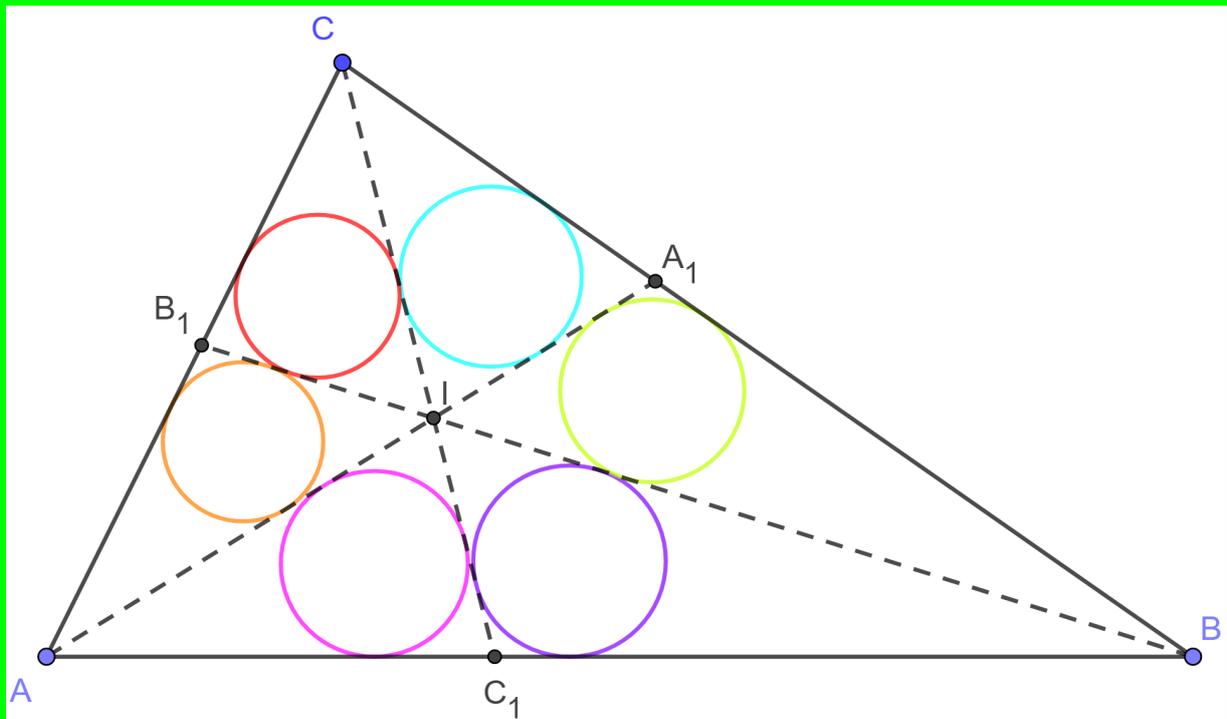


# Teoremas de Tales, da bissetriz e Apolônio: teoria, construções e problemas olímpicos



Juan López Linares

JUAN LÓPEZ LINARES

**Teoremas de Tales, da bissetriz e Apolônio: teoria, construções e  
problemas olímpicos**

DOI: 10.11606/9786587023434

Pirassununga - SP  
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)  
2024

# UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**Reitor:** Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

**Vice-Reitora:** Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

## FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<https://www.fzea.usp.br>

**Diretor:** Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

**Vice-Diretor:** Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da  
Universidade de São Paulo

L864t	López Linares, Juan Teoremas de Tales, da bissetriz e Apolônio : teoria, construções e problemas olímpicos / Juan López Linares. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2024. 120 p.  ISBN 978-65-87023-43-4 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023434  1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino médio. 6. Formação de professores. I. Título.
-------	--

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

**Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.**



*Dedico este livro a minha família.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos Professores e Estudantes do curso de Geometria Olímpica com GeoGebra que motivaram a escrita deste livro eletrônico.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

## AUTOR

Prof. Associado JUAN LÓPEZ LINARES: <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Quando adolescente participava como estudante de um grupo de treinamento para olimpíadas de Física. Embora tivesse sucessos nas competições desta disciplina, nas olimpíadas de Matemática não tinha resultados espetaculares. Sempre sentiu falta de um grupo de treinamento em Matemática. Essa experiência extracurricular determinou seu futuro profissional e motivou sua linha de trabalho hoje.

