omega^2}{s\lambda_a} (B \cos(\lambda_a x) - A \operatorname{sen}(\lambda_a x)) + \frac{m\omega^2}{s} Cx + D \end{aligned} \quad (7.121)$$

Sucedee que para  $\lambda_b$  tendendo-se para zero  $\cosh(\lambda_b x)$  tende para valor unitário qualquer que seja o valor da variável x bem como  $\operatorname{senh}(\lambda_b x)$  tende para valor nulo. Para se entender a situação limite dos dois últimos termos de (7.118), basta ter-se em mente que o fator que os multiplicam tem denominador tendendo para zero, que no caso do termo em seno hiperbólico implica no limite clássico:

$$\lim. \left[ x \frac{\operatorname{senh}(\lambda_b x)}{\lambda_b x} \right] \rightarrow x \quad (7.122)$$

e sendo que a constante D em (7.121) tem que ser entendida como o resultado da multiplicação de um termo que tende para infinito por um termo que tende igualmente para valor nulo de modo a que o produto seja finito.

As constantes de integração A, B, C e D são obtidas tendo-se em conta as condições de contorno da viga. No caso de viga simplesmente apoiada, por exemplo, tem-se:

$$\begin{aligned} v(0) &= A + C = 0 \\ \alpha'(0) &= \frac{s\lambda_a^2 - m\omega^2}{s} (-A) + \frac{s\lambda_b^2 + m\omega^2}{s} C = 0 \\ v(\ell) &= A \cos(\lambda_a \ell) + B \operatorname{sen}(\lambda_a \ell) + C \cosh(\lambda_b \ell) + D \operatorname{senh}(\lambda_b \ell) = 0 \\ \alpha'(\ell) &= -\frac{s\lambda_a^2 - m\omega^2}{s} (A \cos(\lambda_a \ell) + B \operatorname{sen}(\lambda_a \ell)) + \\ &\quad \frac{s\lambda_b^2 + m\omega^2}{s} (C \cosh(\lambda_b \ell) + D \operatorname{senh}(\lambda_b \ell)) = 0 \end{aligned} \quad (7.123)$$

que decorre do fato de se ter deslocamento impedido nas extremidades, bem como momento fletor também nulo. As equações dadas em (7.123) em forma matricial ficam:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{s\lambda_a^2 - m\omega^2}{s} & 0 & \frac{s\lambda_b^2 + m\omega^2}{s} & 0 \\ \cos(\lambda_a \ell) & \text{sen}(\lambda_a \ell) & \cosh(\lambda_b \ell) & \text{senh}(\lambda_b \ell) \\ -\frac{s\lambda_a^2 - m\omega^2}{s} \cos(\lambda_a \ell) & -\frac{s\lambda_a^2 - m\omega^2}{s} \text{sen}(\lambda_a \ell) & \frac{s\lambda_b^2 + m\omega^2}{s} \cosh(\lambda_b \ell) & \frac{s\lambda_b^2 + m\omega^2}{s} \text{senh}(\lambda_b \ell) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.124)$$

A equação (7.124) consiste, pois, num problema de auto-valor, cuja equação característica (determinante deve ser nulo) é dada por:

$$\text{sen}(\lambda_a \ell) \text{senh}(\lambda_b \ell) \left[ \left( \frac{s\lambda_b^2 + m\omega^2}{s} \right)^2 - \left( \frac{s\lambda_a^2 - m\omega^2}{s} \right)^2 \right] = 0 \quad (7.125)$$

implicando-se em:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\lambda_a \ell) &= 0 \\ \lambda_a \ell &= 0, \pi, 2\pi, \dots \end{aligned} \quad (7.126)$$

No caso  $\lambda_a \ell = n\pi$  o expresso em (7.111) permite redigir a seguinte equação bi quadrática em  $\omega_n$ :

$$\frac{m}{s} \frac{mr^2}{j} \omega_n^4 - \left[ \frac{m}{j} \left( \frac{\ell}{n\pi} \right)^2 + \frac{m}{s} + \frac{mr^2}{j} \right] \omega_n^2 \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^4 = 0 \quad (7.127)$$

resultando-se, pois, em duas raízes para a frequência natural  $\omega_n$  denominadas primeira espectra e segunda espectra respectivamente a frequência menor e a maior, para cada  $n$  dado.

Vale nesse ponto esclarecer que no caso da frequência segunda espectra ser maior que a frequência de bifurcação dada em (7.123), tem-se ainda como raízes de (7.125) a possibilidade:

$$\text{sen}(\lambda_c \ell) = 0 \quad (7.128)$$

implicando-se novamente em:

$$\lambda_c \ell = 0, \pi, 2\pi \dots \quad (7.129)$$

resultando-se para esse caso de viga simplesmente apoiada novamente na equação (7.127). Em outras palavras, as novas raízes possíveis são exatamente as mesmas já encontradas.

A equação (7.128) pode ainda ser redigida na forma:

$$\eta_n^4 \left( \frac{kG}{E} \beta_n^4 \right) - \eta_n^2 \left( \beta_n^2 + \frac{kG}{E} \beta_n^2 + 1 \right) + 1 = 0 \quad (7.130)$$

onde:

$$\eta_n = \omega_n \left( \frac{\ell}{n\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{m}{j}} \quad (7.131)$$

$$\beta_n = \frac{\pi}{\gamma_n} \sqrt{\frac{E}{kG}}$$

com

$$\gamma_n = \frac{\ell}{nr} \quad (7.132)$$

sendo  $\eta_n$  a relação entre a frequência natural dada pelo modelo de flexão de Timoshenko e a dada pela teoria técnica da flexão de Bernoulli.

A título de verificar numericamente a diferença de resultados entre a teoria técnica da flexão (Bernoulli) e o modelo de Timoshenko, considere-se o caso de uma viga retangular de aço. Nesse caso tem-se:

$$\frac{kG}{E} = \frac{1}{1.2 \times 2(1 + 1/3)} = 0.3125 \quad (7.133)$$

$$\beta_n = \frac{311.709}{\gamma_n^4}$$

resultando-se nos valores arrolados na Tabela 7.1, onde se pode verificar que a influência da deformação por força cortante combinada com o efeito da inércia de rotação (modelo de Timoshenko) é realmente apreciável para valores da frequência da primeira espectra no caso de pequenos valores de  $\gamma_n$ .

Tendo-se em vista que a segunda coluna da matriz dada em (7.124) é nula para os autovalores dados em (7.126), os correspondentes autovetores são dados por:

Tabela 7.1

$\gamma_n$	40	20	10	5
$\eta_n$ (1ª)	0.9873	0.9527	0.8475	0.6382
$\eta_n$ (2ª)	91.78	23.78	6.683	2.219

$$\begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.134)$$

resultando-se nos modos de vibrar:

$$\begin{aligned} v &= B \sin(\lambda_a x) \\ \alpha &= \frac{s\lambda_a^2 - m\omega^2}{s\lambda_a} B \cos(\lambda_a x) \end{aligned} \quad (7.135)$$

Cumprindo-se ressaltar que para cada valor de  $\lambda_n$  têm-se duas frequências naturais  $\omega$  conforme (7.126), sendo que apenas a magnitude da relação de amplitudes dos movimentos  $v$  e  $\alpha$  mudam de uma dessas frequências para a outra. Em outras palavras, dois movimentos acoplados com amplitudes diferentes.

### 7.5.3- Ortogonalidade dos modos livres de vibrar

A ortogonalidade dos modos de vibração decorrentes do modelo de viga de Timoshenko pode ser demonstrada tendo-se em conta as relações constitutivas (7.98) para um modo genérico de vibração, ou seja:

$$\begin{aligned} M_i &= -j\alpha_i^l \\ V_i &= s(v^l - \alpha) \end{aligned} \quad (7.136)$$

que levados em (7.106) permite que seja escrito:

$$\begin{aligned}\frac{dV_i}{dx} + m\omega_i^2 v_i &= 0 \\ -\frac{dM_i}{dx} + V_i + mr^2\omega_i^2 \alpha_i &= 0\end{aligned}\quad (7.137)$$

Multiplicando-se agora a primeira equação de (7.137) pelo modo  $v_j$  e integrando-se por parte o resultado no intervalo de zero a  $\ell$ , e o mesmo fazendo-se com a segunda equação multiplicada pelo modo  $\alpha_j$  têm-se:

$$\begin{aligned}\left[ V_i v_j \right]_0^\ell - \int_0^\ell V_i v_j' dx + \int_0^\ell m\omega_i^2 v_i v_j dx &= 0 \\ \left[ -M_i \alpha_j \right]_0^\ell + \int_0^\ell M_i \alpha_j' dx + \int_0^\ell V_i \alpha_j dx + \int_0^\ell mr^2\omega_i^2 \alpha_i \alpha_j dx &= 0\end{aligned}\quad (7.138)$$

Trocando-se os índices em (7.138), o que corresponde a se considerar as equações (7.134) no modo  $j$  multiplicadas pelos modos  $i$ , têm-se:

$$\begin{aligned}\left[ V_j v_i \right]_0^\ell - \int_0^\ell V_j v_i' dx + \int_0^\ell m\omega_j^2 v_j v_i dx &= 0 \\ \left[ -M_j \alpha_i \right]_0^\ell + \int_0^\ell M_j \alpha_i' dx + \int_0^\ell V_j \alpha_i dx + \int_0^\ell mr^2\omega_j^2 \alpha_j \alpha_i dx &= 0\end{aligned}\quad (7.139)$$

Somando-se agora as duas equações de (7.138) e subtraindo-se desse resultado a soma das duas de (7.139) tem-se:

$$\begin{aligned}\left[ V_i v_j - V_j v_i - M_i \alpha_j + M_j \alpha_i \right]_0^\ell + \int_0^\ell (M_i \alpha_j' - M_j \alpha_i') dx + \\ \int_0^\ell \left[ V_j (v_i' - \alpha_i) - V_i (v_j' - \alpha_j) \right] dx + (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^\ell (m v_i v_j + mr^2 \alpha_i \alpha_j) dx &= 0\end{aligned}\quad (7.140)$$

Por outro lado, tendo-se em vista as relações constitutivas (7.109) verifica-se de imediato que:

$$\begin{aligned}\int_0^\ell (M_i \alpha_j' - M_j \alpha_i') dx &= \int_0^\ell \left[ M_i \left( -\frac{M_j}{j} \right) - M_j \left( -\frac{M_i}{j} \right) \right] dx = 0 \\ \int_0^\ell \left[ V_j (v_i' - \alpha_i) - V_i (v_j' - \alpha_j) \right] dx &= \int_0^\ell \left[ V_j \left( \frac{V_i}{s} \right) - V_i \left( \frac{V_j}{s} \right) \right] dx = 0\end{aligned}\quad (7.141)$$

E, com isso, a equação (7.140) ganha a seguinte redação:

$$\left[ V_i v_j - V_j v_i - M_i \alpha_j + M_j \alpha_i \right]_0^\ell + (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^\ell (m v_i v_j + m r^2 \alpha_i \alpha_j) dx = 0 \quad (7.142)$$

Como os produtos de valores de contorno são todos nulos, uma vez que em sendo a deformada no contorno livre (por exemplo,  $v_i$ ) o esforço correspondente deve ser nulo ( $v_i = 0$ ) e vice-versa, tem-se finalmente a relação de ortogonalidade:

$$\int_0^\ell (m v_i v_j + m r^2 \alpha_i \alpha_j) dx = 0 \quad (7.143)$$

uma vez que as frequências naturais são distintas. Multiplicando-se a primeira de (7.141) por  $v_j$  e a segunda por  $\alpha_j$  e somar os resultados; e em seguida integrar a soma dos resultados de zero a  $\ell$  tem-se:

$$\int_0^\ell \left[ \frac{dV_i}{dx} v_j - \frac{dM_i}{dx} \alpha_j + V_i \alpha_j \right] dx + \omega_i^2 \int_0^\ell (m v_i v_j + m r^2 \alpha_i \alpha_j) dx = 0 \quad (7.144)$$

resultando de (7.140) e (7.141), respectivamente:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \left[ \frac{dV_i}{dx} v_j - \frac{dM_i}{dx} \alpha_j + V_i \alpha_j \right] dx &= 0 \\ \int_0^\ell \left[ \frac{dV_i}{dx} v_i - \frac{dM_i}{dx} \alpha_i + V_i \alpha_i \right] dx &= -\omega_i^2 \int_0^\ell (m v_i v_i + m r^2 \alpha_i \alpha_i) dx \end{aligned} \quad (7.145)$$

que consistem nas relações básicas da técnica da superposição modal.

#### 7.5.4- Vibração forçada: técnica da superposição modal

Retomando-se a equação de equilíbrio dinâmico (7.98), qual seja:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} - m \ddot{v} &= -p \\ -\frac{dM}{dx} + V - m r^2 \ddot{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (7.146)$$

a solução geral dessa equação pode ser alcançada superpondo-se os modos de livres de vibração, ou seja:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{\infty} v_i q_i \\ \alpha &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i q_i \end{aligned} \quad (7.147)$$

Inicialmente levando-se o expesso em (7.145) em (7.98) tem-se:

$$\begin{aligned} M &= -j \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i q_i = \sum_{i=1}^{\infty} M_i q_i \\ V &= s \sum_{i=1}^{\infty} (v_i - \alpha_i) q_i = \sum_{i=1}^{\infty} V_i q_i \end{aligned} \quad (7.148)$$

Tendo-se em conta o expesso em (7.145) e (7.146) a equação (7.144) ganha a seguinte redação:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{dV_i}{dx} q_i - \sum_{i=1}^{\infty} m v_i \ddot{q}_i &= -p \\ -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{dM_i}{dx} q_i + \sum_{i=1}^{\infty} V_i q_i - m r^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \ddot{q}_i &= 0 \end{aligned} \quad (7.149)$$

Multiplicando-se a primeira de (7.147) pelo modo  $v_j$  e somando-se o resultado com a segunda multiplicada pelo modo  $\alpha_j$  e integrando-se o resultado final de zero a  $\ell$  tem-se:

$$\int_0^{\ell} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{dV_i}{dx} v_j q_i - m v_i v_j \ddot{q}_i - \frac{dM_i}{dx} \alpha_j q_i + V_i \alpha_j q_i - m r^2 \alpha_i \alpha_j \ddot{q}_i \right] \right] dx = - \int_0^{\ell} p v_j dx \quad (7.150)$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_i \int_0^{\ell} \left[ \frac{dV_i}{dx} v_j - \frac{dM_i}{dx} \alpha_j + V_i \alpha_j \right] dx - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i \int_0^{\ell} (m v_i v_j + m r^2 \alpha_i \alpha_j) dx = - \int_0^{\ell} p v_j dx \quad (7.151)$$

Tendo-se em vista o expesso em (7.145) a equação (7.148) passa a ter a seguinte redação:

$$-q_i \omega_i^2 \int_0^{\ell} (m v_i v_i + m r^2 \alpha_i \alpha_i) dx - \ddot{q}_i \int_0^{\ell} (m v_i v_i + m r^2 \alpha_i \alpha_i) dx = - \int_0^{\ell} p v_i dx \quad (7.152)$$

resultando-se finalmente:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{\int_0^\ell p v_i dx}{\int_0^\ell (m v_i^2 + m r^2 \alpha_i^2) dx} \quad (7.153)$$

Desacoplando-se, pois, o sistema de equações nas incógnitas  $q_i$ .

Considerando-se agora o modelo de amortecimento estrutural visco-elástico, as relações constitutivas ao invés de (7.98) passam a ser expressas por:

$$\begin{aligned} M &= -j[\alpha^l + c\dot{\alpha}^l] \\ V &= s[v^l - \alpha + c(\dot{v}^l - \dot{\alpha})] \end{aligned} \quad (7.154)$$

onde  $c$  é o fator de amortecimento. Tendo-se em conta o expresso em (7.147) as relações constitutivas (7.154) ganham a seguinte redação:

$$\begin{aligned} M &= -j \sum_{i=1}^{\infty} [\alpha_i^l q_i + c \alpha_i^l \dot{q}_i] = - \sum_{i=1}^{\infty} [M_i q_i + c M_i \dot{q}_i] \\ V &= s \sum_{i=1}^{\infty} [(v_i^l - \alpha_i) q_i + c (v_i^l - \alpha_i) \dot{q}_i] = \sum_{i=1}^{\infty} [V_i q_i + c V_i \dot{q}_i] \end{aligned} \quad (7.155)$$

resultando-se, a exemplo de (7.153):

$$\ddot{q}_i + c \omega_i^2 \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{\int_0^\ell p v_i dx}{\int_0^\ell (m v_i^2 + m r^2 \alpha_i^2) dx} \quad (7.156)$$

ou ainda:

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{\int_0^\ell p v_i dx}{\int_0^\ell (m v_i^2 + m r^2 \alpha_i^2) dx} \quad (7.157)$$

onde:

$$\xi_i = \frac{c \omega_i}{2} \quad (7.158)$$

a exemplo do modelo de amortecimento proporcional à rigidez (amortecimento modal proporcional à frequência natural correspondente).

### 7.6- Efeito da força normal

A figura 7.18 a) ilustra uma viga simplesmente apoiada sob efeito de força normal e a Figura 7.18 b) a configuração de forças no elemento diferencial, cujo equilíbrio, desconsiderando-se a inércia de rotação, fica agora com a seguinte redação:

$$\begin{aligned} V + dV + p(x,t)dx - V &= mdx\ddot{v}(x,t) \\ -Vdx - Ndx^I - (M + dM) &= 0 \end{aligned} \quad (7.159)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} - m\ddot{v}(x,t) &= -p(x,t) \\ \frac{dM}{dx} - V - Nv^I(x,t) &= 0 \end{aligned} \quad (7.160)$$

resultando-se:

$$Elv^{IV}(x,t) + cEl\dot{v}^{IV}(x,t) + Nv^{II}(x,t) + m\ddot{v}(x,t) = p(x,t) \quad (7.161)$$

onde N é a força normal suposta constante ao longo da viga, e adotando-se a relação momento curvatura do regime viscoelástico:  $M = -EI(v^{II} + c\dot{v}^{II})$ .

A vibração livre não amortecida tem, pois, a seguinte escrita:

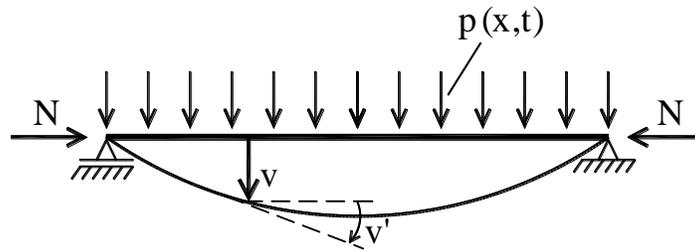
$$Elv^{IV}(x,t) + Nv^{II}(x,t) + m\ddot{v}(x,t) = 0 \quad (7.162)$$

cuja integração pela técnica da separação de variáveis, ou seja,  $v(x,t) = v(x)T(t)$  resulta:

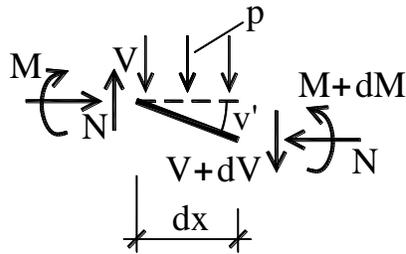
$$\begin{aligned} Elv^{IV} + Nv^{II} - m\omega^2v &= 0 \\ T(t) + \omega^2T(t) &= 0 \end{aligned} \quad (7.163)$$

sendo harmônica a solução da segunda de (7.163), e a solução da primeira com as condições de contorno de apoio simples nas duas extremidades o modo de vibrar fica então expresso por:

$$v_i = \text{sen} \frac{i\pi x}{\ell} \quad (7.164)$$



a) Viga



b) Equilíbrio

**Figura 7.18**

resultando-se na seguinte equação característica:

$$EI \left( \frac{i\pi}{l} \right)^4 - N \left( \frac{i\pi}{l} \right)^2 - m\omega_i^2 = 0 \quad (7.165)$$

ou seja:

$$\omega_i = \left( \frac{i\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m} \left( 1 - \frac{Nl^2}{i^2\pi^2 EI} \right)} \quad (7.166)$$

ou ainda:

$$\left( \frac{\omega_i}{\omega_0} \right)^2 = 1 - \frac{N}{N_c} \quad (7.167)$$

tendo-se em conta:

$$N_c = \frac{i^2 \pi^2 EI}{\ell^2} \quad (7.168)$$

$$\omega_0 = \left( \frac{i\pi}{\ell} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

que são, respectivamente, a normal de flambagem da barra e sua frequência natural. Valendo-se assinalar que, para a viga simplesmente apoiada, o modo de flambagem e o modo de vibrar coincidem, resultando-se na forma desacoplada (7.165). Para as demais vinculações a equação de frequência (7.165) fica transcendente. De qualquer modo, uma vez determinado o modo de vibrar, que depende da força normal aplicada, a solução da vibração forçada com amortecimento segue o roteiro já apresentado no item 7.3. Cumpre ainda ressaltar que, mesmo para as demais vinculações, o expresso em (7.164) consiste numa boa aproximação considerando-se os correspondentes parâmetros a exemplo de (7.165).

### 7.7- Viga sobre base elástica

A teoria de viga sobre base elástica mais requintada considera reação da base elástica proporcional ao deslocamento vertical da viga (modelo Winkler), acrescida de um termo proporcional a rotação da viga (modelo Schiel-Pasternak), tratando-se de uma formulação biparamétrica. O professor Frederico Schiel<sup>1</sup>, catedrático aposentado pela Escola de Engenharia de São Carlos da USP, publicou seu modelo em 1942 na Alemanha, e Pasternak<sup>2</sup> na Rússia em 1954.

A Figura 7.19 a) ilustra uma viga sobre base elástica, e a Figura 7.19 b) a configuração de forças em equilíbrio no elemento diferencial. A equação de equilíbrio da vibração livre não amortecida tem a seguinte redação:

$$EIv^{IV}(x,t) + k_1v(x,t) - k_2v''(x,t) + mv(x,t) = 0 \quad (7.169)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são os parâmetros da base elástica, tendo-se em conta que (vide Figura 7.19b):

$$\frac{dM}{dx} - V = 0$$

$$\frac{dV(x,t)}{dx} - k_1v(x,t) + k_2v''(x,t) + m\ddot{v}(x,t) = 0 \quad (7.170)$$

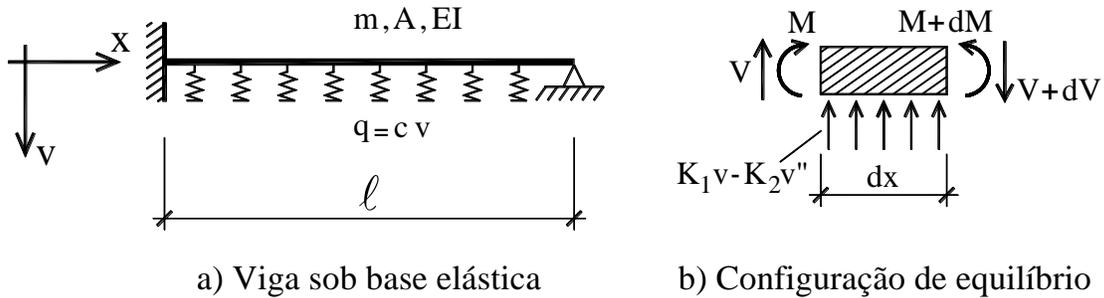
<sup>1</sup> Schiel, F., *Der Schwimmen Balken*, Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik, V22, (1042).

<sup>2</sup> Pasternak, P.L., *On a New Method of Analysis of a Elastic Foundation by means of Two Foundation Constant* (in Russian), Gosudarstvennoe Izdalestvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture, Moscow, USSR. (1954)

e considerando-se a relação constitutiva  $M = -EIv''''(x,t)$ .

A integração de (7.166) pela técnica da separação de variáveis resulta na equação:

$$EIv'''' - k_2v'' + (k_1 - m\omega^2)v = 0 \quad (7.171)$$



**FIGURA 7.19**

que é similar a primeira de (7.160), com solução sendo alcançada por desenvolvimento similar.

## CAPÍTULO VIII

### INTEGRAÇÃO EM TERMOS NÃO FINITOS: VIBRAÇÃO BARRAS E VIGAS

#### 8.1 - Introdução

O presente capítulo é dedicado ao estudo da integração das equações de movimento de sistemas contínuos pela técnica da integração em termos não finitos, ou seja, solução ondulatória, iniciando-se com o caso de vibração axial de barras, seguido do estudo de vibração flexional. Destaque especial é dado ao estudo da reflexão e refração resolvendo a questão das condições de contorno.

#### 8.2 – Vibração longitudinal de barras

A vibração livre de barra, como já exposto no Capítulo VII, equação (7.4), tem a seguinte redação:

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t) \quad (8.1)$$

que constitui a chamada equação de onda de D'Alembert, com:

$$c = \sqrt{\frac{ES}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (8.2)$$

sendo  $\rho$  a massa específica do material e  $c$  a velocidade de propagação de onda, como se verifica examinando-se a solução de (8.1) assim expressa:

$$u(x,t) = u_1(\eta_1) + u_2(\eta_2) \quad (8.3)$$

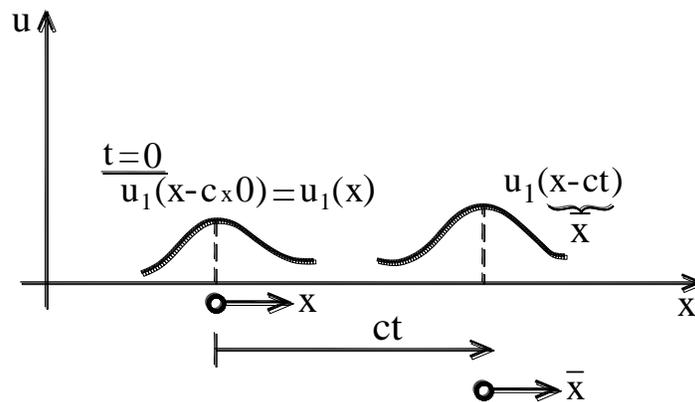
onde:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x - ct \\ \eta_2 &= x + ct \end{aligned} \quad (8.4)$$

sendo  $u_1(\eta_1)$  e  $u_2(\eta_2)$  funções arbitrárias, ficando-se evidente que qualquer função que tenha por argumento  $\eta_1 = x - ct$  ou  $\eta_2 = x + ct$  vem a ser solução da equação de onda (8.1). A explicação é bastante simples, pois:

$$\begin{aligned}
 \frac{du_1(\eta_1)}{dx} &= \frac{du_1(\eta_1)}{d\eta_1} \frac{d\eta_1}{dx} = \frac{du_1(\eta_1)}{d\eta_1} \\
 \frac{du_2(\eta_2)}{dx} &= \frac{du_2(\eta_2)}{d\eta_2} \frac{d\eta_2}{dx} = \frac{du_2(\eta_2)}{d\eta_2} \\
 \frac{du_1(\eta_1)}{dt} &= \frac{du_1(\eta_1)}{d\eta_1} \frac{d\eta_1}{dt} = -c \frac{du_1(\eta_1)}{dx} \\
 \frac{du_2(\eta_2)}{dt} &= \frac{du_2(\eta_2)}{d\eta_2} \frac{d\eta_2}{dt} = c \frac{du_2(\eta_2)}{dx} \\
 \frac{du(x,t)}{dt} &= \frac{du_1(\eta_1)}{d\eta_1} \frac{d\eta_1}{dt} + \frac{du_2(\eta_2)}{d\eta_2} \frac{d\eta_2}{dt} = -c \frac{du_1(\eta_1)}{dx} + c \frac{du_2(\eta_2)}{dx} \\
 \frac{d^2u(x,t)}{dt^2} &= c^2 \frac{d^2u_1(\eta_1)}{dx^2} + c^2 \frac{d^2u_2(\eta_2)}{dx^2} = c^2 \frac{d^2u(x,t)}{dx^2}
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

sendo  $u_1(\eta_1)$  uma onda que se propaga na direção positiva da variável  $x$  como ilustra-se na Figura 8.1, pois no tempo nulo a função depende apenas da variável  $x$  e no tempo genérico  $t$  essa mesma função acha-se deslocada no sentido positivo de  $x$  da distância  $ct$ . Afinal, a função na variável  $\bar{x} = x - ct$  é idêntica à função original na variável  $x$ , correspondendo-se, pois, apenas a uma transformação de coordenadas, com translação de magnitude  $ct$  do eixo  $x$ . Em outras palavras a velocidade da onda não pode ser confundida com a velocidade da partícula, mas consiste na velocidade da informação contida na forma da onda. Por outro lado, de modo similar,  $u_2(\eta_2)$  consiste numa onda que se propaga na direção negativa da variável  $x$ , com a mesma velocidade (imagem especular da Figura 8.1). Vale ainda enfatizar que fazendo  $\bar{x} = ct - x$  o resultado é o mesmo ilustrado na Figura 8.1, apenas invertendo-se o eixo  $\bar{x}$ .



**Figura 8.1**

As quatro primeira de (8.5) e mais a lei de Hooke permitem escrever:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E \frac{du_1}{dx} = E\varepsilon_1 = -\dot{u}_1 \sqrt{E\rho} = -\dot{u}_1 \rho c \\ \sigma_2 &= E \frac{du_2}{dx} = E\varepsilon_2 = \dot{u}_2 \sqrt{E\rho} = \dot{u}_2 \rho c\end{aligned}\tag{8.6}$$

onde  $\dot{u}_1$  e  $\dot{u}_2$  são velocidades da partícula correspondentes empregando-se a notação clássica de derivação no tempo;  $\sigma_i$  e  $\varepsilon_i$  vêm a ser a tensão e a deformação no material, respectivamente, e o produto  $\rho c$  vem a ser a impedância mecânica. O expresso em (8.6) indica que, no caso de onda de tração propagando-se na direção positiva da variável  $x$ , a velocidade da partícula é negativa, e a velocidade da partícula é positiva para onda de compressão propagando na direção positiva da variável  $x$ ; o contrário ocorrendo para propagação na direção negativa de  $x$ .

### 8.2.1- Condições iniciais

As condições iniciais do movimento são expressas por:

$$\begin{aligned}u(x, t = 0) &= e(x) = u_1(x) + u_2(x) \\ \dot{u}(x, t = 0) &= v(x) = \dot{u}_1(x) + \dot{u}_2(x)\end{aligned}\tag{8.7}$$

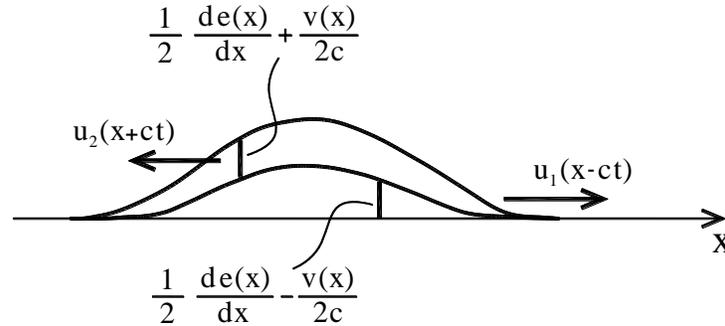
sendo  $e(x)$  a configuração inicial dos deslocamentos e  $v(x)$  a configuração inicial de velocidades; ou ainda, por derivação da primeira de (8.7) e do expresso na terceira e quarta de (85):

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx}(x, t = 0) &= \frac{de(x)}{dx} = \frac{du_1(x)}{dx} + \frac{du_2(x)}{dx} \\ \dot{u}(x, t = 0) &= v(x) = -c \frac{du_1(x)}{dx} + c \frac{du_2(x)}{dx}\end{aligned}\tag{8.8}$$

cuja solução se expressa:

$$\begin{aligned}\frac{du_1(x)}{dx} &= \frac{1}{2} \frac{de(x)}{dx} - \frac{v(x)}{2c} \\ \frac{du_2(x)}{dx} &= \frac{1}{2} \frac{de(x)}{dx} + \frac{v(x)}{2c}\end{aligned}\tag{8.9}$$

que, por integração, fornece o formato da onda que vai se propagar na direção positiva da variável  $x$  ( $u_1(x - ct)$ ) e o formato da onda que vai se propagar na direção negativa da variável  $x$  ( $u_2(x + ct)$ ), como ilustra-se na Figura 8.2.



**Figura 8.2**

É interessante fazer um balanço das energias em jogo, explicitando-se o produto da tensão pela deformação correspondente (energia de deformação) acrescido da energia cinética, na condição inicial e depois com as ondas já separadas, ou seja:

$$\frac{E}{2}(u_1' + u_2')^2 + \frac{\rho}{2}(\dot{u}_1 + \dot{u}_2)^2 = \frac{E}{2} \left[ \left( \frac{u_1' + u_2'}{2} - \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2}{2c} \right)^2 + \left( \frac{u_1' + u_2'}{2} + \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2}{2c} \right)^2 \right] + \frac{\rho}{2}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2)$$

deixando-se claro que a soma das energias individuais das ondas  $u_1(x - ct)$  e  $u_2(x - ct)$  é igual a energia das ondas superpostas inicialmente, e isso explica a razão de a energia total, quando se tem várias origens, ser exatamente as somas das energias individuais. Afinal, as energias em questão são grandezas escalares conservativas.

### 8.2.2- Condições de contorno (reflexão)

As condições de contorno, igualmente, são de dois tipos, quais sejam, deslocamento prescrito num dado ponto especificado da coordenada  $x_0$ :

$$u(x = x_0, t) = u_1(x_0 - ct) + u_2(x_0 + ct) \tag{8.10}$$

ou ainda:

$$\dot{u}(x_0, t) = \dot{u}_1(x_0 - ct) + \dot{u}_2(x_0 + ct) \tag{8.11}$$

uma vez que, para se ter o mesmo deslocamento da partícula, deve-se ter também a mesma velocidade; ou deformação prescrita num dado ponto, ou seja::

$$\frac{du(x_0, t)}{dx} = \frac{du_1(x_0 - ct)}{dx} + \frac{du_2(x_0 + ct)}{dx} \quad (8.12)$$

ou ainda:

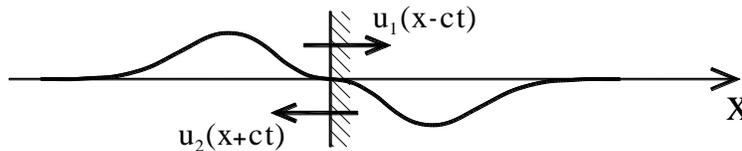
$$\sigma(x_0, t) = \sigma_1(x_0 - ct) + \sigma_2(x_0 + ct) \quad (8.13)$$

multiplicando-se os membros (8.12) pelo módulo de elasticidade.

No caso de apoio fixo, por exemplo, tem-se de (8.11):

$$\dot{u}_1(x_0 - ct) + \dot{u}_2(x_0 + ct) = 0 \quad (8.14)$$

mostrando-se que, no caso em que a onda incidente for  $u_1(x - ct)$ , a onda refletida será exatamente  $u_2(x + ct) = -u_1(x - ct)$ , como ilustra-se na Figura 8.3



**Figura 8.3**

Por outro lado, tendo-se em conta (8.6), tem-se uma nova redação para o expresso em (8.14), ou seja:

$$-\sigma_1(x_0 - ct) + \sigma_2(x_0 + ct) = 0 \quad (8.15)$$

mostrando-se que a onda refletida tem tensão de mesmo sinal que a onda incidente, dobrando-se assim, pela superposição, a tensão nesse ponto; fenômeno conhecido com chicote de tensão.

No caso de superfície livre de tensão, o expresso em (8.13) ganha, multiplicando-se pelo módulo de elasticidade, a redação:

$$\sigma_1(x_0 - ct) + \sigma_2(x_0 + ct) = 0 \quad (8.16)$$

mostrando-se que a tensão da onda refletida ( $u_2(x + ct)$ ) tem sinal oposto ao da onda incidente ( $u_1(x + ct)$ ), mas, tendo-se em conta (8.6) o expresso em (8.16) ganha a redação:

$$-\dot{u}_1(x_0 - ct) + \dot{u}_2(x_0 + ct) = 0 \quad (8.17)$$

Indicando-se que a onda refletida tem velocidade da partícula de mesmo sinal do da onda incidente, deixando-se evidente que, na superposição, a velocidade (ou o deslocamento) fica dobrado; fenômeno conhecido como chicote de velocidade (ou de deslocamento).

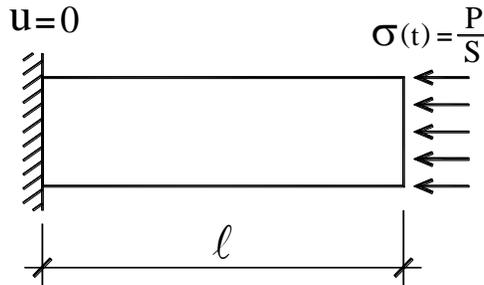
Um exemplo ilustrativo de como o movimento ondulatório resolve o problema de vibração de barra foi magistralmente desenvolvido por Ray Clough<sup>1</sup>. Trata-se de uma barra subitamente carregada na extremidade livre, como indicado na Figura 8.4, cuja solução pela técnica da superposição modal (vide item (7.2.2)) resulta:

$$\sigma(x,t) = \frac{4\sigma_0}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left( \frac{1 + \cos \omega_i t}{2i-1} \right) \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2\ell} \quad (8.18)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{P_0}{S} \\ \omega_i &= \frac{(2i-1)\pi c}{2\ell} \end{aligned} \quad (8.19)$$

e a solução pela via ondulatória é dada pela superposição dos trens de onda de compressão  $\sigma_1(x+ct)$  e  $\sigma_2(x-ct)$ , como ilustrado na Figura 8.5.



**Figura 8.4**

Afinal, da direita para a esquerda propaga-se inicialmente uma onda de compressão  $\sigma(x+ct) = \sigma_0$ , que, ao chegar no apoio, encontra uma onda de compressão propagando-se da esquerda para a direita  $\sigma(x-ct) = \sigma_0$ , dobrando-se no apoio a compressão (chicote de compressão). E essa onda de compressão ao chegar à extremidade livre encontra uma onda de tração  $\sigma(x+ct) = \sigma_0$  propagando-se da direita para a esquerda, mantendo-se assim nessa extremidade a tensão de

<sup>1</sup> Clough, R., *Dynamics of Structures*, 3a. Ed., Mc Graw Hill, (1993)

compressão  $\sigma_0$ . Todavia, no interior da barra, a tensão, assim como o deslocamento, é a obtida pela superposição das ondas aí propagando-se:

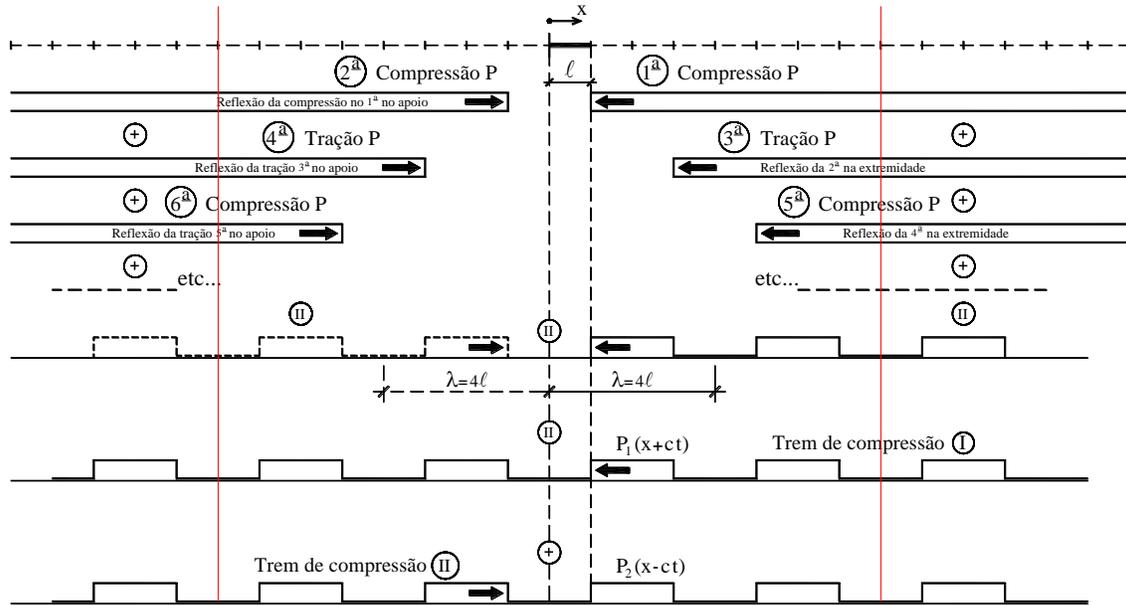


Figura 8.5

Explicitando-se a tensão em série de Fourier, o trem de onda de compressão viajando da direita para a esquerda é dado por:

$$\sigma_1(\eta) = \frac{B_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left( B_j \cos \frac{2j\pi\eta}{\lambda} + A_j \text{sen} \frac{2j\pi\eta}{\lambda} \right) \quad (8.20)$$

onde:

$$\eta = x + ct$$

$$\lambda = 4\ell$$

$$B_0 = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} \sigma_1(\eta) d\eta = \frac{2}{4\ell} (-\sigma_0) 2\ell = -\sigma_0$$

$$B_j = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} \sigma_1(\eta) \cos j \frac{2\pi}{\lambda} \eta d\eta = \frac{2}{4\ell} (-\sigma_0) \frac{4\ell}{2j\pi} \text{sen} \frac{j\pi\eta}{2\ell} \Big|_{\ell}^{3\ell} \quad (8.21)$$

$$= (-1)^k \frac{2(-\sigma_0)}{(2k-1)\pi} \rightarrow k = \frac{j+1}{2}$$

$$A_j = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} \sigma_1(\eta) \text{sen} \frac{2j\pi\eta}{\lambda} d\eta = 0$$

resultando-se:

$$\sigma_1(\eta) = \sigma_1(x + ct) = -\frac{\sigma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2(-\sigma_0)}{(2k-1)\pi} \cos \frac{(2k-1)2\pi(x+ct)}{4\ell} \quad (8.22)$$

e de maneira análoga, a onda tensão correspondente ao trem de onda viajando da esquerda para a direita:

$$\sigma_1(x - ct) = -\frac{\sigma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2(-\sigma_0)}{(2k-1)\pi} \cos \frac{(2k-1)2\pi(x-ct)}{4\ell} \quad (8.23)$$

ficando-se a superposição expressa por:

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= -\sigma_0 + \sigma_1(x - ct) + \sigma_2(x + ct) = \\ &= -\sigma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2(-\sigma_0)}{(2k-1)\pi} \left[ 2 \cos \frac{2\pi(2k-1)}{4\ell} x \cos \frac{2\pi(2k-1)}{4\ell} ct \right] \end{aligned} \quad (8.24)$$

uma vez que:  $\cos A(x - ct) + \cos A(x + ct) = 2 \cos Ax \cos At$ , ou ainda:

$$\sigma(x, t) = -\frac{4}{\pi} \sigma_0 \left( \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} \cos \omega_r t \right) \quad (8.25)$$

onde:

$$\omega_r = \frac{(2k-1)\pi c}{2\ell} \quad (8.26)$$

e, por outro lado, para t nulo tem-se:

$$\sigma(x, t = 0) = 0 = -\frac{4\sigma_0}{\pi} \left( \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k-1} \cos \frac{2k-1}{2} \frac{kx}{\ell} \right) \quad (8.27)$$

visto que é clássica a série:

$$\frac{\pi}{4} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k-1} \cos \frac{2k-1}{2} \frac{kx}{\ell} \quad (8.28)$$

e com isso:

$$\begin{aligned}\sigma(x,t) &= -\frac{4}{\pi} \sigma_0 \left( -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2\ell} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2\ell} \cos \frac{\omega_r t}{2k-1} \right) \\ &= -\frac{4}{\pi} \sigma_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (1 + \cos \omega_r t) \frac{1}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2\ell}\end{aligned}\quad (8.29)$$

que vem a ser coincidente com o resultado obtido pela integração finita (superposição modal), como expressa em (8.18).