Professor Associado do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores e estudantes de alto rendimento.

Na área de Ensino de Matemática publicou 22 artigos, 21 livros eletrônicos (e-book), um capítulo de livro, uma dissertação de mestrado e uma tese de livre docência. Textos completos e gratuitos podem ser encontrados [aqui](#). Também disponibilizou mais de 1000 vídeo aulas. Adicionalmente, no site do [GeoGebra](#) estão disponíveis mais de 1000 construções geométricas interativas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProFMat) pela UFSCar em 2019 e Livre Docente na área de Ensino de Matemática Olímpica na FZEA USP em 2022.

## **Título**

Teoremas de Tales, da bissetriz e Apolônio: teoria, construções e problemas olímpicos

## **Prefácio**

Os teoremas de Tales e da Bissetriz e as circunferências de Apolônio são pilares fundamentais para o estudo da Geometria. Este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 80 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. A discussão é organizada em cinco capítulos: Fundamentos; Circunferências de Apolônio e Pontos Isodinâmicos;

Construções, exercícios e desafios; Problemas resolvidos de olimpíadas internacionais; Problemas propostos. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mãos na massa.

**Palavras-chave:** Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

# Lista de Figuras

2.1	Ilustração do Teorema 1. Versões interativas <a href="#">aqui</a> e <a href="#">aqui</a> . . . . .	17
2.2	Guia para a demonstração do Teorema 2. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	18
2.3	Guia para a demonstração do Teorema 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	19
2.4	Guia para a demonstração da Proposição 5. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	21
2.5	Divisão harmônica. Guia para o caso $0 \leq k < 1$ ( $BP < CP$ ). Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	22
2.6	Divisão harmônica. Guia para o caso $k > 1$ ( $BP > CP$ ). Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	23
2.7	Teorema de Menelaus. Caso em que os pontos $X$ , $Y$ e $Z$ não são colineares. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . É possível deslocar os pontos sobre as retas e verificar a validade ou não de (2.7.1). . . . .	25
2.8	Ida do Teorema de Menelaus. Por hipótese os pontos $X$ , $Y$ e $Z$ são colineares. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	26
2.9	Volta do Teorema de Menelaus. Por hipótese vale a equação (2.7.1). Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	27
2.10	Ilustração do Teorema 7 (Desargues). Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	28
2.11	Primeira aplicação do Teorema de Menelaus para demonstrar a ida do Teorema 7 (Desargues). Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	29
2.12	Segunda aplicação do Teorema de Menelaus para demonstrar a ida do Teorema 7 (Desargues). Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	30
2.13	Terceira aplicação do Teorema de Menelaus para demonstrar a ida do Teorema 7 (Desargues). Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	31
2.14	Aplicação da recíproca do Teorema de Menelaus para demonstrar a ida do Teorema 7 (Desargues). Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	32
2.15	Teorema de Pascal. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . É possível deslocar os pontos sobre $\gamma$ e verificar a colinearidade de $X$ , $Y$ e $Z$ . O hexágono $ABCDEF$ não precisa ser convexo. . . . .	33
2.16	Demonstração do Teorema de Pascal. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . É possível deslocar os pontos sobre $\gamma$ e verificar a colinearidade de $X$ , $Y$ e $Z$ . O hexágono $ABCDEF$ não precisa ser convexo. . . . .	34

2.17	Pascal para quadrilátero inscrito. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	35
2.18	Ilustração da Definição 2 e da construção dos pontos inversos $P'$ e $Q'$ . Quando $S \in i \Rightarrow S' = S$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	36
2.19	Guia para a Definição 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	37
2.20	Guia para a demonstração do Teorema 10. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	38
2.21	Guia para a demonstração do Corolário 11. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	39
2.22	Dualismo entre os Teoremas de Pascal e Brianchon. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	40
2.23	Teorema de Brianchon. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	41
2.24	Corolário de Brianchon para quadrilátero. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	42
2.25	Ilustração do Teorema 14 (Brocard). Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	43
2.26	Demonstração do Teorema 14 (Brocard). Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	44
2.27	Ilustração da Proposição 15. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	45
3.1	$k_a$ é a Circunferência de Apolônio relativa ao segmento $BC$ ou o vértice $A$ do $\triangle ABC$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	47
3.2	A Circunferência de Apolônio pode ser entendida como um Lugar Geométrico. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	48
3.3	Exercício de construção da Circunferência de Apolônio dado o segmento $BC$ e a constante $k = \frac{d}{f}$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	49
3.4	O circuncírculo $k$ do $\triangle ABC$ é ortogonal com a circunferência A-Apolônio $k_a$ do mesmo triângulo. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	51
3.5	O conjunto de pontos $P$ tais que o triângulo Pedal $P_aP_bP_c$ seja isósceles de base $P_bP_c$ coincide com a circunferência A-Apolônio $k_a$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	52
3.6	As três circunferências de Apolônio concorrem nos Pontos Isodinâmicos $S$ e $S'$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	53
3.7	Propriedade dos Pontos Isodinâmicos $S$ e $S'$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	54
3.8	Os triângulos Pedais $S_aS_bS_c$ e $S'_aS'_bS'_c$ dos pontos isodinâmico $S$ e $S'$ do $\triangle ABC$ são equiláteros. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	55
3.9	Os triângulos $DEF$ e $D'E'F'$ são equiláteros. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	56
3.10	Entre todos os triângulos equiláteros $PQR$ inscritos no $\triangle ABC$ o triângulo Pedal $S_aS_bS_c$ do primeiro ponto isodinâmico $S$ é o de menor área. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	57
3.11	Resumão Teorema da Bissetriz e Apolônio no caso $0 < k < 1$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	58
4.1	Guia para a construção do Exercício 2. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	60
4.2	Construção do Problema 1. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	61
4.3	Resolução do Problema 1. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	62

4.4	Primeira construção do Exercício 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	63
4.5	Segunda construção do Exercício 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	64
4.6	Construção inicial do Problema 2. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	65
4.7	Construção do Problema 2. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	66
4.8	Construção inicial do Problema 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	67
4.9	Construção do Problema 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	68
4.10	Construção inicial do Problema 4. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	69
4.11	Construção do Problema 4. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	70
4.12	Construção inicial do Problema 5. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	70
4.13	Construção do Problema 5. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	71
4.14	Qual das duas colunas é esteticamente mais agradável? Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	72
4.15	O retângulo da direita foi construído com segmentos na Proporção ou Razão Áurea. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	73
4.16	O Retângulo de Ouro apresenta a propriedade de auto similaridade quando um quadrado é adicionado ou removido. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	74
4.17	Construção de segmentos em Proporções Áureas. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	75
4.18	Segunda construção de segmentos em Proporções Áureas. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	77
4.19	Razão Áurea no Pentágono Regular, primeira construção. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	78
4.20	Razão Áurea no Pentágono Regular, segunda construção. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	79
4.21	Razão Áurea no Pentágono Regular, terceira construção. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	80
4.22	Razão Áurea no Pentágono Regular, quarta construção. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	81
4.23	Guia para a resolução do Problema 6. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	82
5.1	Construção geométrica inicial para o Problema 7. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	85
5.2	Construção geométrica para o Problema 7. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	86
5.3	Uma construção geométrica para o item (a) do Problema 8. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	88
5.4	Uma construção geométrica para o item (b) do Problema 8. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	89
5.5	Uma construção geométrica inicial do Problema 9. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	90
5.6	Uma construção geométrica do Problema 9. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	93
5.7	Uma construção geométrica inicial do Problema 10. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	94
5.8	Resolução do Problema 10. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	96
5.9	Uma construção geométrica inicial do Problema 11. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	97
5.10	Uma construção geométrica do caso a) do Problema 11. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	99
5.11	Uma construção geométrica do caso b) do Problema 11. Versão interativa <a href="#">aqui</a> .	100