### 8.2.3 – Fonte pontual de ondas (vibração forçada)

Considere-se agora o caso de uma carga pontual harmônica provocando-se uma onda propagando-se para o lado negativo e outra propagando-se para o lado positivo, como ilustra-se na Figura 8.6 a), cujo equilíbrio, como ilustrado na Figura 8.6 b), se expressa:

$$\sigma_2(x_0 + ct) - \sigma_1(x_0 - ct) = \sigma_0 \text{sen} \omega t \quad (8.30)$$

sendo  $x_0$  a posição de aplicação da carga,  $\sigma_0 = P/s$ , e a compatibilidade é dada por:

$$u_1(x_0 + ct) = u_2(x_0 - ct) \quad (8.31)$$

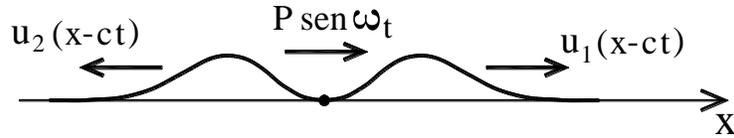
permitindo-se redigir o seguinte sistema de equações, respectivamente:

$$\begin{aligned}\dot{u}_2(x_0 + ct) + \dot{u}_1(x_0 - ct) &= \frac{\sigma_0}{\rho c} \text{sen} \omega t \\ \dot{u}_2(x_0 + ct) - \dot{u}_1(x_0 - ct) &= 0\end{aligned}\quad (8.32)$$

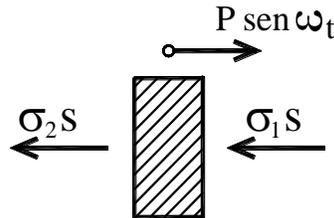
resultando-se:

$$\dot{u}_1(x_0 - ct) = \dot{u}_2(x_0 + ct) = \frac{\sigma_0}{2\rho c} \text{sen} \omega t \quad (8.33)$$

podendo-se obter a solução por simples integração.



a) Configuração de ondas



b) Configuração de equilíbrio

**Figura 8.6**

e, naturalmente, as ondas em jogo podem ser expressas por:

$$\dot{u}_1 = \frac{\sigma_0}{2\rho c} \text{sen} \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right]$$

$$\dot{u}_2 = \frac{\sigma_0}{2\rho c} \text{sen} \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x + ct) \right]$$

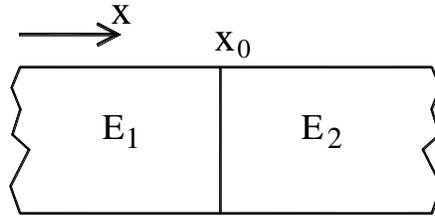
sendo  $\lambda = 2\pi c / \omega$  o comprimento das ondas em questão.

### 8.2.4- Refração

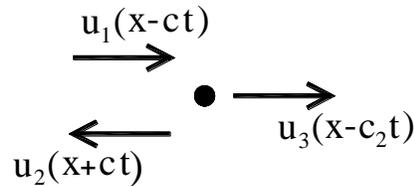
A Figura 8.7 a) ilustra a interface de dois meios materiais, com módulos de elasticidade diferentes como indicado. Como o equilíbrio na interface implica na igualdade das tensões nos dois lados, uma vez que não há carregamento aplicado; e igualmente o mesmo deslocamento em ambos os lados da interface. Para uma onda incidente  $u_1(x - c_1t)$  essas condições são satisfeitas com o concurso de outras duas ondas, quais sejam, a reflexão  $u_2(x + c_1t)$  e a refração  $u_3(x - c_2t)$ , como ilustra-se na Figura 8.7 b), e com isso tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \sigma_d \\ \dot{u}_e &= \dot{u}_d \end{aligned} \tag{8.34}$$

onde “e” refere-se a grandezas do lado esquerdo (meio 1) e “d” a grandezas do lado direito (meio 2).



a) Meios diferentes



b) Configuração de ondas

**Figura 8.7**

O expresso em (8.34) permite então redigir:

$$\begin{aligned} E_1 u_1' + E_1 u_2' &= E_2 u_3' \\ -c_1 u_1' + c_1 u_2' &= -c_2 u_3' \end{aligned} \quad (8.35)$$

resultando-se:

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{E_2 c_1 - E_1 c_2}{E_2 c_1 + E_1 c_2} u_1' \\ u_3' &= \frac{2E_1 c_1}{E_2 c_1 + E_1 c_2} u_1' \end{aligned} \quad (8.36)$$

que relaciona então a magnitude das ondas refletida e refratada em relação à magnitude da onda incidente.

### 8.3 – Ondas viscoelásticas

A equação diferencial da onda viscoelástica assim se expressa:

$$u'' + c u'' - \frac{1}{v_r^2} \ddot{u} = 0 \quad (8.37)$$

onde  $c$  representa agora a constante de viscoelasticidade e  $v_r$  uma velocidade de referência expressa por:

$$v_r = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (8.38)$$

cuja integração em termos não finito (formulação ondulatória) empregando-se notação complexa tem a seguinte redação:

$$u = Ae^{i(\beta x - \omega t)} \quad (8.39)$$

na qual  $\beta$  é o número de onda,  $A$  a amplitude,  $x$  a variável espaço,  $t$  a variável tempo,  $\omega$  a frequência angular da onda e  $i$  a unidade imaginária. Substituindo-se (8.39) em (8.37) tem-se a seguinte escrita:

$$\beta^2 - \omega c \beta^2 i - \frac{\omega^2}{v_r^2} = 0 \quad (8.40)$$

cujas raízes se expressam:

$$\beta = \pm \frac{\omega}{v_r} \sqrt{\frac{1}{1 - \omega c i}} = \pm \frac{\omega}{v_r} \sqrt{\frac{1 + \omega c i}{1 + \omega^2 c^2}} = \pm \frac{\omega}{v_r} \sqrt{\bar{A} + \bar{B}i} \quad (8.41)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{1 + \omega^2 c^2} \\ \bar{B} &= \frac{\omega c}{1 + \omega^2 c^2} \end{aligned} \quad (8.42)$$

ou ainda em forma polar:

$$\beta = \frac{\omega}{v_r} \sqrt{\rho_c} e^{i\theta} \quad (8.43)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 c^2}} \\ \theta &= \arccos \left( \frac{\sqrt{1 + \omega^2 c^2}}{1 + \omega^2 c^2} \right) \end{aligned} \quad (8.44)$$

sendo  $\rho_c$  o módulo e  $\theta$  a fase do complexo. Na equação (8.55) considera-se agora apenas o sinal positivo da raiz da equação (8.41), que corresponde a propagação da onda no sentido positivo da variável espaço. O expresso em (8.43) pode ser redigido também na forma

$$\beta = \pm \frac{\omega}{v_r} \sqrt[4]{\frac{1}{1 + \omega^2 c^2}} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) = A^* + B^* i \quad (8.45)$$

onde

$$A^* = \frac{\omega}{v_r} \sqrt[4]{\frac{1}{1 + \omega^2 c^2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (8.46)$$

$$B^* = \frac{\omega}{v_r} \sqrt[4]{\frac{1}{1 + \omega^2 c^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

e, com isso, a equação (8.39) ganha a seguinte redação

$$u = A e^{i[(A^* + B^* i)x - \omega t]} = A e^{i(A^* x - \omega t)} e^{-B^* x} \quad (8.47)$$

que corresponde a uma onda com velocidade de propagação da por

$$v = \frac{\omega}{A^*} \quad (8.48)$$

e cuja amplitude cai exponencialmente ao longo do espaço (propagação evanescente).

#### 8.4 Ondas de flexão

A teoria técnica da flexão, como visto no Capítulo VII (equação (7.38)), resulta, para a vibração livre de viga, na seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{1}{a^2} \frac{d^2 v}{dt^2} = 0 \quad (8.49)$$

onde:

$$a = \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (8.50)$$

cuja integração em termos não finitos (solução ondulatória) em notação complexa tem a seguinte redação:

$$v(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} \quad (8.51)$$

ganhando-se (8.49), tendo-se em conta (8.51), a seguinte escrita:

$$k^4 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \quad (8.52)$$

cujas raízes são:

$$\begin{aligned} k_1 &= i\sqrt{\frac{\omega}{a}} \\ k_2 &= -i\sqrt{\frac{\omega}{a}} \\ k_3 &= \sqrt{\frac{\omega}{a}} \\ k_4 &= -\sqrt{\frac{\omega}{a}} \end{aligned} \quad (8.53)$$

e, com isso a solução se expressa:

$$v(x,t) = \left( A_1 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{a}}x} + A_2 e^{\sqrt{\frac{\omega}{a}}x} \right) e^{-i\omega t} + A_3 e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}}x - \omega t\right)} + A_4 e^{i\left(-\sqrt{\frac{\omega}{a}}x - \omega t\right)} \quad (8.54)$$

sendo que as duas primeiras parcelas da solução constituem uma onda evanescente, ou seja, uma vibração que se dissipa com o tempo, e as duas últimas uma onda propagando-se com a velocidade:

$$c = \sqrt{a\omega} \quad (8.55)$$

deixando-se evidente que a onda de flexão é de natureza dispersiva (velocidade de propagação depende da frequência).

### 8.5 Ondas de flexão de Timoshenko

A equação de onda de Timoshenko tem a seguinte redação:

$$\begin{aligned} kGS(v'' - \theta') - m\ddot{v} &= 0 \\ -EI\theta'' - kGS(v' - \theta) + mr^2\ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (8.56)$$

onde  $v$  denota a deflexão total da viga,  $\theta$  a rotação da seção transversal devida ao momento fletor,  $k$ ,  $S$ ,  $G$ ,  $E$ ,  $I$ ,  $m$  representam, respectivamente, o coeficiente de cisalhamento da seção transversal, a área da seção transversal, o módulo de elasticidade transversal, o módulo de elasticidade, o momento de inércia da seção transversal e a massa por unidade de comprimento da viga.

A integração da equação (8.56) em termos não finitos empregando-se a notação complexa se expressa:

$$\begin{aligned} v &= A \exp[i(\omega t - \beta x)] \\ \theta &= B \exp[i(\omega t - \beta x)] \end{aligned} \quad (8.57)$$

onde  $i$  representa a unidade imaginária,  $\beta$  denota o número de onda,  $\omega$  a frequência angular da onda e  $A$  e  $B$  são, respectivamente, as amplitudes da deflexão e da rotação da seção transversal da onda propagando-se na direção positiva.

Tendo-se em conta (8.57), o expresso em (8.56) permite escrever-se:

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{2c^2} \left[ 1 + \eta \pm \sqrt{(1 - \eta)^2 + \left(\frac{2c}{r\omega}\right)^2} \right] \quad (8.58)$$

onde:

$$\begin{aligned} \eta &= E / kG \\ c &= \sqrt{E/\rho} \end{aligned} \quad (8.59)$$

sendo  $\rho$  a densidade da massa da viga. As componentes do autovetor correspondente são então expressas por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\eta r^2}{\beta} \left( \beta^2 + \frac{1}{\eta r^2} - c\omega^2 \right) \\ B &= i \end{aligned} \quad (8.60)$$

sendo importante enfatizar que o expresso por (8.58) indica haver dois pares de raízes com bifurcação (solução complexa) quando:

$$1 + \eta = \sqrt{(1 - \eta)^2 + \left(\frac{2c}{r\omega}\right)^2} \quad (8.61)$$

cuja frequência da bifurcação (raiz complexa) é dada por:

$$\omega_b = \frac{c}{r\sqrt{\eta}} \quad (8.62)$$

sendo que, para  $\omega > \omega_b$ , tem-se propagação ondulatória, enquanto que, para  $\omega \leq \omega_b$  o movimento constitui uma vibração amortecida ao longo do espaço, conhecido como movimento evanescente. Em outras palavras, o expresso em (8.58) indica haver dois modos acoplados de propagação entre a deflexão  $v$  e a rotação  $\theta$ , sendo de movimento evanescente  $\omega \leq \omega_b$ . O primeiro modo acoplado é também conhecido como primeiro espectro e o segundo denominado segundo espectro.

Cumprido, finalmente, registrar que a abordagem das condições iniciais de deslocamento e velocidades, reflexão, refração, bem como a abordagem de carregamento concentrado, como feito para o caso de ondas axiais nos itens 8.2.1, 8.2.2, 8.2.4 e 8.2.3, respectivamente, podem ser desenvolvidos de modo similar, tendo-se em conta que agora as ondas em jogo acoplam deslocamentos e rotações.

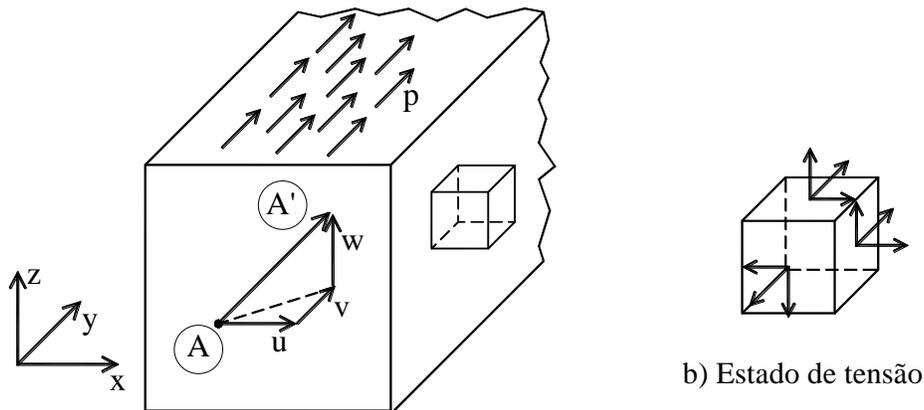
## CAPÍTULO IX

### INTEGRAÇÃO NÃO FINITA NO MEIO CONTÍNUO: MOVIMENTO ONDULATÓRIO

#### 9.1 - Introdução

A equação de movimento relativa ao meio contínuo tridimensional em formulação segundo o modelo linear envolve três grandezas vetoriais (tensores de primeira ordem), quais sejam, deslocamento, carregamento superficial distribuído e forças volumétricas; duas grandezas tensoriais de segunda ordem, quais sejam, estado de tensão e estado de deformação, bem como um tensor de quarta ordem, cujas componentes são as constantes da Lei de Hooke.

A Figura 9.1 a) ilustra um meio contínuo tridimensional, indicando-se os movimentos  $u(x,y,z,t)$ ,  $v(x,y,z,t)$  e  $w(x,y,z,t)$  de um ponto material segundo, respectivamente, os eixos coordenados de referência  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , um carregamento superficial e um elemento infinitesimal do meio contínuo, e a Figura 9.1 b) a orientação de suas componentes de tensão.



a) Sistema material e movimentos

b) Estado de tensão

**Figura 9.1**

A componentes da grandeza deslocamento são designadas em notação vetorial por:

$$\begin{Bmatrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{Bmatrix} \quad (9.1)$$

sendo  $u(x,y,z,t)$  o movimento de um ponto material do meio contínuo segundo o eixo  $Ox$ ,  $v(x,y,z,t)$  segundo  $Oy$  e  $w(x,y,z,t)$  segundo o eixo  $Oz$ . As componentes do carregamento superficial são dadas em notação vetorial por:

$$\begin{Bmatrix} p_x(x,y,z,t) \\ p_y(x,y,z,t) \\ p_z(x,y,z,t) \end{Bmatrix} \quad (9.2)$$

onde o índice indica o eixo correspondente à direção, e igualmente a força volumétrica por:

$$\begin{Bmatrix} \rho_x(x,y,z,t) \\ \rho_y(x,y,z,t) \\ \rho_z(x,y,z,t) \end{Bmatrix} \quad (9.3)$$

incluindo-se naturalmente nesse vetor as componentes da força de inércia (D'Alembert).

As componentes do estado de tensão em notação vetorial assim se expressam:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (9.4)$$

sendo que as três primeiras são componentes normais de tensão e as três últimas componentes de cisalhamento; bem como as correspondentes deformações:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (9.5)$$

sendo as três primeiras os alongamentos específicos e a três últimas as componentes de distorção.

Pois bem, conhecidos os carregamentos, as relações necessárias para a determinação das componentes de deslocamento, tensão e deformação, em número compatível com as incógnitas envolvidas, são consistentemente em número de quinze, sendo seis decorrentes da Lei de Hooke:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = [M_{ij}] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (9.6)$$

onde a matriz  $[M_{ij}]$  contempla as constantes da Lei de Hooke, bem como seis relações decorrentes da compatibilidade entre as componentes de deformação e as derivadas do estado de deslocamento (modelo de pequenos deslocamentos):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial x \\ \partial w / \partial x \\ \partial v / \partial x + \partial u / \partial y \\ \partial w / \partial y + \partial v / \partial z \\ \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \end{Bmatrix} \quad (9.7)$$

e mais três equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \ddot{u} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \ddot{v} \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= \rho \ddot{w}\end{aligned}\quad (9.8)$$

ganhando-se o movimento livre, no método dos deslocamentos, a redação:

$$\begin{aligned}(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \rho \ddot{u} &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \rho \ddot{v} &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \rho \ddot{w} &= 0\end{aligned}\quad (9.9)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do material e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal e

$$\begin{aligned}e &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}\end{aligned}\quad (9.10)$$

sendo que a primeira de (9.10) vem a ser a expansão volumétrica e a segunda a constante de Lamé, onde  $E$  é o módulo de elasticidade.

Um exame do expresso em (9.9) indica que, no caso de movimento com expansão volumétrica nula, o sistema de equações se desacopla, ou seja:

$$\begin{aligned}G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \rho \ddot{u} &= 0 \\ G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \rho \ddot{v} &= 0 \\ G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \rho \ddot{w} &= 0\end{aligned}\quad (9.11)$$

que vem a ser uma equação de onda tridimensional, com solução do tipo:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_1(x - c_1 t, y - c_1 t, z - c_1 t) + \psi_2(x + c_1 t, y + c_1 t, z + c_1 t) \quad (9.12)$$

onde:

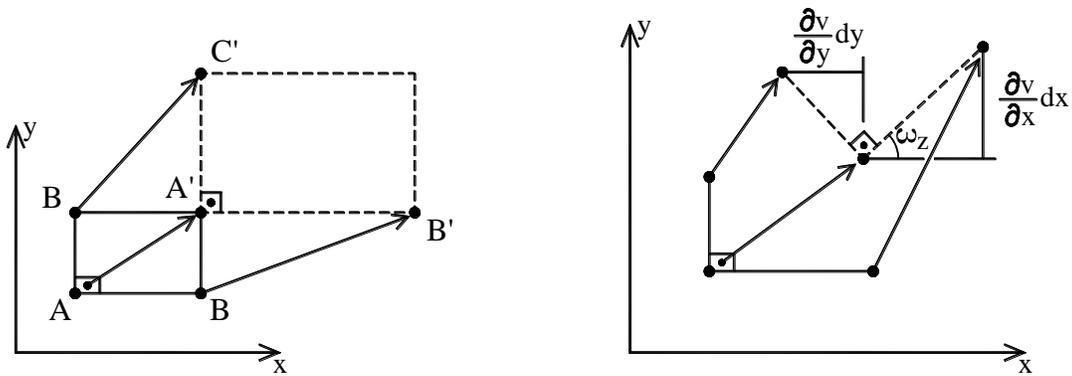
$$c_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (9.13)$$

que consiste na velocidade da onda de distorção.

A outra onda no meio contínuo tridimensional é a chamada onda de dilatação, que não apresenta movimento de rotação, cujas componentes são dadas por:

$$\begin{aligned} \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (9.14)$$

que são visíveis com facilidade quando o sistema de referência está posicionado segundo as direções principais, como exibe-se na Figura 9.2. Na Figura 9.2 a) indica-se o caso em que ocorre apenas expansão, e no caso exibido na Figura 9.2 b) a expansão ocorre mantendo-se direção principal, ou seja:



a) Direção principal sem rotação ( $\omega_z = 0$ )

b) Direção principal com rotação  $\omega_z$

**Figura 9.2**

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \quad (9.15)$$

sendo de fácil verificação que:

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \quad (9.16)$$

onde a notação barra superior indica os mesmos movimentos em outro sistema de referência, como ilustrado na Figura 9.3.

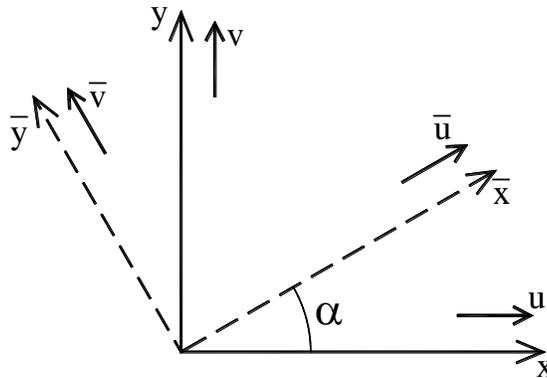


Figura 9.3

Pois bem, admitindo-se que o movimento contempla rotação nula, ou seja,  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ , os deslocamentos podem ser expressos por um potencial, ou seja:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \tag{9.17}$$

resultando-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{9.18}$$

permitindo-se, nesse caso, uma nova redação de (9.9), ou seja:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2G) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \rho \ddot{u} &= 0 \\
 (\lambda + 2G) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \rho \ddot{v} &= 0 \\
 (\lambda + 2G) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \rho \ddot{w} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.20}$$

resultando-se, pois, em movimento ondulatório novamente desacoplado, cuja velocidade de propagação é dada por:

$$c_2 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}
 \tag{9.21}$$

que vem a ser a velocidade da onda denominada de dilatação. Cumpre assinalar que, como mostrado em textos clássicos de elastodinâmica, não existem outras ondas no meio contínuo que não estas duas anunciadas.

A título de informação, a Tabela 9.1 indica as velocidades das ondas de dilatação e de distorção para alguns materiais.

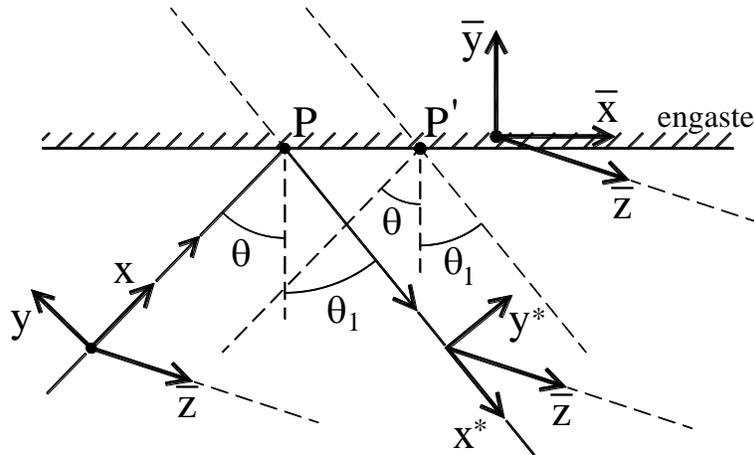
Tabela 9.1 – Velocidades das Ondas de dilatação e de distorção

Material	C <sub>2</sub> em Km/s	C <sub>1</sub> em Km/s
Aço	5.940	3.22
Cobre	4.56	2.25
Alumínio	6.31	3.10
Vidro	5.79	3.35
Ferro	5.06	3.19
Borracha	1.04	0.27
Concreto	3.09 – 4.38	1.09 – 2.68
Argila úmida	1.50	0.15
Solo argiloso	0.799	0.26
Areia densa	0.482	0.25
Areia fina	0.300	0.11
Areia média	0.349	0.167
Cascalho	0.750	0.18

## 9.2 – Reflexão e Refração das ondas de distorção e de dilatação

A Figura 9.4 ilustra a incidência, segundo um ângulo  $\theta$ , de uma onda de distorção horizontal em perspectiva fictícia, denominada SH, expressa por:

$$\begin{aligned} u_i &= 0 \\ v_i &= 0 \\ w_i &= w_i(x - c_1 t) \end{aligned} \quad (9,22)$$



**Figura 9.4**

e a reflexão, segundo um ângulo  $\theta_1$ , de uma onda também de distorção horizontal expressa por:

$$\begin{aligned} u_r^* &= 0 \\ v_r^* &= 0 \\ w^* &= w^*(x^* - c_1 t) \end{aligned} \quad (9.23)$$

pois, para não haver movimento na superfície de engaste, uma onda também SH deve estar presente. Assim, na superfície de engaste tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 0 \\ \bar{v} &= 0 \\ \bar{w} &= 0 \end{aligned} \quad (9.24)$$

e essa condição implica na superposição das duas ondas, ou seja:

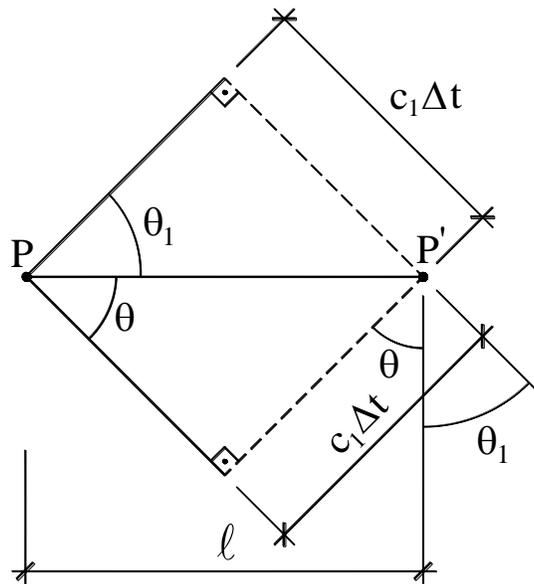
$$\bar{w}(x, t) = w_i(x - c_1 t) + w^*(x^* - ct) = 0 \rightarrow w^*(x^* - ct) = -w_i(x - c_1 t) \quad (9.25)$$

resultando-se que a onda refletida tem movimento inverso do da onda incidente. É preciso assinalar que o eixo OZ dos três sistemas de referência em jogo são paralelos e normais ao plano da figura.

Por outro lado, como no ponto  $P'$  distante  $\ell$  do ponto  $P$ , o expresso em (9.25) deve ser verificado nas mesmas condições, e a Figura 9.5 exhibe a configuração geométrica para que isso venha ocorrer, ou seja:

$$\ell = \frac{c_1 \Delta t}{\text{sen} \theta} = \frac{c_1 \Delta t}{\text{sen} \theta_1} \quad (9.26)$$

que consiste na conhecida lei dos senos, mostrando nesse caso que o ângulo de reflexão é igual ao de incidência.



Configuração de chegada em  $P$  e  $P'$

**Figura 9.5**

É importante assinalar que durante todo o tempo a superposição das duas ondas no ponto  $P$  deve ter resultado idêntico, implicando-se em:

$$d\lambda = c_1 \Delta t = d\lambda_r \quad (9.27)$$

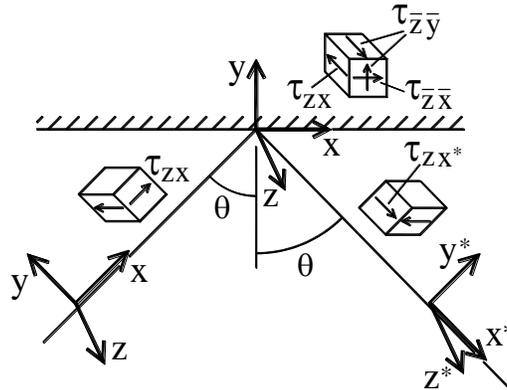
mostrando-se a condição, nesse caso, de os comprimentos percorridos pelas duas ondas em jogo no ponto  $P$  serem iguais.

A Figura 9.6 a) ilustra as tensões em jogo, também em perspectiva fictícia, e a Figura 9.6 b) mostra os ângulos envolvidos.

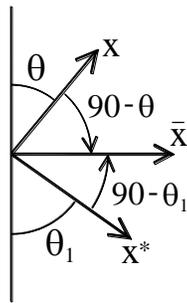
As tensões de cisalhamento da onda incidente e da onda refletida são expressas por:

$$\tau_{zx} = G \frac{dw}{dx}$$

$$\tau_{z^*x^*}^* = G \frac{dw^*}{dx^*}$$
(9.28)



a) Configuração de tensão



b) Configuração de ângulos

**Figura 9.6**

e as matrizes dos tensores correspondentes ficam então expressas por:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{x^*z^*}^* \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x^*z^*}^* & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(9.29)

bem como as matrizes dos cossenos diretores dos eixos  $Ox$  e  $Ox^*$  em relação ao eixo  $O\bar{x}$ , respectivamente, expressas por:

$$\begin{aligned} [T] &= \begin{bmatrix} \text{sen}\theta & -\text{cos}\theta & 0 \\ \text{cos}\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [T^*] &= \begin{bmatrix} \text{sen}\theta & \text{cos}\theta & 0 \\ -\text{cos}\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.30)$$

e, assim sendo, a superposição das tensões de cisalhamento segundo o eixo  $O\bar{x}$  fica expressa pelo tensor:

$$\begin{aligned} [\bar{\sigma}] &= [T][\sigma_i][T]^T + [T^*][\sigma^*][T^*]^T = \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz}\text{sen}\theta + \tau_{x^*z^*}\text{sen}\theta \\ 0 & 0 & \tau_{xz}\text{cos}\theta - \tau_{x^*z^*}\text{cos}\theta \\ \tau_{xz}\text{sen}\theta + \tau_{x^*z^*}\text{sen}\theta & \tau_{xz}\text{cos}\theta - \tau_{x^*z^*}\text{cos}\theta & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.31)$$

onde  $[\bar{\sigma}]$  é o tensor na superfície de engaste, Indicando-se que, tendo-se em vista (9.25) e (9.28), o cisalhamento  $\tau_{\bar{x}\bar{z}}$  se anula como esperado, pois o engaste não se distorce, e o cisalhamento  $\tau_{\bar{y}\bar{z}}$  fica dobrado a menos do fator  $\text{cos}\theta$ , pois:

$$\begin{aligned} \tau_{\bar{x}\bar{z}} &= \tau_{xz}\text{sen}\theta + \tau_{x^*z^*}\text{sen}\theta = 0 \\ \tau_{\bar{y}\bar{z}} &= \tau_{xz}\text{cos}\theta - \tau_{x^*z^*}\text{cos}\theta = 2\tau_{xz} \end{aligned} \quad (9.32)$$

confirmando-se assim o também esperado chicote de tensão.  
Examinando-se a reflexão em superfície livre tem-se:

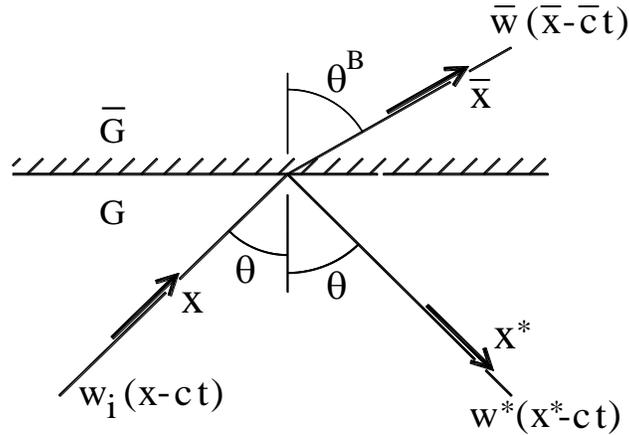
$$\tau_{\bar{y}\bar{z}} = \tau_{xz}\text{cos}\theta - \tau_{x^*z^*}\text{cos}\theta = 0 \quad (9.33)$$

ou seja:

$$\left( \frac{dw_i}{dx} - \frac{dw^*}{dx^*} \right) \text{cos}\theta = 0 \rightarrow w_i = w^* \quad (9.34)$$

em outras palavras, a tensão de cisalhamento na interface se anula, e o deslocamento, na superposição acaba ficando-se dobrado (chicote de deslocamento).

A Figura 9.7 indica a reflexão e refração para uma onda incidente de distorção (SH) em presença de dois meios elásticos com os módulos de elasticidade indicados, bem como a geometria envolvida.



**Figura 9.7**

Pois bem, em primeiro lugar a lei dos senos resulta na escrita

$$\text{sen}\theta^B = \frac{c_1^B}{c_1} \text{sen}\theta \quad (9.35)$$

e a continuidade de deslocamentos implica em:

$$w_i(x-ct) + w^*(x^*-ct) = w^B(x^B - c_1^B t) \quad (9.36)$$

uma vez que a continuidade dos deslocamentos impõe a igualdade dos deslocamentos verificados no meio G, que é dado pela superposição da onda incidente com a onda refletida, com o deslocamento verificado no meio  $G^B$ , que é o produzido pela onda refratada; bem como a igualdade das tensões de cisalhamento nos dois meios:

$$\tau_{yz} + \tau_{y^*z^*}^* = \tau_{y^B z^B}^B \rightarrow \cos\theta G \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) = \cos\theta^B G^B \frac{\partial w^B}{\partial x^B} \quad (9.37)$$

resultando-se no sistema linear de equações:

$$\begin{aligned} \dot{w}^B(x^B - c_1^B t) - \dot{w}^*(x^* - c_1 t) &= \dot{w}_i \\ \frac{G_B}{G} \frac{c_1}{c_1^B} \frac{\cos \theta^B}{\cos \theta} \dot{w}^B(x^B - c_1^B t) + \dot{w}^*(x^* - c_1 t) &= \dot{w}_i \end{aligned} \quad (9.38)$$

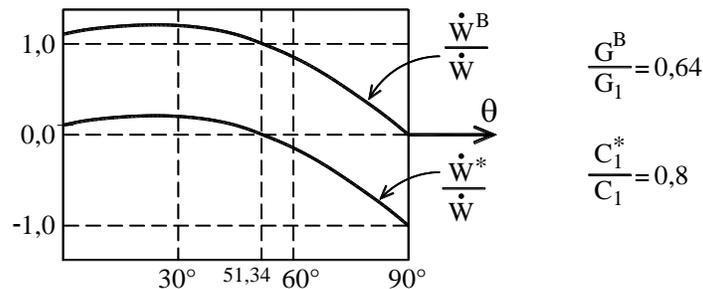
cuja solução resulta:

$$\begin{aligned} \dot{w}^B(x^B - c_1^B t) &= \frac{2\dot{w}_i(x - ct)}{1 + \frac{G_B}{G} \frac{c_1}{c_1^B} \frac{\cos \theta^B}{\cos \theta}} \\ \dot{w}^*(x^* - c_1 t) &= \frac{1 - 2\dot{w}_i(x - ct)}{1 + \frac{G_B}{G} \frac{c_1}{c_1^B} \frac{\cos \theta^B}{\cos \theta}} \end{aligned} \quad (9.39)$$

levando-se ao gráfico da Figura 9.8, mostrando-se que a onda refletida e a refratada invertem o sinal em  $\theta = 51.34^\circ$  tendo-se em conta:

$$\begin{aligned} \frac{G^B}{G} &= 0.64 \\ \frac{C_1^B}{C_1} &= 0.8 \end{aligned} \quad (9.40)$$

indicando-se onda de reflexão nula e onda refração igual à onda incidente.



**Figura 9.8**

A Figura 9.9 exibe o caso da onda plana de cisalhamento vertical incidente na interface engastada  $v_i(x - c_1 t)$ , provocando-se reflexão de uma onda plana de cisalhamento vertical  $v^*(x^* - c_1 t)$  mais a reflexão de uma onda plana de dilatação  $u(x_u - c_2 t)$  tendo-se em conta que os deslocamentos vertical e longitudinal na interface são nulos, exigindo-se, pois, a superposição com outras duas ondas.

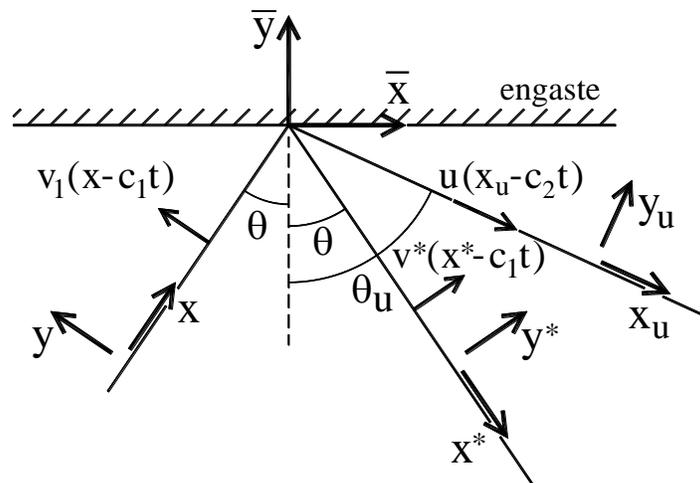
Assim sendo, as seguintes relações estão em jogo:

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta_u &= \frac{c_2}{c_1} \text{sen}\theta \\ \bar{u} &= -v(x - c_1 t) \cos\theta + v^*(x^* - c_1 t) \cos\theta + u(x_u - c_2 t) \text{sen}\theta_u = 0 \\ \bar{v} &= v(x - c_1 t) \text{sen}\theta + v^*(x^* - c_1 t) \text{sen}\theta - u(x_u - c_2 t) \cos\theta_u = 0 \end{aligned} \quad (9.41)$$

resultando-se:

$$\begin{aligned} v^*(x^* - c_1 t) &= \frac{\cos(\theta_u + \theta)}{\cos(\theta_u - \theta)} v(x - c_1 t) \\ u(x_u - c_2 t) &= \frac{\text{sen}2\theta}{\cos(\theta_u - \theta)} v(x - c_1 t) \end{aligned} \quad (9.42)$$

lembrando-se que, quando  $\text{sen}\theta_u > 1$ , ocorre bifurcação da solução e as reflexões dão lugar a onda de superfície como já referido.



**Figura 9.9**

A Figura 9.10 exibe as ondas de tensão no caso de interface livre, na qual as componentes de tensão  $\sigma_{\bar{y}}$  e  $\tau_{\bar{x}\bar{y}}$  são nulas, ou seja:

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}} &= \tau_{xy} \text{sen}2\theta - \tau_{x^*y^*} \text{sen}2\theta + \sigma_u \cos^2 \theta_u = 0 \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} &= -\tau_{xy} \cos 2\theta - \tau_{x^*y^*} \cos 2\theta - \sigma_u \frac{1}{2} \text{sen}2\theta_u = 0 \end{aligned} \quad (9.43)$$

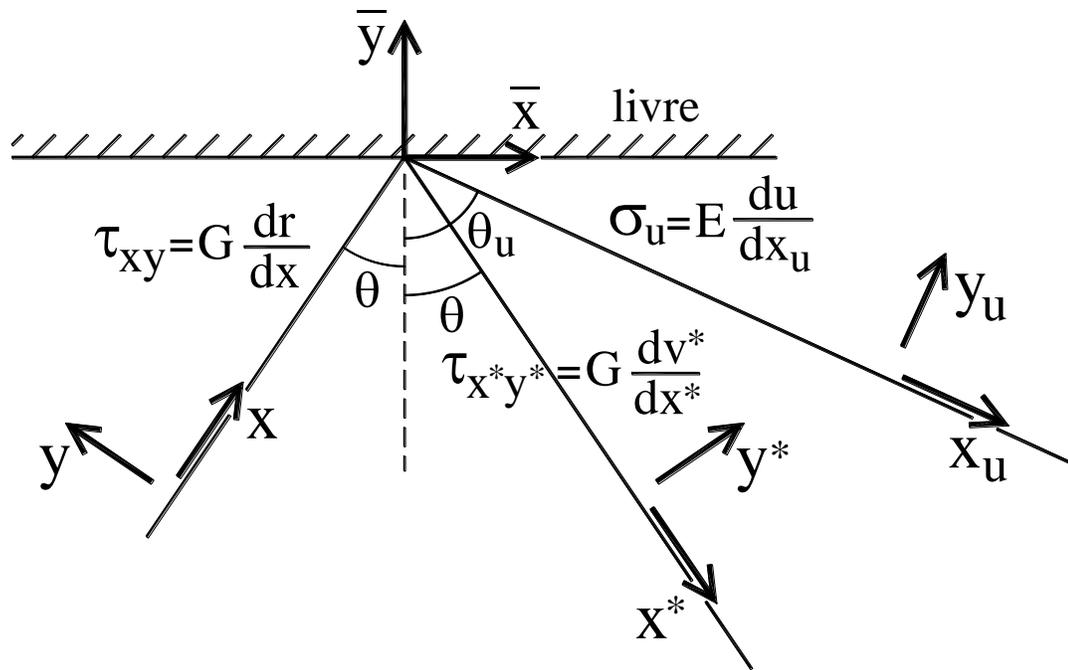
onde emprega-se a transformação tensorial via fórmula com arco duplo, resultando-se:

$$\begin{aligned} \dot{u}(x_u - c_2 t) &= -\frac{\kappa \operatorname{sen} 4\theta}{\operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 2\theta_u + \kappa^2 \cos^2 2\theta} \\ \dot{v}^*(x^* - c_1 t) &= -\frac{\operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 2\theta_u - \kappa^2 \cos^2 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 2\theta_u + \kappa^2 \cos^2 2\theta} \end{aligned} \quad (9.44)$$

onde já se considera as tensões em termos da velocidade das partículas. sendo:

$$\kappa = \frac{c_1}{c_2} \quad (9.45)$$

verificando-se igualmente a possibilidade de bifurcação da solução.



**Figura 9.10**

A Figura 9.11 exibe o resultado da relação  $v(x - c_1 t)/v^*(x^* - c_1 t)$  para ângulo de incidência de zero a 90 graus e vários valores do coeficiente de Poisson.

A refração e reflexão da onda de cisalhamento vertical é ilustrada na Figura 9.12 com as seguintes relações prevalecendo-se:

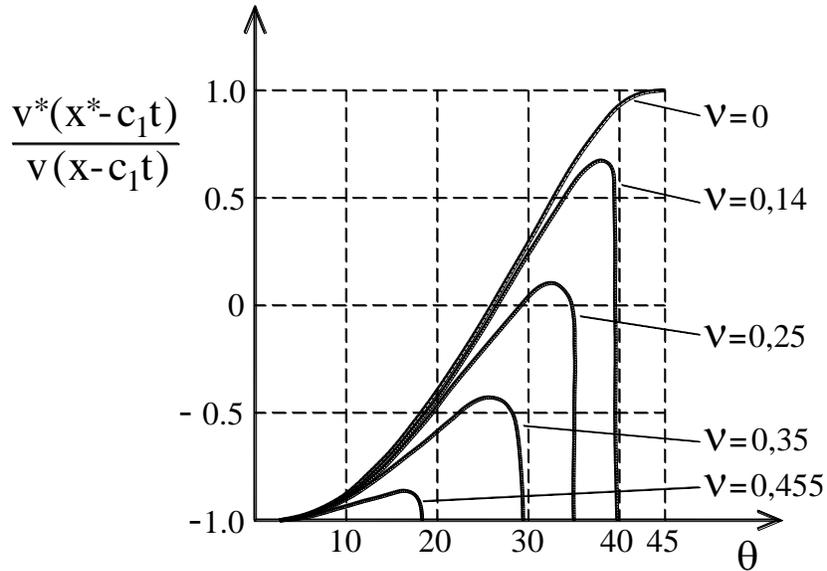


Figura 9.11

$$\text{sen}\theta^u = \frac{C_2}{C_1} \text{sen}\theta$$

$$\text{sen}\theta^{vB} = \frac{C_1^B}{C_1} \text{sen}\theta$$

$$\text{sen}\theta^{uB} = \frac{C_2^B}{C_1} \text{sen}\theta$$

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -v(x-c_1t)\cos\theta + v^*(x^*-c_1t)\cos\theta + u(x^{**}-c_2t)\text{sen}\theta^u = \\ &= -v^B(x^{vB}-c_1^Bt)\cos\theta^{vB} + u^B(x^{uB}-c_2^Bt)\text{sen}\theta^{uB} \end{aligned} \quad (9.46)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= -v(x-c_1t)\text{sen}\theta + v^*(x^*-c_1t)\text{sen}\theta - u(x^{**}-c_2t)\cos\theta^u = \\ &= v^B(x^{vB}-c_1^Bt)\text{sen}\theta^{vB} + u^B(x^{uB}-c_2^Bt)\cos\theta^{uB} \end{aligned}$$

$$\tau_{xy}\text{sen}2\theta - \tau_{x^*y^*}\text{sen}2\theta + \sigma_u \cos^2\theta^u = \tau_{x^*y^*}^B \text{sen}2\theta^{vB} + \sigma_u^B \cos^2\theta^{uB}$$

$$-\tau_{xy} \cos 2\theta - \tau_{x^*y^*} \cos 2\theta - \sigma^u \text{sen}2\theta^u = -\tau_{x^*y^*}^B \cos 2\theta^{vB} + \sigma_u^B \text{sen}2\theta^{uB}$$

sendo que as grandezas indicadas com B como índice ou potência referem-se ao meio superior, e as igualdades de deslocamento, bem como das tensões constituem as quatro equações, ou seja:

$$\begin{bmatrix}
 -\text{sen}\theta^u & -\text{cos}\theta & \text{cos}\theta^{uB} & -\text{cos}\theta^{vB} \\
 \text{cos}\theta^u & -\text{sen}\theta & \text{cos}\theta^{uB} & \text{sen}\theta^{vB} \\
 k^2 \text{cos}2\theta & -k\text{sen}2\theta & -\frac{G^B c_2}{G c_1^B} (k^B)^2 \text{cos}2\theta^{vB} & -\frac{G^B c_2}{G c_1^B} (k^B)^2 \text{cos}2\theta^{vB} \\
 -\text{sen}2\theta^u & -k \text{cos}2\theta & -\frac{G^B c_2}{G c_2^B} \text{sen}2\theta^{uB} & \frac{G^B c_2}{G c_2^B} \text{sen}2\theta^{vB}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \dot{u} \\
 \dot{v} \\
 \dot{u}^B \\
 \dot{v}^B
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 -\text{cos}\theta \\
 \text{cos}\theta \\
 -k \text{cos}2\theta \\
 k \text{cos}2\theta
 \end{Bmatrix}
 \quad (9.47)$$

onde:

$$k = \sqrt{\frac{\lambda + 2G \text{cos}^2 \theta}{G \text{cos} 2\theta^u}} \quad (9.48)$$

$$k^B = \sqrt{\frac{\lambda^B + 2G^B \text{cos}^2 \theta^{uB}}{G \text{cos} 2\theta^{vB}}}$$

que permitem determinar as duas funções de reflexão e de refração. Valendo-se observar que são várias as possibilidades de bifurcação segundo as 3 primeiras de (9.43).

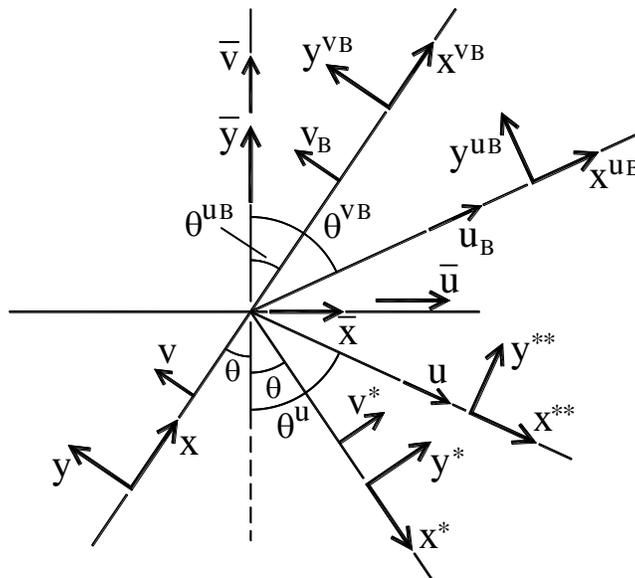


Figura 9.12

No caso de onda de dilatação incidente ocorre também reflexão de ondas de cisalhamento vertical e de dilatação, bem como no caso de interface de dois meios também a refração de ondas de dilatação e de cisalhamento vertical.

Os casos de reflexão e refração considerando-se onda incidente de dilatação não serão aqui analisados, por envolverem relações similares, cujos resultados são de interesse mais direto da Geofísica.

### 9.3 – Bifurcação (solução complexa) e onda de superfície

Como já mencionado, para ângulo de incidência cuja reflexão ou refração supera  $90^\circ$  a solução bifurca (torna-se complexa) e a resposta passa a envolver ondas de superfície. Para exemplificar, considere-se o caso das reflexões da onda de cisalhamento vertical em interface engastada resultando-se, com base em (9.26) e (9.43):

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta^u &= \frac{c_2}{c_1} \operatorname{sen}\theta > 1 \\ v^*(x^* - c_1 t) &= \frac{\cos(\theta^u + \theta)}{\cos(\theta^u - \theta)} v(x - c_1 t) \\ u(x_u - c_2 t) &= \frac{\operatorname{sen}2\theta}{\cos(\theta^u - \theta)} v(x - c_1 t) \end{aligned} \quad (9.49)$$

resultando-se:

$$\cos\theta^u = i\gamma \quad (9.50)$$

onde:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{c_2}{c_1} \operatorname{sen}\theta\right)^2 - 1} \quad (9.51)$$

e com isso, as duas últimas de (9.49) ganham a redação:

$$\begin{aligned} v^*(x^* - c_1 t) &= (A + Bi)v(x - c_1 t) \\ u(x_u - c_2 t) &= (\bar{A} + \bar{B}i)v(x - c_1 t) \end{aligned} \quad (9.52)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\gamma^2 \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta^u \text{sen}^2 \theta}{\gamma^2 \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta^u \text{sen}^2 \theta} \\
 B &= \frac{-\gamma \text{sen} 2\theta \text{sen} \theta^u}{\gamma^2 \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta^u \text{sen}^2 \theta} \\
 \bar{A} &= \frac{\text{sen} 2\theta \text{sen} \theta \text{sen} \theta^u}{\gamma^2 \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta^u \text{sen}^2 \theta} \\
 \bar{B} &= \frac{\gamma \text{sen} 2\theta \cos \theta}{\gamma^2 \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta^u \text{sen}^2 \theta}
 \end{aligned} \tag{9.53}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
 A + Bi &= \rho_v e^{i\beta_v} \\
 \bar{A} + \bar{B}i &= \rho_u e^{i\beta_u}
 \end{aligned} \tag{9.54}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \rho_v &= \sqrt{A^2 + B^2} \\
 \rho_u &= \sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2} \\
 \beta_v &= \text{arctg.} \frac{B}{A} \\
 \beta_u &= \text{arctg.} \frac{\bar{B}}{\bar{A}}
 \end{aligned} \tag{9.55}$$

e assim, considerando-se agora em (9.52) o movimento  $v(x - c_1 t)$  em notação complexa com amplitude unitária tem-se:

$$\begin{aligned}
 v(x - c_1 t) &= \exp[ik(x - c_1 t)] \\
 v^*(x^* - c_1 t) &= \rho^{v^*} \exp\left[i(\beta^{v^*} + k(x^* - c_1 t))\right] \\
 u(x^{**} - c_2 t) &= \rho^u \exp\left[i\left(\beta^u + \frac{c_1}{c_2} k(x^{**} - c_2 t)\right)\right]
 \end{aligned} \tag{9.56}$$

onde  $k = 2\pi/\lambda$ , sendo  $\lambda$  o comprimento da onda incidente. Todavia, tendo-se em conta a transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned}
 x &= \bar{x} \text{sen} \theta + \bar{y} \cos \theta \\
 x^* &= \bar{x} \text{sen} \theta - \bar{y} \cos \theta \\
 x^{**} &= \bar{x} \text{sen} \theta^u - \bar{y} \cos \theta^u
 \end{aligned} \tag{9.57}$$

e o expresso em (9.56) tem-se:

$$\begin{aligned} v(x - c_1 t) &= \exp[ik(\bar{x}\text{sen}\theta + \bar{y}\text{cos}\theta - c_1 t)] \\ v^*(x^* - c_1 t) &= \rho \exp\left[i(\beta^* + k(\bar{x}\text{sen}\theta + \bar{y}\text{cos}\theta - c_1 t))\right] \\ u(x^u - c_2 t) &= \rho \exp\left[i\left(\beta^u + \frac{c_1}{c_2} k(\bar{x}\text{sen}\theta^u + \bar{y}\gamma i - c_2 t)\right)\right] \end{aligned} \quad (9.58)$$

cabendo-se neste ponto observar que a última de (9.58) se expressa:

$$u(x^u - c_2 t) = \rho_u \exp\left[i\left(\beta^u + \frac{c_1}{c_2} k(\bar{x}\text{sen}\theta^u - c_2 t)\right)\right] \exp\left(\frac{c_1}{c_2} k\gamma \bar{y}\right) \quad (9.59)$$

que vem a ser uma onda de superfície ( $\bar{y} \leq 0$ ) com velocidade de propagação  $c_s = c_2 / \text{sen}\theta^u$ , como esperado, uma vez que a onda incidente e as refletidas devem chegar juntas na interface engastada.

#### 9.4 – Onda de Rayleigh

A onda superficial de Rayleigh é obtida pela superposição de uma onda plana ( $w(x, y, z, t) = 0$ ) de distorção com a seguinte escrita:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) &= A e^{-by} \text{sen}(pt - sx) \\ v_1(x, y, t) &= -A e^{-by} \text{cos}(pt - sx) \end{aligned} \quad (9.60)$$

com uma onda plana de dilatação dada por:

$$\begin{aligned} u_2(x, y, t) &= s e^{-ry} \text{sen}(pt - sx) \\ v_2(x, y, t) &= -r e^{-ry} \text{cos}(pt - sx) \end{aligned} \quad (9.61)$$

cujas velocidades de propagação são  $c = p/s$ , verificando-se, pois, que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (9.62)$$

e também:

$$\begin{aligned} G(b^2 - s^2) &= -\rho p^2 \\ (\lambda + 2G)(r^2 - s^2) &= -\rho p^2 \end{aligned} \quad (9.63)$$

pelo fato de satisfazerem as respectivas equações de movimento. Definindo-se agora:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\rho p^2}{G} = \frac{p^2}{c_1^2} \\ h^2 &= \frac{\rho p^2}{\lambda + 2G} = \frac{p^2}{c_2^2} \end{aligned} \quad (9.64)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} b^2 &= s^2 - k^2 \\ r^2 &= s^2 - h^2 \end{aligned} \quad (9.65)$$

as condições de contorno (interface livre)

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y=0) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \sigma_y(y=0) &= \lambda e^* + 2G \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (9.66)$$

visto que:

$$\tau_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (9.67)$$

por razões óbvias, resulta:

$$\begin{aligned} 2rs + A(b^2 + s^2) &= 0 \\ \left( \frac{k^2}{h^2} - 2 \right) (r^2 - s^2) + (r^2 + Abs) &= 0 \end{aligned} \quad (9.68)$$

resultando-se finalmente:

$$\left( \frac{k^2}{s^2} - 2 \right)^4 = 16 \left( 1 - \frac{h^2}{s^2} \right) \left( 1 - \frac{k^2}{s^2} \right) \quad (9.69)$$

pela eliminação de A, e tendo-se em conta que:

$$\frac{k^2}{h^2} - 2 = \frac{\lambda}{G} \quad (9.70)$$

ou ainda:

$$\left(\frac{c^2}{c_1^2} - 2\right)^4 = 16\left(1 - \frac{c}{c_2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) \quad (9.71)$$

e, tendo-se em conta que:

$$\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (9.72)$$

o expresso em (9.66) resulta:

$$\alpha^6 - 8\alpha^4 + 8\left(3 - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\alpha^2 - 16\left(1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right) = 0 \quad (9.73)$$

cuja solução para  $\nu = 0.25$  vale  $c = 0.9194c_1$ , e para  $\nu = 0.5$  vale  $c = 0.9553c_2$ .

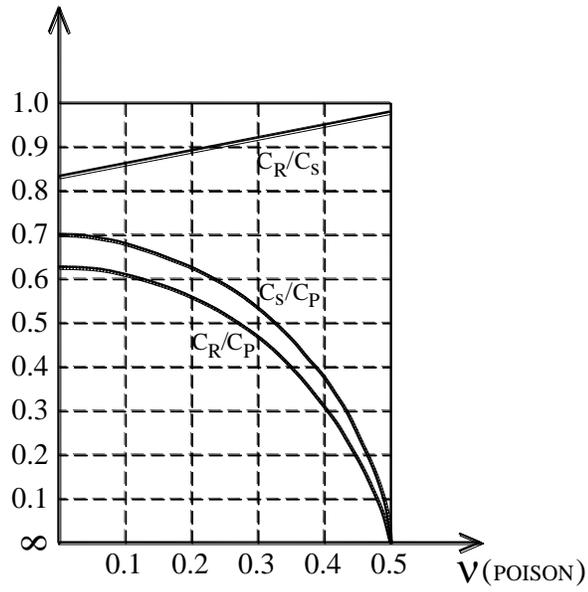
A Figura 9.13 a) lança em gráfico a relação das velocidades de propagação em jogo, bem como a Figura 9.13 b) esquematiza o movimento das partículas da superfície e o movimento elítico das partículas ao longo da profundidade. Vale registrar que, por se tratar de uma onda com velocidade de propagação menor que a de distorção, esta onda tem importância no caso de terremotos por ser portadora de apreciável energia.

## 9.5 – Ondas de Stoneley

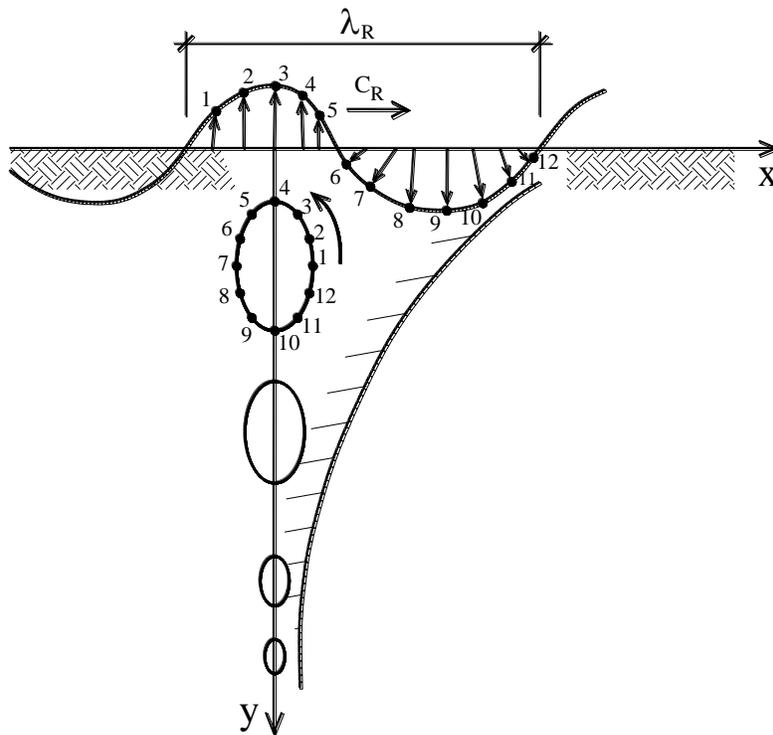
As chamadas ondas de Stoneley ocorrem na interface de dois meios como ilustra-se na Figura 9.14. Como indica esta figura, supõem-se que no meio A propaga uma onda do tipo da de Reyleigh (condições na interface não nulas) e no meio B uma onda de superfície dada por:

$$\begin{aligned} u^B &= (A_3 e^{b_3 y} + A_4 e^{b_4 y}) \exp(ik(x - ct)) \\ v^B &= \left( A_3 \frac{b_3}{ik} e^{b_3 y} - A_4 \frac{ik}{b_4} e^{b_4 y} \right) \exp(ik(x - ct)) \end{aligned} \quad (9.74)$$

onde  $c$  é a velocidade da onda em questão, indicando-se por B os movimentos no meio B, sendo:



a) Relação entre velocidades



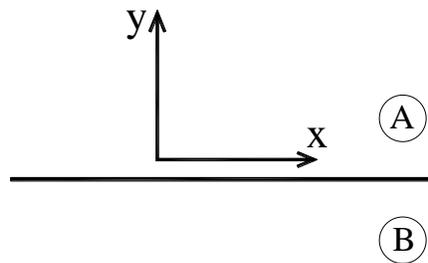
b) Trajetória das partículas

**Figura 9.13**

$$b_3 = k \left( 1 - \left( \frac{c}{c_1^B} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$b_4 = k \left( 1 - \left( \frac{c}{c_2^B} \right)^2 \right)^{1/2}$$
(9.75)

de sorte a satisfazer a equação de onda (9.9).



**Figura 9.14**

A compatibilidade na interface implica em:

$$u^R = u^B$$

$$v^R = v^B$$

$$\sigma_y^R = \sigma_y^B$$

$$\tau_{xy}^R = \tau_{xy}^B$$
(9.76)

indicando-se por R as grandezas relativas à onda de Rayleigh.

O problema de autovalor decorrente das condições (9.76) implica em anular o determinante da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ b_1/k & k/b_2 & b_3/k & k/b_4 \\ 2b_1/k & k/b_2(2 - c^2/c_1^2) & (b_3/k)2G^B/G & k/b_4(2 - c^2/(c_1^B)^2)G^B/G \\ 2 - c^2/c_1^2 & 2 & -G^B/G(2 - c^2/(c_1^B)^2) & -2G^B/G \end{bmatrix}$$
(9.77)

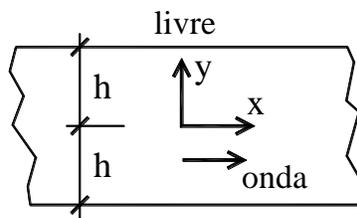
resultando-se em onda não dispersiva com duas raízes não necessariamente reais.

### 9.6 – Ondas de Guiada

A Figura 9.15 ilustra um domínio de espessura  $2h$ , sendo livre as extremidades. A onda guiada se expressa:

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \\ w &= f(y) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\ell} (x - ct) \end{aligned} \quad (9.78)$$

com  $\ell$  sendo o comprimento da onda e  $c$  a velocidade de propagação.



**Figura 9.15**

As tensões de cisalhamento são então expressas por:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G \frac{\partial w}{\partial x} = G \left( \frac{2\pi}{\ell} f(y) \cos \frac{2\pi}{\ell} (x - ct) \right) \\ \tau_{yz} &= G \frac{\partial w}{\partial y} = G \left( f'(y) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\ell} (x - ct) \right) \end{aligned} \quad (9.79)$$

mas, por outro lado, para se atender a equação de onda de distorção:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (9.80)$$

a seguinte relação resulta:

$$f''(y) + \frac{4\pi^2}{\ell^2} \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) f(y) = 0 \quad (9.81)$$

cuja solução se expressa:

$$f(y) = A \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \right) y + B \cos \left( \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \right) y \quad (9.82)$$

e, para atender a condição de contorno (extremidades livres):

$$\begin{aligned} \tau_{yz}(y = h/2) &= 0 \\ \tau_{yz}(y = -h/2) &= 0 \end{aligned} \quad (9.83)$$

resultando-se no seguinte problema de autovalor:

$$\begin{bmatrix} \cos \left( \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \right) h & -\operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \right) h \\ \cos \left( \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \right) h & \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \right) h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.84)$$

apresentando-se duas soluções, ou seja:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ \left( \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \right) h &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \end{aligned} \quad (9.85)$$

e

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ \left( \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \right) h &= 0, \pi, \dots, n\pi \end{aligned} \quad (9.86)$$

sendo que, nessa segunda solução, por exemplo, tem-se:

$$\frac{c^2}{c_1^2} = 1 + \left( \frac{\ell}{2h} \right)^2 n^2 \quad (9.87)$$

indicando-se que a onda guiada tem velocidade de propagação maior que a da onda de distorção, bem como se trata de uma onda dispersiva, pois a velocidade de propagação depende do comprimento da onda (frequência).

### 9.7 – Ondas de Love

A figura 9.16 exibe o cenário no qual ocorre as ondas de Love, qual seja, um meio superior de espessura  $H$  e abaixo um meio contínuo não limitado. No meio superior admite-se uma onda guiada expressa por:

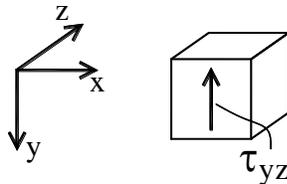
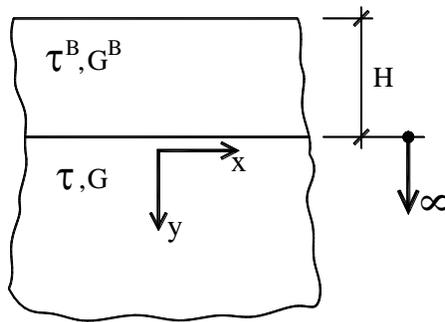
$$\begin{aligned} u^B &= 0 \\ v^B &= 0 \\ w^B &= \left( \bar{A} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \right) y + \bar{B} \cos \left( \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \right) y \right) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\ell} (x - ct) \end{aligned} \quad (9.88)$$

e na inferior uma onda de distorção de superfície do tipo:

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \\ w &= A e^{-by} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\ell} (x - ct) \end{aligned} \quad (9.89)$$

onde:

$$b = \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} \quad (9.90)$$



**Figura 9.16**

de sorte a satisfazer a equação de equilíbrio correspondente. As condições mecânicas são:

$$\tau_{yz}^B = G^B \frac{\partial w^B(y = -H)}{\partial y} =$$

$$G^B \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \left( \bar{A} \cos \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} - \bar{B} \sin \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \right) \sin \frac{2\pi}{\ell} (x - ct) = 0 \quad (9.91)$$

$$\tau_{yz}^B(y = 0) = \tau_{yz}(y = 0) \rightarrow \bar{A} G^B \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} = G b A$$

$$w^B(y = 0) = w(y = 0) \rightarrow \bar{B} = A$$

que constitui um problema de autovalor resultando na equação característica:

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi H}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} - \frac{G^B}{G b} \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} = 0 \quad (9.92)$$

cuja solução, para dois valores da relação dos módulos de elasticidade transversal, acha-se lançada no gráfico da Figura 9.17; cabendo-se registrar que se trata de uma onda dispersiva, uma vez que a velocidade de propagação depende do comprimento da onda. Todavia, como a velocidade de propagação é menor que a da onda de distorção, trata-se, pois, de uma onda com maior capacidade de carregar energia, sendo, por essa razão, importante no caso de terremotos

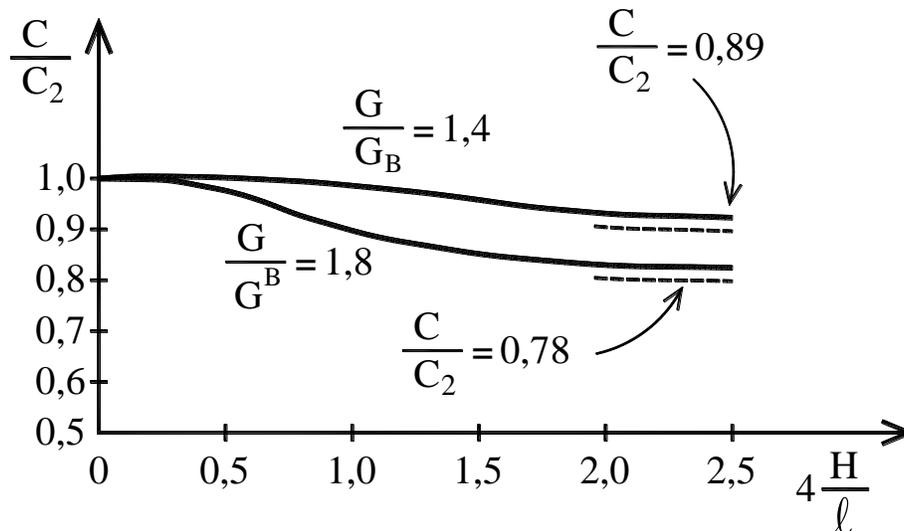


Figura 9.17

### 9.8 – Outras Ondas de Superfície

No caso de incidência horizontal de ondas de domínio em superfície livre, como ilustrado na Figura 9.18, pode ocorrer a geração de ondas de superfície (grazing incidence). No caso da onda de distorção horizontal, por exemplo, tem-se:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= -y \frac{df(x - c_1 t)}{dx} \\ v(x,y,t) &= f(x - c_1 t) \end{aligned} \quad (9.93)$$

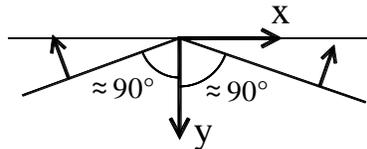
que atende as relações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (9.94)$$

indicando-se tratar-se de onda de distorção com crescimento linear na profundidade. Igualmente, para uma onda de alongamento tem-se:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= y \frac{df(x - c_1 t)}{dx} \\ v(x,y,t) &= f(x - c_1 t) \end{aligned} \quad (9.95)$$

resultando numa onda de alongamento crescente linearmente com a profundidade.



**Figura 9.18**

### 9.9 – Onda Esférica

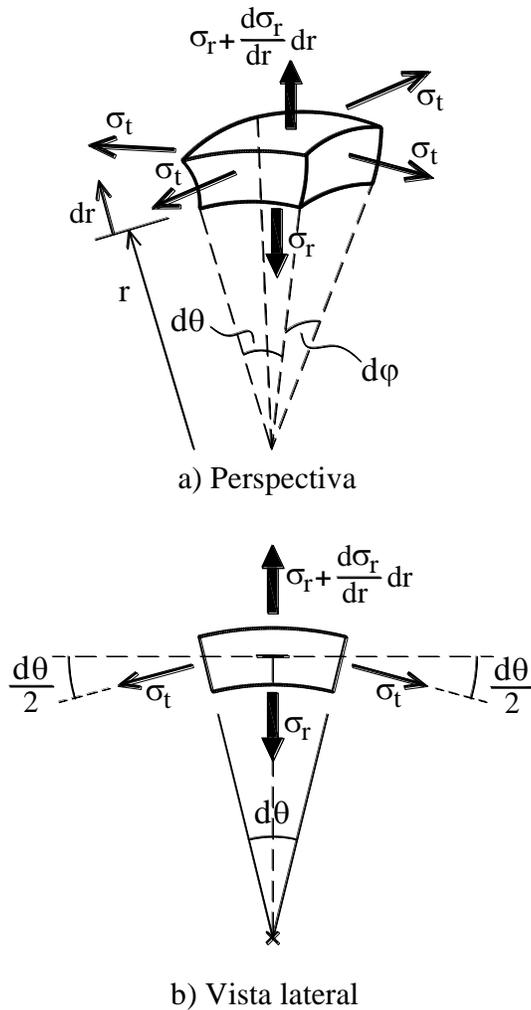
Para terminar a abordagem do tema em apreço, é oportuno considerar o caso da propagação esférica da onda de alongamento, adiantando-se que a simetria impede a consideração de onda de distorção, de natureza antissimétrica. A Figura 9.19 a) exibe a configuração de equilíbrio no sentido radial, e a Figura 9.19 b) em perfil, implicando-se em:

$$\left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr}\right)(r + dr)d\varphi(r + dr)d\theta - 2\sigma_t dr(rd\theta)\text{sen} \frac{d\varphi}{2} - 2\sigma_t dr(rd\varphi)\text{sen} \frac{d\theta}{2} - \sigma_r(rd\varphi)(rd\theta) = \rho(rd\varphi)(rd\theta)\ddot{u} = 0 \quad (9.96)$$

ou seja:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_t) = \rho \frac{d^2u}{dt^2} \quad (9.97)$$

em decorrência da eliminação dos termos comuns.

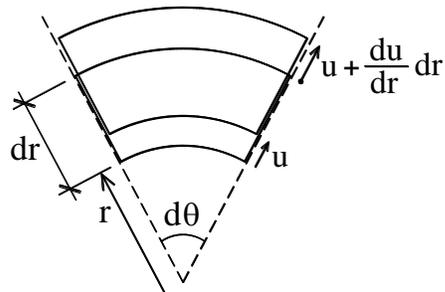


**Figura 9.19**

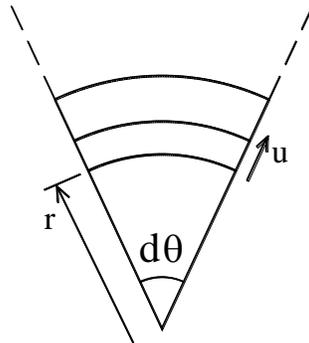
A Figura 9.20 a) indica a movimentação radial e a Figura 2.20 b) no sentido circunferencial, implicando-se no seguinte estado de deformação:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\Delta dr}{dr} = \frac{\left(u + \frac{du}{dr} dr\right) - u}{dr} = \frac{du}{dr} \\ \varepsilon_t &= \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r}\end{aligned}\tag{9.98}$$

e assim sendo, a Lei de Hooke permite escrever-se:



a) Deformação radial



b) Deformação transversal

**Figura 9.20**

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{du}{dr} + 2\nu \frac{u}{r} \right] \\ \sigma_t &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right]\end{aligned}\tag{9.99}$$

conferindo-se uma nova redação para a equação de equilíbrio (9.97):

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{d^2u}{dt^2} \quad (9.100)$$

ou ainda:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d^2(r\phi)}{dr^2} \right] = \frac{1}{c_2^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2\phi}{dt^2} \right) \quad (9.101)$$

onde:

$$u = \frac{d\phi}{dr} \quad (9.102)$$

resultando-se:

$$\frac{d^2(r\phi)}{dr^2} = \frac{1}{c_2^2} \left( \frac{d^2(r\phi)}{dt^2} \right) \quad (9.103)$$

que consiste na equação de onda procurada, cuja solução se expressa:

$$r\phi = f_1(r - c_2t) + f_2(r + c_2t) \quad (9.104)$$

ganhando-se, pois, (9.102) a seguinte redação:

$$u = -\frac{1}{c_2} \frac{1}{r} \frac{df_1}{dt} - \frac{1}{r^2} f_1 + \frac{1}{c_2} \frac{1}{r} \frac{df_2}{dt} - \frac{1}{r^2} f_2 \quad (9.105)$$

conferindo-se para o escrito em (9.99) a redação:

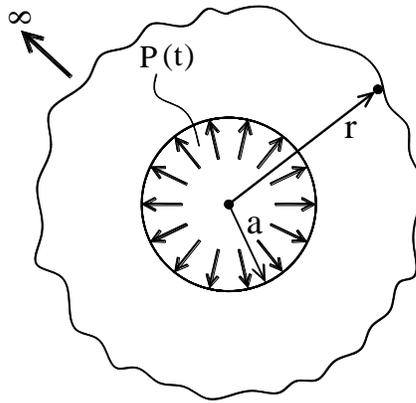
$$\begin{aligned} \sigma_r \left( \frac{(1-\nu)}{\rho c_2^2} \right) &= \frac{(1-\nu)}{c_2^2} \frac{\ddot{f}}{r} + 2(1-2\nu) \left( \frac{\dot{f}}{c_2^2 r^2} + \frac{f}{r^3} \right) \\ \sigma_t \left( \frac{(1-\nu)}{\rho c_2^2} \right) &= \frac{\nu}{c_2^2} \frac{\ddot{f}}{r} + (1-2\nu) \left( \frac{\dot{f}}{c_2^2 r^2} + \frac{f}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (9.106)$$

no caso de uma onda propagando-se no sentido positivo de r.

Considerando-se agora o caso de uma carga interna constante aplicada subitamente numa cavidade de raio a na origem, como ilustra-se na Figura 6.21,ou seja:

$$\sigma_r(r = a) = p(t) = p \rightarrow t > 0 \quad (9.107)$$

tem-se:



**Figura 9.21**

$$\ddot{f} + 2\gamma\dot{f} + 2\gamma\frac{c_2}{a}f = \frac{a}{\rho}p \quad (9.108)$$

que vem a ser a equação de vibração forçada de um grau de liberdade onde:

$$\gamma = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{c_2}{a} \quad (9.109)$$

constituindo-se no que se denomina amortecimento geométrico, pois ele define o decaimento da vibração ao longo do tempo para  $r = a$ . Em outras palavras ele sinaliza que a energia se exaure na propagação. A integração de (9.108) nesse caso se expressa:

$$f(r = a, \tau) = -\frac{pa^2}{2\rho\gamma c_2} \left[ 1 - e^{-\gamma\tau} \left( \cos \gamma s \tau + \frac{1}{s} \text{sen} \gamma s \tau \right) \right] \quad (9.110)$$

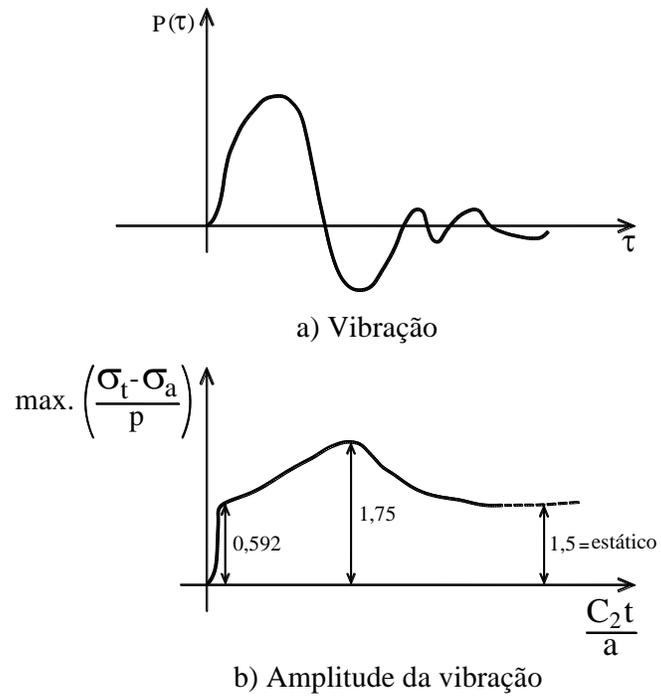
Com:

$$s = \sqrt{\frac{1}{1 - 2\nu}} \quad (9.111)$$

$$\tau = t - \frac{r - a}{c_2} \rightarrow \tau \geq 0$$

uma vez que a vibração só se inicia quando a onda chega no ponto em consideração. A figura 9.22 a) ilustra o movimento em questão e a figura 9.22 b) ilustra a amplitude adimensional da vibração da diferença  $\sigma_r - \sigma_t$ , indicando-se amplitudes características, com máxima valendo 1.75 e decorrido um longo tempo tendendo-se assintoticamente para 1.5, que vem a ser o valor estático.

VIBRAÇÃO DAS ESTRUTURAS



**Figura 9.22**

## CAPÍTULO X

# INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NA VARIÁVEL ESPAÇO: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 10.1 – Introdução

O presente capítulo é dedicado à abordagem da integração das equações da dinâmica das estruturas formulada pela técnica de Galerkin (Boris Galerkin, engenheiro e matemático Russo), que toma por base a equação do equilíbrio dinâmico, e não, como mais frequente, mediante formulação variacional, decorrente do princípio da conservação da energia. A principal vantagem da formulação via Galerkin consiste no fato de que o erro da solução aproximada do equilíbrio recebe tratamento explícito, mediante minimização, pelo emprego do método dos resíduos ponderados.

### 10.2 – Movimento axial

Como visto no Capítulo VII (Eq. (7.28)), a equação de equilíbrio dinâmico axial de barra se escreve:

$$ESu''(x,t) + cES\dot{u}''(x,t) - m\ddot{u}(x,t) = -p(x,t) \quad (10.1)$$

onde  $u(x,t)$  é a função que descreve o deslocamento axial,  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $S$  a área da seção transversal da barra,  $c$  é o coeficiente de viscoelasticidade do material,  $m$  a massa por unidade de comprimento da barra e  $p(x,t)$  o carregamento distribuído ao longo da barra. A notação por potência em numeral romano indica o grau de derivação na variável espaço e pontos superiores em relação ao tempo. Multiplicando-se ambos os membros de (10.1) por uma função contínua da variável espaço  $\phi(x)$  e integrando no domínio, ou seja:

$$\int_0^{\ell} \phi(x) [ESu''(x,t) + cES\dot{u}''(x,t) - m\ddot{u}(x,t)] dx = -\int_0^{\ell} \phi(x)p(x,t) dx \quad (10.2)$$

verifica-se de imediato que a igualdade é preservada, bem como ao se proceder a integração por partes, ou seja:

$$\begin{aligned} & \phi(x)ESu'(x,t)\Big|_0^\ell - \int_0^\ell \phi'(x)ESu'(x,t)dx + \phi(x)cES\dot{u}'(x,t)\Big|_0^\ell - \int_0^\ell \phi'(x)cESu'(x,t)dx \\ & - \int_0^\ell \phi(x)m\ddot{u}(x,y)dx = \int_0^\ell \phi(x)[-p(x,t)]dx \end{aligned} \quad (10.2)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \phi'(x)ESu'(x,t)dx + \int_0^\ell \phi'(x)cESu'(x,t)dx + \int_0^\ell \phi(x)m\ddot{u}(x,y)dx = \\ & \int_0^\ell \phi(x)[-p(x,t)]dx + [\phi(x)N(x,t)]_0^\ell \end{aligned} \quad (10.3)$$

visto que:

$$N(x,t) = ESu'(x,t) + cES\dot{u}'(x,t) \quad (10.4)$$

vem a ser a força normal na barra. Vale ressaltar que em (10.3) a integração no espaço contempla apenas o produto da derivada da função ponderadora pela derivada da função deslocamento, exigindo-se, pois, a continuidade de ambas

Pois bem, no caso em que a função deslocamento da barra é aproximada, a equação de equilíbrio ganha então a seguinte escrita:

$$ESu_a''(x,t) + cES\dot{u}_a''(x,t) - m\ddot{u}_a(x,t) = -p(x,t) + \varepsilon(x,t) \quad (10.5)$$

onde  $\varepsilon(x,t)$  vem a ser um resíduo. Procedendo-se agora a integração por partes do expresso em (10.5) resulta:

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \phi'(x)ESu_a'(x,t)dx + \int_0^\ell \phi'(x)cES\dot{u}_a'(x,t)dx + \int_0^\ell \phi(x)m\ddot{u}_a(x,y)dx = \\ & \int_0^\ell \phi(x)[-p(x,t)]dx + [\phi(x)N(x,t)]_0^\ell + \\ & \left\{ \phi(x)[N_a(x,t) - N(x,y)]_0^\ell - \int_0^\ell \phi(x)[\varepsilon(x,t)]dx \right\} \end{aligned} \quad (10.6)$$

sendo que o termo entre colchetes consiste na ponderação do erro total, ou seja, o de domínio e o de contorno. A técnica de Galerkin consiste em anular o erro total ponderado, ou seja:

$$\phi(x)[N_a(x,t) - N(x,y)]_0^\ell - \int_0^\ell \phi(x)[\varepsilon(x,t)]dx = 0 \quad (10.7)$$

e com isto, a equação de equilíbrio (10.6) passa ser expressa por:

$$\int_0^{\ell} \phi^I(x) E S u_a^I(x, t) dx + \int_0^{\ell} \phi^I(x) c E S u_a^I(x, t) dx + \int_0^{\ell} \phi(x) m \ddot{u}_a(x, y) dx = \int_0^{\ell} \phi(x) [-p(x, t)] dx + [\phi(x) N(x, t)]_0^{\ell} \quad (10.8)$$

que vem a ser a expressão básica da formulação do método dos Elementos Finitos mediante um engenhoso procedimento a ser apresentado no que se segue.

A Figura 10.1 ilustra tal procedimento, que consiste em se adotar uma malha no domínio do espaço, em cujos nós o deslocamento é especificado, e no domínio entre nós adota-se uma função aproximadora, nesse caso ilustrado uma função linear.

Procedendo-se as ponderações também com funções lineares e contínua, de sorte a resultar um sistema de equações lineares com matrizes simétricas, em número suficiente a formar um conjunto de equações igual ao de deslocamentos nodais incógnitos. A função ponderadora contínua é montada considerando-se valor unitário no nó em questão e nulo nos demais de sorte a resultar matrizes com banda estreita.

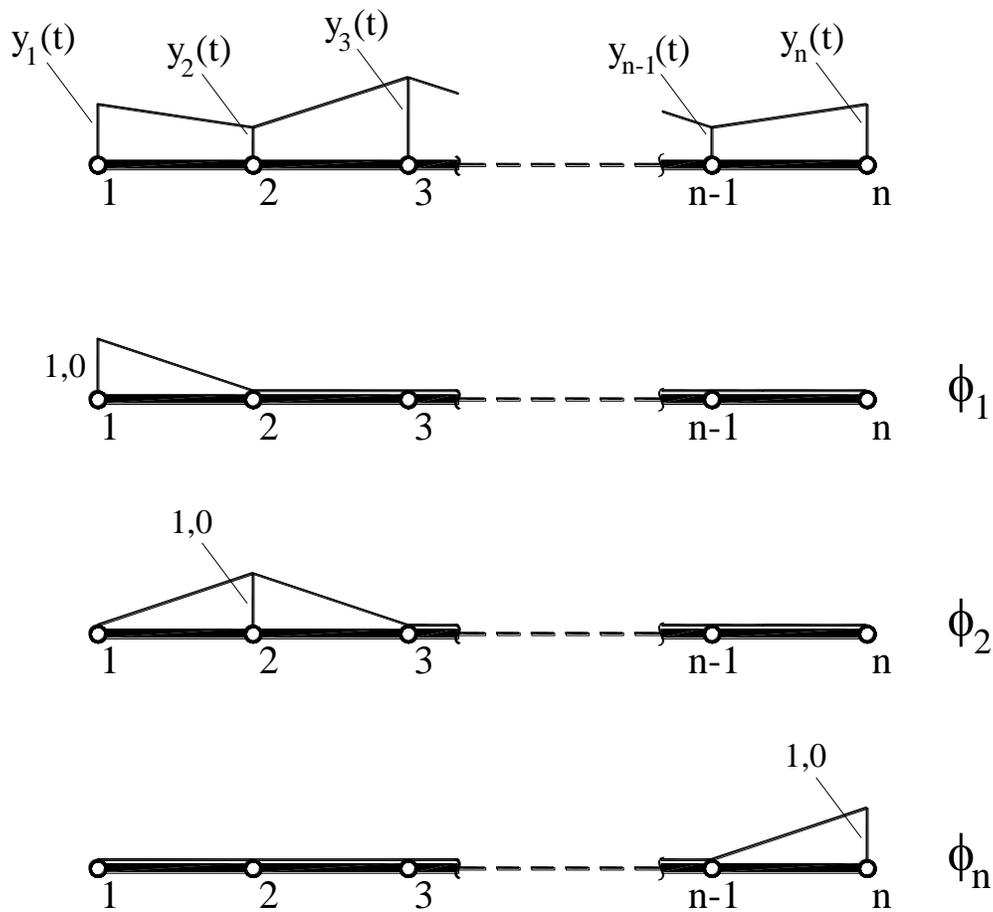


Figura 10.1

Assim sendo, no domínio do elemento genérico  $i$  entre os nós  $j$  e  $k$  a função aproximadora se expressa:

$$u_i(\bar{x}, t) = (A + B\bar{x})T(t) \quad (10.9)$$

onde a variável  $\bar{x}$  tem origem no nó  $j$ ,  $A$  e  $B$  são parâmetros da função linear, e  $T(t)$  a função que descreve a variação no tempo. Por outro lado, os parâmetros  $A$  e  $B$  podem ser expressos em termos dos deslocamentos nodais, conquanto:

$$\begin{aligned} u_i(\bar{x} = 0, t) &= u_j(t) = AT(t) \\ u_i(\bar{x} = \ell, t) &= u_k(t) = (A + B\ell_i)T(t) \end{aligned} \quad (10.10)$$

onde  $\ell$  é o comprimento do elemento,  $u_j(t)$  e  $u_k(t)$  são os deslocamentos nodais que variam somente com o tempo, resultando-se:

$$\begin{aligned} A &= \frac{u_j(t)}{T(t)} \\ B &= \frac{u_k(t) - u_j(t)}{\ell_i T(t)} \end{aligned} \quad (10.11)$$

ganhando-se o expresso em (10.9) a seguinte redação:

$$u_i(\bar{x}, t) = \{\varphi_1(\bar{x}) \quad \varphi_2(\bar{x})\} \begin{Bmatrix} u_j(t) \\ u_k(t) \end{Bmatrix} \quad (10.12)$$

onde:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\bar{x}) &= 1 - \frac{\bar{x}}{\ell} \\ \varphi_2(\bar{x}) &= \frac{\bar{x}}{\ell} \end{aligned} \quad (10.13)$$

são as funções de forma do elemento finito em questão. A função ponderadora consiste da função  $\varphi_2(\bar{x})$  no lado esquerdo do nó em apreço e da função  $\varphi_1(\bar{x})$  do lado direito, como ilustrado na Figura 10.1, sendo nula nos demais nós.