5.12 Caso hipotético em que  $KE$  é a reta polar do ponto  $M$  relativo a circunferência  $n$ , de centro  $O$ . Por construção,  $A, L', P, Q \in n$ ,  $E = AQ \cap PL'$ ,  $K = AP \cap L'Q$  e  $M = AL' \cap PQ$ . Versão interativa [aqui](#). . . . . 101

5.13 Uma construção geométrica inicial do Problema 12. Versão interativa [aqui](#). . . . . 102

5.14 Uma construção geométrica do Problema 12. Versão interativa [aqui](#). . . . . 103

5.15 Construção geométrica inicial para o Problema 13. Versão interativa [aqui](#). . . . . 104

5.16 Construção geométrica para o Problema 13. Versão interativa [aqui](#). . . . . 106

5.17 Construção geométrica utilizando inversão para o Problema 13. Versão interativa [aqui](#). . . . . 107

6.1 Construção geométrica inicial para o Problema 14. Versão interativa [aqui](#). . . . . 109

6.2 Construção geométrica inicial para o Problema 15. Versão interativa [aqui](#). . . . . 110

# Sumário

## Lista de Figuras

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
1.1	Organização, GeoGebra e publicações anteriores . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Fundamentos</b>	<b>16</b>
2.1	Teorema de Tales . . . . .	16
2.2	Teorema da Bissetriz Interna . . . . .	17
2.3	Teorema da Bissetriz Externa . . . . .	19
2.4	Teorema da Bissetriz . . . . .	20
2.5	Ponto equidistante de dois vértices, o incentro e o ex-incentro . . . . .	20
2.6	Divisão Harmônica de um segmento . . . . .	22
2.6.1	Caso $0 \leq k < 1$ ( $BP < CP$ ) . . . . .	22
2.6.2	Caso $k > 1$ ( $BP > CP$ ) . . . . .	23
2.7	Teorema de Menelaus . . . . .	24
2.8	Teorema de Desargues . . . . .	27
2.9	Teoremas de Pascal . . . . .	32
2.10	Inversão, Polo e Polar . . . . .	35
2.11	Teorema de Brianchon . . . . .	39
2.12	Teorema de Brocard . . . . .	42
2.13	Divisão harmônica determinada por ponto sobre polar . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Circunferências de Apolônio e Pontos Isodinâmicos</b>	<b>46</b>
3.1	Circunferências de Apolônio . . . . .	46
3.2	Exercício de construção de circunferência de Apolônio . . . . .	48
3.3	Três circunferências de Apolônio do $\triangle ABC$ . . . . .	50
3.4	Circuncírculo e circunferências de Apolônio são ortogonais . . . . .	50
3.5	Pedais de Apolônio gera isósceles . . . . .	51
3.6	Pontos Isodinâmicos . . . . .	52
3.7	Pedais dos pontos isodinâmicos são equiláteros . . . . .	55