A primeira ponderação ( $\varphi_1$ ) da equação de equilíbrio se expressa:

$$\int_0^{\ell_1} \mathbf{ES}\varphi_1^l(\bar{x}) \left\{ \begin{matrix} \varphi_1^l(\bar{x}) \\ \varphi_2^l(\bar{x}) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{matrix} \right\} d\bar{x} + \int_0^{\ell_1} c\mathbf{ES}\varphi_1^l(\bar{x}) \left\{ \begin{matrix} \varphi_1^l(\bar{x}) \\ \varphi_2^l(\bar{x}) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{matrix} \right\} d\bar{x} + \int_0^{\ell_1} m\varphi_1(\bar{x}) \left\{ \begin{matrix} \varphi_1(\bar{x}) \\ \varphi_2(\bar{x}) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{matrix} \right\} d\bar{x} = \int_0^{\ell_1} \varphi_1(\bar{x}) p(x,t) d\bar{x} + [\varphi_1 \mathbf{N}_1]_0^{\ell_1} \quad (10.14)$$

a segunda ponderação ( $\phi_2$ ) tem a seguinte redação:

$$\int_0^{\ell_1} \mathbf{ES}\varphi_2^l(\bar{x}) \left\{ \begin{matrix} \varphi_1^l(\bar{x}) \\ \varphi_2^l(\bar{x}) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{matrix} \right\} d\bar{x} + \int_0^{\ell_2} \mathbf{ES}\varphi_1^l(\bar{x}) \left\{ \begin{matrix} \varphi_1^l(\bar{x}) \\ \varphi_2^l(\bar{x}) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} u_2(t) \\ u_3(t) \end{matrix} \right\} d\bar{x} + \int_0^{\ell_1} c\mathbf{ES}\varphi_2^l(\bar{x}) \left\{ \begin{matrix} \varphi_1^l(\bar{x}) \\ \varphi_2^l(\bar{x}) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{matrix} \right\} d\bar{x} + \int_0^{\ell_2} c\mathbf{ES}\varphi_1^l(\bar{x}) \left\{ \begin{matrix} \varphi_1^l(\bar{x}) \\ \varphi_2^l(\bar{x}) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{matrix} \right\} d\bar{x} + \int_0^{\ell_1} m\varphi_2(\bar{x}) \left\{ \begin{matrix} \varphi_1(\bar{x}) \\ \varphi_2(\bar{x}) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{matrix} \right\} d\bar{x} + \int_0^{\ell_2} m\varphi_1(\bar{x}) \left\{ \begin{matrix} \varphi_1(\bar{x}) \\ \varphi_2(\bar{x}) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{matrix} \right\} d\bar{x} = \int_0^{\ell_1} \varphi_2(\bar{x}) p(x,t) d\bar{x} + \int_0^{\ell_2} \varphi_1(\bar{x}) p(x,t) d\bar{x} + [\varphi_2 \mathbf{N}_1]_0^{\ell_1} + [\varphi_1 \mathbf{N}_2]_0^{\ell_2} \quad (10.15)$$

e assim por diante. Pode ser observado que as integrais a serem feitas no domínio do elemento  $i$  são expressas matricialmente por:

$$[\mathbf{k}]_i = \int_0^{\ell_i} \mathbf{ES} \left\{ \begin{matrix} \varphi_1^l(\bar{x}) \\ \varphi_2^l(\bar{x}) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \varphi_1^l(\bar{x}) \\ \varphi_2^l(\bar{x}) \end{matrix} \right\} d\bar{x} = \frac{\mathbf{ES}}{\ell_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c[\mathbf{k}]_i = c \frac{\mathbf{ES}}{\ell_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.16)$$

$$[\mathbf{m}]_i = \int_0^{\ell_i} m \left\{ \begin{matrix} \varphi_1(\bar{x}) \\ \varphi_2(\bar{x}) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \varphi_1(\bar{x}) \\ \varphi_2(\bar{x}) \end{matrix} \right\} d\bar{x} = m\ell_i \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

sendo a primeira a matriz de rigidez do elemento  $i$ , a segunda a matriz de amortecimento que, no modelo viscoelástico é proporcional, como sabido, à matriz de rigidez, e a terceira a matriz de massa do elemento. O segundo membro de (10.15) resulta no vetor de carga:

$$\int_0^{\ell_i} p(x,t) \left\{ \begin{matrix} \varphi_1(\bar{x}) \\ \varphi_2(\bar{x}) \end{matrix} \right\} d\bar{x} + \left\{ \begin{matrix} -N_i(\bar{x} = 0) \\ N_i(\bar{x} = \ell_i) \end{matrix} \right\} \quad (10.17)$$

uma vez que:

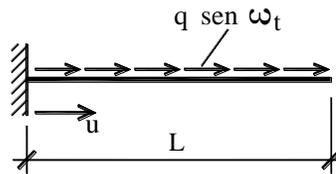
$$\begin{aligned}
 \varphi_1(\bar{x} = 0) &= 1 \\
 \varphi_1(\bar{x} = \ell_i) &= 0 \\
 \varphi_2(\bar{x} = 0) &= 0 \\
 \varphi_2(\bar{x} = \ell_i) &= 1
 \end{aligned}
 \tag{10.18}$$

sendo a força normal suposta de tração.

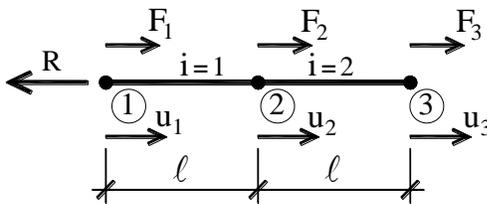
A título de ilustração, considere-se o caso da barra indicada na Figura 10.2a) solicitada por um carregamento distribuído senoidal uniforme:

$$p(x, t) = q \text{sen} \omega t$$

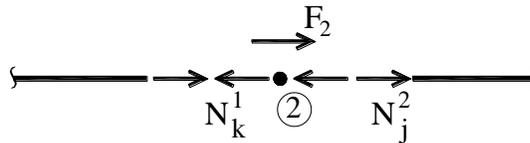
vinculada na origem  $x = 0$  e livre na outra extremidade  $x = L$ . A Figura 10.2b) indica uma malha de três nós formada igualmente por dois elementos iguais com comprimento  $\ell_i = L/2$ .



a) Barra e solicitação



b) Deslocamentos e forças nodais



c) Equilíbrio do nó 2

**Figura 10.2**

As matrizes individuais de cada elemento ficam então:

$$[k]_i = \frac{ES}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c[k]_i$$

$$[m]_i = m \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

e os vetores de carga:

$$\begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{Bmatrix}_i q \frac{L}{2} \text{sen} \omega t + \begin{Bmatrix} -N_j^i \\ N_k^i \end{Bmatrix}$$

onde:

$$N_j^i = N_i(\bar{x} = 0)$$

$$N_k^i = N_i(\bar{x} = \ell)$$

com o índice inferior indicando o nó correspondente e o superior a contribuição do elemento genérico em apreço. O conjunto de equações fica então:

$$\frac{ES}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \frac{cES}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 = 0 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} +$$

$$mL/2 \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/3+1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 = 0 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1/4+1/4 \\ 1/4 \end{Bmatrix} qL \text{sen} \omega t / 2 + \begin{Bmatrix} -R = F_1 = -N_1^1 \\ F_2 = N_2^1 - N_1^2 = 0 \\ F_3 = N_2^2 = 0 \end{Bmatrix}$$

onde, como ilustrado na Figura 10.2 c), as forças aplicadas nos nós consistem, em razão do equilíbrio do nó, nas forças aplicadas no nó. Examinando-se este conjunto de equações destaca-se, pois, o sistema de equações:

$$\frac{ES}{L/2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \frac{cES}{L/2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + mL/2 \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{Bmatrix} (qL/2) \text{sen} \omega t$$

que permite, mediante integração no tempo, calcular os deslocamentos, e também a relação:

$$-\frac{ES}{L/2}u_2 - \frac{cES}{L/2}\dot{u}_2 + (mL/2)\ddot{u}_2 = \frac{1}{4}qL\text{sen}\omega t - R$$

que permite calcular a reação de apoio em função do carregamento e do movimento. É oportuno ressaltar que, a exemplo da análise matricial de estruturas, o conjunto de equações obtido com as ponderações consiste na superposição das matrizes dos elementos de maneira ordenada.

### 10.3 – Movimento flexional

Como já visto no Capítulo VII (Eq. (7.37)), a equação de equilíbrio dinâmico transversal de viga de seção transversal constante passa a ser expressa por:

$$EIv^{IV}(x,t) + cEI\dot{v}^{IV}(x,t) + m\ddot{v}(x,t) = p(x,t) \quad (10.19)$$

que consiste numa equação diferencial de quarta ordem, e, por essa razão torna-se necessário formular o resíduo ponderado com a integração por partes em dois estágios, de sorte a propiciar as equações de formulação dos elementos finitos correspondentes com matrizes simétricas, ou seja:

$$\int_0^\ell \phi^{II}(x,t) [EIv^{II}(x,t) + cEI\dot{v}^{II}(x,t)] dx + \int_0^\ell m\phi(x,t)\ddot{v}(x,t) dx = \int_0^\ell \phi(x,t)p(x,t) dx + \phi(x,t)V(x,t)\Big|_0^\ell - \phi^I(x,t)M(x,t)\Big|_0^\ell \quad (10.20)$$

onde  $V(x,t)$  e  $M(x,t)$  denotam a força cortante e o momento fletor na viga sendo expressos por:

$$\begin{aligned} M(x,t) &= -EI(v^{II}(x,t) + c\dot{v}^{II}(x,t)) \\ V(x,t) &= -EI(v^{III}(x,t) + c\dot{v}^{III}(x,t)) \end{aligned} \quad (10.21)$$

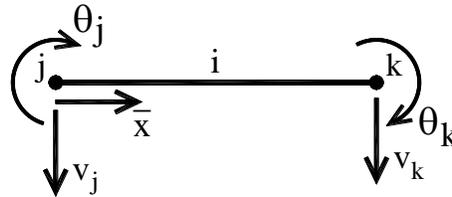
que consiste na relação momento curvatura e sua derivada.

Procedendo-se de maneira similar ao que foi feito no caso de barra (seção anterior) a expressão básica para a formulação do método dos elementos finitos apresenta a seguinte redação:

$$\int_0^\ell \phi^{II}(x,t) [EIv_a^{II}(x,t) + cEI\dot{v}_a^{II}(x,t)] dx + \int_0^\ell m\phi(x,t)\ddot{v}_a(x,t) dx = \int_0^\ell \phi(x,t)p(x,t) dx + \phi(x,t)V(x,t)\Big|_0^\ell - \phi^I(x,t)M(x,t)\Big|_0^\ell \quad (10.22)$$

com deformada aproximada, mas com os termos de carregamento e de esforços solicitantes exatos.

A Figura 10.3 ilustra o elemento finito de viga indicando-se os movimentos nodais de translação e rotação.



**Figura 10.3**

Consistente com os movimentos adotados, a solução aproximada é dada por:

$$v_a(\bar{x}, t) = (A + B\bar{x} + C\bar{x}^2 + D\bar{x}^3)T(t) \quad (10.23)$$

sendo que as constantes generalizadas A, B, C e D podem ser substituídas pelos movimentos nodais sabendo-se que:

$$\begin{aligned} v_a(\bar{x} = 0, t) &= v_j(t) \\ v_a'(\bar{x} = 0, t) &= \theta_j(t) \\ v_a(\bar{x} = l_i, t) &= v_k(t) \\ v_a'(\bar{x} = l_i, t) &= \theta_k(t) \end{aligned} \quad (10.24)$$

ganhando-se o expresso em (10.23) a escrita na forma vetorial:

$$v_i(\bar{x}, t) = \{\varphi_1(\bar{x}) \quad \varphi_2(\bar{x}) \quad \varphi_3(\bar{x}) \quad \varphi_4(\bar{x})\}_j \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \\ v_k \\ \theta_k \end{Bmatrix}_i \quad (10.25)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(\bar{x}) &= 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{\ell_i}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{\ell_i}\right)^3 \\
 \varphi_2(\bar{x}) &= \bar{x} - 2\frac{\bar{x}^2}{\ell_i} + 2\frac{\bar{x}^3}{\ell_i^2} \\
 \varphi_3(\bar{x}) &= 3\left(\frac{\bar{x}}{\ell_i}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{\ell_i}\right)^3 \\
 \varphi_4(\bar{x}) &= -\frac{\bar{x}^2}{\ell_i} + \frac{\bar{x}^3}{\ell_i^2}
 \end{aligned}
 \tag{10.26}$$

que consistem nas funções de forma do elemento em questão, apresentando as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(\bar{x} = 0) &= \varphi_3(\bar{x} = \ell_i) = 1 \\
 \varphi_1(\bar{x} = \ell_i) &= \varphi_3(\bar{x} = 0) = 0 \\
 \varphi_1'(\bar{x} = 0) &= \varphi_1'(\bar{x} = \ell_i) = \varphi_3'(\bar{x} = 0) = \varphi_3'(\bar{x} = \ell_i) = 0 \\
 \varphi_2(\bar{x} = 0) &= \varphi_2(\bar{x} = \ell_i) = \varphi_4(\bar{x} = 0) = \varphi_4(\bar{x} = \ell_i) = 0 \\
 \varphi_2'(\bar{x} = 0) &= \varphi_4'(\bar{x} = \ell_i) = 1 \\
 \varphi_2'(\bar{x} = \ell_i) &= \varphi_4'(\bar{x} = 0) = 0
 \end{aligned}
 \tag{10.27}$$

indicando-se que o expresso em (10.25) trata-se de uma função garantindo a continuidade entre elementos, bem como a continuidade também das derivadas (rotação), ou seja, ao longo do domínio formado pelos elementos finitos a função pertence à classe matemática  $C_1$ , ou seja, em cada nó os elementos à esquerda e à direita apresentam deslocamento e rotação iguais.

Por outro lado, as funções ponderadoras, igualmente de classe  $C_1$ , são obtidas da seguinte maneira: as ponderadoras referentes aos deslocamentos têm à esquerda do nó em apreço a função  $\varphi_1(\bar{x})$  e à direita  $\varphi_3(\bar{x})$  sendo nula nos demais nós, a exemplo do ilustrado com funções lineares na Figura 10.1. Já as ponderadoras referentes à rotação têm à esquerda a função  $\varphi_4(\bar{x})$  e à direita  $\varphi_2(\bar{x})$ , completando-se assim o número de ponderações compatível com o número de incógnitas deslocamento (translações e rotações). As integrações no elemento  $i$  são expressas em forma matricial, a exemplo do feito no caso de barra, ou seja:

$$\begin{aligned}
 [k]_i &= \int_0^{\ell_i} EI \left\{ \begin{matrix} \varphi_1'' \\ \varphi_2'' \\ \varphi_3'' \\ \varphi_4'' \end{matrix} \right\} d\bar{x} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell_i^3} & \frac{6}{\ell_i^2} & -\frac{12}{\ell_i^3} & \frac{6}{\ell_i^2} \\ \frac{6}{\ell_i^2} & \frac{4}{\ell_i} & -\frac{6}{\ell_i^2} & \frac{2}{\ell_i} \\ -\frac{12}{\ell_i^3} & -\frac{6}{\ell_i^2} & \frac{12}{\ell_i^3} & -\frac{6}{\ell_i^2} \\ \frac{6}{\ell_i^2} & \frac{2}{\ell_i} & -\frac{4}{\ell_i} & \frac{4}{\ell_i} \end{bmatrix} \\
 [m]_i &= \int_0^{\ell_i} m \left\{ \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{matrix} \right\} d\bar{x} = \frac{m\ell_i}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell_i & 54 & -13\ell_i \\ 22\ell_i & 4\ell_i^2 & 13\ell_i & -3\ell_i^2 \\ 54 & 13\ell_i & 156 & -22\ell_i \\ -13\ell_i & -3\ell_i^2 & -22\ell_i & 4\ell_i^2 \end{bmatrix} \quad (10.28) \\
 \int_0^{\ell_i} p(x,t) \left\{ \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{matrix} \right\} d\bar{x}
 \end{aligned}$$

e:

$$\begin{bmatrix} V_j \\ 0 \\ -V_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.29)$$

para ponderadora de deslocamento, e

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -M_j \\ 0 \\ M_k \end{bmatrix} \quad (10.30)$$

para ponderadora de rotação.

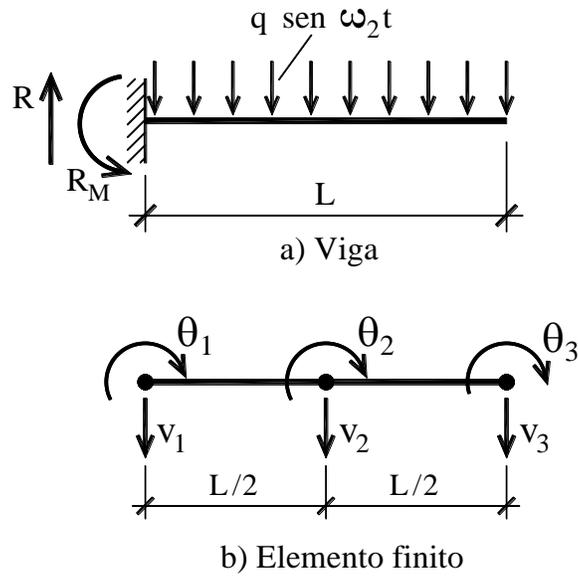
A título de ilustração, considere-se a viga em balanço mostrada na Figura 10.4 a) submetida a carregamento harmônico uniforme ao longo do comprimento. A Figura 10.4 b) exhibe a malha com dois elementos iguais ( $\ell_i = L/2$ ) e os deslocamentos nodais correspondentes. O sistema completo de equações fica então:

$$\begin{aligned}
 & EI \begin{bmatrix} \frac{12}{l_i^3} & \frac{6}{l_i^2} & -\frac{12}{l_i^3} & \frac{6}{l_i^2} & 0 & 0 \\ \frac{6}{l_i^2} & \frac{4}{l_i} & -\frac{6}{l_i^2} & \frac{2}{l_i} & 0 & 0 \\ -\frac{12}{l_i^3} & -\frac{6}{l_i^2} & \frac{24}{l_i^3} & 0 & -\frac{12}{l_i^3} & \frac{6}{l_i^2} \\ \frac{6}{l_i^2} & \frac{2}{l_i} & 0 & \frac{4}{l_i} & -\frac{6}{l_i^2} & \frac{2}{l_i} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{l_i^3} & -\frac{6}{l_i^2} & \frac{12}{l_i^3} & -\frac{6}{l_i^2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{l_i^2} & \frac{2}{l_i} & -\frac{6}{l_i^2} & \frac{4}{l_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + c[K] \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 = 0 \\ \dot{\theta}_1 = 0 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \\
 & \frac{ml_i}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_i & 54 & -13l_i & 0 & 0 \\ 22l_i & 4l_i^2 & 13l_i & -3l_i^2 & 0 & 0 \\ 54 & 13l_i & 2(156) & 0 & 54 & -13l_i \\ -13l_i & -3l_i^2 & 0 & 2(4l_i^2) & 13l_i & -3l_i^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13l_i & 156 & -22l_i \\ 0 & 0 & -13l_i & -3l_i^2 & -22l_i & 4l_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_1 = 0 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \\
 & ql_i \text{sen} \omega t \begin{Bmatrix} 1/2 \\ l_i/12 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ -l_i/12 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -R \\ R_M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{10.31}
 \end{aligned}$$

É oportuno registrar que uma matriz de massa diagonal foi desenvolvida pelo autor<sup>1</sup> com erro de truncamento de segunda ordem. A massa concentrada para movimento transversal vale  $ml_i/2$  e para rotação  $-ml_i^3/12$ , evitando-se assim o envolvimento de uma equação quase-estática (massa concentrada nula para o movimento de rotação).

O elemento finito viga dado pela teoria de flexão de Timoshenko tem as seguintes matrizes:

<sup>1</sup> Laier, J.E., *Hermitian Lumped Mass Matrix Formulation for Flexural Wave Propagation*, Communications in Numerical Methods in Engineering, V14, (1998)



**Figura 10.4**

$$\begin{aligned}
 [k]_i &= \frac{EI}{l_i^3(1+\Phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6l_i & -12 & 6l_i \\ 6l_i & l_i^2(4+\Phi) & -6l_i & l_i^2(2-\Phi) \\ -12 & -6l_i & 12 & -6l_i \\ 6l_i & l_i^2(2-\Phi) & -6l_i & l_i^2(4+\Phi) \end{bmatrix} \\
 [m]_i &= \frac{ml_i}{(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & m_5 & -m_4 & m_6 \\ m_3 & -m_4 & m_1 & -m \\ m_4 & m_6 & -m_2 & m_5 \end{bmatrix} + \\
 &\frac{ml_i}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{r}{l_i}\right)^2 \begin{bmatrix} m_7 & m_8 & -m_7 & m_8 \\ m_8 & m_9 & -m_8 & m_{10} \\ -m_7 & -m_8 & m_7 & -m_8 \\ m_8 & m_{10} & -m_8 & m_9 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{10.32}$$

onde  $r$  é o raio de giração da seção transversal da viga, e:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= 12EI / \ell_i^2 kGS \\
 m_1 &= 13/35 + 7\Phi / 10 + \Phi^2 / 3 \\
 m_2 &= \ell_i \left( 11/20 + 11\Phi / 120 + \Phi^2 / 24 \right) \\
 m_3 &= 9/70 + 3\Phi / 10 + \Phi^2 / 6 \\
 m_4 &= -2\ell \left( 13/420 + 3\Phi / 40 + \Phi^2 / 24 \right) \\
 m_5 &= \ell_i^2 \left( 1/105 + \Phi / 60 + \Phi^2 / 120 \right) \\
 m_6 &= -\ell_i^2 \left( 1/140 + \Phi / 60 + \Phi^2 / 120 \right) \\
 m_7 &= 6 / 5 \\
 m_8 &= \ell \left( 1/10 - \Phi / 2 \right) \\
 m_9 &= \ell_i^2 \left( 2/15 + \Phi / 6 + \Phi^2 / 3 \right) \\
 m_{10} &= \ell_i^2 \left( -1/30 + \Phi / 6 + \Phi^2 / 6 \right)
 \end{aligned} \tag{10.33}$$

sendo  $k$  o coeficiente de deformação ao cisalhamento da seção transversal da viga, O autor<sup>2</sup> desenvolveu também uma matriz concentrada de segunda ordem assim expressa:

$$\begin{bmatrix} \bar{m}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{m}_2 \end{bmatrix} \tag{10.34}$$

onde:

$$\bar{m}_1 = \frac{\bar{m}_2}{r^2} = \frac{m\ell_i\Phi}{2(1+\Phi)} \tag{10.35}$$

sendo oportuno assinalar que a matriz de massa concentrada resulta na vantajosa redução do montante de operações da integração no tempo.

#### 10.4 – Onda axial: dispersão numérica

O elemento finito de barra sem amortecimento é expresso, como já exposto, pela seguinte equação matricial:

---

<sup>2</sup> Laier, J.E., *Mass lumping, dispersive properties and bifurcation of Timoshenko's flexural waves*, Advances in Engineering Software, V38, (2007)

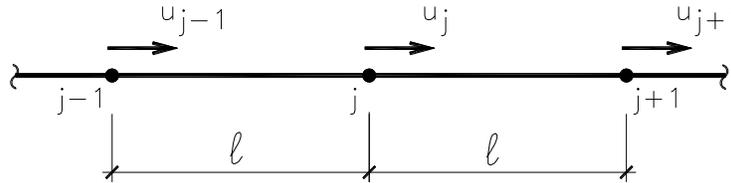
$$\begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_j \\ \ddot{u}_{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N_j \\ N_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (10.36)$$

onde  $\ell$  é o comprimento do elemento e  $M_1$  e  $M_2$  são elementos da matriz de massa, que, no caso de massa concentrada vale  $M_1 = m\ell / 2$  e  $M_2$  nulo; e no caso da matriz de massa consistente  $M_1 = m\ell / 3$  e  $M_2 = m\ell / 6$ .

O equilíbrio de um nó genérico, como ilustrado na Figura 10.5, fica então assim expresso:

$$\frac{ES}{\ell} [-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}] + [M_2\ddot{u}_{j-1} + 2M_1\ddot{u}_j + M_2\ddot{u}_{j+1}] = 0 \quad (10.37)$$

onde se considera movimento livre. Em outras palavras, o expresso em (10.37) é a versão do método dos elementos finitos da equação de onda expressa em (10.1) sem o amortecimento, que consiste numa equação diferencial de diferença pelo fato de conter ainda derivadas no tempo e relacionar valores de funções em valores distintos (diferentes) da variável  $x$ .



**Figura 10.5 - Malha de elementos finitos**

No sentido de se providenciar uma solução numérica para a equação de diferenças exposta em (10.37) lança-se mão agora, por exemplo, do clássico método incondicionalmente estável de passo único de Newmark, expresso por:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{k+1} &= \dot{u}_k + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_k + \ddot{u}_{k+1}) \\ u_{k+1} &= u_k + \dot{u}_k \Delta t + \ddot{u}_k \frac{\Delta t^2}{2} + \beta \Delta t^2 (-\ddot{u}_k + \ddot{u}_{k+1}) \end{aligned} \quad (10.38)$$

ou ainda, combinando adequadamente as relações presentes em (10.38) de modo a se eliminar os termos de velocidade:

$$u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1} = \ddot{u}_k \Delta t^2 + \beta \Delta t^2 (\ddot{u}_{k-1} - 2\ddot{u}_k + \ddot{u}_{k+1}) \quad (10.39)$$

trabalhando-se agora com uma relação de passo duplo. Definindo-se então o operador:

$$\nabla^k f = f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1} \quad (10.40)$$

o expresso em (10.39) ganha a seguinte redação:

$$\nabla^k u = \left(1 + \beta \nabla^k\right) \ddot{u} \Delta t^2 \quad (10.41)$$

que permite providenciar a eliminação da aceleração em termos dos deslocamentos, e, com isso, reescrever a equação (10.37) em termos apenas de deslocamentos, ou seja, possibilitando-se redigir o equilíbrio segundo uma equação de diferença pura.

Considerando-se agora o caso de um modelo de massa genérico, a equação (10.37) ganha seguinte redação:

$$\frac{ES}{\ell} [-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}] + m\ell [m_2 \ddot{u}_{j-1} + 2m_1 \ddot{u}_j + m_2 \ddot{u}_{j+1}] = 0 \quad (10.42)$$

ou ainda:

$$-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1} + \frac{m\ell^2}{ES} [m_2 \ddot{u}_{j-1} + 2m_1 \ddot{u}_j + m_2 \ddot{u}_{j+1}] = 0 \quad (10.43)$$

onde para o modelo de massa concentrada tem-se  $m_1 = 1/2$  e  $m_2 = 0$ , e para o modelo de massa consistente tem-se  $m_1 = 1/3$  e  $m_2 = 1/6$ . Cumpre assinalar que a equação (10.43) consiste na versão numérica do método dos elementos finitos correspondente da equação de equilíbrio expressa em (10.37). Aplicando-se agora o operador expresso em (10.40) na equação (10.43) tem-se:

$$\left(1 + \beta \nabla^k\right) [u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}] - \frac{m\ell^2}{ES\Delta t^2} \left(1 + \beta \nabla^k\right) (m_2 \ddot{u}_{j-1} + 2m_1 \ddot{u}_j + m_2 \ddot{u}_{j+1}) \Delta t^2 = 0 \quad (10.44)$$

ou ainda, tendo-se em conta o expresso em (10.41):

$$\left(1 + \beta \nabla^k\right) [u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}] - \frac{m\ell^2}{ES\Delta t^2} \nabla^k (m_2 u_{j-1} + 2m_1 u_j + m_2 u_{j+1}) = 0 \quad (10.45)$$

que consiste numa equação de diferença pura, envolvendo valores da função  $u$  para diferentes valores da variável  $t$  e  $x$ .

A equação de equilíbrio (10.1), no caso sem amortecimento, tem por solução, por exemplo, uma onda propagando-se no sentido positivo, dada em notação complexa por:

$$u(x, t) = Ae^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\omega t)\right)} \quad (10.46)$$

onde:

$$\omega = \frac{2\pi C}{\lambda} \quad (10.47)$$

é a frequência angular da onda. À semelhança de (10.46), a solução de (10.45) seja também dada por uma onda propagando no sentido positivo, ou seja:

$$u(j\ell, k\Delta t) = u_{j,k} = Ae^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}(j\ell - \omega k\Delta t)\right)} \quad (10.48)$$

onde, para  $\ell$  e  $\Delta t$  fixados (malha de elementos finitos definida), a variável numérica correspondente a  $x$  passa a ser  $j$  ( $j\ell$ ) e no lugar da variável  $t$  tem-se  $k$  ( $k\Delta t$ ). Cumpre também adiantar que, no sentido de se satisfazer o expresso em (10.45) ou a frequência angular  $\omega$  da onda, ou o comprimento de onda  $\lambda$ , deve ser definido, e o outro calculado (resulta de (10.45)).

Tendo-se em vista a solução (10.47), a seguinte relação pode ser obtida:

$$\begin{aligned} u_{j-1,k} - 2u_{j,k} + u_{j+1,k} &= Ae^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}j\ell - \omega k\Delta t\right)} \left[ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}} - 2 + e^{i\frac{2\pi}{\lambda}} \right] = \\ &= Ae^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}j\ell - \omega k\Delta t\right)} \left[ 2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\ell\right) - 2 \right] = u_{j,k} \left[ 2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\ell\right) - 2 \right] \end{aligned} \quad (10.49)$$

e, com isso, a equação (10.45) ganha a seguinte escrita:

$$\left(1 + \beta \nabla^k\right) \left[ u_{j,k} \left[ 2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\ell\right) - 2 \right] \right] - \frac{m\ell^2}{ES\Delta t^2} \nabla^k (m_2 u_{j-1} + 2m_1 u_j + m_2 u_{j+1}) = 0 \quad (10.50)$$

ou ainda:

$$\left(1 + \beta \nabla^k\right) \left[ u_{j,k} \left[ 2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\ell\right) - 2 \right] \right] - \frac{m\ell^2}{ES\Delta t^2} \nabla^k \left[ \left( 2m_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\ell\right) + 2m_1 \right) u_{j,k} \right] = 0 \quad (10.51)$$

e, por outro lado, a exemplo de (10.49), tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla^k u_{j,k} = u_{j,k-1} - 2u_{j,k} + u_{j,k+1} &= Ae^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\ell - \omega k\Delta t\right)} \left[ e^{i\omega\Delta t} - 2 + e^{-i\omega\Delta t} \right] = \\ &= u_{j,k} \left[ 2\cos(\omega\Delta t) - 2 \right] \end{aligned} \quad (10.52)$$

e, com isso, o expresso em (10.51) ganha finalmente a seguinte escrita:

$$\begin{aligned} & \left[ 2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right) - 2 \right] \left[ u_{j,k} + \beta u_{j,k} (2 \cos(\omega \Delta t) - 2) \right] - \\ & \frac{m \ell^2}{ES \Delta t^2} u_{j,k} (2 \cos(\omega \Delta t) - 2) \left( 2m_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right) + 2m_1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (10.53)$$

ou ainda, eliminando-se o fator comum  $u_{j,k}$  tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[ 2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right) - 2 \right] \left[ 1 + \beta (2 \cos(\omega \Delta t) - 2) \right] - \\ & \frac{m \ell^2}{ES \Delta t^2} (2 \cos(\omega \Delta t) - 2) \left( 2m_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right) + 2m_1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (10.54)$$

que consiste na equação de dispersão de velocidade de propagação da versão numérica apresentada.

Definindo-se agora os parâmetros de malha:

$$\begin{aligned} a &= \frac{T}{\Delta t} \\ \delta &= \frac{\lambda}{\ell} \end{aligned} \quad (10.55)$$

tem-se:

$$\frac{m \ell^2}{ES \Delta t^2} = \frac{m \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^2}{ES \left(\frac{T}{\Delta t}\right)^2} = \frac{a^2 (\lambda)^2}{\delta^2 T^2 c^2} = \frac{a^2}{\delta^2} \quad (10.56)$$

onde  $a$  e  $\delta$  são os parâmetros de malha no espaço e no tempo respectivamente. A equação (10.54) permite então escrever-se:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right) &= \frac{1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega \Delta t) + 2m_1 \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 (\cos(\omega \Delta t) - 1)}{1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega \Delta t) - 2m_2 \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 (\cos(\omega \Delta t) - 1)} \\ \cos(\omega \Delta t) &= \frac{(2\beta - 1) \left( 2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right) - 2 \right) + 2 \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 \left( 2m_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right) + 2m_1 \right)}{2\beta \left( 2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right) - 2 \right) - 2 \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 \left( 2m_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right) + 2m_1 \right)} \end{aligned} \quad (10.57)$$

o que finaliza a questão.

Por exemplo, considere-se o caso de uma onda com frequência definida, ou seja, onda com movimentação harmônica de frequência conhecida. Nesse caso sendo adotada a integração com o algoritmo de Newmark clássico ( $\beta = 1/4$ ), e com os seguintes parâmetros:  $a = 1/10$  e  $\delta = 1/10$ ; resulta na equação:

$$\left[ 2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} \ell\right) - 2 \right] \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\omega \Delta t) \right] - (2 \cos(\omega \Delta t) - 2) = 0 \quad (10.58)$$

ou ainda:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\delta} \frac{c}{c_n}\right) = \frac{3 \cos\left(\frac{2\pi}{a}\right) - 1}{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{a}\right)} \quad (10.59)$$

uma vez que:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda_n} \ell &= \frac{2\pi}{\lambda_n} \frac{\lambda}{\delta} = \frac{2\pi}{\delta} \frac{cT}{c_n T} = \frac{2\pi}{\delta} \frac{c}{c_n} \\ \omega \Delta t &= \omega \frac{T}{a} = \frac{2\pi}{a} \end{aligned} \quad (10.60)$$

sendo  $c_n$  a velocidade numérica, ou seja, velocidade de propagação da onda dada pela integração numérica, resultando-se, após algumas operações algébricas:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{10} \frac{c}{c_n}\right) = 0.788854381 \quad (10.61)$$

ou seja:

$$\frac{c}{c_n} = 1.0533728 \quad (10.62)$$

que consiste num erro relativo de:

$$\frac{c - c_n}{c} = 0.050668455 \quad (10.63)$$

de meros 5%. Valendo-se assinalar que, pelo fato de a velocidade numérica depender da malha, a propagação numérica resulta então dispersiva.

### 10.5- Onda axial: estudo da reflexão espúria

Além de causar dispersão da velocidade de propagação da onda, a integração numérica também produz, no caso de malha irregular, reflexão espúria, ou seja, uma onda não existente no caso real (onda expúria).

O equilíbrio do nó genérico de uma malha irregular se expressa:

$$\frac{ES}{\ell} \begin{Bmatrix} -1 & 1 + \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{j-1} \\ u_j \\ u_{j+1} \end{Bmatrix} + m\ell \begin{Bmatrix} m_2 & m_1(1+\alpha) & m_2\alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{j-1} \\ \ddot{u}_j \\ \ddot{u}_{j+1} \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.64)$$

onde  $\alpha = L/\ell$ , sendo  $L$  o comprimento do elemento do lado esquerdo do nó, lembrando-se que, no caso do modelo de massa consistente, tem-se  $m_1 = 2m_2 = 1/3$  e  $m_1 = 1/2$ ,  $m_2 = 0$  no caso do modelo de massa concentrada. Tendo-se em conta o exposto em (10.41), a equação diferencial de diferença dada em (10.64) ganha a seguinte redação:

$$\left(1 + \beta \frac{k}{\nabla}\right) \begin{Bmatrix} -1 & 1 + \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{j-1} \\ u_j \\ u_{j+1} \end{Bmatrix} + \frac{m\ell^2}{ES\Delta t^2} \frac{k}{\nabla} \begin{Bmatrix} m_2 & m_1(1+\alpha) & m_2\alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{j-1} \\ u_j \\ u_{j+1} \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.65)$$

cuja solução para uma onda incidente na interface dos elementos consecutivos:

$$u_{jk}^{in} = e^{i(\omega k \Delta t + k_j \ell)} \quad (10.66)$$

é dada por uma reflexão espúria:

$$u_{jk}^{rfl} = A e^{i(\omega k \Delta t - k_j \ell)} \quad (10.67)$$

mais uma onda refratada:

$$u_{jk}^{rfr} = B e^{i(\omega k \Delta t - k_2 j \ell)} \quad (10.68)$$

onde  $A$  e  $B$  são as amplitudes correspondentes, e sendo

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad (10.69)$$

o número de onda numérico referente ao elemento da esquerda e  $k_2$  o da direita, podendo ser obtidos, por exemplo, no caso de frequência de onda dada conforme (10.59) por:

$$\cos(k_1 \ell) = \frac{1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega \Delta t) + 2m_1 \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 (\cos(\omega \Delta t) - 1)}{1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega \Delta t) - 2m_2 \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 (\cos(\omega \Delta t) - 1)} \quad (10.70)$$

$$\cos(k_2 \ell) = \frac{1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega \Delta t) + 2m_1 \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 \alpha^2 (\cos(\omega \Delta t) - 1)}{1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega \Delta t) - 2m_2 \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 \alpha^2 (\cos(\omega \Delta t) - 1)}$$

tendo-se em conta que em (10.57) para a dispersão referente ao elemento da direita tem-se:

$$\frac{m(\alpha \ell)^2}{ES\Delta t^2} = \alpha^2 \frac{a^2}{\delta^2} \quad (10.71)$$

como se verifica do expresso em (10.56).

Considerando-se que a interface corresponda, sem perda de generalidade, ao valor  $j=0$ , a igualdade da amplitude total da onda no elemento da esquerda com a amplitude da onda propagando no elemento da direita tem-se:

$$1 + A = B \quad (10.72)$$

Por outro lado, tendo-se em conta a relação dada em (10.52), o equilíbrio expresso em (10.65) ganha a seguinte redação:

$$\begin{aligned} (1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega \Delta t)) \left\{ \begin{matrix} -1 & 1 + \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} u_{-1} \\ u_0 \\ u_1 \end{matrix} \right\} + \\ \alpha^2 \frac{a^2}{\delta^2} (2\cos(\omega \Delta t) - 2) \left\{ \begin{matrix} m_2 & m_1(1 + \alpha) & m_2\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} u_{-1} \\ u_0 \\ u_1 \end{matrix} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (10.73)$$

e, tendo-se em conta agora o expresso em (10.66), (10.67) e (10.68), ou seja:

$$\begin{aligned}
 u_{-1} &= e^{ik_1\ell} + Ae^{-ik_1\ell} \\
 u_0 &= 1 + A = B \\
 u_1 &= Be^{-ik_2\alpha\ell}
 \end{aligned} \tag{10.74}$$

cuja substituição no expresso em (10.73) na equação (10.72) e, tendo-se em vista a equação (10.71), tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \left( e^{ik_1\ell} + Ae^{-ik_1\ell} \right) \left[ -(1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega\Delta t)) + m_2 (2 \cos(\omega\Delta t) - 2) \frac{a^2}{\delta^2} \right] + \\
 & (1 + A) \left[ \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) (1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega\Delta t)) + m_1 (1 + \alpha) (2 \cos(\omega\Delta t) - 2) \frac{a^2}{\delta^2} \right] + \\
 & (1 + A) e^{-ik_2\alpha\ell} \left[ -\frac{1}{\alpha} (1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega\Delta t)) + m_2 \alpha (2 \cos(\omega\Delta t) - 2) \frac{a^2}{\delta^2} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{10.75}$$

resultando-se

$$\begin{aligned}
 & A \left\{ \begin{aligned} & e^{-ik_1\ell} \left[ -(1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega\Delta t)) + m_2 (2 \cos(\omega\Delta t) - 2) \frac{a^2}{\delta^2} \right] + \\ & \frac{1 + \alpha}{\alpha} (1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega\Delta t)) + m_1 (1 + \alpha) (2 \cos(\omega\Delta t) - 2) \frac{a^2}{\delta^2} + \\ & e^{-ik_2\alpha\ell} \left[ -\frac{1}{\alpha} (1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega\Delta t)) + m_2 \alpha (2 \cos(\omega\Delta t) - 2) \frac{a^2}{\delta^2} \right] \end{aligned} \right\} = \\
 & - \left\{ \begin{aligned} & e^{ik_1\ell} \left[ -(1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega\Delta t)) + m_2 (2 \cos(\omega\Delta t) - 2) \frac{a^2}{\delta^2} \right] + \\ & \frac{1 + \alpha}{\alpha} (1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega\Delta t)) + m_1 (1 + \alpha) (2 \cos(\omega\Delta t) - 2) \frac{a^2}{\delta^2} + \\ & e^{-ik_2\alpha\ell} \left[ -\frac{1}{\alpha} (1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega\Delta t)) + m_2 \alpha (2 \cos(\omega\Delta t) - 2) \frac{a^2}{\delta^2} \right] \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \tag{10.76}$$

valendo-se notar que equação (10.75) envolve os termos complexos que se expressam também na forma (relação de Euler):

$$\begin{aligned}
 e^{-ik_1\ell} &= \cos(k_1\ell) - i\text{sen}(k_1\ell) \\
 e^{ik_1\ell} &= \cos(k_1\ell) + i\text{sen}(k_1\ell)
 \end{aligned} \tag{10.77}$$

cujas magnitudes são unitárias.

Tendo-se em conta o expresso em (10.77), a equação (10.76) ganha a seguinte redação:

$$A(f + gi) = (-f + hi) \quad (10.78)$$

onde:

$$\begin{aligned} f = & \cos(k_1 \ell) \left[ -1 + 2\beta - 2\beta \cos(\omega \Delta t) + \frac{a^2}{\delta^2} m_2 (2 \cos(\omega \Delta t) - 2) \right] + \\ & (1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega \Delta t)) \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{a^2}{\delta^2} m_1 (1 + \alpha) (2 \cos(\omega \Delta t) - 2) + \\ & \cos(k_2 \alpha \ell) \left[ (-1 + 2\beta - 2\beta \cos(\omega \Delta t)) \left( \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{a^2}{\delta^2} m_2 \alpha (2 \cos(\omega \Delta t) - 2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (10.79)$$

como se verifica de (10.54), e

$$\begin{aligned} g = & (1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega \Delta t)) \left( \text{sen}(k_1 \ell) + \frac{1}{\alpha} \text{sen}(k_2 \alpha \ell) \right) \\ & - \frac{a^2}{\delta^2} (2 \cos(\omega \Delta t) - 2) (m_2 \text{sen}(k_1 \ell) + m_2 \alpha \text{sen}(k_2 \alpha \ell)) \end{aligned} \quad (10.80)$$

$$\begin{aligned} h = & (1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega \Delta t)) \left( \text{sen}(k_1 \ell) - \frac{1}{\alpha} \text{sen}(k_2 \alpha \ell) \right) \\ & - \frac{a^2}{\delta^2} (2 \cos(\omega \Delta t) - 2) (m_2 \text{sen}(k_1 \ell) - m_2 \alpha \text{sen}(k_2 \alpha \ell)) \end{aligned}$$

resultando-se, por conseguinte:

$$A = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega \Delta t)) \left( \text{sen}(k_1 \ell) - \frac{1}{\alpha} \text{sen}(k_2 \alpha \ell) \right) \\ - \frac{a^2}{\delta^2} (2 \cos(\omega \Delta t) - 2) (m_2 \text{sen}(k_1 \ell) - m_2 \alpha \text{sen}(k_2 \alpha \ell)) \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} (1 - 2\beta + 2\beta \cos(\omega \Delta t)) \left( \text{sen}(k_1 \ell) + \frac{1}{\alpha} \text{sen}(k_2 \alpha \ell) \right) \\ - \frac{a^2}{\delta^2} (2 \cos(\omega \Delta t) - 2) (m_2 \text{sen}(k_1 \ell) + m_2 \alpha \text{sen}(k_2 \alpha \ell)) \end{array} \right\}} \quad (10.81)$$

encerrando-se assim a questão em apreço.

Como exemplo considere-se o caso  $a = \delta = 10$  e  $\alpha = 1.1$ , para o qual se tem:

$$\cos(k_1\ell) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) + 2 \frac{1}{2} \left(\frac{10}{10}\right)^2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) - 1\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right)} = 0.788854832 \quad (10.82)$$

$$\cos(k_2\ell) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) + 2 \frac{1}{2} \left(\frac{11}{10}\right)^2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) - 1\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right)} = 0.744513802$$

$$g = \text{sen}(k_1\ell) \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) \right) \right] + \text{sen}(k_2\ell) \left[ \frac{1}{1.1} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) \right) \right] = 1.104853211 \quad (10.83)$$

$$h = \text{sen}(k_1\ell) \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) \right) \right] - \text{sen}(k_2\ell) \left[ \frac{1}{1.1} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) \right) \right] = 0.006932549 \quad (10.84)$$

e com isso:

$$A = \frac{0.006932549}{1.104853211} = 0.00627463327 \quad (10.85)$$

cuja magnitude é pequena, mas é preciso ter-se em mente que a velocidade de propagação da onda nesse caso é de 5200Km/h, implicando-se, no caso de  $\ell$  da ordem de 4m algo como 1300 reflexões por segundo, decorrendo-se uma rápida redução da amplitude da onda propagando.

### 10.6- Dispersão e reflexão espúria da onda de flexão (Timoshenko)

A Figura 10.6 exhibe a configuração de deslocamento num nó central genérico e nos nós no seu entorno. O equilíbrio dinâmico do nó central permite escrever-se:

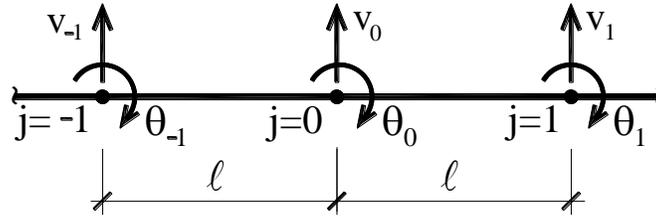


Figura 10.6 Configuração e deslocamentos

$$\frac{EI}{\ell^3(1+\Phi)} \begin{bmatrix} -12 & 24 & -12 & -6\ell & 0 & 6\ell \\ 6\ell & 0 & -6\ell & (2-\Phi)\ell^2 & (8+2\Phi)\ell^2 & (2-\Phi)\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{-1} \\ v_0 \\ v_1 \\ \theta_{-1} \\ \theta_0 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} + \quad (10.86)$$

$$\frac{m\ell}{(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} m_3 & 2m_1 & m_3 & -m_4 & 0 & m_4 \\ m_4 & 0 & -m_4 & m_6 & 2m_5 & m_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_{-1} \\ \ddot{v}_0 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_{-1} \\ \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{13}{35} + \frac{7\Phi}{10} + \frac{\Phi^2}{3} + \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 \frac{6}{5} \\ m_2 &= \ell \left[ \frac{11}{210} + \frac{11\Phi}{120} + \frac{\Phi^2}{24} + \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 \left(\frac{1}{10} - \frac{\Phi}{2}\right) \right] \\ m_3 &= \frac{9}{70} + \frac{3\Phi}{10} + \frac{\Phi^2}{6} - \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 \frac{6}{5} \\ m_4 &= \ell \left[ -\frac{13}{420} - \frac{3\Phi}{40} - \frac{\Phi^2}{24} + \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 \left(\frac{1}{10} - \frac{\Phi}{2}\right) \right] \\ m_5 &= \ell^2 \left[ \frac{1}{105} + \frac{\Phi}{60} + \frac{\Phi^2}{120} + \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 \left(\frac{2}{15} + \frac{\Phi}{6} + \frac{\Phi^2}{3}\right) \right] \\ m_6 &= \ell^2 \left[ -\frac{1}{140} - \frac{\Phi}{60} - \frac{\Phi^2}{120} + \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 \left(-\frac{2}{15} - \frac{\Phi}{6} + \frac{\Phi^2}{6}\right) \right] \end{aligned} \quad (10.87)$$

cuja integração no tempo pelo método de Newmark resulta na equação de diferença:

$$\frac{EI}{\ell^3(1+\Phi)} \begin{bmatrix} -12 & 24 & -12 & -6\ell & 0 & 6\ell \\ 6\ell & 0 & -6\ell & (2-\Phi)\ell^2 & (8+2\Phi)\ell^2 & (2-\Phi)\ell^2 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{\nabla}{4}\right) \begin{Bmatrix} v_{-1} \\ v_0 \\ v_1 \\ \theta_{-1} \\ \theta_0 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} + \quad (10.88)$$

$$\frac{m\ell}{(1+\Phi)^2 \Delta t^2} \begin{bmatrix} m_3 & 2m_1 & m_3 & -m_4 & 0 & m_4 \\ m_4 & 0 & -m_4 & m_6 & 2m_5 & m_6 \end{bmatrix} \nabla \begin{Bmatrix} v_{-1} \\ v_0 \\ v_1 \\ \theta_{-1} \\ \theta_0 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que, por sua vez, para uma dada frequência angular  $\omega$  tem por solução numérica:

$$\begin{aligned} v &= A(\exp[i(\omega k \Delta t - \beta_n j \ell)]) \\ \theta &= B(\exp[j(\omega k \Delta t - \beta_n j \ell)]) \end{aligned} \quad (10.89)$$

onde se emprega notação complexa. Tendo-se em vista (10.89) o expresso em (10.88) permite escrever:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10.90)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -24(\cos \beta_n \ell - 1) + 8\Psi(m_3 \cos \beta_n \ell + m_1) \frac{\cos \omega \Delta t - 1}{\cos \omega \Delta t + 1} \\ a_{22} &= 2\cos \beta_n \ell (2 - \Phi) + 8 - 2\Phi + 8\Psi(m_6 \cos \beta_n \ell + m_5) \frac{\cos \omega \Delta t - 1}{\cos \omega \Delta t + 1} \\ a_{21} &= -a_{12} = i \left( 12 \sin \beta_n \ell + 8\Psi m_4 \sin \beta_n \ell \frac{\cos \omega \Delta t - 1}{\cos \omega \Delta t + 1} \right) \end{aligned} \quad (10.91)$$

sendo:

$$\psi = \left( \frac{a\ell}{br} \right)^2 \frac{1}{1+\Phi} \quad (10.92)$$

e

$$\begin{aligned} a &= \frac{T}{\Delta t} \\ b &= \frac{cT}{\ell} \end{aligned} \quad (10.93)$$

onde a e b são parâmetros da malha no tempo e no espaço respectivamente, lembrando-se que a razão b/a consiste no número de Courant.

O autovetor de (10.90) é dado por:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g \\ -i \end{Bmatrix} \quad (10.94)$$

onde:

$$g = \frac{12 \sin \beta_n \ell + \frac{8\psi m_4 \sin \beta_n \ell (\cos \omega \Delta t - 1)}{\cos \omega \Delta t + 1}}{-24 (\cos \beta_n \ell - 1) + \frac{8\psi (\cos \omega \Delta t - 1) (m_3 \cos \beta_n \ell + m_1)}{\cos \omega \Delta t + 1}} \quad (10.95)$$

devendo-se chamar a atenção para o fato de que, uma vez se assumindo os valores dos parâmetros a e b, o número de onda numérico  $\beta_n$ , autovalor de (10.89) e o correspondente autovetor numérico ficam definidos.

A Tabela 10.1 arrola resultados para algumas frequências e malhas com número de Courant unitário, deixando-se claro coeficientes de dispersão:

$$\frac{c_n - c}{c} = \frac{\beta_{\text{exact}} - \beta_n}{\beta_n} \quad (10.96)$$

com erros exagerados para a malha refinada  $a = b = 10$ . Além disso é de se notar também a ocorrência de bifurcações espúrias:

$$\cos \beta_n \ell > 1 \quad (10.97)$$

para malha ainda mais refinada na frequência de 5Hz, algo como  $a = 25$  e  $b = 66.3$  como indicam resultados arrolados na Tabela 10.2.

A equação de equilíbrio na interface de elementos de comprimentos diferentes, a exemplo do examinado na seção 10.5, assim se escreve:

$$\begin{aligned}
 & \frac{EI}{\ell^3(1+\Phi)} \begin{bmatrix} -12 & 12 & -6\ell & -6\ell \\ 6\ell & -6\ell & \ell^2(2-\Phi) & \ell^2(4+\Phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{-1} \\ v_0 \\ \theta_{-1} \\ \theta_0 \end{Bmatrix} + \\
 & \frac{EI}{\alpha^3 \ell^3 \left(1 + \frac{\Phi}{\alpha^2}\right)} \begin{bmatrix} 12 & -12 & 6\alpha\ell & 6\alpha\ell \\ 6\alpha\ell & -6\alpha\ell & \alpha^2 \ell^2 \left(4 + \frac{\Phi}{\alpha^2}\right) & \alpha^2 \ell^2 \left(2 - \frac{\Phi}{\alpha^2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \theta_0 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} + \\
 & \frac{\rho S \ell}{(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} m_3 & m_1 & -m_4 & -m_2 \\ m_4 & -m_2 & m_6 & m_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_{-1} \\ \ddot{v}_0 \\ \ddot{\theta}_{-1} \\ \ddot{\theta}_0 \end{Bmatrix} + \\
 & \frac{\rho S \alpha \ell}{\left(1 + \frac{\Phi}{\alpha^2}\right)^2} \begin{bmatrix} m_1^* & m_3^* & m_2^* & m_4^* \\ m_2^* & -m_4^* & m_5^* & m_6^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_0 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{10.98}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 m_1^* &= \frac{13}{35} + \frac{7\Phi}{10\alpha^2} + \frac{\Phi^2}{3\alpha^4} + \left(\frac{r}{\alpha\ell}\right)^2 \frac{6}{5} \\
 m_2^* &= \left[ \left( \frac{11}{210} + \frac{11\Phi}{120\alpha^2} + \frac{\Phi^2}{24\alpha^4} \right) + \left(\frac{r}{\alpha\ell}\right)^2 \left( \frac{1}{10} - \frac{\Phi}{2\alpha^2} \right) \right] \alpha\ell \\
 m_3^* &= \frac{9}{70} + \frac{3\Phi}{10\alpha^2} + \frac{\Phi^2}{6\alpha^4} - \left(\frac{r}{\alpha\ell}\right)^2 \frac{6}{5} \\
 m_4^* &= \left[ \left( -\frac{13}{420} - \frac{3\Phi}{40\alpha^2} - \frac{\Phi^2}{24\alpha^4} \right) + \left(\frac{r}{\alpha\ell}\right)^2 \left( \frac{1}{10} - \frac{\Phi}{2\alpha^2} \right) \right] \alpha\ell \\
 m_5^* &= \left[ \left( \frac{1}{105} + \frac{\Phi}{60\alpha^2} + \frac{\Phi^2}{120\alpha^4} \right) + \left(\frac{r}{\alpha\ell}\right)^2 \left( \frac{2}{15} + \frac{\Phi}{6\alpha^2} + \frac{\Phi^2}{3\alpha^4} \right) \right] \alpha^2 \ell^2 \\
 m_6^* &= \left[ \left( -\frac{1}{140} - \frac{\Phi}{60\alpha^2} - \frac{\Phi^2}{120\alpha^4} \right) + \left(\frac{r}{\alpha\ell}\right)^2 \left( -\frac{1}{30} - \frac{\Phi}{6\alpha^2} + \frac{\Phi}{6\alpha^4} \right) \right] \alpha^2 \ell^2
 \end{aligned} \tag{10.99}$$

Table 10.1 – Número de Onda Numérico e Auto-vetor

	Discretization a=b	$\beta_n$	$\frac{c_n - c}{c}$	g
f=10KHz				
First Spectrum $\beta_{\text{exact}} = 27.8$ $g_{\text{exact}} = 2.680$	100	27.87	0.0	2.678
	50	27.83	$1.4 \cdot 10^{-3}$	2.671
	25	27.66	$7.6 \cdot 10^{-3}$	2.646
	10	26.75	$4,2 \cdot 10^{-2}$	2.526
Second Spectrum $\beta_{\text{exact}} = 11.71$ $g_{\text{exact}} = -0.01858$	100	11.71	0.0	-0.01861
	50	11.72	$-8.5 \cdot 10^{-4}$	-0.01870
	25	11.74	$-2.5 \cdot 10^{-3}$	-0.01904
	10	11.91	$-1.7 \cdot 10^2$	-0.02147
f=1KHz				
First Spectrum $\beta_{\text{exact}} = 3.640$ $g_{\text{exact}} = 0.6531$	100	3.638	$5.5 \cdot 10^{-4}$	0.6530
	50	3.635	$1.4 \cdot 10^{-3}$	0.6526
	25	3.621	$5.2 \cdot 10^{-3}$	0.6513
	10	3.538	$2.9 \cdot 10^{-2}$	0.6591
Second Spectrum $\beta_{\text{exact}} = 2.024i$ $g_{\text{exact}} = -0.1719i$	100	2.023i	$4.9 \cdot 10^{-5}$	-0.1720i
	50	2.021i	$1.5 \cdot 10^{-3}$	-0.1723i
	25	2.012i	$6.0 \cdot 10^{-3}$	-0.1735i
	10	1.945i	$4.1 \cdot 10^{-2}$	-0.1820i
f=100Hz				
First Spectrum $\beta_{\text{exact}} = 0.9253$ $g_{\text{exact}} = 1.187$	100	0.9254	$-1.1 \cdot 10^{-4}$	1.187
	50	0.9245	$8.6 \cdot 10^{-4}$	1.188
	25	0.9183	$7.6 \cdot 10^{-3}$	1.199
	10	0.3696	1.5	-0.7052
Second Spectrum $\beta_{\text{exact}} = 0.8745i$ $g_{\text{exact}} = -1.039i$	100	0.8738i	$8.0 \cdot 10^{-4}$	-1.040i
	50	0.8723i	$2.5 \cdot 10^{-3}$	-1.042i
	25	0.8652i	$1.1 \cdot 10^{-2}$	-1.051i
	10	0.7250i	$2.1 \cdot 10^{-1}$	-1.313i
F=10Hz				
First Spectrum $\beta_{\text{exact}} = 0.2854$ $g_{\text{exact}} = 3.537$	100	0.2849	$1.7 \cdot 10^{-3}$	3.544
	50	0.2803	$1.8 \cdot 10^{-2}$	4.255
	25	0.05484	4.2	-1.603
	10	0.08163i	3.5	-4.096i
Second Spectrum $\beta_{\text{exact}} = 0.2838i$ $g_{\text{exact}} = -3.491i$	100	0.2832i	$2.1 \cdot 10^{-3}$	-3.498i
	50	0.2750i	$3.2 \cdot 10^{-2}$	-3.627i
	25	0.2004i	4.2	-4.953i
	10	0.02365i	11.0	-11.50i

Table 2 – Limites das Bifurcações Espúrias

a	f=5 KHz b	f=500 Hz b	f=100 Hz b	f=10 Hz b	f=5 Hz b
25	4.29	7.37	15.1	46.9	66.3
10	4.41	7.50	15.4	47.6	67.2
5	4.91	8.02	16.3	50.3	71.1
2.5	10.2	9.31	24.4	73.4	109.0
2.2	20.2	22.5	36.2	104.0	147.0
1.8	13.5	16.2	28.7	84.8	119.0
1.5	3.58	6.57	13.7	42.5	60.1
1.1	0.747	2.14	4.74	15.0	21.2

na qual  $\alpha$  é a razão dos comprimentos dos elementos à direita e esquerda da interface.

A integração no tempo de (10.98) pelo método de Newmark ganha a seguinte redação:

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_9 & k_{10} & k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{-1} \\ v_0 \\ \theta_{-1} \\ \theta_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \theta_0 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10.100)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 k_9 &= 6\ell + \Omega\psi_2 m_4 \\
 k_1 &= -12 + \Omega\psi_2 m_3 & k_{10} &= -6\ell - \Omega\psi_2 m_2 \\
 k_2 &= 12 + \Omega\psi_2 m_1 & k_{11} &= (2 - \Phi)\ell^2 + \Omega\psi_2 m_6 \\
 k_3 &= -6\ell - \Omega\psi_2 m_4 & k_{12} &= (4 + \Phi)\ell^2 + \Omega\psi_2 m_5 \\
 k_4 &= -6\ell - \Omega\psi_2 m_2 & k_{13} &= 6\alpha\ell\psi_1 + \Omega\psi_3 m_2^* \\
 k_5 &= 12\psi_1 + \Omega\psi_3 m_1^* & k_{14} &= -6\alpha\ell\psi_1 - \Omega\psi_3 m_4^* \\
 k_6 &= -12\psi_1 + \Omega\psi_3 m_3^* & k_{15} &= \left(4 + \frac{\Phi}{\alpha^2}\right)\alpha^2\ell^2\psi_1 + \Omega\psi_3 m_5^* \\
 k_7 &= 6\alpha\ell\psi_1 + \Omega\psi_3 m_2^* & k_{16} &= \left(2 - \frac{\Phi}{\alpha^2}\right)\alpha^2\ell^2\psi_1 + \Omega\psi_3 m_6^* \\
 k_8 &= 6\alpha\ell\psi_1 + \Omega\psi_3 m_4^*
 \end{aligned} \tag{10.101}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \frac{1 + \Phi}{\alpha^3 + \alpha\Phi} \\
 \psi_2 &= \left(\frac{a\ell}{dr}\right)^2 \frac{1}{1 + \Phi} \\
 \psi_3 &= \alpha \left(\frac{a\ell}{dr}\right)^2 \frac{1 + \Phi}{\left(1 + \frac{\Phi}{\alpha^2}\right)^2} \\
 \Omega &= \frac{4(\cos \omega\Delta t - 1)}{\cos \omega\Delta t + 1}
 \end{aligned} \tag{10.102}$$

assinalando-se que (10.100) vem a ser duas equações envolvendo seis incógnitas. Todavia, para uma onda incidente (primeiro espectro) dada por:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{i} \end{Bmatrix} e^{i(\omega k\Delta t + \beta_1 \ell)} \tag{10.103}$$

a equação de equilíbrio (10.100) é atendida superpondo uma onda de primeiro espectro e outra de segundo espectro espúrias sendo refletidas, mais uma espúria de segundo espectro sendo transmitida e também a transmissão de uma de primeiro espectro, ou seja:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{-1} \\ \ell\theta_{-1} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{i} \end{Bmatrix} e^{i(\omega k\Delta t + \beta_1 \ell)} + \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{i} \end{Bmatrix} e^{i(\omega k\Delta t - \beta_1 \ell)} + \mathbf{B} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{i} \end{Bmatrix} e^{i(\omega k\Delta t - \beta_2 \ell)} \\
 \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \ell\theta_1 \end{Bmatrix} &= \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{i} \end{Bmatrix} e^{i(\omega k\Delta t - \beta_1^* \ell)} + \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_4 \\ \mathbf{i} \end{Bmatrix} e^{i(\omega k\Delta t - \beta_2^* \ell)}
 \end{aligned} \tag{10.104}$$

onde indica-se com asterisco aos números de onda do primeiro e segundo espectros do elemento finito da direita.

Por outro lado, a compatibilidade na interface dos elementos finitos implica em:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} v_0 \\ \ell\theta_0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} g_1 \\ i \end{Bmatrix} e^{i(\omega k \Delta t)} + A \begin{Bmatrix} g_1 \\ i \end{Bmatrix} e^{i(\omega k \Delta t)} + B \begin{Bmatrix} g_2 \\ i \end{Bmatrix} e^{i(\omega k \Delta t)} \\ &= C \begin{Bmatrix} g_3 \\ i \end{Bmatrix} e^{i(\omega k \Delta t)} + D \begin{Bmatrix} g_4 \\ i \end{Bmatrix} e^{i(\omega k \Delta t)} \end{aligned} \quad (10.105)$$

e, assim sendo, tendo-se em conta o expresso em (10.104), o equilíbrio expresso em (10.100) mais a compatibilidade (10.105) resulta no sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & -g_3 & -g_4 \\ i & i & -i & -i \\ \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} & \bar{D} \\ \bar{E} & \bar{F} & \bar{G} & \bar{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -g_1 \\ -i \\ \bar{I} \\ \bar{J} \end{Bmatrix} \quad (10.106)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= k_1 g_1 \cos \beta_1 \ell + k_2 g_1 + k_3 \sin \beta_1 \ell + (-k_1 g_1 \sin \beta_1 \ell + k_3 \cos \beta_1 \ell + k_4) i \\ \bar{B} &= k_1 g_2 \cos \beta_2 \ell + k_2 g_2 + k_3 \sin \beta_2 \ell + (-k_1 g_2 \sin \beta_2 \ell + k_3 \cos \beta_2 \ell + k_4) i \\ \bar{C} &= k_5 g_3 + k_6 g_3 \cos \beta_1^* \alpha \ell + k_8 \sin \beta_1^* \alpha \ell + (-k_6 g_3 \sin \beta_1^* \alpha \ell + k_7 + k_8 \cos \beta_1^* \alpha \ell) i \\ \bar{D} &= k_5 g_4 + k_6 g_4 \cos \beta_2^* \alpha \ell + k_8 \sin \beta_2^* \alpha \ell + (-k_6 g_4 \sin \beta_2^* \alpha \ell + k_7 + k_8 \cos \beta_2^* \alpha \ell) i \\ \bar{E} &= k_9 g_1 \cos \beta_1 \ell + k_{10} g_1 + k_{11} \sin \beta_1 \ell + (-k_9 g_1 \sin \beta_1 \ell + k_{11} \cos \beta_1 \ell + k_{12}) i \\ \bar{F} &= k_9 g_2 \cos \beta_2 \ell + k_{10} g_2 + k_{11} \sin \beta_2 \ell + (-k_9 g_2 \sin \beta_2 \ell + k_{11} \cos \beta_2 \ell + k_{12}) i \\ \bar{G} &= k_{13} g_3 + k_{14} g_3 \cos \beta_1^* \alpha \ell + k_{16} \sin \beta_1^* \alpha \ell + (-k_{14} g_3 \sin \beta_1^* \alpha \ell + k_{15} + k_{16} \cos \beta_1^* \alpha \ell) i \\ \bar{H} &= k_{13} g_4 + k_{14} g_4 \cos \beta_2^* \alpha \ell + k_{16} \sin \beta_2^* \alpha \ell + (-k_{14} g_4 \sin \beta_2^* \alpha \ell + k_{15} + k_{16} \cos \beta_2^* \alpha \ell) i \\ \bar{I} &= -k_1 g_1 \cos \beta_1 \ell - k_2 g_1 + k_3 \sin \beta_1 \ell + (-k_1 g_1 \sin \beta_1 \ell - k_3 \cos \beta_1 \ell - k_4) i \\ \bar{J} &= -k_9 g_1 \cos \beta_1 \ell - k_{10} g_1 + k_{11} \sin \beta_1 \ell + (-k_9 g_1 \sin \beta_1 \ell - k_{11} \cos \beta_1 \ell - k_{12}) i \end{aligned} \quad (10.107)$$

cuja solução arrola-se nas Tabelas 3, 4 e 5 para vários valores da relação  $\alpha$  e frequências típicas.

Um exame dos resultados mostra que as reflexões e transmissões espúrias são significativas mesmo para malhas refinadas e razões entre comprimento dos elementos da ordem de oitenta por cento (0.8).

Tabela 3 – Reflexão espúria de primeiro espectro

a=b	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.1$	$\alpha = 1.2$	$\alpha = 2$
$f=10$ kHz						
100	0.5671	0.2160	$0.1738 \cdot 10^{-3}$	$0.7818 \cdot 10^{-4}$	0.1783	0.5985
50	0.6028	0.2203	$0.4077 \cdot 10^{-3}$	$0.2694 \cdot 10^{-3}$	0.1820	0.6103
25	0.6539	0.2372	$0.1261 \cdot 10^{-2}$	$0.1419 \cdot 10^{-2}$	0.1949	0.6512
10	0.8409	0.6517	0.5263	0.5682	0.4192	0.8409
$f=1$ kHz						
100	0.4947	0.1344	0.05862	0.04507	0.07964	0.1877
50	0.5342	0.1290	0.05453	0.03971	0.06902	0.1442
25	0.5704	0.1130	0.04479	0.02939	0.04923	0.1095
10	0.7594	0.2780	0.1105	0.1741	0.1171	1.085
$f=100$ Hz						
100	0.4828	0.07598	0.03161	0.02472	0.04450	0.1298
50	1.410	0.1708	0.06764	0.05019	0.08735	0.2222
25	1.922	0.6716	0.1733	0.1086	0.1854	1.482
10	1.196	0.6652	0.4641	1.531	4.468	1.009
$f=10$ Hz						
100	0.1707	0.01103	0.01622	0.01352	0.02561	0.05827
50	1.429	1.126	0.4560	0.9984	1.545	1.155
25	1.163	0.6528	0.4919	1.389	0.9928	0.9971
10	1.528	2.548	0.3102	$0.5306 \cdot 10^{-2}$	2.054	1.463

### 10.7- Formulação de elementos finitos bidimensionais

Antes de iniciar o desenvolvimento dos elementos finitos bidimensionais é oportuno discutir o teorema de Gauss no plano, que é a base para o tratamento das integrais envolvidas na abordagem dos resíduos ponderados.

A Figura 10.7 exibe uma região plana fechada e a indicação de uma variável curvilínea orientada no sentido anti-horário. O teorema de Gauss/Green tem a seguinte redação:

Tabela 4 – Reflexão espúria de segundo espectro

a=b	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.1$	$\alpha = 1.2$	$\alpha = 2$
f=10 kHz						
100	0.5871	0.2160	0.06865	0.06864	0.4247	1.426
50	1.357	0.5177	0.06887	0.06905	0.4311	1.457
25	1.278	0.5385	0.06996	0.07025	0.4570	1.569
10	1.025	1.344	0.03598	0.1610	1.032	3.119
f=1 kHz						
100	0.8713	0.2621	0.1159	0.09155	0.1644	0.4160
50	0.9531	0.2829	0.1238	0.09638	0.1712	0.4268
25	1.156	0.3496	0.1499	0.1134	0.1994	0.4703
10	3.323	0.7800	0.2818	0.3312	0.2617	1.096
f=100 Hz						
100	0.5764	0.08592	0.03526	0.02678	0.04772	0.1318
50	1.003	0.1708	0.04716	0.03460	0.06006	0.1513
25	0.4745	0.1660	0.04270	0.02697	0.04643	0.3123
10	0.03022	0.01682	0.01157	0.03701	0.1061	0.02700
f=10 Hz						
100	0.06013	0.003751	0.005700	0.004747	0.008921	0.03230
50	0.03634	0.03596	0.01814	0.05324	0.06403	0.02593
25	0.01622	0.009583	0.007166	0.01968	0.01483	0.01546
10	0.04610	0.07337	0.0083944	0.005306	0.07254	0.04438

$$\iint_R \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx dy = \oint_s f(x,y) dy \quad (10.108)$$

$$\iint_R \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx dy = -\oint_s f(x,y) dx$$

onde  $f(x,y)$  denota uma função de duas variáveis, ou ainda:

$$\int_R (f_x(x,y) - f_y(x,y)) dx dy = \oint_s (f(x,y) dx + f(x,y) dy) \quad (10.109)$$

Tabela 5 – Transmissão espúria de segundo espectro

a=b	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.1$	$\alpha = 1.2$	$\alpha = 2$
f=10 kHz						
100	1.378	0.5123	0.1678	0.1680	0.4258	1.431
50	1.358	0.5189	0.1680	0.1685	0.4332	1.477
25	1.283	0.5431	0.1691	0.1691	0.4653	1.632
10	1.064	1.604	0.05479	0.2447	2.471	3.738
f=1 kHz						
100	0.8714	0.2621	0.1159	0.09154	0.1642	0.4155
50	0.9535	0.2828	0.1238	0.09623	0.1710	0.4245
25	1.157	0.3493	0.1496	0.1131	0.1984	0.4679
10	3.351	0.7952	0.2901	0.3349	0.2907	1.143
f=100 Hz						
100	0.5765	0.08595	0.03536	0.02681	0.04749	0.1324
50	1.006	0.1202	0.04754	0.03485	0.06078	0.1570
25	0.4866	0.1679	0.04577	0.03069	0.05524	0.9939
10	0.2386	0.01139	0.01190	0.07984	0.2879	0.07124
f=10 Hz						
100	0.06202	0.004066	0.006204	0.005349	0.01019	0.1499
50	0.1407	0.2395	0.1567	0.9147	1.166	0.2324
25	0.1834	0.03834	0.03155	0.1411	0.2621	0.008058
10	0.2386	0.4574	0.08715	0.06727	0.3638	0.1391

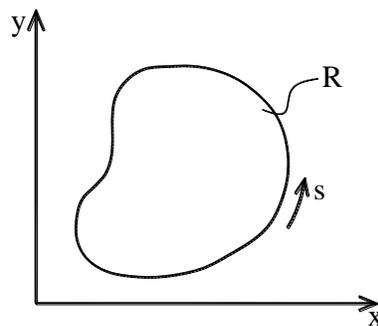


Figura 10.7

empregando-se a notação clássica:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ f_y(x, y) &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (10.110)$$

uma vez que:

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx dy &= \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y_1}^{y_2} (f(x_2, y) dy + f(x_1, y)(-dy)) = \\ &= \oint_s f(x, y) dy \end{aligned} \quad (10.111)$$

como ilustrado na Figura 10.8 a), e igualmente:

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} (f(x, y_2)(-dx) + f(x, y_1)dx) = \\ &= - \oint_s f(x, y) dx \end{aligned} \quad (10.112)$$

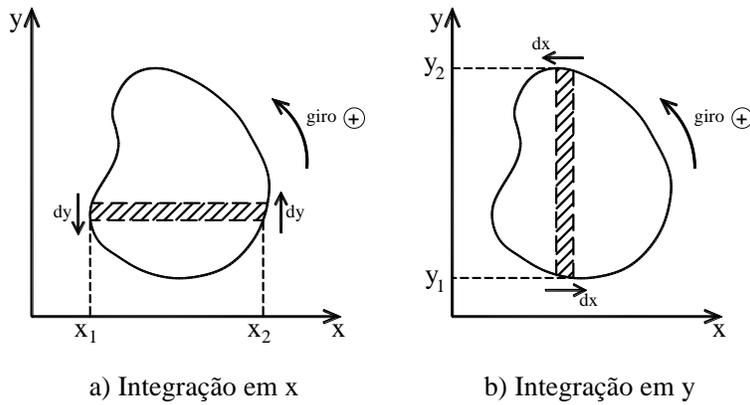
como ilustra-se na Figura 10.8 b).

A Figura 10.9 ilustra a configuração de equilíbrio de um elemento plano infinitesimal, cujo equilíbrio se expressa:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz + (\gamma_x - \rho \ddot{u}) dx dy dz &= 0 \\ \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx dz + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz + (\gamma_y - \rho \ddot{v}) dx dy dz &= 0 \end{aligned} \quad (10.113)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (10.114)$$



**Figura 10.8**

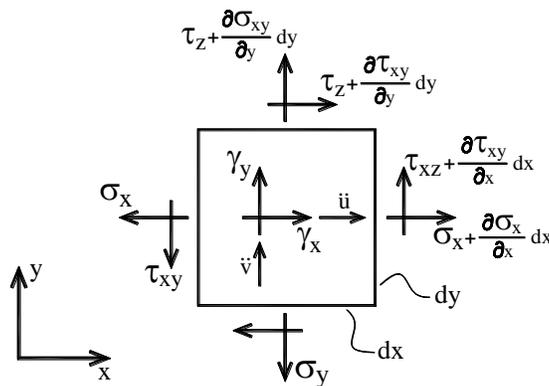
com:

$$\begin{aligned} X &= \gamma_x - \rho \ddot{u} \\ Y &= \gamma_y - \rho \ddot{v} \end{aligned} \quad (10.115)$$

onde  $\gamma_x$  e  $\gamma_y$  são forças volumétricas nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $\rho$  a densidade de massa.

Pois bem, procedendo-se o resíduo ponderado a equação de equilíbrio (10.114) têm-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \int_R \phi \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \right) dx dy &= \int_R \phi(0) dx dy = 0 \\ \int_R \phi \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y \right) dx dy &= \int_R \phi(0) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (10.116)$$



**Figura 10.9**

resultando-se, mediante integração por partes:

$$\int_R \left( \sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy = \int_R X \phi dx dy + \oint_s \sigma_x \phi dy - \oint_s \tau_{xy} \phi dx \quad (10.117)$$

$$\int_R \left( \sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy = \int_R Y \phi dx dy - \oint_s \sigma_y \phi dx + \oint_s \tau_{xy} \phi dy$$

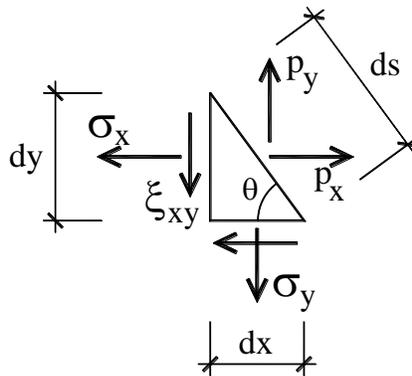
ou ainda:

$$\int_R \left( \sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy = \int_R X \phi dx dy + \oint_s p_x \phi ds \quad (10.118)$$

$$\int_R \left( \sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy = \int_R Y \phi dx dy + \oint_s p_y \phi ds$$

tendo-se em vista que, no contorno, como ilustrado na Figura 10.10 o equilíbrio é expresso por:

$$\begin{aligned} \sigma_x dy - \tau_{xy} dx &= p_x ds \\ -\sigma_y dx + \tau_{xy} dy &= p_y ds \end{aligned} \quad (10.119)$$



**Figura 10.10**

cuja expressão do resíduo ponderado implica em:

$$\begin{aligned} \oint_s [\sigma_x dy - \tau_{xy} dx] \phi ds &= \oint_s p_x \phi ds \\ \oint_s [-\sigma_y dx + \tau_{xy} dy] \phi ds &= \oint_s p_y \phi ds \end{aligned} \quad (10.120)$$

o que permite reescrever (10.117):

$$\int_R \left( \sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy = \int_R X \phi dx dy + \oint_s p_x \phi ds \quad (10.121)$$

$$\int_R \left( \sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy = \int_R Y \phi dx dy + \oint_s p_y \phi ds$$

que consiste nas expressões básicas da formulação do método dos elementos finitos bidimensionais, ou ainda em notação matricial (vide (10.115)):

$$\int_R \begin{bmatrix} \phi_x & 0 & \phi_y \\ 0 & \phi_y & \phi_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^a \\ \sigma_y^a \\ \tau_{xy}^a \end{Bmatrix} dx dy + \int_R \rho \phi \begin{Bmatrix} \ddot{u}^a \\ \ddot{v}^a \end{Bmatrix} = \int_R \phi \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} dx dy + \oint_s \phi \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dx dy \quad (10.122)$$

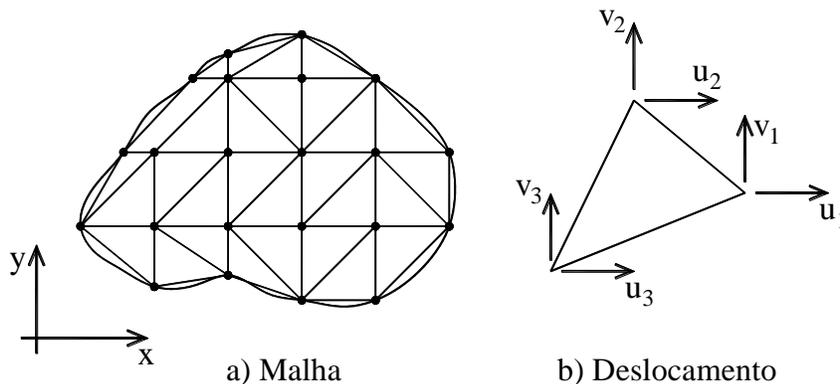
que decorre da consideração de nulidade dos resíduos ponderados:

$$\int_R \varepsilon_x \phi dx dy + \int_s (p_x^a - p_x) \phi ds = 0$$

$$\int_R \varepsilon_y \phi dx dy + \int_s (p_y^a - p_y) \phi ds = 0 \quad (10.123)$$

onde  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  são os resíduos do equilíbrio aproximado (10.114),  $p_x^a$  e  $p_y^a$  as forças decorrentes de (10.119) considerando-se as tensões aproximadas.

No sentido de se ilustrar o desenvolvimento da técnica dos elementos finitos, a Figura 10.11 a) exibe um domínio dividido por subdomínios triangulares (elementos finitos triangulares), e a Figura 10.11 b) exibe um elemento típico, indicando-se os deslocamentos nodais  $u_i$  e  $v_i$ .



**Figura 10.11**

Considerando-se que, no interior do elemento finito genérico  $i$ , a função aproximadora seja dada por funções planas do tipo:

$$\begin{aligned} u_i^a &= A + Bx + Cy \\ v_i^a &= A^* + B^*x + C^*y \end{aligned} \quad (10.124)$$

verifica-se de imediato que:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (10.125)$$

permitindo-se, pois, reescrever (10.124) na forma:

$$\begin{aligned} u_i^a &= u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3 \\ v_i^a &= v_1\varphi_1 + v_2\varphi_2 + v_3\varphi_3 \end{aligned} \quad (10.126)$$

uma vez que a matriz de (10.125) é a mesma para o movimento  $v_i^a$ , sendo as funções de forma expressas por:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2S} (2S_1^0 + b_1x + a_1y) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2S} (2S_2^0 + b_2x + a_2y) \\ \varphi_3 &= 1 - \varphi_1 - \varphi_2 \end{aligned} \quad (10.127)$$

onde:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (b_1a_2 - b_2a_1) \\ S_i^0 &= \frac{1}{2} (x_jy_k - x_ky_j) \\ a_i &= x_k - x_j \\ b_i &= y_j - y_k \end{aligned} \quad (10.128)$$

sendo ilustradas na Figura 10.12 as funções de forma (10.127).

Pode-se verificar de imediato que as funções (10.127) garantem a continuidade das funções aproximadoras ao longo do domínio, uma vez que na interface dos elementos a função reta é a mesma.

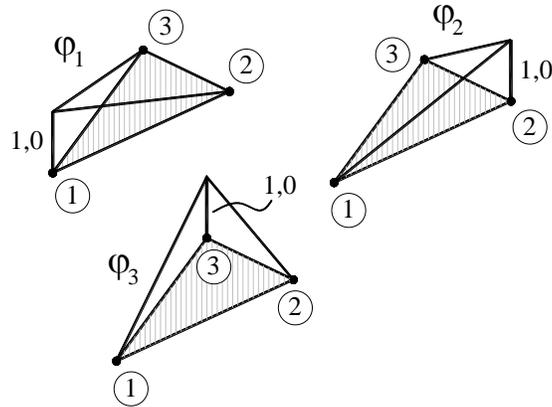
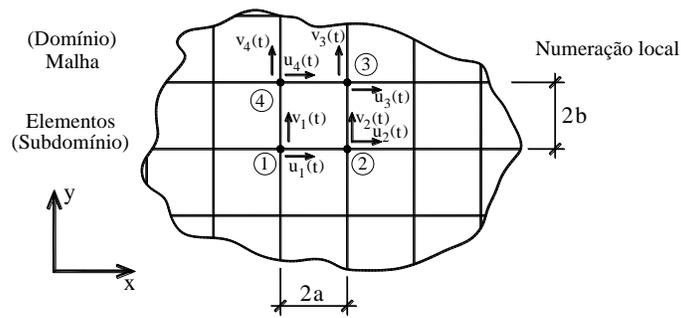


Figura 10.12

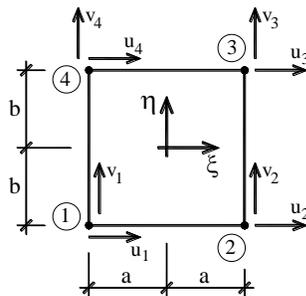
No sentido de se requintar um pouco a aproximação, considere-se agora o domínio retangular dividido em subdomínios retangulares de dimensão  $2a$  e  $2b$  como ilustra-se na Figura 10.13 a), cujos detalhes do elemento retangular ilustra-se na Figura 10.13 b), indicando-se um sistema local de coordenadas  $O\eta\xi$  facultando-se a transformação de variáveis:

$$\eta = \frac{1}{a}(x - x_c)$$

$$\xi = \frac{1}{b}(y - y_c)$$
(10.129)



a) Malha



b) Elemento finito

Figura 10.13

Pois bem, a exemplo de (10.124) as funções aproximadoras agora são dadas por:

$$\begin{aligned} u_i^a &= A_1 + A_2\xi + A_3\eta + A_4\xi\eta \\ v_i^a &= A_1^* + A_2^*\xi + A_3^*\eta + A_4^*\xi\eta \end{aligned} \quad (10.130)$$

ou em termos de funções de forma:

$$\begin{aligned} u_i^a &= \{\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \\ v_i^a &= \{\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4\} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (10.131)$$

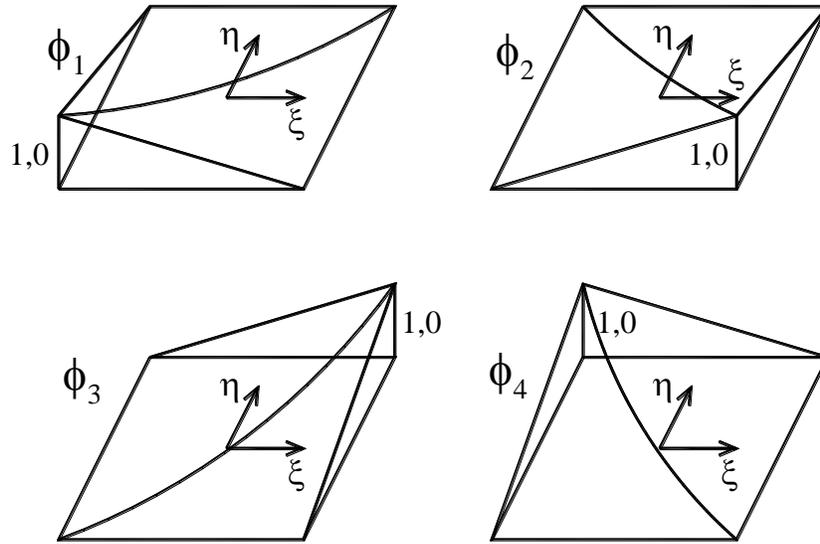
na qual se emprega por conveniência a notação vetorial, onde:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \varphi_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ \varphi_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (10.132)$$

cujos gráficos são indicados na Figura 10.14.

É oportuno notar que as funções de forma (10.132) são retas no contorno para o caso retangular em apreço, garantindo-se assim continuidade entre elementos.

A Figura 10.15 mostra uma ponderadora genérica obtida como uma combinação das funções de forma (10.132) como nominado, destacando-se as retas nas interfaces (continuidade verificada), bem como o valor unitário no nó considerado, e valores nulos nas demais faces e nós da malha.



**Figura 10.14**

O estado de deformação aproximado, tendo-se em vista (10.131) ganha a seguinte redação:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^a \\ \varepsilon_y^a \\ \gamma_{xy}^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^a}{\partial x} \\ \frac{\partial v^a}{\partial y} \\ \frac{\partial u^a}{\partial y} + \frac{\partial v^a}{\partial x} \end{Bmatrix} = [\Phi] \{d\} = \begin{bmatrix} \frac{\varphi_{1\xi}}{a} & \frac{\varphi_{2\xi}}{a} & \frac{\varphi_{3\xi}}{a} & \frac{\varphi_{4\xi}}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_{1\eta}}{b} & \frac{\varphi_{2\eta}}{b} & \frac{\varphi_{3\eta}}{b} & \frac{\varphi_{4\eta}}{b} \\ \frac{\varphi_{1\eta}}{b} & \frac{\varphi_{2\eta}}{b} & \frac{\varphi_{3\eta}}{b} & \frac{\varphi_{4\eta}}{b} & \frac{\varphi_{1\xi}}{a} & \frac{\varphi_{2\xi}}{a} & \frac{\varphi_{3\xi}}{a} & \frac{\varphi_{4\xi}}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (10.133)$$

na qual o vetor de deslocamentos nodais é organizado colocando-se em primeiro lugar os movimentos segundo o eixo Ox e depois segundo Oy.