3.8	Reflexões de isodinâmico gera equilátero . . . . .	56
3.9	Área mínima de equiláteros inscritos no $\triangle ABC$ . . . . .	56
3.10	Resumão Teorema da Bissetriz e Apolônio . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Construções, exercícios e desafios</b>	<b>59</b>
4.1	Dividir um segmento em partes iguais . . . . .	59
4.1.1	Resolução do Exercício 2 . . . . .	59
4.2	Circunferência, Pitágoras e razão áurea. . . . .	60
4.2.1	Resolução do Problema 1 . . . . .	61
4.3	Construção das circunferências inscrita e ex-inscrita de um triângulo. . . . .	62
4.3.1	Resolução do Exercício 3 . . . . .	63
4.4	Duas vezes o teorema da bissetriz. . . . .	64
4.4.1	Resolução do Problema 2 . . . . .	65
4.5	Triângulo retângulo, equação de segundo grau e teorema da bissetriz interna. . . . .	66
4.5.1	Resolução do Problema 3 . . . . .	66
4.6	Construção LLL e teorema da bissetriz interna. . . . .	68
4.6.1	Resolução do Problema 4 . . . . .	68
4.7	Divisão harmônica e teorema da bissetriz. . . . .	70
4.7.1	Resolução do Problema 5 . . . . .	70
4.8	Razão Áurea . . . . .	71
4.9	Construção de segmentos em Proporções Áureas-I . . . . .	75
4.9.1	Resolução do Exercício 4 . . . . .	75
4.10	Construção de segmentos em Proporções Áureas-II . . . . .	76
4.10.1	Resolução do Exercício 5 . . . . .	76
4.11	Razão Áurea no Pentágono Regular . . . . .	77
4.12	Razão Áurea, Pentágono Regular, Semelhança de Triângulos. P3 NE IGO 2017. . . . .	81
4.12.1	Resolução do Problema 6 . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Problemas resolvidos de olimpíadas internacionais</b>	<b>84</b>
5.1	Bissetriz, semelhança, lugar geométrico. P5 IMO 1959. . . . .	84
5.1.1	Resolução do Problema 7 . . . . .	84
5.2	Teorema de Tales. Semelhança. P5 IMO 1965. . . . .	87
5.2.1	Resolução do Problema 8 . . . . .	87
5.3	Teorema da bissetriz interna. Desigualdade das médias aritmética e geométrica. P1 IMO 1991. . . . .	89
5.3.1	Resolução do Problema 9 . . . . .	90
5.4	Incentro. Divisão harmônica. Trapézio isósceles. Semelhança de triângulos. P19 SL IMO 2005. . . . .	93

5.4.1	Resolução do Problema 10 . . . . .	93
5.5	Bissetrizes. Quadriláteros inscritíveis. Reta polar. P4 IMO 2009. . . . .	96
5.5.1	Resolução do Problema 11 . . . . .	96
5.6	Incentro. Circuncentro. Homotetia. P5 IMO 1981. . . . .	101
5.6.1	Resolução do Problema 12 . . . . .	101
5.7	Teorema da Bissetriz. Triângulo Pedal. Lei dos Senos. Inversão. P2 IMO 1996. .	103
5.7.1	Primeira resolução do Problema 13. . . . .	103
5.7.2	Construção e resolução do Problema 13 por inversão. . . . .	106
<b>6</b>	<b>Problemas propostos</b>	<b>108</b>
6.1	Pentágono, bissetrizes. P50 LL IMO 1969. . . . .	108
6.2	Bissetrizes, incírculos. P1 SL IMO 1976. . . . .	109
<b>7</b>	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>111</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Os teoremas de Tales e da Bissetriz e as circunferências de Apolônio são pilares fundamentais para o estudo da Geometria.

### 1.1 Organização, GeoGebra e publicações anteriores

O livro faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O mesmo aconteceu na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma Moodle de Cultura e Extensão da USP. O texto conta com 80 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, links para os gráficos interativos são disponibilizados em páginas do [GeoGebra](#). Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube. A discussão é organizada em cinco capítulos: Fundamentos; Circunferências de Apolônio e Pontos Isodinâmicos; Construções, exercícios e desafios; Problemas resolvidos de olimpíadas internacionais; Problemas propostos. Mas sem a pretensão de esgotar os temas abordados.

O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contra partida, na versão impressa tradicional o aprendiz precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma resolução.