Tendo-se em conta a ponderadora exibida na Figura 10.14, as integrações no elemento permitem expressar as seguintes matrizes: e vetores:

$$\begin{aligned}
 [k]_i &= \int_i [\Phi]^T [D] [\Phi] dx dy \\
 [m]_i &= \int_i \rho [\Phi^*]^T [\Phi^*] dx dy \\
 \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} &= \int_i [\Phi^*]^T \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} dx dy + \oint_i [\Phi^*]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} ds
 \end{aligned}
 \tag{10.134}$$

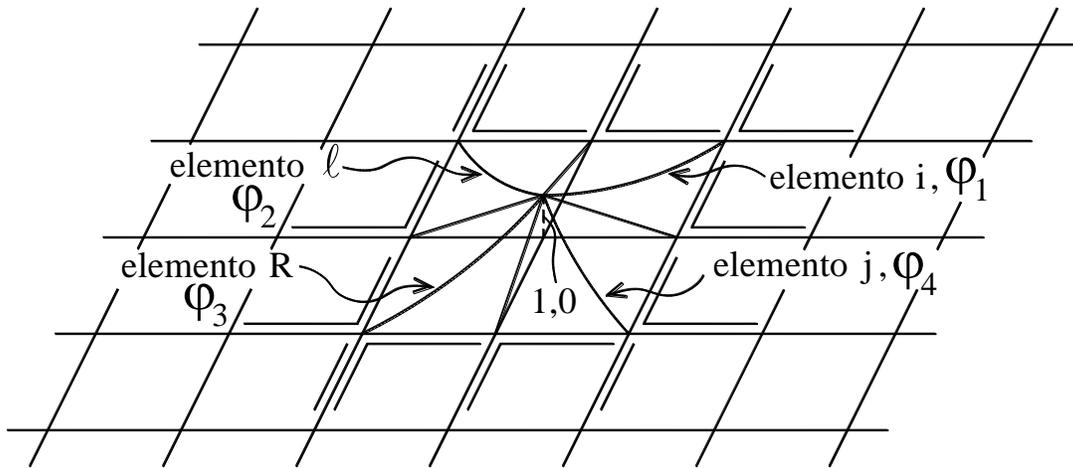


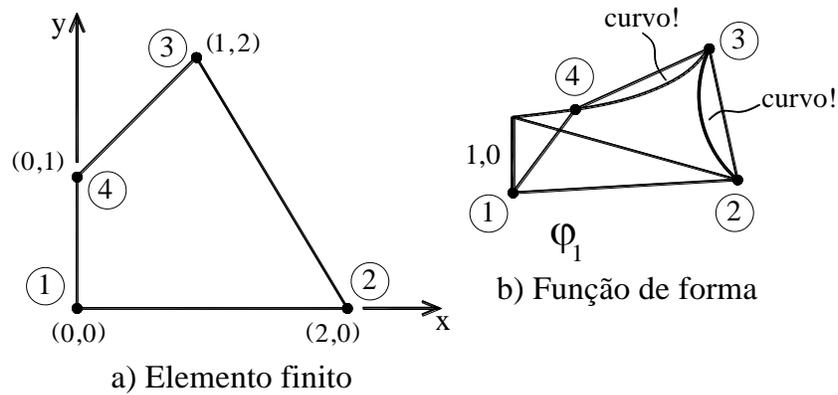
Figura 10.15

sendo que a matriz quadrada  $[D]$ , de ordem  $3 \times 3$ , contém as constantes da Lei de Hooke, e onde:

$$[\Phi^*] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix}
 \tag{10.135}$$

sendo oportuno adiantar que a integração do expresso em (10.134) vai ser objeto de apresentação mais adiante. Vale também mencionar que a introdução de amortecimento viscoelástico não exige tratamento adicional, porquanto a matriz de amortecimento é proporcional à matriz de rigidez.

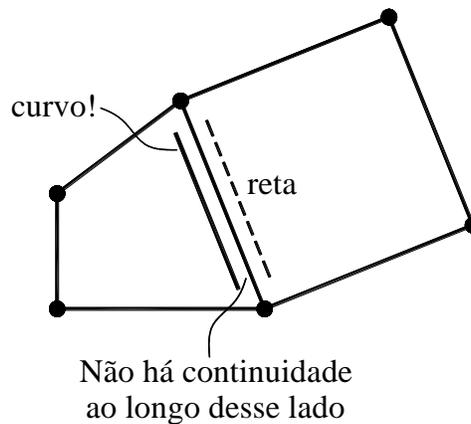
Um fato notável ocorre ao se adotar um elemento finito quadrangular, como, por exemplo, o mostrado na Figura 4.16 a), pois as funções de forma ficam expressas por:



**Figura 10.16**

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - \frac{1}{2}x - y + \frac{3}{4}xy \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}xy \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2}xy \\ \varphi_4 &= y - xy \end{aligned} \tag{10.136}$$

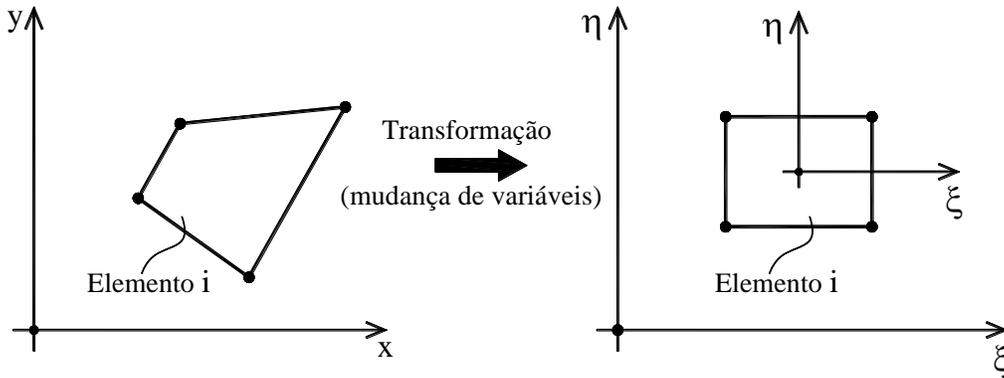
como ilustra a Figura 10.16 b), deixando-se evidente que são funções curvas em parte do contorno, violando-se quesitos de continuidade, como a figura 10.17 esclarece.



**Figura 10.17**

No sentido de se evitar esse inconveniente, que se manifesta ao se aumentar o grau das funções de forma, foi desenvolvida a técnica do elemento finito isoparamétrico, que consiste em se proceder uma transformação de variáveis como se segue.

A Figura 10.18 a) exibe um elemento quadrangular no domínio original (Oxy) e a Figura 10.18 b) exibe o domínio transformado (Oξη), no qual aquele quadrângulo está associado a um elemento quadrado; e é nesse domínio que a aproximação então é formulada.



**Figura 10.18**

A transformação de variáveis se expressa:

$$\begin{aligned} x &= A_1 + A_2\xi + A_3\eta + A_4\xi\eta \\ y &= \bar{A}_1 + \bar{A}_2\xi + \bar{A}_3\eta + \bar{A}_4\xi\eta \end{aligned} \quad (10.137)$$

cujos parâmetros podem ser expressos em termos das coordenadas dos nós, a exemplo de (10.124), ou seja:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (10.138)$$

onde:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \varphi_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ \varphi_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\end{aligned}\tag{10.139}$$

coincidindo-se com as funções de forma (10.132); e, por essa razão o nome isoparamétrico atribuído ao elemento finito assim desenvolvido.

Vale assinalar, em primeiro lugar, que a aproximação sendo desenvolvida no domínio  $O_{\xi\eta}$ , a questão da continuidade está então garantida, e as matrizes no domínio original passam então a ser assim redigidas em termos das novas variáveis:

$$\begin{aligned}[\mathbf{k}]_i &= \int_i [\Phi]^T [\mathbf{D}] [\Phi] \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta \\ [\mathbf{m}]_i &= \int_i \rho [\Phi^*]^T [\Phi^*] \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta \\ \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} &= \int_i [\Phi^*]^T \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta + \oint_i [\Phi^*]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \sqrt{g_v^2 + h_v^2} dv\end{aligned}\tag{10.140}$$

onde:

$$\det[\mathbf{J}] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}\tag{10.141}$$

que vem a ser o jacobiano da transformação em questão, o qual não deve trocar de sinal no domínio de integração, de sorte a não violar a condição biunívoca e  $v$  denota  $\xi$  ou  $\eta$  dependendo do lado do elemento onde a integração está sendo feita. Em apêndice é apresentada uma discussão sobre as transformações de coordenadas e o papel central desempenhado pelo jacobiano da transformação

No sentido de facilitar as integrações envolvidas e evitar indesejáveis manipulações algébricas na busca da avaliação exata, o emprego da quadratura de Gauss se mostra apropriada. No que se segue, tal quadratura pode assim ser desenvolvida.

A Figura 10.19 mostra uma função genérica  $f(\xi)$  conhecida a ser integrada no domínio de -1 a +1, ou seja:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \quad (10.142)$$

cuja magnitude é avaliada por:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_i \omega_i f(\xi_i) \quad (10.143)$$

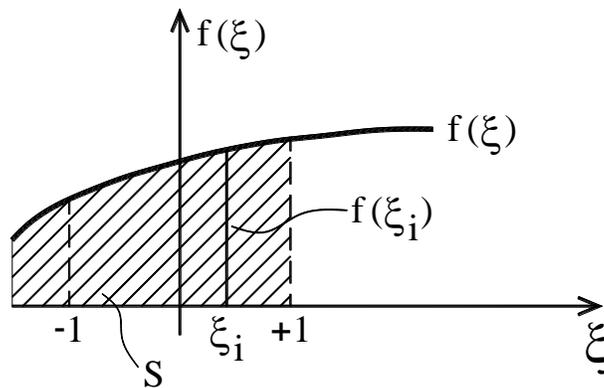
sendo  $i$  o número de pontos de Gauss, onde  $\omega_i$  são os pesos e  $\xi_i$  o ponto no qual a função em apreço é avaliada. Assim sendo, para um ponto de Gauss tem-se:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \omega_1 f(\xi_1) \quad (10.144)$$

para dois pontos de Gauss:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \omega_1 f(\xi_1) + \omega_2 f(\xi_2) \quad (10.145)$$

e assim por diante, restando-se definir os pesos e os pontos.



**Figura 10.19**

Para tanto, a integração expressa em (10.144) vai ser exata para a função linear:

$$f(\xi) = A + B\xi \quad (10.146)$$

tem-se:

$$\int_{-1}^{+1} A d\xi = \omega_1(\xi_1) = \omega_1(A) = 2A \quad (10.147)$$

$$\int_{-1}^{+1} B\xi d\xi = \omega_1(\xi_1) = 0$$

resultando-se  $\omega_1 = 2$  e  $\xi_1 = 0$ . Em verdade o peso e o ponto podem ser obtidos de maneira mais expedita tomando-se a base funcional  $f(\xi) = 1, \xi, \xi^2, \xi^3 \dots$  uma vez que, para um ponto de Gauss tem-se:

$$\begin{aligned} f(\xi) = 1 &\rightarrow \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = 2 = \omega_1 \xi_1 \\ f(\xi) = \xi &\rightarrow \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = 0 = \omega_1 \xi_1 \end{aligned} \quad (10.148)$$

para dois pontos de Gauss tem-se:

$$\begin{aligned} f(\xi) = 1 &\rightarrow \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = 2 = \omega_1 + \omega_2 \\ f(\xi) = \xi &\rightarrow \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = 0 = \omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 \\ f(\xi) = \xi^2 &\rightarrow \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = 2/3 = \omega_1 \xi_1^2 + \omega_2 \xi_2^2 \\ f(\xi) = \xi^3 &\rightarrow \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = 0 = \omega_1 \xi_1^3 + \omega_2 \xi_2^3 \end{aligned} \quad (10.149)$$

que consiste num sistema não linear de equações resultando:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 &= 1 \\ \xi_2 = -\xi_1 &= 1/\sqrt{3} \end{aligned} \quad (10.150)$$

ou seja, essa técnica não é muito adequada para a obtenção dos pontos de Gauss e seus pesos. Todavia, uma brilhante descoberta consiste no fato de que os pontos de Gauss vêm a ser as raízes do polinômio de Legendre expresso por:

$$\begin{aligned} P_n(x) = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{n!} \left( x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} + \dots \right) = \\ \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \end{aligned} \quad (10.151)$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1 \\
 P_1(x) &= x \rightarrow x = 0 \\
 P_2 &= 1/2(3x^2 - 1) \rightarrow x = \pm 1/\sqrt{3} \\
 P_3 &= 1/2(5x^3 - 3x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_{2,3} = \pm\sqrt{3/5} \end{array} \right\} \\
 P_4 &= 1/8(35x^4 - 30x^2 + 3) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -x_2 = \sqrt{\frac{30 + \sqrt{900 - 420}}{70}} \\ x_3 = -x_4 = \sqrt{\frac{30 - \sqrt{900 - 420}}{70}} \end{array} \right\} \\
 \dots
 \end{aligned} \tag{10.152}$$

sem contar que os polinômios de Legendre formam uma base ortonormal no intervalo -1 a +1, pois:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 \rightarrow n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} \rightarrow n = m \end{cases} \tag{10.153}$$

gozando-se também das seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^{+1} P_n(x)dx &= \begin{cases} 2 \rightarrow n = 0 \\ 0 \rightarrow n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \\
 P_n(x) &= P_n(-x) \rightarrow n = \text{par} \\
 P_n(x) &= -P_n(-x) \rightarrow n = \text{impar}
 \end{aligned} \tag{10.154}$$

que, no caso de dois pontos de Gauss, a função genérica formulada agora em termos dos polinômios de Legendre, ou seja:

$$f(\xi) = A_0P_0(\xi) + A_1P_1(\xi) + A_2P_2(\xi) + A_3P_3(\xi) \tag{10.155}$$

tem-se:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)d\xi = w_1\xi_1 + w_2\xi_2 \tag{10.156}$$

resultando-se:

$$\begin{aligned}
 f(\xi) = P_0(\xi) = 1 &\rightarrow 2 = w_1 + w_2 \\
 f(\xi) = P_1(\xi) = \xi &\rightarrow 0 = w_1 P_1(\xi_1) + w_2 P_1(\xi_2) \\
 f(\xi) = P_2(\xi) &\rightarrow 0 = w_1 P_2(\xi_1) + w_2 P_2(\xi_2) \\
 f(\xi) = P_3(\xi) &\rightarrow 0 = w_1 P_3(\xi_1) + w_2 P_3(\xi_2)
 \end{aligned} \tag{10.157}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
 w_1 + w_2 &= 2 \\
 p_1(\xi_1)(w_1 - w_2) &= 0 \\
 0(w_1 + w_2) &= 0 \\
 p_3(\xi_1)(w_1 - w_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{10.158}$$

resultando-se finalmente  $w_1 = w_2 = 1.0$ .

A integração numérica com a quadratura de Gauss pode ser facilmente estendida para funções de duas ou mais variáveis, como ilustrado na Figura 10.20 a) o caso plano e Figura 10.20 b) o caso tridimensional, ou seja, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 \iint_R f(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \sum_R w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \rightarrow i, j = 1, 2 \\
 \iiint_R f(\xi, \eta, \gamma) d\xi d\eta d\gamma &= \sum_R w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_j, \gamma_k) \rightarrow i, j, k = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{10.159}$$

e assim por diante, uma vez que, no domínio transformado, o sistema de coordenadas é cartesiano.

A título de ilustração, as funções de forma para o caso do elemento cúbico com aproximação linear, mostrado na Figura 10.21 a) é expressa por:

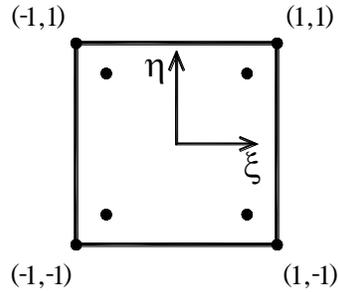
$$\varphi_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \gamma_i \gamma) \tag{10.160}$$

na qual  $i$  refere-se ao nó, no caso em número de 8. No caso do elemento cúbico com aproximação parabólica exibido na Figura 10.21 b) tem-se para  $i$  de 1 a 8:

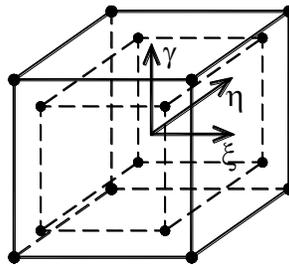
$$\varphi_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \gamma_i \gamma) (\xi_i \xi + \eta_i \eta + \gamma_i \gamma - 2) \tag{10.161}$$

para  $i=13, 14, 15$  e  $16$ :

$$\varphi_i = \frac{1}{4} (1 - \gamma^2) (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \tag{10.162}$$



a) Plano



b) Espacial

**Figura 10.20**

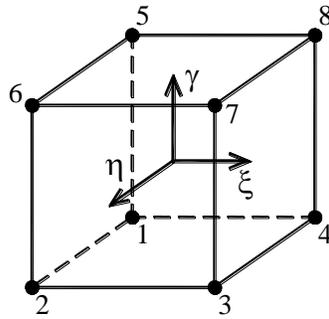
e, finalmente, para  $i=10,12,18$  e  $20$ :

$$\varphi_i = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i \xi)(1 + \gamma_i \gamma) \quad (10.164)$$

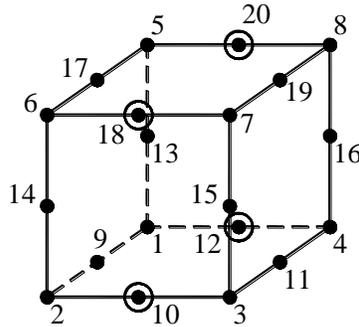
valendo-se assinalar que as funções de forma para os elementos finitos usuais podem ser encontradas em textos especializados.

### 10.8 - Formulação de elementos finitos de placas

A teoria de flexão de placas delgadas foi desenvolvida pioneiramente pela matemática francesa Marie-Sophie Germain. A Figura 10.22 a) ilustra uma placa de espessura  $d$  sob carregamento transversal distribuído  $p(x,y)$ , sinalizando-se também o plano médio na Figura 10.22 b). As hipóteses clássicas assumidas são de que a espessura é muito menor que as dimensões do comprimento ou largura da placa ( $d \ll \ell$ ), e de que a deformada transversal é muito menor que a espessura ( $w \ll d$ ) de modo a não apresentar efeito de membrana, sendo corrente o critério:  $0.01 < d/\ell < 0.1$ .



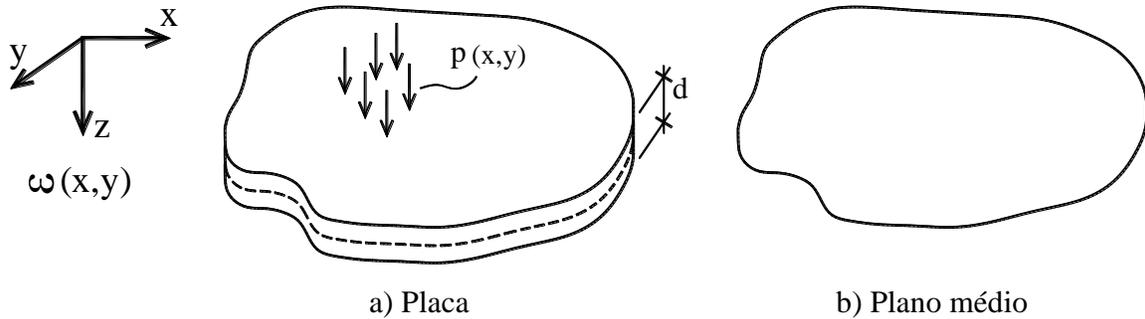
a) Elemento finito cúbico de 8 nós



b) Elemento finito parabólico de 20 nós

**Figura 10.21**

A Figura 10.23 a) exibe a configuração de um elemento diferencial de placa com o carregamento transversal, momentos de flexão e de torção distribuídos em suas faces. A Figura 10.23 b) indica as tensões atuantes e a Figura 10.23 c) a distribuição das tensões normais e de cisalhamento segundo a teoria técnica da flexão



a) Placa

b) Plano médio

**Figura 10.22**

Assim sendo, as seguintes relações entre os esforços distribuídos da placa e as tensões podem ser assim escritas:

$$\begin{aligned}
 m_x &= \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_x z dz \\
 m_y &= \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_y z dz \\
 q_x &= \int_{-d/2}^{d/2} \tau_{xz} z dz \\
 q_y &= \int_{-d/2}^{d/2} \tau_{yz} z dz \\
 m_{yx} &= \int_{-d/2}^{d/2} \tau_{yx} z dz = \\
 m_{xy} &= - \int_{-d/2}^{d/2} \tau_{yx} z dz = -m_{yx}
 \end{aligned}
 \tag{10.165}$$

sendo que a última de (10.165) decorre do teorema de Cauchy. Por outro lado, a teoria técnica da flexão permite escrever o movimento:

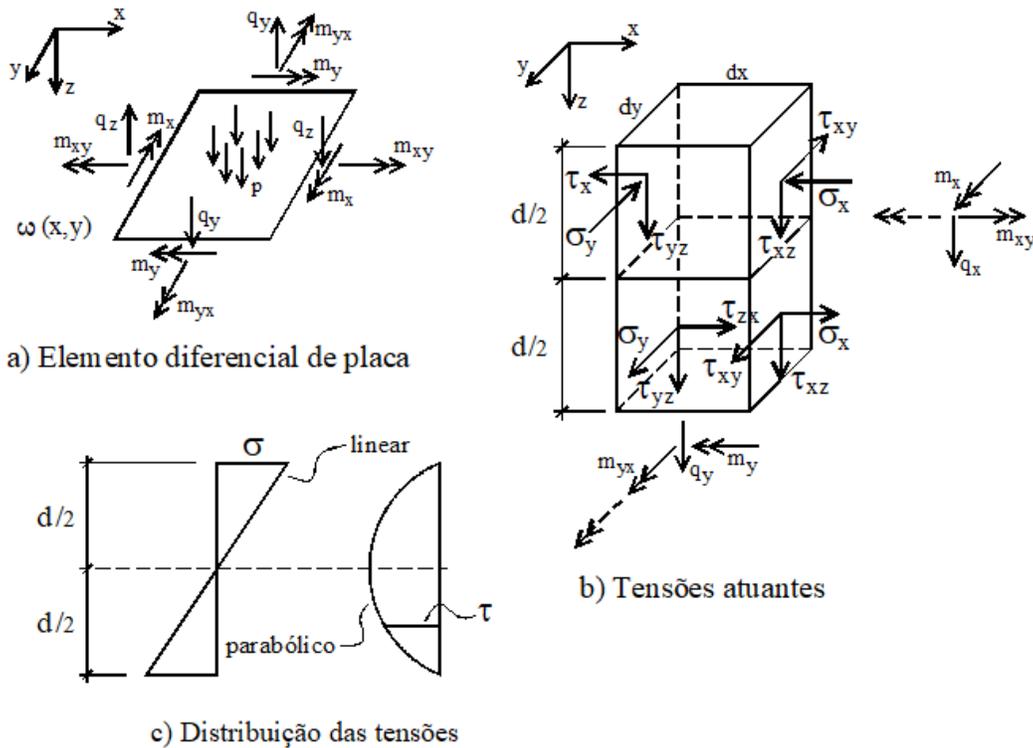


Figura 10.23

$$\begin{aligned}
 w &= w(x, y) \\
 u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 v &= -z \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{10.166}$$

onde  $w(x, y)$  é a deslocamento transversal da placa, ou ainda:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu/E_y & 0 \\ -\nu/E_x & 1/E_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}
 \tag{10.167}$$

onde se considera o caso de material ortótropo; e, com isso, tendo-se em conta (10,165) o expresso em (10.165) permite escrever-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} -D_x & -\nu_y D_x & 0 \\ -\nu_x D_y & -D_y & 0 \\ 0 & 0 & 2C \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ \partial^2 w / \partial x \partial y \end{array} \right\}
 \tag{10.168}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 D_x &= \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} \frac{d^3}{12} \\
 D_y &= \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \frac{d^3}{12} \\
 C &= G_{xy} \frac{d^3}{12}
 \end{aligned}
 \tag{10.169}$$

que consistem nos parâmetros da relação momento-curvatura das placas delgadas.

A Figura 10.24 exhibe a configuração de esforços atuantes num elemento infinitesimal de placa cujo equilíbrio se escreve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} &= q_x \\ \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} &= q_y \\ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} &= -p \end{aligned} \quad (10.170)$$

ou ainda, sabendo-se que:  $m_{xy} = -m_{yx}$ , o expresso em (10.170) resulta em:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -p \quad (10.171)$$

que consiste na denominada equação de compatibilidade das placas delgadas.

A Figura 10.25 a) ilustra o contorno genérico da placa com os momentos externos atuantes, e a Figura 10.25 b) a configuração de equilíbrio no contorno expresso por:

$$\begin{aligned} Q ds &= q_x dy - q_y dx \\ T_x ds &= m_y dx + m_{xy} dy \\ T_y ds &= m_x dy + m_{xy} dx \end{aligned} \quad (10.172)$$

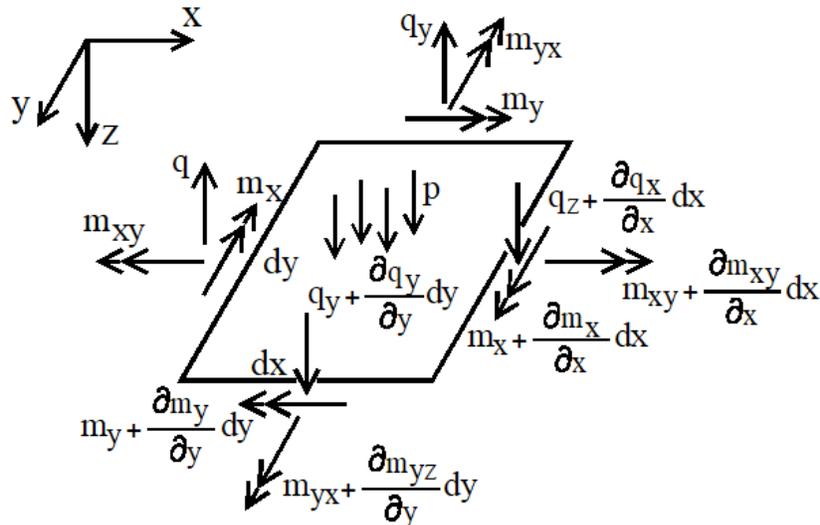
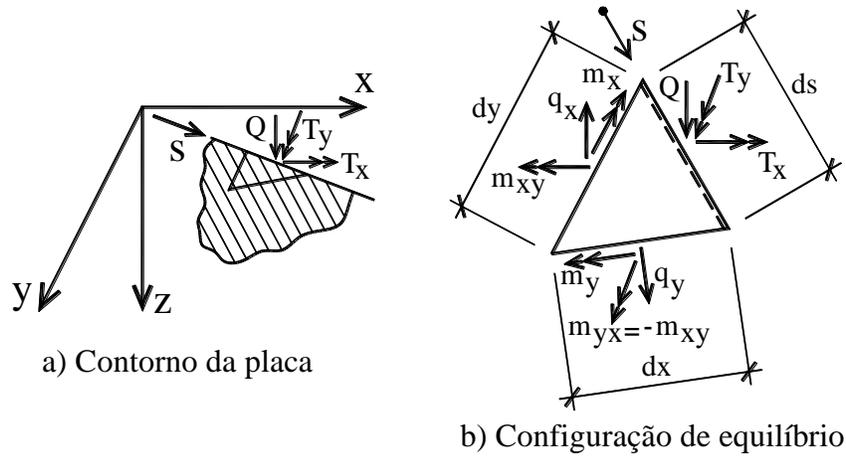


Figura 10.24



**Figura 10.25**

A formulação dos resíduos ponderados é então assim redigida:

$$\int_R \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \phi dx dy = \int_R -p \phi dx dy \quad (1.173)$$

cujas integrações por partes resultam:

$$\begin{aligned} \int_R \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} \phi dx dy &= \int_R m_x \phi_{xx} dx dy + \oint \frac{\partial m_x}{\partial x} \phi dy - \oint m_x \phi_x dy \\ \int_R \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \phi dx dy &= \int_R m_y \phi_{yy} dx dy - \oint \frac{\partial m_y}{\partial y} \phi dx - \oint m_y \phi_y dx \\ \int_R \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} \phi dx dy &= - \int_R m_{xy} \phi_{xy} dx dy + \left\{ \begin{aligned} & - \oint \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \phi dy - \oint m_{xy} \phi_x dy + \\ & \oint \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \phi dx + \oint m_{xy} \phi_y dy \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1.174)$$

sendo que a terceira das (1.174) decorre de se proceder a integração primeiro em x e depois em y e vice-versa, de sorte a se manter simetria; ganhando-se (1.173) uma nova redação, ou seja:

$$\begin{aligned} \int_R \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \phi dx dy &= \int_R (m_x \phi_{xx} - 2m_{xy} \phi_{xy} + m_y \phi_{yy}) dx dy + \\ \oint \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) \phi dy - \oint \left( \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) \phi dx - \oint (m_x dy + m_{xy} dx) \phi_x + \\ \oint (m_y dx + m_{xy} dy) \phi_y &= - \int_R p \phi dx dy \end{aligned} \quad (10.175)$$

ou ainda, tendo-se em conta (10.171):

$$\int_R (m_x \phi_{xx} - 2m_{xy} \phi_{xy} + m_y \phi_{yy}) dx dy = \oint (T_y \phi_x - T_x \phi_y) ds - \oint (Q \phi) ds - \int_R p \phi dx dy \quad (10.176)$$

resultando-se no caso de solução aproximada via Galerkin:

$$\int_R \left\{ \begin{matrix} \phi_{xx} & \phi_{yy} & \phi_{xy} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} -D_x & -v_y D_x & 0 \\ -v_x D_y & -D_y & 0 \\ 0 & 0 & 2C \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2 w^a}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w^a}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w^a}{\partial x \partial y} \end{matrix} \right\} dx dy = \quad (10.177)$$

$$\int_R p \phi dx dy - \oint \left\{ -\phi_y \quad \phi_x \right\} \left\{ \begin{matrix} T_x \\ T_y \end{matrix} \right\} ds - \oint \phi Q ds$$

já em forma matricial. A exemplo de (10.134) as matrizes de rigidez, de massa e de esforços podem ser igualmente formuladas.

A Figura 10.26 a) exhibe uma malha retangular genérica e a Figura 10.26 b) um elemento de placa com quatro nós de lados a e b e Figura 10.26 c) ilustra a primeira função de forma.

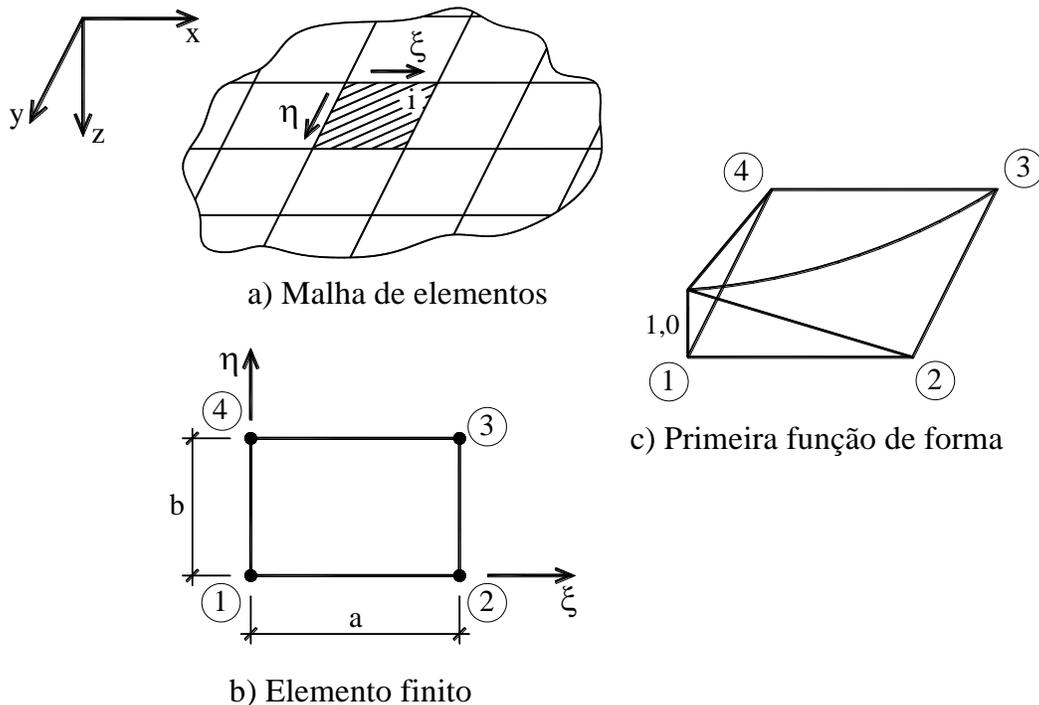


Figura 10.26

De sorte a se garantir a continuidade de deslocamento e rotação nas bordas, são considerados nos nós o deslocamento, rotações nas duas direções e mais a derivada mista e, assim sendo, as dezesseis funções de forma resultante são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= f_1(\xi)f_1(\eta) & \varphi_9 &= f_2(\eta)f_2(\xi) \\
 \varphi_2 &= af_1(\eta)g_1(\xi) & \varphi_{10} &= ag_2(\xi)f_2(\eta) \\
 \varphi_3 &= bf_1(\xi)g_1(\eta) & \varphi_{11} &= bf_2(\xi)g_2(\eta) \\
 \varphi_4 &= abg_1(\eta)g_1(\xi) & \varphi_{12} &= abg_2(\xi)g_2(\eta) \\
 \varphi_5 &= f_2(\xi)f_1(\eta) & \varphi_{13} &= f_1(\xi)f_2(\eta) \\
 \varphi_6 &= af_1(\eta)g_2(\xi) & \varphi_{14} &= ag_1(\xi)f_2(\eta) \\
 \varphi_7 &= bf_2(\xi)g_1(\eta) & \varphi_{15} &= bf_1(\xi)g_2(\eta) \\
 \varphi_8 &= abg_2(\xi)g_1(\eta) & \varphi_{16} &= abg_1(\xi)g_2(\eta)
 \end{aligned} \tag{10.178}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 f_1(\gamma) &= 1 - 3\gamma^2 + 2\gamma^3 \\
 f_2(\gamma) &= 3\gamma^2 - 2\gamma^3 \\
 g_1(\gamma) &= \gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3 \\
 g_2(\gamma) &= -\gamma^2 + \gamma^3
 \end{aligned} \tag{10.179}$$

são polinômios hermitianos cúbicos.

Todavia, mesmo o elemento não conforme, no qual a derivada mista nos nós não é levada em conta, com as seguintes funções de forma que violam a continuidade das rotações nas bordas, mas mesmo assim garantem a convergência da solução. Por essa razão é um elemento com convergência compatível com o elemento conforme de 16 graus de liberdade. Vale assinalar que uma série de elementos triangulares de placa foram desenvolvidos, com performance até melhores que esses retangulares, e que foram também objeto de apresentação em textos especializados:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 2(\eta - 1)(\xi - 1) \left( \frac{1}{2}(1 + \xi + \eta) - \xi^2 - \eta^2 \right) \\
 \varphi_2 &= a(\eta - 1)(\xi - 1)^2 \xi \\
 \varphi_3 &= b(\eta - 1)^2 (\xi - 1) \eta \\
 \varphi_4 &= 2(\eta - 1) \xi \left( \eta^2 + \xi^2 - \frac{3}{2} \xi - \frac{1}{2} \eta \right) \\
 \varphi_5 &= a(\eta - 1)(\xi - 1) \xi^2 \\
 \varphi_6 &= b(\eta - 1)^2 \xi \eta \\
 \varphi_7 &= 2\eta \xi \left( -\eta^2 - \xi^2 + \frac{3}{2}(\xi + \eta) - \frac{1}{2} \right) \\
 \varphi_8 &= a(\xi - 1) \xi^2 \eta \\
 \varphi_9 &= b\eta^2 (\eta - 1) \xi \\
 \varphi_{10} &= 2\eta (\xi - 1) \left( \eta^2 + \xi^2 - \frac{3}{2} \eta - \frac{1}{2} \xi \right) \\
 \varphi_{11} &= a\eta \xi (\xi - 1)^2 \\
 \varphi_{12} &= -b\eta^2 (\eta - 1)(\xi - 1)
 \end{aligned} \tag{10.180}$$

Para encerrar, vale ainda ressaltar que um elemento de casca folhiédrica pode ser obtido combinado o elemento de placa com as funções de forma (10.178) ou (10.180) com o elemento de chapa (10.134). Todavia existem várias outras formulações de elementos de cascas, como cascas parabólicas, de revolução e outras na literatura técnica especializada.

## APÊNDICE

### 10.9-Transformação de variáveis

Na exposição a seguir adota-se a notação empregada por Richard Courant em sua obra mais notável: Cálculo Diferencial e Integral. Sejam, pois, consideradas as seguintes variáveis independentes assim relacionadas:

$$\begin{aligned}
 x &= g(\xi, \eta) = g(\phi(x, y), \psi(x, y)) \\
 y &= h(\xi, \eta) = h(\phi(x, y), \psi(x, y)) \\
 \xi &= \phi(x, y) = \phi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) \\
 \eta &= \psi(x, y) = \psi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta))
 \end{aligned} \tag{10.181}$$

onde g e h são as funções que transformam as variáveis  $\xi$  e  $\eta$  nas variáveis x e y, ou ainda relaciona o sistema de referência cartesiano  $\xi\eta$  no sistema de referência

cartesiano  $xy$ ; e as funções  $\phi$  e  $\psi$  são as funções inversas que transformam as variáveis  $x$  e  $y$  nas variáveis  $\xi$  e  $\eta$ .

Cumprе adiantar que encontrar analiticamente as funções inversas não é tarefa trivial e, por essa razão o exame das derivadas é de importância primordial. Nesse sentido, aplicando-se a regra da cadeia de derivação tem-se, por exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial \xi} &= \phi_x g_\xi + \phi_y h_\xi = 1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \eta} &= \psi_x g_\xi + \psi_y h_\xi = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial \xi} &= \phi_x g_\eta + \phi_y h_\eta = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial \eta} &= \psi_x g_\eta + \psi_y h_\eta = 1\end{aligned}\tag{10.182}$$

na qual o índice denota a derivada parcial em relação à variável indicada.

Resolvendo as equações (10.182) tem-se, por exemplo:

$$\begin{aligned}g_\xi &= \psi_y / D \\ g_\eta &= -\phi_x / D \\ h_\xi &= -\psi_x / D \\ h_\eta &= \phi_x / D\end{aligned}\tag{10.183}$$

onde:

$$D = \phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x = \det. \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}\tag{10.184}$$

vem a ser o denominado jacobiano da transformação, que consiste no determinante da matriz jacobiana da transformação em questão. O expresso em (10.183) mostra que as derivadas da função inversa estão relacionadas de maneira simples com as derivadas da função original, embora não seja possível explicitar a própria função inversa. O expresso em (10.184) permite uma nova redação (vide (10.182)), ou seja:

$$D = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = \det. \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\tag{10.185}$$

ganhando-se o jacobiano uma nova notação mais apropriada. Por exemplo:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = \frac{\Psi_y \phi_x}{D} - \left( -\frac{\Psi_x}{D} \right) \left( -\frac{\phi_y}{D} \right) =$$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}} \quad (10.186)$$

mostrando-se que o jacobiano das funções inversas é recíproco do referente ao sistema original.

Sejam agora consideradas as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y) \\ \eta &= \psi(x, y) \\ u &= \Phi(\xi, \eta) = \Phi(\phi(x, y), \psi(x, y)) \\ v &= \Psi(\xi, \eta) = \Psi(\phi(x, y), \psi(x, y)) \end{aligned} \quad (10.187)$$

e as seguintes derivadas (funções compostas):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \Phi_\xi \phi_x + \Phi_\eta \psi_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \Phi_\xi \phi_y + \Phi_\eta \psi_y \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \Psi_\xi \phi_x + \Psi_\eta \psi_x \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \Psi_\xi \phi_y + \Psi_\eta \psi_y \end{aligned} \quad (10.188)$$

ou seja, o jacobiano da transformação de u e v em x e y resulta, tendo-se em conta (10.188), após as operações de multiplicação:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = (\Phi_\xi \Psi_\eta - \Phi_\eta \Psi_\xi) (\phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x) \quad (10.189)$$

mostrando-se a propriedade básica do jacobiano, que consiste no fato de que o jacobiano da transformação resultante é igual ao produto dos jacobianos das transformações individuais, ou simbolicamente:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \quad (10.190)$$

mostrando-se a utilidade sugestiva da notação exposta em (10.184).

Nesse ponto da apresentação é oportuno assinalar que é fácil mostrar que no caso de transformações gerais, o sentido da rotação dos eixos será invertido ou conservado, conforme o sinal do jacobiano for negativo ou positivo. Em outras palavras, é preciso um estudo pormenorizado no caso do jacobiano mudar de sinal na região de interesse.

Voltando-se a atenção agora para o caso de integração dupla tem-se, por exemplo, a seguinte relação:

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_{R'} f(\phi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \quad (10.191)$$

onde tem-se em conta a transformação:

$$\begin{aligned} x &= \phi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \quad (10.192)$$

cujo jacobiano se expressa:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \phi_u \psi_v - \phi_v \psi_u \quad (10.193)$$

verificando-se mais uma vez a utilidade sugestiva da notação exposta em (10.185).

No sentido de se demonstrar de maneira expedita a relação exposta em (10.191), é conveniente de início proceder a decomposição da transformação (10.192) em duas mais simples, quais sejam:

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= \Phi(v, x) \end{aligned} \quad (10.194)$$

cujo jacobiano é dado por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, v)} = \det \begin{vmatrix} x_x & x_v \\ y_x & y_v \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Phi_v \end{vmatrix} = \Phi_v \quad (10.195)$$

e depois proceder a transformação:

$$\begin{aligned} x &= \Psi(u, v) \\ v &= v \end{aligned} \quad (10.196)$$

com o jacobiano:

$$\frac{\partial(x, v)}{\partial(u, v)} = \det \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ v_x & v_v \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \Psi_u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \Psi_u \quad (10.197)$$

resultando:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,v)} \frac{\partial(x,v)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \Phi_v \Psi_u \quad (10.198)$$

tendo-se em conta o exposto em (10.190).

A Figura 10.27 exhibe a configuração de uma região  $R_i$  no plano  $xy$ , providenciada pela primeira transformação, ficando claro que a área dessa região é expressa por:

$$\Delta R_i = \int_x^{x+h} (\Phi(v+k,x) - \Phi(v,x)) dx \quad (10.199)$$

ou ainda, tendo-se em conta o teorema do valor médio:

$$\Delta R_i = (\Phi(v+k, x_v) - \Phi(v, x_v)) h \quad (10.200)$$

onde  $x_v$  é um valor situado entre  $x$  e  $x+h$ . Também pelo teorema do valor médio o expresso em (10.200) ganha uma nova redação, ou seja:

$$\Delta R_i = \Phi_v(v_\mu, x_v) kh \quad (10.201)$$

onde  $v_\mu$  é um valor situado entre  $v$  e  $v+k$ . Assim sendo, a integral de uma função  $f(x,y)$  na região  $R$  do plano  $xy$  pode ser expressa por:

$$\sum f_i \Delta R_i = \sum h k f(x_v, \Phi(v_\mu, x_v)) \Phi_v(\bar{x}, \bar{v}) \quad (10.202)$$

sendo que, no limite com  $h$  e  $k$  tendendo para zero, (10.202) se expressa:

$$\int_B f(x, \Phi(v, x)) \Phi_v(v, x) dx dv \quad (10.203)$$

que vem a ser uma integral da função em apreço no domínio  $XV$ , região denominada  $B$ . ou seja:

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_B f(x, \Phi(v, x)) \Phi_v(v, x) dx dv \quad (10.204)$$

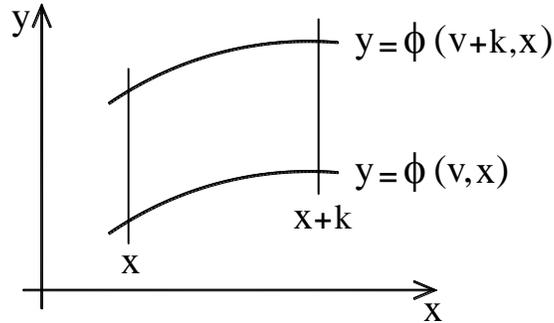
restando-se agora providenciar a integração do expresso no segundo membro de (10.204) no domínio  $uv$  mediante a transformação (10.197) seguindo-se os passos anterior, resultando:

$$\int_{\mathcal{R}} f(x,y) dx dy = \int_{\mathcal{B}} f(x, \Phi(v,x)) \Phi_v(v,x) dx dv =$$

$$\int_{\mathcal{B}} f(\Psi(u,v), \Phi(v, \Psi(u,v))) \Phi_v(v, \Psi(u,v)) \Psi_u du dv = \int_{\mathcal{R}'} f(x,y) \Phi_v \Psi_u dx dy = \quad (10.205)$$

$$\int_{\mathcal{R}'} f(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv$$

tendo-se em vista o exposto em (10.198).



**Figura 10.27**

Para finalizar, vale assinalar que a extensão do aqui exposto para a consideração de maior número de variáveis (3 ou mais) decorre do princípio da indução.

## CAPÍTULO XI

# PROPAGAÇÃO DE ONDA NÃO LINEAR UNIDIMENSIONAL

### 11.1-Introdução

A questão da propagação de onda elástica não linear tem sido assunto muito estudado na literatura científica, especialmente em geofísica, área na qual a hipótese adotada é a da teoria das deformações finitas com pequenos deslocamentos, como apresentadas por Apostol<sup>1</sup>, McCall<sup>2</sup> [2] e Kosevich<sup>3</sup>. Em outras palavras, a não linearidade decorre apenas da consideração de grandes deformações. Por outro lado, a consideração de grandes deslocamentos acrescenta à essa teoria o fato de ser o equilíbrio formulado na posição deslocada, e, com isso, a abordagem consistente do problema passa a envolver o tensor das tensões denominado Piola-Kirchhoff, que é o conjugado energético da tensão real (tensor de Cauchy) segundo a variável da posição de repouso (variável do sistema de referência original), e que consiste no conceito central da teoria dos grandes deslocamentos. A não linearidade pode também ocorrer com a consideração de pequenas deformações com grandes deslocamentos (problema da elástica de Euler).

No caso da onda elástica não linear com pequenos deslocamentos, soluções semi-analíticas envolvendo funções elíticas no tempo e extensão analítica da função beta no espaço têm sido propostas [1], em especial mediante a técnica de separação de variáveis, que será objeto também de apresentação. O método dos elementos finitos vai ser desenvolvido no presente texto como último tópico tanto para a formulação com grandes deformações e deslocamentos pequenos, como para a formulação com grandes deformações e grandes deslocamentos, empregando-se a formulação posicional desenvolvida por Coda<sup>4</sup>.

---

<sup>1</sup> Apostol B.F. *On a non-linear wave equation in elasticity*, Phys. Lett. (2003)

<sup>2</sup> McCall K.R. *Theoretical study of nonlinear elastic wave*, Geophys. Res. (1994)

<sup>3</sup> Kosevich Y. A. *Nonlinear Sinusoidal waves and their superposition in lattices*, Phys. Rev.Lett. (1993)

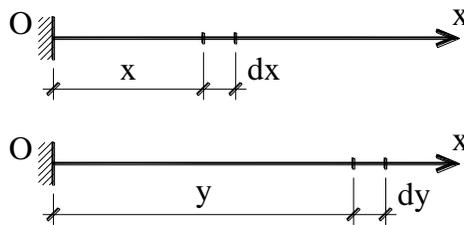
<sup>4</sup> Coda H.B. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas*, Notas de Aula, Esc. Eng. São Carlos, USP (2003)

### 11.2-Onda não linear

A Figura 11.1 exibe um meio contínuo semi-infinito sob movimento unidimensional com sistema de referência  $Ox$ , sendo  $x$  a coordenada da posição de repouso dos pontos da barra. Assim, um ponto do meio contínuo de coordenada  $x$  na posição original indeformada passa a ter posição  $y$  após a movimentação, como indicado na Figura 11.1. A movimentação de todos os pontos fica, pois, caracterizada pela função:

$$y = y(x,t) \quad (11.1)$$

suposta contínua nas variáveis espaço  $x$  e tempo  $t$ , de modo a garantir a continuidade do meio após a movimentação. Embora a nova posição seja função das variáveis espaço e tempo, doravante vai ser designada simplesmente por  $y$ , no sentido de simplificar a notação.



**Figura 11.1- Configuração do movimento**

Uma fibra de comprimento original  $dx$  passa a ter comprimento  $dy$ , e com isso a deformação (mudança de forma) linear e não linear assim se expressam:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\ell &= \frac{dy - dx}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1 \\ \varepsilon_{nl} &= \frac{1}{2} \left( \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 \right) \end{aligned} \quad (11.2)$$

que são duas formas adimensionais para a deformação; a deformação linear é clássica e aplicável para pequenas deformações (algo como  $\varepsilon_\ell \approx 10^{-3}$ ), também chamada de deformação de Cauchy, e a não linear, conhecida como deformação de Green, é aplicável para deformações finitas (não infinitésimas). Todavia para pequenas deformações a deformação de Green coincide com a linear uma vez que:

$$\varepsilon_{nl} = \frac{1}{2} \left( \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{dy - dx}{dx} \right) \left( \frac{dy + dx}{dx} \right) \cong \left( \frac{dy - dx}{dx} \right) \quad (11.3)$$

sabendo-se que para pequenas deformações  $dy \cong dx$ .

Por outro lado, os diferenciais das deformações expressos em (11.2) assim se escrevem:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_\ell &= \frac{dy + \Delta dy - dx}{dx} - \frac{dy - dx}{dx} = \frac{\Delta dy}{dx} \\ \Delta \varepsilon_{nl} &= \frac{1}{2} \left( \frac{(dy + \Delta dy)^2 - dx^2}{dx^2} - \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} \right) = \frac{dy}{dx} \frac{\Delta dy}{dx} \end{aligned} \quad (11.4)$$

Mostrando que o diferencial da deformação não linear de Green é igual ao diferencial da deformação linear multiplicada pela derivada primeira em relação à variável  $x$  da função que mapeia o deslocamento.

O princípio da conservação da massa é expresso por:

$$\rho(y) = \rho(x) \frac{dx}{dy} \quad (11.5)$$

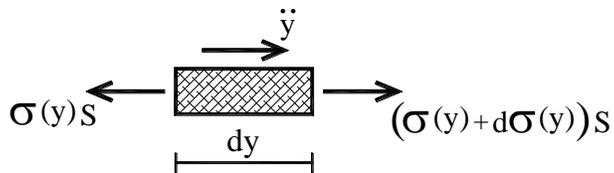
onde  $\rho(x)$  e  $\rho(y)$  são respectivamente a densidade de massa na posição inicial  $x$  e final  $y$ .

A Figura 11.2 exhibe a configuração diferencial de equilíbrio na posição final. O equilíbrio dinâmico fica então:

$$-\sigma(y) + [\sigma(y) + d\sigma(y)] = \rho(y) dy \ddot{y} \quad (11.6)$$

Emprega-se em (11.6) a notação clássica de derivação no tempo por pontos superiores, ou ainda:

$$\frac{d\sigma(y)}{dy} = \rho(y) \ddot{y} \quad (11.7)$$



**Figura 11.2- Configuração de Equilíbrio**

que consiste numa equação diferencial na variável  $y$ . Sucede que a posição  $y$  é função de  $x$ , a densidade  $\rho(y)$  pode ser expressa em termos da variável  $x$  via expressão (11.5), mas a tensão  $\sigma(y)$  ainda não. **O ponto crucial da teoria considerando-se grandes deslocamentos consiste exatamente em como**

**encontrar uma tensão equivalente em função da variável original  $x$ .** Essa equivalência é encontrada de maneira consistente igualando-se a variação da energia de deformação na posição final  $y$  com uma variação equivalente da energia de deformação na posição inicial  $x$ , tendo-se em conta a deformação não linear de Green, que se expressa em termos da variável  $x$ , ou seja:

$$S(x) \left[ \frac{dy}{dx} \frac{\Delta dy}{dx} \right] dx = \sigma(y) \left[ \frac{\Delta dy}{dy} \right] dy \quad (11.8)$$

onde  $S(x)$  é o tensor de tensão correspondente ao tensor da deformação de Green.

Já a tensão real na posição deformada  $\sigma(y)$  trabalha consistentemente na deformação de Cauchy ( $\Delta dy / dy$ ). A expressão (11.8) permite, pois, concluir que:

$$\sigma(y) = S(x) \frac{dy}{dx} \quad (11.9)$$

e, com isso, a equação de equilíbrio (11.7), tendo-se em conta o expresso em (11.5) passa a escrever-se:

$$\frac{d}{dy} \left( S(x) \frac{dy}{dx} \right) = \rho(x) \frac{dx}{dy} \ddot{y} \quad (11.10)$$

ou ainda:

$$\frac{d}{dx} \left( S(x) \frac{dy}{dx} \right) \frac{dx}{dy} = \rho(x) \frac{dx}{dy} \ddot{y} \quad (11.11)$$

e finalmente:

$$\frac{d}{dx} \left( S(x) \frac{dy}{dx} \right) = \rho(x) \ddot{y} \quad (11.12)$$

cumprindo-se registrar que o tensor indicado no segundo membro de (11.9) é o denominado segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff.

Adotando-se o modelo reológico linear decorrente da energia de deformação expressa em termos dos dois primeiros invariantes de tensão, ou seja:

$$E = \frac{\lambda + 2G}{2} I_1^2 - 2GI_2 \quad (11.13)$$

onde nesse caso os invariantes de deformação  $I_1$  e  $I_2$  se expressam:

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_{n\ell} \\ I_2 &= 0 \end{aligned} \quad (11.14)$$

tendo-se em conta ser considerado que o estado de deformação só contempla deformação segundo Ox. Assim sendo, o seguinte tensor de tensão correspondente à deformação de Green pode ser expresso como:

$$S(x) = \frac{dE}{d\varepsilon_{n\ell}} = (\lambda + 2G)\varepsilon_{n\ell} = (\lambda + 2G) \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 \right] \quad (11.15)$$

e, com isso, a equação de equilíbrio dinâmico (11.12) ganha a seguinte redação:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\lambda + 2G}{2} \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 \right] \frac{dy}{dx} \right] - \rho \ddot{y} = 0 \quad (11.16)$$

fechando-se assim a equação procurada.

Embora a equação (11.6) seja mais abrangente pela consideração de grandes deslocamentos, com o equilíbrio sendo formulado na posição deformada (eq. (11.7)), no que se segue o desenvolvimento vai ser dedicado à solução semi-analítica proposta para pequenos deslocamentos e grandes deformações apresentada por Apostol, bem como o desenvolvimento do elemento finito correspondente. Em verdade, tal formulação toma por base nesse caso uniaxial o chamado tensor das tensões correspondente ao tensor das deformações de Green.

Assim, o equilíbrio dinâmico (11.16) passa a ser expresso por:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\lambda + 2G}{2} \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 \right] \right] - \rho \ddot{y} = 0 \quad (11.17)$$

que consiste no limite da clássica equação de Fermi-Pasta-Uslam<sup>5</sup> (equação formulada em termos de diferenças finitas).

---

<sup>5</sup> Smith G.D. *Numerical Solution of partial differential equations: finite difference methods*, Clarenton Press – Oxford (1978)

Derivando-se em relação à variável  $x$  o expresso em (11.17), considerando-se densidade constante da massa, tem-se:

$$v^2 \left[ \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \frac{d^3 y}{dx^3} \right] = \frac{d}{dx} \ddot{y} \quad (11.18)$$

onde

$$v = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (11.19)$$

sendo  $v$  a velocidade da onda de compressão.

Definindo-se agora:

$$U(x) = \frac{dy}{dx} \quad (11.20)$$

a equação (11.18) ganha a seguinte redação:

$$\frac{v^2}{2} \frac{d^2 U^2(x)}{dx^2} = \ddot{U}(x) \quad (11.21)$$

cuja integração será feita empregando-se a técnica da separação de variáveis, ou seja:

$$U = g(t)f(x) \quad (11.22)$$

e, assim sendo, a equação (11.21) permite a seguinte redação:

$$\frac{v^2}{2} \frac{\frac{d}{dx^2} f(x)^2}{f(x)} = \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)^2} = \frac{3}{2} \omega^2 \quad (11.23)$$

onde  $3\omega^2 / 2$  é a constante de separação, resultando-se:

$$\ddot{g}(t) - \frac{3}{2}\omega^2 g^2(t) = 0 \quad (11.24)$$

$$\frac{d}{dx^2} f^2(x) - 3\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 f(x) = 0$$

que se constituem em duas equações diferenciais não lineares nas variáveis tempo e espaço, agora desacopladas. Cumpre notar que a primeira de (11.24) indica que a derivada segunda de  $g$  é sempre positiva ( $\ddot{g} \geq 0$ ). A integração da equação (11.20), tendo-se em vista o expresso em (22), permite explicitar a solução do movimento  $y$  na forma:

$$y = g(t) \int_0^x f(x) dx + c \quad (11.25)$$

onde  $c$  é uma constante de integração.

### 11.3-Integração no tempo da primeira de (11.24)

As condições iniciais na integração da primeira de (11.24) são assumidas, sem perda de generalidade, como sendo:

$$\begin{aligned} g(0) &= -s \\ \dot{g}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (11.26)$$

Procedendo-se a integração da primeira de (11.24) como indicada abaixo:

$$\int_{g(0)=-s}^{g(t)} \ddot{g}(t) dg(t) = \int_{g(0)}^{g(t)} \ddot{g}(t) \dot{g}(t) dt = \int_{g(0)}^{g(t)} \dot{g}(t) d\dot{g}(t) = \left[ \frac{\dot{g}^2(t)}{2} \right]_{\dot{g}(0)=0}^{\dot{g}(t)} = \quad (11.27)$$

$$\frac{3}{2}\omega^2 \int_{g(0)=-s}^{g(t)} g^2(t) dg(t) = \frac{3}{2} \left[ \frac{g^3(t)}{3} \right]_{-s}^{g(t)}$$

visto que  $d\dot{g}(t) = \ddot{g}(t)dt$ . O expresso em (11.27) fica então:

$$\dot{g}^2(t) = \omega^2 [g^3(t) + s^2] \quad (11.28)$$

ou seja:

$$\dot{g}(t) = \omega \sqrt{g^3(t) + s^3} \quad (11.29)$$

ou ainda:

$$dg(t) = \omega dt \sqrt{g^3(t) + s^3} \quad (11.30)$$

e também

$$\int_{-s}^{g(t)} \frac{dg(t)}{\sqrt{g^3(t) + s^3}} = \omega t \quad (11.31)$$

Definindo-se uma nova função adimensional relacionada com a função  $g(t)$  na seguinte forma:

$$\eta(t) = \frac{g(t)}{s} \geq -1 \quad (11.32)$$

tendo-se, pois, a condição inicial:

$$\eta(0) = -1 \quad (11.33)$$

e com isso o expresso em (11.31) passa a escrever-se:

$$\int_{-1}^{\eta(t)} \frac{d\eta(t)}{\sqrt{\eta^3(t) + 1}} = \omega t \sqrt{s} \quad (11.34)$$

Definindo-se uma nova função  $\alpha(t)$  de tal modo que:

$$\sqrt{3} \tan^2 \left( \frac{\alpha(t)}{2} \right) = \eta(t) + 1 \quad (11.35)$$

o expresso em (11.34) resulta, após operações algébricas, na clássica integral elítica de primeira espécie:

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha(t)}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(\alpha(t))}} = \omega t^4 \sqrt{3} \sqrt{s} \quad (11.36)$$

onde;

$$k^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \quad (11.37)$$

$$\sqrt{3} \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1 + \eta(t)$$

verificando-se, pois,  $k^2 \leq 1$ . O expresso em (11.32) e a segunda de (11.37) permitem explicitar  $g(t)$  na forma:

$$g(t) = s \left[ \sqrt{3} \frac{\text{sen}^2(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} - 1 \right] = s \left[ \sqrt{3} \frac{1 - \cos(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} - 1 \right] \quad (11.38)$$

Por outro lado, o expresso em (11.36) permite definir a função elítica denominada seno-amplitude de Jacobi, ou seja:

$$\text{sen}(\varphi) = \text{sn}(\omega t^4 \sqrt{3} \sqrt{s}) \quad (11.39)$$

e, assim sendo, a solução buscada se expressa em termos da função elítica cosseno-amplitude:

$$g(t) = s \left[ \sqrt{3} \frac{1 - \text{cn}(\omega t^4 \sqrt{3} \sqrt{s})}{1 + \text{cn}(\omega t^4 \sqrt{3} \sqrt{s})} - 1 \right] \quad (11.40)$$

A integral completa de primeira espécie  $F(\pi/2, k)$  para valor de  $k$  expresso na primeira de (11.37), ou seja:

$$k = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = 0.9659 \quad (11.41)$$

resulta:

$$F(\pi/2, k) = 2.768 \quad (11.42)$$

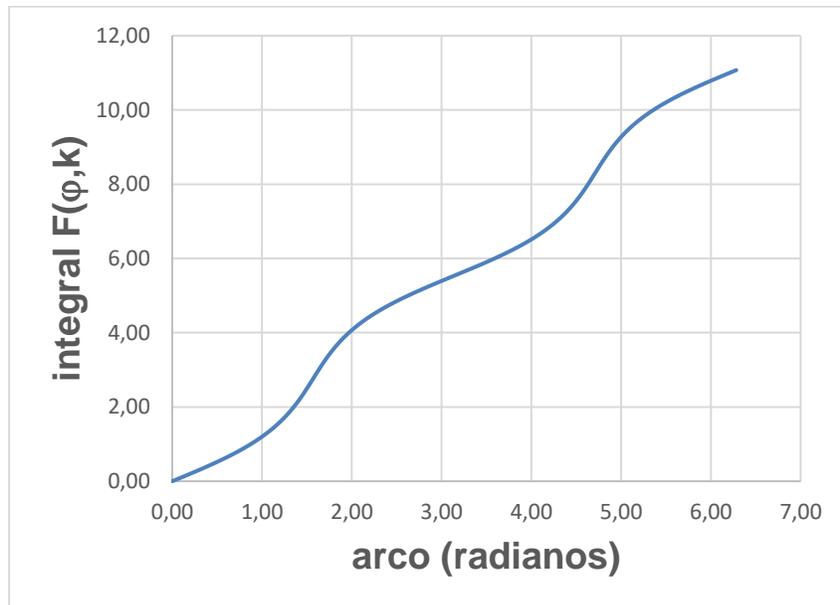
indicando-se que a periodicidade da solução expressa em (11.40) vale:

$$\omega t \sqrt[4]{3} \sqrt{s} = 4 \times 2.768 = 11.072 \quad (11.43)$$

encerrando-se assim a integração em questão.

A Figura 11.3 ilustra a integral elítica para  $k = \sqrt{(2 + \sqrt{3})}/4 = 0.9659$ , com arco variando de zero a  $2\pi$ .

A Figura 11.4 exhibe em gráfico um período (elítico) da função  $g(t)$ , com período sendo adotado  $T=0.346s$ , e a condição inicial  $s$  assumindo o valor 0.04. A escala da ordenada foi adotada  $\sqrt[5]{g(t)}$ , no sentido de realçar os valores pequenos e diminuir os valores grandes, de modo a acomodar a curva num gráfico de melhor visualização. Cumpre assinalar que a função  $g(t)$  apresenta singularidade nos dois tempos:  $t=0.1s$  e  $t=0.295s$ .



**Figura 11.3 Integral Elítica**

#### 11.4-Integração no espaço da segunda de (24)

Na integração da segunda de (11.22), as condições de contorno são assumidas, sem perda de generalidade, como sendo:

$$\begin{aligned} f(x=0) &= h \\ f'(x=0) &= 0 \end{aligned} \tag{11.44}$$

valendo-se assinalar que as duas condições são dadas na origem, por ser o movimento em princípio uma onda caminhando no semi-espaço positivo.

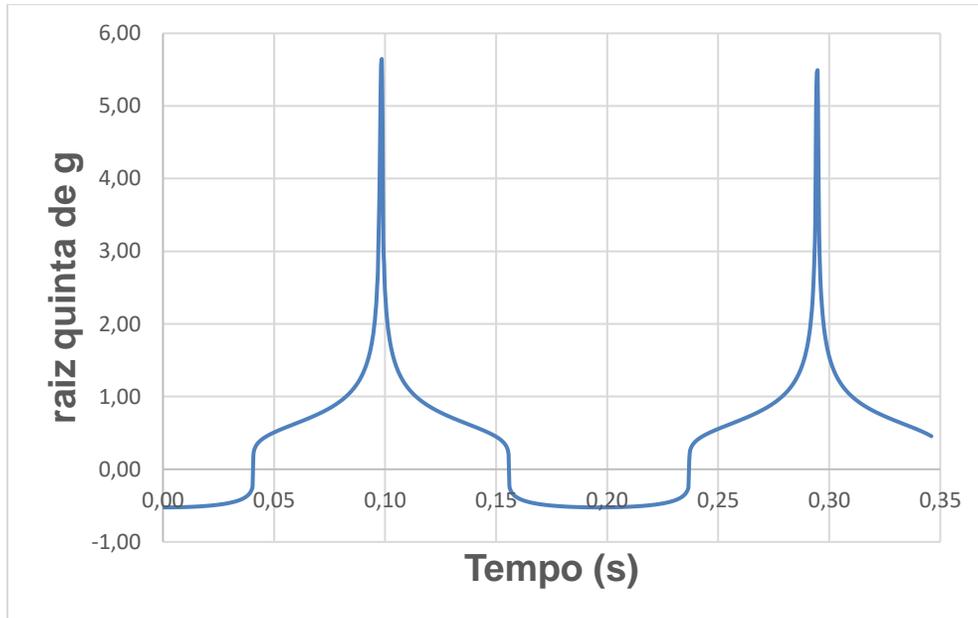


Figura 11.4 Gráfico de  $g(t)$

Para se levar a efeito a integração em apreço, inicialmente adota-se a seguinte transformação:

$$F(x) = \left( \frac{f(x)}{h} \right)^2 \tag{11.45}$$

valendo-se assinalar que tal função é sempre positiva ( $F(x) \geq 0$ ); e com isso a segunda de (11.24) ganha a seguinte redação:

$$\frac{d}{dx^2} F(x) = \frac{3}{h} \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 (F(x))^{1/2} \tag{11.46}$$

Assim, procedendo-se a integração de (11.46) como a seguir:

$$\int_0^x \frac{d}{dx^2} F(x) dF(x) = \frac{3}{h} \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 \int_0^x (F(x))^2 dF(x) \quad (11.47)$$

resulta:

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dx} F(x) \right)^2 \right]_{\frac{d}{dx} F(0)}^{\frac{d}{dx} F(x)} = \left[ \frac{2}{h} \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 (F(x))^{3/2} \right]_{F(0)}^{F(x)} \quad (11.48)$$

mas, por outro lado, sabendo-se que:

$$F(0) = \left( \frac{f(0)}{h} \right)^2 = 1 \quad (11.49)$$

$$\frac{d}{dx} F(0) = 2 \frac{f(0)}{h^2} \frac{d}{dx} f(0) = 0$$

o expesso em (11.48) permite que se escreva:

$$\left( \frac{d}{dx} F(x) \right)^2 = \frac{4}{h} \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 \left[ (F(x))^{3/2} - 1 \right] \quad (11.50)$$

implicando-se em  $(f(x))^{3/2} \geq 1$ . Adotando-se agora uma nova função de x do tipo:

$$\beta(x) = (F(x))^{3/2} - 1 \quad (11.51)$$

que é sempre positiva em decorrência de (11.50), o expesso em (11.51) ganha uma nova redação, ou seja:

$$\left[ \frac{d}{d\beta(x)} (1 + \beta(x)) \frac{d}{dx} \beta(x) \right]^2 = \frac{4}{h} \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 \beta(x) \quad (11.52)$$

resultando:

$$\left[ (1 + \beta(x)) \right]^{-1/3} \frac{2}{3} \frac{d}{dx} \beta(x) = \frac{2}{v\sqrt{h}} \sqrt{\beta(x)} \quad (11.53)$$

ou ainda:

$$\left[1 + \beta(x)\right]^{-1/3} (\beta(x))^{-1/2} d\beta(x) = \frac{3\omega}{v\sqrt{h}} dx \quad (11.54)$$

que, mediante integração, resulta:

$$\int_0^{\beta(x)} \left[1 + \beta(x)\right]^{-1/3} (\beta(x))^{-1/2} d\beta(x) = \frac{3\omega x}{v\sqrt{h}} \quad (11.55)$$

cujo integrando apresenta singularidade para  $\beta(x)$  nulo. No sentido de se evitar essa singularidade a integração por partes de (11.55) permite redigir:

$$\left[2(\beta(x))^{1/2} \left[1 + \beta(x)\right]^{-1/3}\right]_0^{\beta(x)} + \int_0^{\beta(x)} \frac{2}{3} (\beta(x))^{1/2} \left[1 + \beta(x)\right]^{4/3} d\beta(x) = \frac{3\omega x}{v\sqrt{h}} \quad (11.56)$$

que consiste numa equação implícita na determinação da função  $\beta(x)$ . Uma outra formulação implícita pode ser obtida fazendo-se  $\gamma(x) = -\beta(x)$  em (11.55) resultando:

$$B_{-\beta(x)}\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = 2\sqrt{\beta(x)} G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}; -\beta(x)\right) = \frac{3\omega}{v\sqrt{h}} \quad (11.57)$$

onde  $B_{-\beta(x)}$  é a extensão analítica da função beta e G a função hipergeométrica de Gauss. Todavia, o emprego de (11.57) só é viável para valores pequenos de  $\beta(x)$ , uma vez que a série de Taylor da extensão analítica da função beta em questão assim se expressa:

$$B_{-\beta(x)} = 1 + \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{3}}{\frac{2}{2}} (-\beta(x)) + \frac{\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{3} \frac{4}{3}}{\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{1}{2}} (-\beta(x))^2 + \dots \quad (11.58)$$

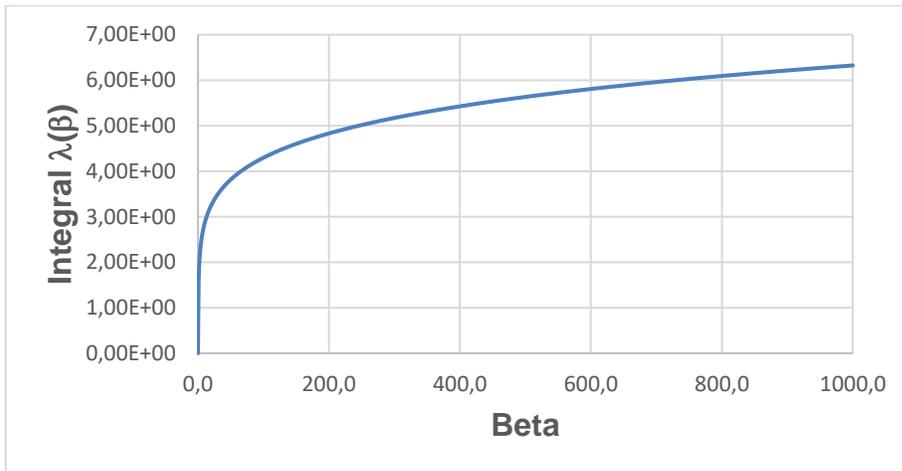
com forte convergência apenas para  $\beta(x) \leq 1$ .

A Figura 11.5 exhibe a função (primeiro membro de (11.56)), ou seja:

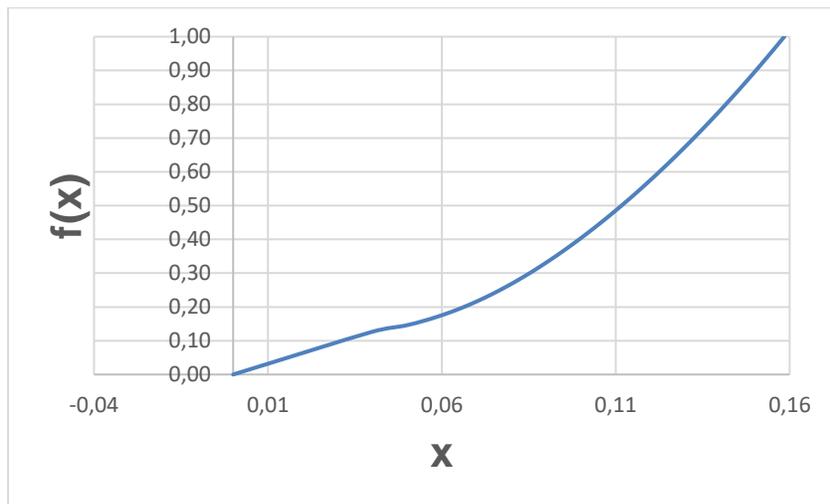
$$\lambda(\beta(x)) = \left[2(\beta(x))^{1/2} \left[1 + \beta(x)\right]^{-1/3}\right]_0^{\beta(x)} + \int_0^{\beta(x)} \frac{2}{3} (\beta(x))^{1/2} \left[1 + \beta(x)\right]^{4/3} d\beta(x) \quad (11.59)$$

para valores  $\beta(x)$  variando de zero a 1000.

Considerando-se o caso de uma borracha de silicone com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade de  $0.88 \text{ MP}_a$ , coeficiente de Poisson de  $0.1313 \text{ MP}_a$  tem-se o módulo de elasticidade  $G=0.39 \text{ MP}_a$  e  $\lambda=0.138 \text{ MP}_a$ ; e densidade  $\rho = 1.1 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$ . Com isso, para  $h=0.1\text{m}$  resulta  $v= 28,9 \text{ m/s}$ . A Figura 11.6 exibe os valores de  $f(x)$ , para aquele intervalo considerado para a função  $\lambda(\beta(x))$ . A Figura 11.7 mostra a posição  $y(x, t)$  nos termos da integração expressa em (11.25) com a condição  $y(x = 0) = 0$ .



**Figura11. 5- Integral expressa em (11.5)**



**Figura 11.6 Função f(x)**

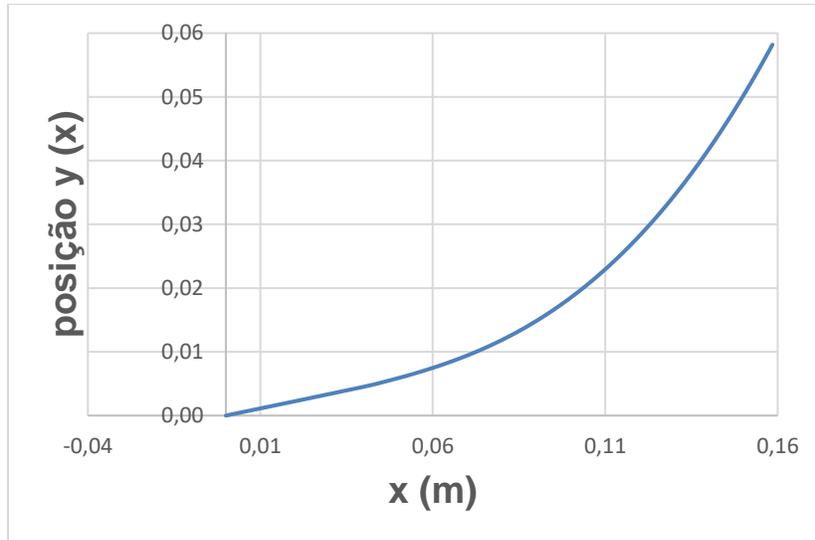


Figura 11.7 Posição \$y(x)\$

### 11.5-Integração pelo método dos elementos finitos via formulação de Galerkin

Retomando-se a equação de equilíbrio para grandes deformações e pequenos deslocamentos (11.17) e ponderando-se com uma função genérica \$\phi(x)\$, ou seja:

$$\int_0^{\ell} \frac{\lambda + 2G}{2} \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{dy(x,t)}{dx} \right)^2 - 1 \right] \phi(x) dx - \int_0^{\ell} \rho \ddot{y}(x,t) \phi(x) dx = 0 \quad (11.60)$$

a integração por partes permite redigir:

$$\left[ \frac{\lambda + 2G}{2} \left[ \left( \frac{dy(x,t)}{dx} \right)^2 - 1 \right] \phi(x) \right]_0^{\ell} - \int_0^{\ell} \frac{\lambda + 2G}{2} \left[ \left( \frac{dy(x,t)}{dx} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\phi(x)}{dx} dx - \int_0^{\ell} \rho \ddot{y}(x,t) \phi(x) dx = 0 \quad (11.61)$$

sendo \$\ell\$ a dimensão do domínio do espaço a ser considerada.

O exposto em (11.61) permite formular a expressão básica do método dos elementos finitos via Galerkin, qual seja:

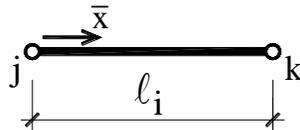
$$\int_0^{\ell} \frac{\lambda + 2G}{2} \left[ \left( \frac{dy_a(x,t)}{dx} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\phi(x)}{dx} dx + \int_0^{\ell} \rho \ddot{y}_a(x,t) \phi(x) dx =$$

$$\left[ \frac{\lambda + 2G}{2} \left[ \left( \frac{dy(x,t)}{dx} \right)^2 - 1 \right] \phi(x) \right]_0^{\ell} \quad (11.62)$$

na qual se trabalha com a função aproximada  $y_a(x,t)$ , mas, no segundo membro de (11.60), trabalha-se com função exata do tensor, de modo que o resíduo de domínio somado ao resíduo do contorno se anule (formulação de Galerkin). Além disso, tendo-se em conta a integração por partes de (11.61), a função ponderadora  $\phi(x)$  deve ser contínua, de modo a não se ter singularidade em sua derivada.

No presente texto a atenção é voltada para desenvolvimento do clássico elemento finito não linear de dois nós. A Figura 11.8 mostra um elemento finito genérico de comprimento  $\ell_i$  e seus nós de extremidade  $j$  e  $k$ , com eixo coordenado local  $\bar{x}$ . A função aproximada adotada para a posição  $y(x,t)$  no domínio do elemento contemplando dois graus de liberdade assim se expressa, em notação vetorial:

$$y_a(\bar{x},t) = \{ \varphi_1(\bar{x}) \quad \varphi_2(\bar{x}) \} \begin{Bmatrix} y_j(t) \\ y_k(t) \end{Bmatrix} \quad (11.63)$$



**Figura 11.8- Elemento finito**

onde  $y_j(t)$  e  $y_k(t)$  são as posições ao longo do tempo dos nós  $j$  e  $k$ , e as funções de forma ao longo do espaço expressas por:

$$\varphi_1(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{\ell_i}$$

$$\varphi_2(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{\ell_i} \quad (11.64)$$

e, assim sendo, a primeira derivada da função aproximada fica:

$$\frac{d}{d\bar{x}} y_a(\bar{x}, t) = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\ell_i} & \frac{1}{\ell_i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y_j(t) \\ y_k(t) \end{Bmatrix} \quad (11.65)$$

bem como a segunda derivada no tempo:

$$\frac{d^2}{dt^2} y_a(\bar{x}, t) = \begin{Bmatrix} \varphi_1(\bar{x}) & \varphi_2(\bar{x}) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_j(t) \\ \ddot{y}_k(t) \end{Bmatrix} \quad (11.66)$$

registrando-se tratar-se de formulação com separação de variáveis.

A Figura 11.9 exibe a função aproximada ao longo do domínio bem como as funções ponderadoras também formadas com as mesmas funções de forma, sendo garantida a necessária continuidade.

Tendo-se em vista as funções aproximadas e ponderadoras mostradas na Figura 11.9 e o expresso em (11.62), as integrais no elemento genérico ficam:

$$\int_0^{\ell_i} \begin{Bmatrix} -1/\ell_i \\ 1/\ell_i \end{Bmatrix} \left( \frac{\lambda + 2G}{2} \left[ \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right)^2 - 1 \right] \right) d\bar{x} + \int_0^{\ell_i} \rho \begin{Bmatrix} 1 - \bar{x}/\ell_i \\ \bar{x}/\ell_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 - \bar{x}/\ell_i & \bar{x}/\ell_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_j \\ \ddot{y}_k \end{Bmatrix} d\bar{x} = \frac{\lambda + 2G}{2} \begin{Bmatrix} -\left( \frac{dy}{dx} \right)_j^2 + 1 \\ \left( \frac{dy}{dx} \right)_k^2 - 1 \end{Bmatrix} \quad (11.67)$$

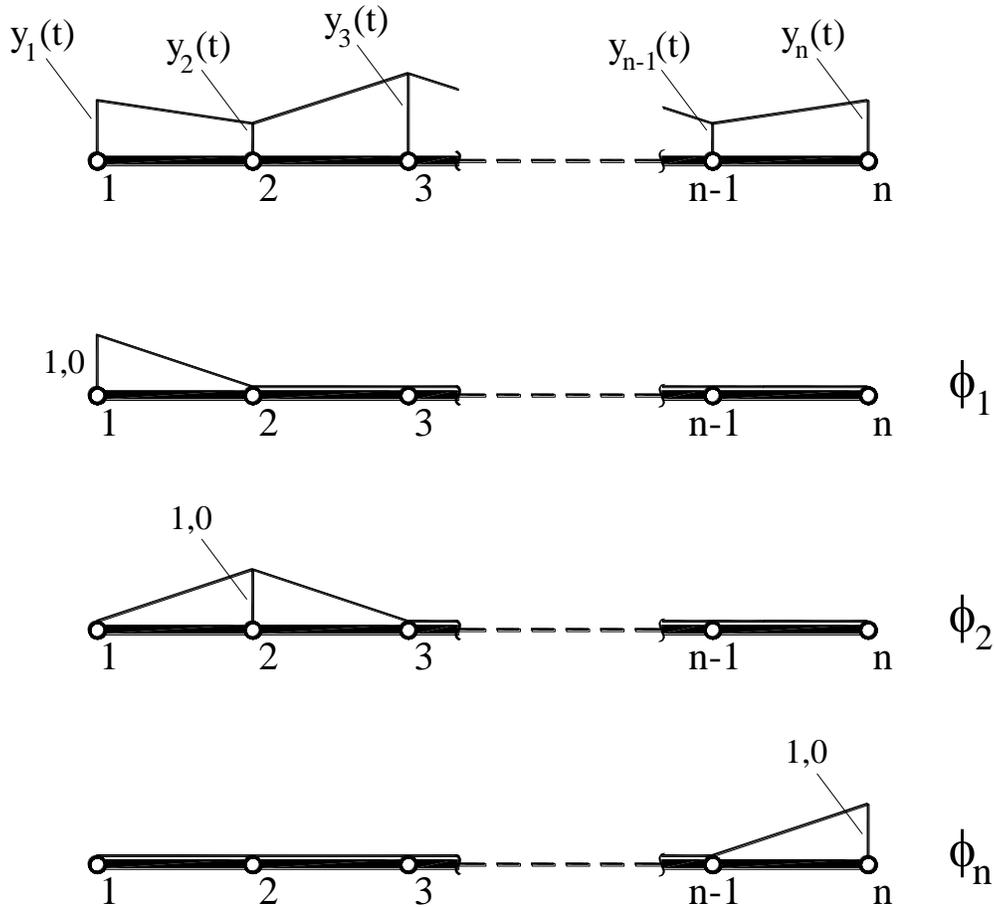
resultando-se:

$$\frac{\lambda + 2G}{2} \begin{Bmatrix} -\left[ \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right)^2 - 1 \right] \\ \left[ \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right)^2 - 1 \right] \end{Bmatrix} + \rho \ell_i \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_j \\ \ddot{y}_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sigma_j \\ \sigma_k \end{Bmatrix} \quad (11.68)$$

onde a primeira parcela do primeiro membro de (11.68) representa o vetor rigidez do elemento em apreço, a segunda representa as forças inerciais em jogo, explicitando-se a matriz de massa, e, no segundo membro, as componentes  $\sigma_i$  do

vetor de carregamento, que são as tensões correspondente às deformações de Green no nó indicado.

Considerando-se agora o domínio como um todo resulta em cada nó genérico a superposição (soma) das tensões verdadeiras na extremidade da frente do elemento  $i$  com a extremidade inicial do elemento  $i+1$ , como mostra a Figura 11.10.



**Figura 11.9- Funções aproximadas e ponderadoras em jogo**

Assim sendo, para o domínio como um todo, o equilíbrio pode ser então, por superposição do expresso em (11.68), redigido pela equação matricial

$$\{K(y_k)\} + [M]\{\ddot{y}_k\} = \{F_k\} \quad (11.69)$$

onde

$$F_k = \sigma_{i+1}^k - \sigma_{i-1}^k \quad (11.70)$$

consiste no carregamento aplicado ao nó  $k$ , como ilustrado na Figura 11.10, sendo nulo no caso de propagação ondulatória. Cumpre notar que o vetor de rigidez  $\{K(y_i)\}$  depende naturalmente da posição dos nós, mas a matriz de massa  $[M]$  não, em decorrência do exposto em (11.68).

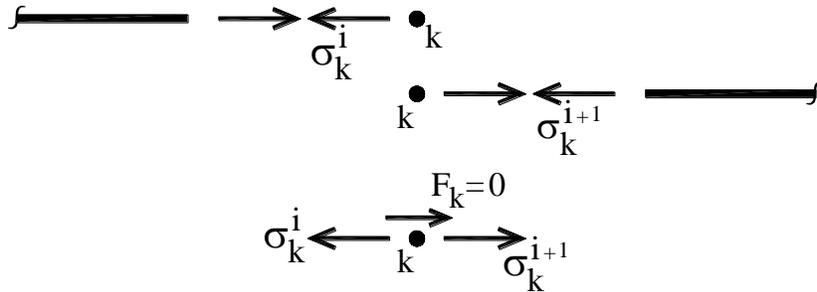


Figura 11.10- Ação nos nós

### 11.6-Integração no tempo de (11.66) pelo método de Newmark

A integração no tempo da equação (11.69) pelo método de Newmark em sua versão de dois passos de tempo já mencionada no Capítulo V são assim redigidas: o primeiro passo é expresso pelo equilíbrio:

$$[M]\{y_i\}_1 + \beta\Delta^2t\{K\}_1 - \beta\Delta^2t\{F_i\}_1 - (1/2 - \beta)\Delta^2t\{F_i\}_0 = \{0\} \quad (11.71)$$

supondo-se condições iniciais nulas, ou seja:  $\{y_i\}_0 = \{0\}$  e  $\{\dot{y}_i\}_0 = \{0\}$ , e os demais passos por:

$$\begin{aligned} & [M]\{y_i\}_{\ell+1} + \beta\Delta^2t\{K\}_{\ell+1} - \beta\Delta^2t\{F_i\}_{\ell+1} - (1-2\beta)\Delta^2t\{F_i\}_{\ell} - \beta\Delta^2t\{F_i\}_{\ell-1} \\ & - 2[M]\{y_i\}_{\ell} + (1-2\beta)\Delta^2t\{K\}_{\ell} + [M]\{y_i\}_{\ell-1} + \beta\Delta^2t\{K\}_{\ell-1} = \{0\} \end{aligned} \quad (11.72)$$

nos quais o parâmetro  $\beta$  é arbitrário, mas o parâmetro  $\gamma$  é assumido valendo-se 0.5. Cabe lembrar que a estabilidade numérica do algoritmo é obtida com  $\beta \geq 1/4$ , e maior precisão é obtida para  $\beta = 1/4$ .

### 11.7-Raízes da equação não linear pelo método de Newton

A expressão clássica de determinação iterativa da raiz de uma equação não linear  $F(x) = 0$  pelo método de Newton é assim redigida:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})}{\frac{d}{dx}F(x_{k-1})} \quad (11.73)$$

que consiste numa expressão de recorrência.