O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movi-

mentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes. Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendizado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar e buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

Um artigo da área de Educação Matemática [60] fez uma pesquisa bibliográfica das investigações realizadas a respeito de Bissetriz. Os resultados mostraram que a noção de lugar geométrico é pouco detalhada. Outras pesquisas apontaram que o ensino de Geometria Plana, utilizando o software GeoGebra, proporciona ricas possibilidades de visualização do processo de aprendizagem que são difíceis de serem trabalhadas em um ambiente comum [66], [48], [6], [61] e [2].

Para o leitor iniciante recomenda-se consultar os livros de Geometria [51], [5] e [1]. De muita utilidade são as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Bruno Holanda [7], do Prof. Rodrigo Pinheiro [62] e do Prof. Cícero Thiago [67]. Também serviram como referência os livros de Geometria Analítica [3] e Matemática Discreta [50] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Treze livros eletrônicos gratuitos com as notas de aulas do curso Geometria Olímpica com GeoGebra estão disponíveis em [43], [44], [45], [26], [24], [22], [29], [10], [17], [31], [34], [9] e [14]. Também foram publicados quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [32], [18], [19] e [20]. Outros trabalhos da área de Matemática são [23], [35], [39], [37], [28], [41], [40], [8], [46], [16], [15], [38], [42], [63], [47], [64], [25], [27], [21], [65], [33], [30], [36], [12], [13] e [11].

# Capítulo 2

## Fundamentos

Para fins didáticos, este capítulo aborda alguns dos mais importantes fundamentos teóricos e construtivos que serão utilizados nos próximos. O leitor especialista na área pode pular para a discussão dos problemas olímpicos. Parte do conteúdo está disponível em vídeos de [2020](#), [2021](#), [2022](#) e [2023](#).

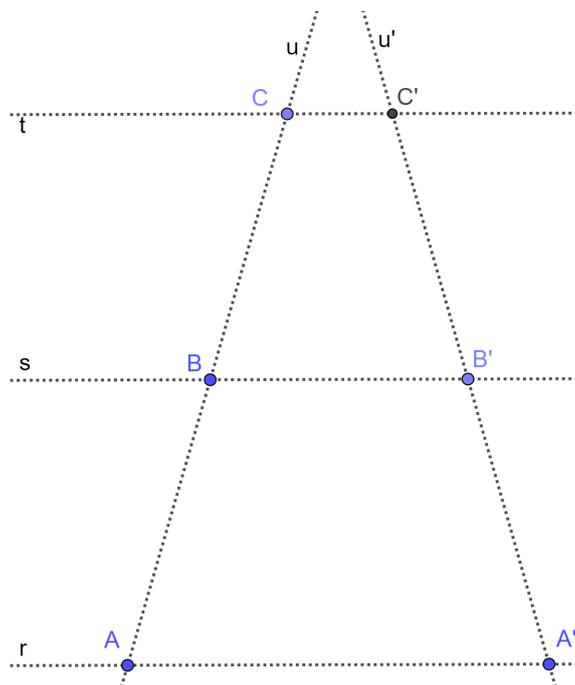
### 2.1 Teorema de Tales

Tales de Mileto foi o primeiro filósofo, cientista e matemático grego conhecido. Ele é creditado com cinco teoremas de geometria elementar. Acredita-se que nasceu por volta do ano 624 antes de Cristo e morreu por volta do ano 547 antes de Cristo [59].

**Teorema 1** (Tales). *Sejam as retas  $r \parallel s \parallel t$ , e os pontos  $A, A' \in r$ ,  $B, B' \in s$  e  $C, C' \in t$ . Consideram-se ainda as retas  $u$  e  $u'$  tais que  $A, B, C \in u$  e  $A', B', C' \in u'$  (Figura 2.1). Então vale que:*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Figura 2.1: Ilustração do Teorema 1. Versões interativas [aqui](#) e [aqui](#).



Fonte: O autor.