Assim sendo, no caso das raízes de (11.71) tem-se no caso do primeiro passo de tempo:

$$\begin{Bmatrix} F_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ F_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ F_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{Bmatrix} = [M] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix}_1 + \beta \Delta^2 t \{K\}_1 - \beta \Delta^2 t \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix}_1 - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta^2 t \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix}_0 \quad (11.74)$$

e nos demais passos (equação (11.72)):

$$\begin{Bmatrix} F_1(y_1, y_2, \dots, y_n)_{\ell+1} \\ F_2(y_1, y_2, \dots, y_n)_{\ell+1} \\ \dots \\ F_n(y_1, y_2, \dots, y_n)_{\ell+1} \end{Bmatrix} = [M] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix}_{\ell+1} + \beta \Delta^2 t \{K\}_{\ell+1} - \beta \Delta^2 t \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix}_{\ell+1} - (1-2\beta) \Delta^2 t \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix}_{\ell} \quad (11.75)$$

$$- \beta \Delta^2 t \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix}_{\ell-1} - 2[M] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix}_{\ell} + (1-2\beta) \Delta^2 t \{K\}_{\ell} + [M] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix}_{\ell-1} + \beta \Delta^2 t \{K\}_{\ell-1}$$

e tendo-se em conta o expresso em (11.73) estendido para n variáveis, o processo iterativo passa a exprimir-se:

$$[A]_{\ell} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix}_{\ell+1} = [A]_{\ell} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix}_{\ell} - \begin{Bmatrix} F_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ F_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ F_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{Bmatrix}_{\ell} \quad (11.76)$$

onde:

$$[A]_{\ell} = \begin{bmatrix} \partial F_1(y_1, \dots) / \partial y_1 & \partial F_1(y_1, \dots) / \partial y_2 & \dots & \partial F_1(y_1, \dots) / \partial y_n \\ \partial F_2(y_1, \dots) / \partial y_1 & \partial F_2(y_1, \dots) / \partial y_2 & \dots & \partial F_2(y_1, \dots) / \partial y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial F_n(y_1, \dots) / \partial y_1 & \partial F_n(y_1, \dots) / \partial y_2 & \dots & \partial F_n(y_1, \dots) / \partial y_n \end{bmatrix} \quad (11.77)$$

que consiste na matriz Hessiana do método dos elementos finitos. Um exame dessa matriz mostra que os termos correspondentes do vetor  $\{K\}$  e a matriz de massa  $[M]$  são obtidos pela superposição das matrizes Hessianas de rigidez e de massa dos elementos, quais sejam:

$$[k]_i = \frac{\lambda + 2G}{\ell_i^2} \begin{bmatrix} y_k - y_j & y_j - y_k \\ y_j - y_k & y_k - y_j \end{bmatrix} \quad (11.78)$$

$$[m]_i = \rho \ell_i \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

uma vez que  $\{K\}_i = [K]_i \{l\}$ , onde todos os elementos do vetor  $\{l\}$  são unitários.

### 11.8-Formulação dos elementos finitos considerando-se grandes deslocamentos e grandes deformações

Retomando-se o equilíbrio dinâmico na posição deformada expresso em (11.16), qual seja:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\lambda + 2G}{2} \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 \right] \frac{dy}{dx} \right] - \rho \ddot{y} = 0 \quad (11.79)$$

e procedendo-se a ponderação a exemplo de (11.60), a expressão básica do método dos elementos finitos fica nesse caso:

$$\int_0^{\ell} \frac{\lambda + 2G}{2} \left[ \left( \frac{dy_a(x,t)}{dx} \right)^2 - 1 \right] \frac{dy}{dx} \frac{d\phi(x)}{dx} dx + \int_0^{\ell} \rho \ddot{y}_a(x,t) \phi(x) dx =$$

$$\left[ \frac{\lambda + 2G}{2} \left[ \left( \frac{dy_a(x,t)}{dx} \right)^2 - 1 \right] \frac{dy}{dx} \phi(x) \right]_0^{\ell}$$
(11.80)

o que resulta:

$$\int_0^{\ell_i} \left\{ \frac{-1/\ell_i}{1/\ell_i} \right\} \left\{ \frac{\lambda + 2G}{2} \left[ \frac{y_j^2}{\ell_i^2} + \frac{y_k^2}{\ell_i^2} - 2 \frac{y_j y_k}{\ell_i^2} - 1 \right] \left( -\frac{y_j}{\ell_i} + \frac{y_k}{\ell_i} \right) \right\} d\bar{x} +$$

$$\int_0^{\ell_i} \rho \left\{ \frac{-\bar{x}/\ell_i}{\bar{x}/\ell_i} \right\} \left\{ -\bar{x}/\ell_i \quad \bar{x}/\ell_i \right\} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_j \\ \ddot{y}_k \end{Bmatrix} d\bar{x} = \begin{Bmatrix} -\sigma_j \\ \sigma_k \end{Bmatrix}$$
(11.81)

e finalmente as matrizes Hessianas de rigidez e de massa do elemento finito não linear em apreço assim se escrevem:

$$[k]_i = \frac{\lambda + 2G}{2\ell_i^3} \begin{bmatrix} 3y_j^2 + 3y_k^2 - 6y_j y_k - \ell_i^2 & -3y_j^2 - 3y_k^2 + 6y_j y_k + \ell_i^2 \\ -3y_j^2 - 3y_k^2 + 6y_j y_k + \ell_i^2 & 3y_j^2 + 3y_k^2 - 6y_j y_k - \ell_i^2 \end{bmatrix}$$

$$[m]_i = \rho \ell_i \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$
(11.82)

mostrando que a formulação do elemento finito não linear envolvendo grandes deslocamentos e grandes deformações resulta em matriz de rigidez com termos quadráticos, e não lineares como no caso da consideração de grandes deformações e deslocamentos pequenos como expresso em (11.78).

Uma outra formulação de onda não linear decorre da consideração de pequenas deformações e grandes deslocamentos, cuja equação diferencial é expressa por:

$$\frac{d}{dx} \left[ (\lambda + 2G) \left[ \frac{dy}{dx} - 1 \right] \frac{dy}{dx} \right] - \rho \ddot{y} = 0$$
(11.83)

em decorrência da primeira de (11.2). A matriz de massa é idêntica a expressa em (11.78) e a rigidez Hessiana é então expressa por:

$$[k]_i = \frac{(\lambda + 2G)}{\ell_i} \begin{bmatrix} -2y_i/\ell_i + 2y_k/\ell_i - 1 & 2y_i/\ell_i - 2y_k/\ell_i + 1 \\ 2y_i/\ell_i - 2y_k/\ell_i + 1 & -2y_i/\ell_i + 2y_k/\ell_i - 1 \end{bmatrix} \quad (11.84)$$

Finalizando-se, a título de registro, no caso clássico de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, a equação diferencial se expressa:

$$\frac{d}{dx} \left[ (\lambda + 2G) \left[ \frac{dy}{dx} - 1 \right] \right] - \rho \ddot{y} = 0 \quad (11.85)$$

repetindo-se novamente a matriz de massa, e a matriz de rigidez Hessiana fica assim redigida:

$$[k] = \frac{(\lambda + 2G)}{\ell_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.86)$$

como bem conhecida.

Cumpra finalmente assinalar que a formulação da propagação de onda com pequenas deformações e grandes deslocamentos não é um caso de emprego corrente da prática.

### 11.9-Erro local de truncamento

No intuito de explicitar o erro local de truncamento dos elementos finitos apresentados, considere-se inicialmente o caso da formulação de grandes deformações e pequenos deslocamentos (11.68) cuja redação básica consiste em:

$$\frac{\lambda + 2G}{2} \left\{ \begin{array}{l} - \left[ \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right)^2 - 1 \right] \\ \left[ \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right)^2 - 1 \right] \end{array} \right\} \quad (11.87)$$

$$+ \rho \ell_i \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_j \\ \ddot{y}_k \end{Bmatrix} + \frac{\lambda + 2G}{2} \begin{Bmatrix} (y^I)_j^2 - 1 \\ -(y^I)_k^2 + 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O erro de truncamento na variável espaço dessa formulação pode ser obtido [5] substituindo-se na expressão (11.87), em primeiro lugar, o valor exato das

acelerações como dadas por (11.17), e, em seguida, tendo-se em conta os valores exatos das funções envolvidas explicitadas segundo a expansão correspondente de Taylor, ou seja:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda + 2G}{2} \left\{ \begin{array}{l} - \left[ \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right)^2 - 1 \right] \\ \left[ \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right)^2 - 1 \right] \end{array} \right\} \\
 & + \frac{\lambda + 2G}{2} \ell_i \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (2y''y')_j \\ (2y''y')_k \end{Bmatrix} + \frac{\lambda + 2G}{2} \begin{Bmatrix} (y')_j^2 - 1 \\ -(y')_k^2 + 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \quad (11.88) \\
 & \frac{\lambda + 2G}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\ell^2}{12} (y'')^2 + \ell^3 \left( \frac{y'y^{IV}}{6} + \frac{y''y'''}{3} \right) + \dots \\ - \frac{\ell^2}{12} (y'')^2 + \ell^3 \left( -\frac{y'y^{IV}}{12} + \frac{y''y'''}{6} \right) + \dots \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

uma vez que:

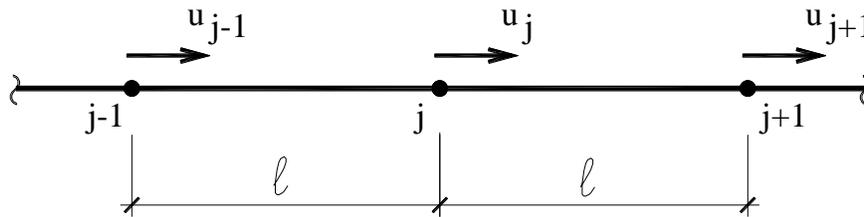
$$\begin{aligned}
 y_k &= y_j + y_j' \ell + \frac{y_j''}{2} \ell^2 + \frac{y_j'''}{6} \ell^3 + \dots \\
 y_k' &= y_j' + y_j'' \ell + \frac{y_j'''}{2} \ell^2 + \frac{y_j^{IV}}{6} \ell^3 + \dots \\
 y_k'' &= y_j'' + y_j''' \ell + \frac{y_j^{IV}}{2} \ell^2 + \frac{y_j^V}{6} \ell^3 + \dots \\
 - \left( \frac{y_k - y_j}{\ell} \right)^2 + \left( \frac{y_k - y_j}{\ell} \right) &= y_j' - (y_j')^2 + \left( \frac{y_j''}{2} - y_j' y_j'' \right) \ell + \quad (11.89) \\
 & \left( \frac{y_j'''}{6} - \frac{y_j' y_j'''}{3} - \frac{(y_j'')^2}{4} \right) \ell^2 + \left( \frac{y_j^{IV}}{4} - \frac{y_j' y_j^{IV}}{12} - \frac{y_j'' y_j'''}{6} \right) \ell^3 + \dots \\
 y_k' y_k'' \ell &= y_j' y_j'' \ell + \left( (y_j'')^2 + y_j' y_j''' \right) \ell^2 + \left( \frac{3y_j'' y_j'''}{2} + \frac{y_j' y_j^{IV}}{2} \right) \ell^3 + \dots
 \end{aligned}$$

mostrando-se que, nesse caso, o erro é de segunda ordem ( $\ell^2$ ), como indica a segunda parcela do segundo membro de (11.88)

Por outro lado, o equilíbrio do nó genérico  $j$ , como ilustra a Figura 11.11, apresenta o seguinte erro de truncamento de terceira ordem (superposição dos erros de truncamento de (11.88)), ou seja:

$$\frac{\lambda + 2G}{2} \ell^3 \left( \frac{y^I y^{IV}}{12} + \frac{y^{II} y^{III}}{2} \right) + \dots \quad (11.90)$$

cumprindo-se assinalar que o equilíbrio do nó vem a ser a versão do método dos elementos finitos do equilíbrio expresso em (11.7).



**Figura 11.11 Equilíbrio de nó**

No caso do modelo de massa concentrada ( $M_1 = 1/2$  e  $M_2 = 0$ ) tem-se erro de truncamento:

$$\frac{\lambda + 2G}{2} \left\{ \begin{array}{l} - \left( \frac{y^{II}}{4} + \frac{y^I y^{III}}{3} \right) \ell^2 - \left( \frac{y^I y^{IV}}{12} + \frac{y^{II} y^{III}}{6} \right) \ell^3 + \dots \\ \left( \frac{y^{II}}{4} + \frac{y^I y^{III}}{3} \right) \ell^2 + \left( \frac{y^I y^{IV}}{4} + \frac{2y^{II} y^{III}}{3} \right) \ell^3 + \dots \end{array} \right\} \quad (11.91)$$

e erro de truncamento do nó é igualmente de terceira ordem, assim redigido:

$$\frac{\lambda + 2G}{2} \ell^3 \left( \frac{y^I y^{IV}}{6} + \frac{y^I y^{III}}{2} \right) + \dots \quad (11.92)$$

Estudando-se de modo similar o erro de truncamento da formulação de grandes deformações e grandes deslocamentos tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda + 2G}{2} \left\{ \begin{array}{l} - \left[ \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right)^3 - \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right) \right] \\ \left[ \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right)^3 - \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right) \right] \end{array} \right\} \\
 & + \frac{\lambda + 2G}{2} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \ell \left( 3y''(y')^2 - y'' \right)_j \\ \ell \left( 3y''(y')^2 - y'' \right)_k \end{array} \right\} + \frac{\lambda + 2G}{2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ (y')^3 - y' \right]_j \\ \left[ (y')^3 - y' \right]_k \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \\
 & \frac{\lambda + 2G}{2} \left\{ \begin{array}{l} \ell^2 \frac{y'(y'')^2}{4} + \ell^3 \left( -\frac{y^{IV}}{24} + \frac{5(y')^2 y^{IV}}{24} - \frac{8y' y'' y'''}{6} + \frac{3(y'')^2}{8} \right) + \dots \\ -\ell^2 \frac{y'(y'')^2}{4} + \ell^3 \left( -\frac{y^{IV}}{24} + \frac{(y')^2 y^{IV}}{24} + \frac{y' y'' y'''}{3} + \frac{(y'')^2}{8} \right) + \dots \end{array} \right\} \quad (11.93)
 \end{aligned}$$

e erro de truncamento no nó fica também de terceira ordem, com a redação:

$$\frac{\lambda + 2G}{2} \ell^3 \left( -\frac{y^{IV}}{12} + \frac{(y')^2 y^{IV}}{4} - y' y'' y''' + \frac{(y'')^3}{2} \right) + \dots \quad (11.94)$$

No caso de massa concentrada tem-se:

$$\frac{\lambda + 2G}{2} \left\{ \begin{array}{l} \ell^2 \left( \frac{y'''}{6} - \frac{(y')^2 y'''}{2} - \frac{3y'(y'')^2}{4} \right) + \ell^3 \left( \frac{y^{IV}}{24} - \frac{(y')^2 y^{IV}}{24} - \frac{y' y'' y'''}{3} - \frac{(y'')^3}{4} \right) + \dots \\ \ell^2 \left( -\frac{y'''}{6} + \frac{(y')^2 y'''}{2} + \frac{3y'(y'')^2}{4} \right) + \ell^3 \left( -\frac{y^{IV}}{8} + \frac{7(y')^2 y^{IV}}{24} + \frac{11y' y'' y'''}{3} + \frac{(y'')^3}{8} \right) + \dots \end{array} \right\} \quad (11.95)$$

com equilíbrio de nó igualmente de terceira ordem tendo a escrita:

$$\ell^3 \left( -\frac{y^{IV}}{12} + \frac{(y')^2 y^{IV}}{4} + \frac{3y' y'' y'''}{2} \right) + \dots \quad (96)$$

Para o modelo de grandes deslocamentos e pequenas deformações tem-se:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2G) \left\{ \begin{array}{l} - \left[ \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right)^2 - \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right) \right] \\ \left[ \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right)^2 - \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right) \right] \end{array} \right\} \\
 & + (\lambda + 2G) \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \ell (2y''y' - y'')_i \\ \ell (2y''y' - y'')_k \end{array} \right\} + (\lambda + 2G) \left\{ \begin{array}{l} \left( (y')^2 - y' \right)_i \\ \left( (y')^2 - y' \right)_k \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \quad (11.97) \\
 & (\lambda + 2G) \left\{ \begin{array}{l} \ell^2 \frac{(y'')^2}{12} + \ell^3 \left( \frac{y^{IV}}{6} + \frac{y'y^{IV}}{12} - \frac{y''y'''}{3} \right) + \dots \\ -\ell^2 \frac{(y'')^2}{12} + \ell^3 \left( -\frac{5y^{IV}}{12} + \frac{5y'y^{IV}}{12} + \frac{7y''y'''}{6} \right) + \dots \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

o erro de truncamento no equilíbrio do nó fica então:

$$(\lambda + 2G) \ell^3 \left( -\frac{5y^{IV}}{4} + \frac{y'y^{IV}}{2} + \frac{5y''y'''}{6} \right) + \dots \quad (11.98)$$

e, para o modelo de massa concentrada, os resultados são:

$$(\lambda + 2G) \left\{ \begin{array}{l} \ell^2 \left( \frac{y'''}{6} - \frac{y'y''}{3} - \frac{y''}{4} \right) + \ell^3 \left( \frac{y^{IV}}{4} - \frac{y'y^{IV}}{12} - \frac{y''y'''}{6} \right) + \dots \\ \ell^2 \left( -\frac{y'''}{6} + \frac{y'y''}{3} + \frac{y''}{4} \right) + \ell^3 \left( -\frac{y^{IV}}{12} + \frac{y'y^{IV}}{6} + \frac{y''y'''}{2} \right) + \dots \end{array} \right\} \quad (11.99)$$

e o erro de truncamento no equilíbrio do nó assim expresso:

$$(\lambda + 2G) \ell^3 \left( -\frac{y^{IV}}{12} + \frac{y'y^{IV}}{6} + \frac{y''y'''}{2} \right) + \dots \quad (11.100)$$

A título de comparação, no caso da teoria de onda linear a formulação do método dos elementos finitos resulta:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2G) \left\{ \begin{array}{l} - \left[ \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right) + 1 \right] \\ \left[ \left( \frac{y_k - y_j}{\ell_i} \right) - 1 \right] \end{array} \right\} \\
 & + (\lambda + 2G) \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell (y'')_j \\ \ell (y'')_k \end{Bmatrix} + (\lambda + 2G) \begin{Bmatrix} ((y') - 1)_j \\ -(y') + 1)_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \quad (11.101) \\
 & (\lambda + 2G) \left\{ \begin{array}{l} \ell^3 \left( \frac{y^{IV}}{24} \right) + \dots \\ \ell^3 \left( \frac{y^{IV}}{24} \right) + \dots \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

com erro de truncamento do equilíbrio do nó valendo:

$$\ell^3 \left( \frac{y^{IV}}{12} \right) + \dots \quad (11.102)$$

No caso do modelo de massa concentrada os erros de truncamento ficam:

$$\begin{Bmatrix} -\ell^2 \frac{y^{III}}{6} - \ell^3 \frac{y^{IV}}{24} + \dots \\ \ell^2 \frac{y^{III}}{6} + \ell^3 \frac{y^{IV}}{8} + \dots \end{Bmatrix} \quad (11.103)$$

com erro de truncamento no equilíbrio do nó valendo:

$$\ell^3 \left( \frac{y^{IV}}{12} \right) + \dots \quad (11.104)$$

Em conclusão, não há nenhuma vantagem em se empregar o modelo de massa consistente, que envolve um número maior de operações, e apresenta o mesmo erro de truncamento local de ordem 3 no equilíbrio do nó, que o modelo de massa concentrada.

### 11.10-Método das diferenças finitas estabilizada

No tratamento de problemas não lineares a integração no tempo empregando-se o método implícito de Newmark, uma parcela significativa das operações decorre da necessidade de se lançar mão do método iterativo de Newton como mostrado; e isso não seria necessário com o emprego do método explícito das diferenças centrais. Todavia, visando contornar o problema sua instabilidade numérica Macek e Aubert<sup>6</sup> propuseram penalizar a matriz de massa como segue:

$$([M] + \Delta t^2 \{K(y)\}) \quad (11.105)$$

onde  $\{K(y)\}$  é o vetor que representa as forças interna (vide (11.69)) do passo presente e  $\Delta t$  o passo de tempo.

No caso de 1 grau de liberdade tem-se:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m + \Delta t^2 k}} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 + \omega_n^2 \Delta t^2}} \quad (11.106)$$

e, portanto:

$$\omega_p \Delta t = \theta_p = \frac{\omega_n \Delta t}{\sqrt{1 + \omega_n^2 \Delta t^2}} = \frac{\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}} < 1 \rightarrow < 2 \quad (11.107)$$

conferindo-se, pois, estabilidade numérica.

O operador de diferenças finitas centrais do primeiro passo, se escreve:

$$2[M]\{y\}_1 = 2[M]\{y\}_0 - \Delta t^2 \{K(y)\}_0 - 2[M]\Delta t \{\dot{y}\}_0 + \Delta t^2 \{S\}_0 \quad (11.108)$$

e, nos demais passos tem a redação:

$$[M]\{y\}_{i+1} = 2[M]\{y\}_i - \Delta t^2 \{K(y)\}_i - [M]\{y\}_{i-1} + \Delta t^2 \{S\}_i \quad (11.109)$$

ou seja, uma simples inversão da matriz de massa, que é trivial no caso frequente de massa concentrada, permite explicitar o passo seguinte em função do passo

<sup>6</sup> Macek R.W. e Aubert B.H. *A mass penalty technique to control the critical time increment in explicit dynamic finite element analysis*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, V. 34 (1995)

atual, no qual todos os parâmetros são conhecidos, não sendo necessário o concurso do emprego da fórmula iterativa de Newton.

Finalizando-se, vale apenas registrar que existem outras propostas de estabilização envolvendo também a matriz de amortecimento<sup>7</sup> :

$$\left( [M] + \frac{1}{2} \Delta t [C] + a \Delta t^2 \{K(y)\} \right) \quad (11.109)$$

onde

$$a = \frac{1}{4} \tanh\left(\frac{1}{4} \omega_n \Delta t\right) \quad (11.110)$$

não havendo-se, pois, não linearidade de amortecimento.

---

<sup>7</sup> Soares Jr. D. e Grofholz G. *Nonlinear structural dynamic analysis by a stabilized central difference method*, Engineering Structures (1918)

## CAPÍTULO XII

### ANÁLISE NÃO-LINEAR BIDIMENSIONAL

#### 12.1- Introdução

Esse texto discorre sobre o fato de que o segundo tensor de Piola-Kirchhoff desenvolve uma variação da energia de deformação no domínio original do objeto nas variáveis de referência inicial do domínio igual à variação de energia de deformação que ocorre no domínio deformado nas variáveis de referência no domínio deformado. Em outras palavras, a consistência em termos de energia é então mantida.

#### 12.2-Mapeamento (Formulação Posicional)

A posição de um ponto no domínio deformado é expressa em relação as variáveis iniciais do domínio indeformado, como ilustrado na Figura 12.1, por:

$$\begin{aligned} X &= X(x, y) \\ Y &= Y(x, y) \end{aligned} \quad (12.1)$$

onde  $X$  e  $Y$  são as coordenadas da posição do ponto que estava na posição inicial  $x$  e  $y$ . Vale notar que a expressão (12.1) descreve a transformação das variáveis cartesianas  $x$  e  $y$  nas variáveis também cartesianas  $X$  e  $Y$ . Assim sendo, a seguinte relação diferencial pode ser escrita:

$$\begin{aligned} dX &= X_x dx + X_y dy \\ dY &= Y_x dx + Y_y dy \end{aligned} \quad (12.2)$$

onde os índices  $x$  e  $y$  indicam a derivada parcial da função em apreço em relação às variáveis indicadas. A Figura 12.1 ilustra também que uma fibra cujo comprimento apresenta componentes  $dx$  e  $dy$  na posição original, passa a apresentar comprimento com componentes  $dX$  e  $dY$  na posição deformada

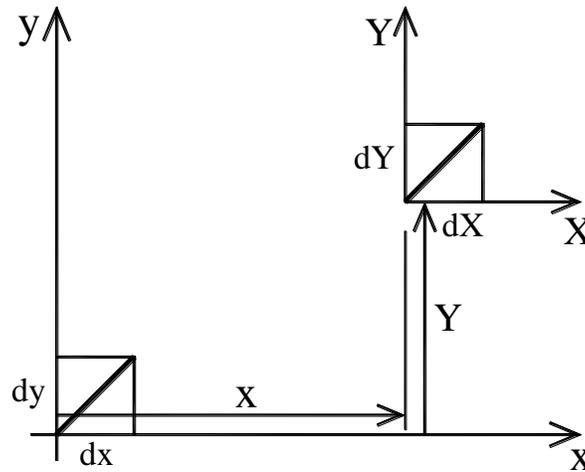


FIGURA 12.1

Em notação matricial o expresso em (12.2) fica:

$$\begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_x & X_y \\ Y_x & Y_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (12.3)$$

O expresso em (12.3) permite-se, pois, exprimir o quadrado (Pitágoras) do comprimento da fibra no domínio transformado, ou seja

$$\{dX \quad dY\} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = \{dx \quad dy\} \begin{bmatrix} X_x & X_y \\ Y_x & Y_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (12.4)$$

e, com isso, a diferença do quadrado do comprimento da fibra no domínio transformado com o quadrado do comprimento da fibra original fica:

$$\{dX \quad dY\} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} - \{dx \quad dy\} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \{dx \quad dy\} \left[ \begin{bmatrix} X_x & Y_x \\ X_y & Y_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_x & X_y \\ Y_x & Y_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (12.5)$$

que, simbolicamente, permite uma nova redação para o expresso em (12.5):

$$d^2X - d^2x = \begin{Bmatrix} dx & dy \end{Bmatrix} [A^T A - I] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (12.6)$$

sendo que a matriz  $A$  presente em (12.6) constitui a matriz jacobiana da transformação expressa em (12.1), e é também referida como gradiente da função de transformação. Por outro lado, a matriz

$$E_{n\ell} = \frac{1}{2} [A^T A - I] \quad (12.7)$$

constitui o tensor das deformações de Green, o qual permite definir de maneira genérica a diferença quadrática do alongamento de uma fibra que ocorre no processo de movimentação dos pontos do domínio. Como se percebe, trata-se de um tensor simétrico ( $E_{n\ell} = E_{n\ell}^T$ ).

Apenas a título de curiosidade, o tensor das deformações em termos de deslocamento pode ser deduzido da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (12.8)$$

ou seja

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_x & X_y \\ Y_x & Y_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = [A - I] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = D \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (12.9)$$

o que permite uma nova redação para o tensor de Green, ou seja:

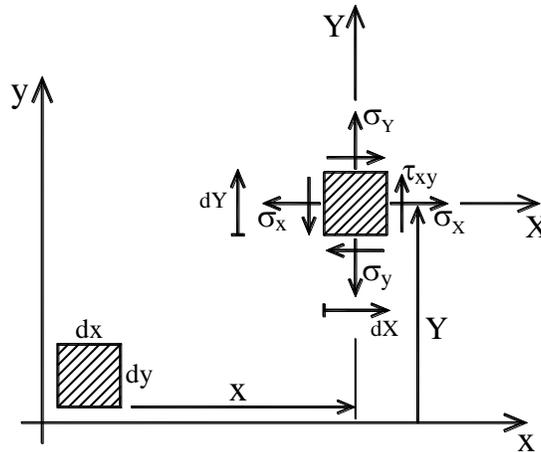
$$E_{n\ell} = \frac{1}{2} [D^T + D + D^T D] \quad (12.10)$$

sendo que a parte linear de (12.10) corresponde exatamente ao tensor das deformações considerando-se pequenas deformações. Em outras palavras, o tensor de Green resulta para pequenas deformações no clássico tensor das pequenas deformações da elasticidade linear.

Todas as grandezas até agora trabalhadas são descritas nas variáveis  $x$  e  $y$ , mas o que mecanicamente interessa de fato está ocorrendo na posição deformada, cujas variáveis são  $X$  e  $Y$ .

A Figura 12.2a) ilustra o estado de tensão na posição deformada. Assim como a equação (12.1) relaciona as componentes  $dx$  e  $dy$  da direção de um vetor sistema original com as componentes  $dX$  e  $dY$  que definem a direção do

correspondente vetor na posição deformada, uma relação entre as componentes de tensão na posição deformada e posição indeformada constitui o ponto central da teoria dos grandes deslocamentos. É fácil perceber que essa tarefa demandou muitos estudos, e o procedimento consistente do ponto de vista da energia é o que logicamente prevaleceu.



**Figura 12.2**

No sentido de garantir que a energia de deformação seja a mesma nas descrições segundo as variáveis  $x$  e  $y$ , e  $X$  e  $Y$ , a igualdade dos trabalhos virtuais correspondentes à variação dos deslocamentos envolvidos se expressam:

$$\text{tr}[\mathbf{S}][\delta E_{n\ell}] = \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}][\delta E_{\ell}] \quad (12.11)$$

na qual a notação  $\text{tr}$  significa o traço da matriz resultante da multiplicação, ou seja, a soma dos termos da diagonal (energia de deformação);  $\boldsymbol{\sigma}$  é a tensão real na posição deformada e  $\delta E_{\ell}$  é a variação da deformação em regime de pequenos deslocamentos (variação infinitesimal dos deslocamentos). Vale notar que a equação (12.11) indica que o tensor procurado  $[\mathbf{S}]$  trabalha na variação da deformação de Green, que é descrita nas variáveis do domínio indeformável  $x$  e  $y$ .

A equação (12.6) permite exprimir a variação da deformação de Green, ou seja;

$$\delta \left( \begin{Bmatrix} d^2 X \\ d^2 Y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} d^2 x \\ d^2 y \end{Bmatrix} \right) = \delta \left( \begin{Bmatrix} dx & dy \end{Bmatrix} [A^T A - I] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \right) \quad (12.12)$$

mas, como as variáveis  $x$  e  $y$  obviamente não variam, o expresso em (12.12) ganha uma nova escrita, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \delta(d^2X) \\ \delta(d^2Y) \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} dx & dy \end{Bmatrix} [\delta E_{nl}] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (12.13)$$

ou ainda

$$2 \begin{Bmatrix} dX & dY \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta(dX) \\ \delta(dY) \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} dx & dy \end{Bmatrix} [\delta E_{nl}] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (12.14)$$

sucedendo-se, como ilustrado na Figura 12.3, que as variações no primeiro membro de (12.14) permitem escrever:

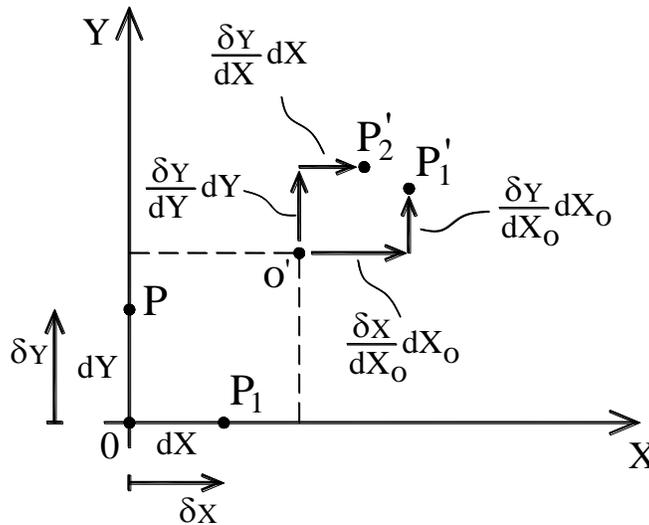


Figura 12.3

$$\begin{Bmatrix} \delta(dX) \\ \delta(dY) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta(dX)}{\partial X} dX + \frac{\partial \delta(dX)}{\partial Y} dY \\ \frac{\partial \delta(dY)}{\partial X} dX + \frac{\partial \delta(dY)}{\partial Y} dY \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta(dX)}{\partial X} & \frac{\partial \delta(dX)}{\partial Y} \\ \frac{\partial \delta(dY)}{\partial X} & \frac{\partial \delta(dY)}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} \quad (12.15)$$

e assim, a equação (12.14) ganha a escrita:

$$2\{dX \ dY\} \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta(dX)}{\partial X} & \frac{\partial \delta(dX)}{\partial Y} \\ \frac{\partial \delta(dY)}{\partial X} & \frac{\partial \delta(dY)}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = 2\{dx \ dy\} [\delta E_{nl}] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (12.16)$$

ou ainda:

$$2\{dX \ dY\} \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta(dX)}{\partial X} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta(dX)}{\partial Y} + \frac{\partial \delta(dY)}{\partial X} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta(dX)}{\partial Y} + \frac{\partial \delta(dY)}{\partial X} \right) & \frac{\partial \delta(dY)}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = \quad (12.17)$$

$$2\{dx \ dy\} [\delta E_{nl}] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix}$$

ou, finalmente:

$$2\{dX \ dY\} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_Y & \frac{1}{2} \delta \gamma_{XY} \\ \frac{1}{2} \delta \gamma_{XY} & \delta \varepsilon_X \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = \quad (12.18)$$

$$2\{dx \ dy\} [\delta E_{nl}] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix}$$

Tendo-se em conta o expresso em (12.3) eliminando-se os vetores comuns, a equação (12.18) permite escrever:

$$[\delta E_{nl}] = A^T [\delta E_\ell] A \quad (12.19)$$

mas, examinando-se a condição de equivalência da variação energia de deformação na posição deformada com a descrição na posição indeformável, ou seja:

$$\text{tr}[S][\delta E_{nl}] dV_0 = \text{tr}[\sigma][\delta E_\ell] dV \quad (12.20)$$

verifica-se que o segundo tensor de Piola-Kirchhoff expresso por

$$[S] = JA^{-1}[\sigma]A^{-T} \quad (12.21)$$

sendo J o jacobiano da transformação (determinante da matriz de transformação) satisfaz o expresso em (12.20), ou seja:

$$\text{tr}[\mathbf{S}][\delta\mathbf{E}_{n\ell}]dV_0 = \text{tr}\mathbf{J}\mathbf{A}^{-1}[\boldsymbol{\sigma}]\mathbf{A}^{-\text{T}}\mathbf{A}^{\text{T}}[\delta\mathbf{E}_{\ell}]\text{Ad}V_0 = \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}][\delta\mathbf{E}_{\ell}]dV \quad (12.22)$$

uma vez que  $\mathbf{J}dV_0 = dV$  e que

$$\text{tr}\mathbf{A}^{-1}[\boldsymbol{\sigma}][\delta\mathbf{E}_{\ell}]\mathbf{A} = \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}][\delta\mathbf{E}_{\ell}] \quad (12.23)$$

além disso, ao se efetuar a operação indicada no primeiro membro de (12.23) obtém-se o traço explicitamente como:

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_x \delta \varepsilon_x + \frac{1}{2} \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \right) \left( A_{11}^{-1} A_{11} + A_{21}^{-1} A_{12} = 1 \right) + \\ & \left( \sigma_y \delta \varepsilon_y + \frac{1}{2} \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \right) \left( A_{12}^{-1} A_{21} + A_{22}^{-1} A_{22} = 1 \right) + \\ & \left( \tau_{xy} \delta \varepsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_x \delta \gamma_{xy} \right) \left( A_{11}^{-1} A_{21} + A_{21}^{-1} A_{22} = 0 \right) + \\ & \left( \tau_{xy} \delta \varepsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_y \delta \gamma_{xy} \right) \left( A_{12}^{-1} A_{11} + A_{22}^{-1} A_{12} = 0 \right) \end{aligned} \quad (12.24)$$

confirmando-se o resultado esperado. Cumpre finalmente enfatizar que o determinante da matriz de transformação relaciona o diferencial de área na configuração transformada com o diferencial de área correspondente na situação indeformada no caso bidimensional; no caso tridimensional relaciona diferenciais de volume, e, em dimensões maiores diferenciais de hipervolumes.

### 12.3-Fórmula de Nanson

No caso tridimensional, a relação de diferenciais de volume é dada pelo jacobiano. Todavia, muitas vezes é necessário contar com a relação entre diferenciais de área. Essa relação é dada pela chamada fórmula de Nanson.

Tomando-se um diferencial de volume na situação indeformada:

$$dV_0 = (d\vec{h}_0 \cdot \vec{N}) dS_0 \quad (12.25)$$

sendo que o vetor  $d\vec{h}_0$  projetado na normal do diferencial de área é a altura do volume diferencial  $dV_0$ . Tendo-se em conta a expressão tridimensional

correspondente ao expresso em (12.3) tem-se o correspondente vetor na posição deformada expresso por:

$$d\vec{h} = A d\vec{h}_0 \quad (12.26)$$

e assim

$$J dV_0 = J(d\vec{h}_0 \cdot \vec{N}) dS_0 = dV = (A d\vec{h}_0 \cdot \vec{n}) dS \quad (12.27)$$

ou ainda em notação vetorial

$$J\{h_0\}^T \{N\} dS_0 = \{dh_0\}^T A^T \{n\} dS \quad (12.28)$$

mais ainda eliminando-se o vetor comum:

$$\{n\} dS = J A^{-T} \{N\} dS_0 \quad (12.29)$$

ou em notação simbólica:

$$dS \vec{n} = J dS_0 A^{-T} \vec{N} \quad (12.30)$$

cumprindo-se finalmente registrar que no caso bidimensional a área degenera para um diferencial de comprimento.

#### 12.4-Onda elástica não linear: formulação do elemento finito

A Figura 12.2 exibe a configuração de tensão de Cauchy num elemento diferencial na posição deformada. A correspondente equação de equilíbrio se expressa:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_X}{dX} + \frac{d\tau_{XY}}{dY} - \rho \ddot{X} &= 0 \\ \frac{d\tau_{XY}}{dX} + \frac{d\sigma_Y}{dY} - \rho \ddot{Y} &= 0 \end{aligned} \quad (12.31)$$

e, usando-se a técnica dos resíduos ponderados (Galerkin), a equação de equilíbrio (12.31) ganha a redação:

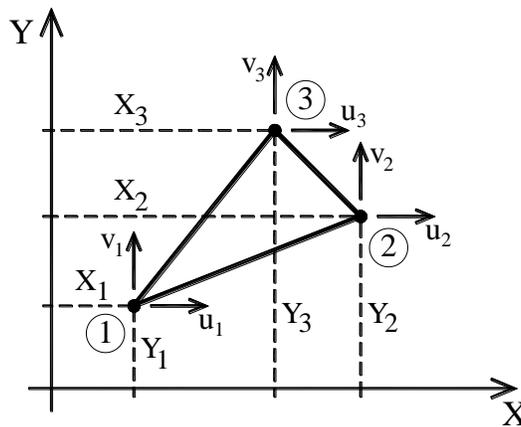
$$\int_R [\sigma_X \phi_X + \tau_{XY} \phi_Y] dXdY + \int_R \rho \ddot{X} \phi dXdY = 0$$

$$\int_R [\tau_{XY} \phi_X + \sigma_Y \phi_Y] dXdY + \int_R \rho \ddot{Y} \phi dXdY = 0$$
(12.32)

onde  $\phi = \phi(X, Y)$  é a função ponderadora. Vale assinalar que os termos de contorno são, sem perda de generalidade, assumidos como sendo nulos (representam carga externa). A expressão (12.32) é, como sabido, apropriada para a formulação do método dos elementos finitos. Em notação matricial a equação (12.32) ganha a redação:

$$\int_R \begin{bmatrix} \sigma_X & \tau_{XY} \\ \tau_{XY} & \sigma_Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_X \\ \phi_Y \end{Bmatrix} dXdY + \int_R \rho \phi \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} dXdY = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$
(12.33)

Para simplificar a exposição, considere-se o caso do elemento finito de três nós, como ilustrado na Figura 12.4.



**Figura 12.4**

As aproximações das posições no domínio do elemento finito são fornecidas pelas seguintes expressões clássicas:

$$X = X_1 \phi_1 + X_2 \phi_2 + X_3 \phi_3$$

$$Y = Y_1 \phi_1 + Y_2 \phi_2 + Y_3 \phi_3$$
(12.34)

onde as funções de forma  $\phi_i(X, Y)$ , ilustradas na Figura 12.5, representam planos com ordenada unitária nas coordenadas do nó  $i$  e nulas nos demais nós e são expressas por:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2S}(2A_1^0 + b_1X + a_1Y) \\ \phi_2 &= \frac{1}{2S}(2A_2^0 + b_2X + a_2Y) \\ \phi_3 &= 1 - \phi_1 - \phi_2\end{aligned}\tag{12.35}$$

onde

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}(b_1a_2 - b_2a_1) \\ A_i^0 &= \frac{1}{2}(X_jY_k - X_kY_j) \\ a_i &= X_k - X_j \\ b_i &= Y_j - Y_k\end{aligned}\tag{12.36}$$

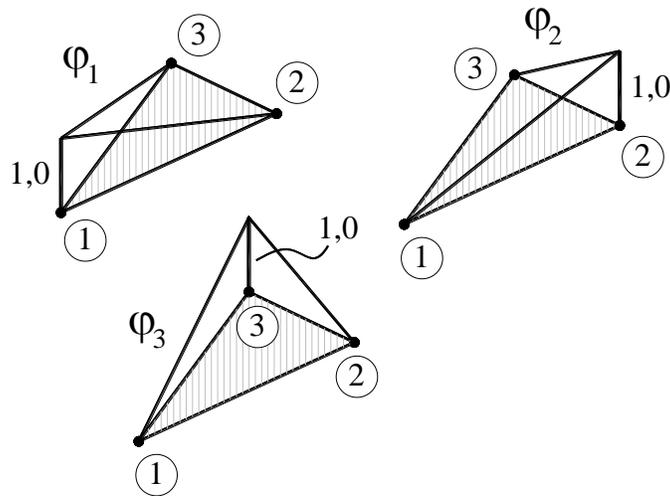
cumprindo-se ressaltar que essas funções de forma são expressas exatamente da mesma forma na posição indeformada na qual o triângulo tem lados retos, ou seja:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2S}(2A_1^0 + b_1x + a_1y) \\ \phi_2 &= \frac{1}{2S}(2A_2^0 + b_2x + a_2y) \\ \phi_3 &= 1 - \phi_1 - \phi_2\end{aligned}\tag{12.37}$$

onde:

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}(b_1a_2 - b_2a_1) \\ A_i^0 &= \frac{1}{2}(x_jy_k - x_ky_j) \\ a_i &= x_k - x_j \\ b_i &= y_j - y_k\end{aligned}\tag{12.38}$$

conforme notação já bastante empregada nesse tema.



**Figura 12.5**

Na posição indeformada a expressão aproximada da equação (12.1) é, pois, dada por:

$$\begin{aligned} X &= x_1\phi_1 + x_2\phi_2 + x_3\phi_3 \\ Y &= y_1\phi_1 + y_2\phi_2 + y_3\phi_3 \end{aligned} \quad (12.39)$$

A questão crucial do método dos elementos finitos é resolver a equação (12.33) em termos das variáveis  $x$  e  $y$  do domínio indeformável, uma vez que as variáveis  $X$  e  $Y$  são desconhecidas (incógnitas do problema). Em primeiro lugar, o segundo termo do primeiro membro da equação (12.33) pode ser expresso nas variáveis  $x$  e  $y$ , pois:

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \ddot{X}_1\phi_1 + \ddot{X}_2\phi_2 + \ddot{X}_3\phi_3 \\ \ddot{Y} &= \ddot{Y}_1\phi_1 + \ddot{Y}_2\phi_2 + \ddot{Y}_3\phi_3 \end{aligned} \quad (12.40)$$

ou seja

$$\int_{R_0} \rho\phi \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} J dx dy = \int_{R_0} \rho_0\phi \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} dx dy \quad (12.41)$$

O primeiro termo da equação (12.33) também pode se expresso em termos das variáveis  $x$  e  $y$  substituindo-se os componentes da tensão de Cauchy da posição deformada pelos correspondentes componentes do segundo tensor de Piola Kirchhoff, ou seja:

$$\int_{R0} \frac{1}{J} A \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} A^T \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} J dx dy = \int_{R0} A \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} A^T \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} dx dy \quad (12.42)$$

Como as componentes de tensão  $S_{ij}$  são relacionadas com as deformações de Green mediante o modelo reológico adotado, a expressão (12.42) permite formular as matrizes do método dos elementos finitos.

Finalmente cumpre assinalar que a formulação dos elementos finitos com aproximações de grau mais elevado, bem como dos elementos finitos isoparamétricos não oferecem novidades conceituais, pois as integrações são feitas nas variáveis originais  $x$  e  $y$ , bastando-se substituir tais integrais por aquelas efetuadas no domínio transformado como apresentado.