No caso em que  $AB = BC$ , pela proposição sobre a base média de um trapézio, vale que  $A'B' = B'C'$ .

No caso em que  $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ , dividem-se os segmentos  $AB$  e  $BC$  em  $m$  e  $n$  partes iguais, respectivamente. A repetida aplicação da proposição sobre a base média de um trapézio mostra a validade do Teorema 1 (Tales).

No caso em que  $\frac{AB}{BC} = r$ , com  $r$  um número irracional a demonstração é um pouco mais elaborada. Utiliza-se que todo número irracional pode ser delimitado, com precisão arbitrária, por seqüências de racionais.

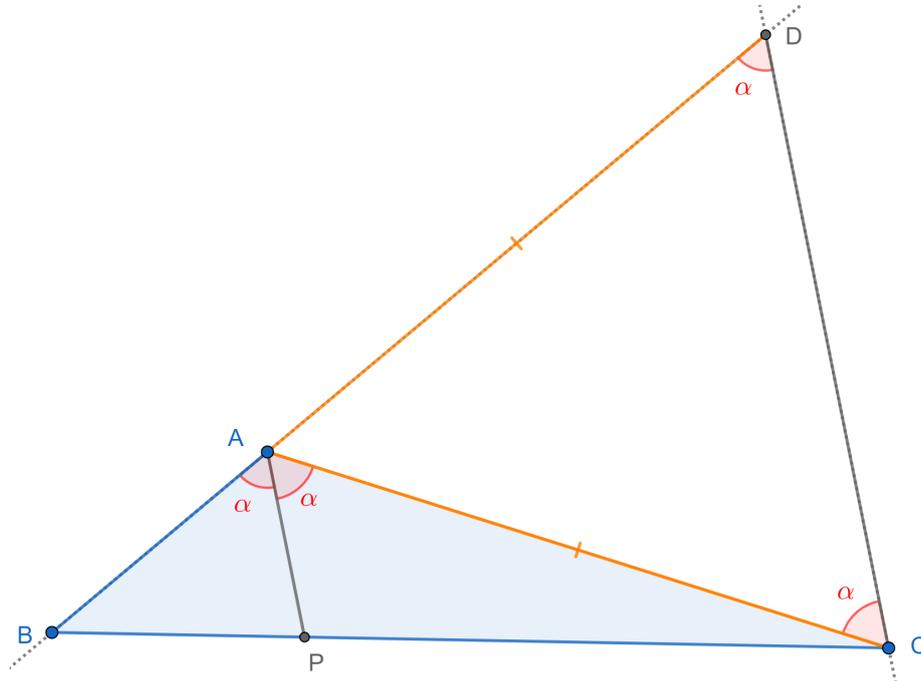
## 2.2 Teorema da Bissetriz Interna

**Teorema 2** (Teorema da Bissetriz Interna). *A Figura 2.2 mostra um triângulo  $ABC$ . A bissetriz interna  $AP$  do  $\angle A$  divide internamente o lado oposto  $BC$  na razão:*

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BP}{CP}, \quad (2.2.1)$$

em que  $P$  é o ponto de interseção da bissetriz interna com o lado  $BC$ .

Figura 2.2: Guia para a demonstração do Teorema 2. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Traça-se a reta  $AB$  e uma reta paralela a  $AP$  passando por  $C$ . Chama-se  $D$  o ponto de interseção destas. Como  $AP \parallel CD$ , por alternos internos, segue que:

$$\angle PAC = \angle ACD = \alpha$$

e, por correspondentes, tem-se:

$$\angle BAP = \angle ADC = \alpha.$$

De  $\angle ACD = \angle ADC$  encontra-se que o  $\triangle ACD$  é isósceles de base  $CD$ . Logo,

$$CA = DA.$$

Pelo Teorema 1 (Tales) vale que:

$$\frac{BA}{DA} = \frac{BP}{CP}.$$

Mas  $AD = AC$ , portanto,

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BP}{CP}.$$

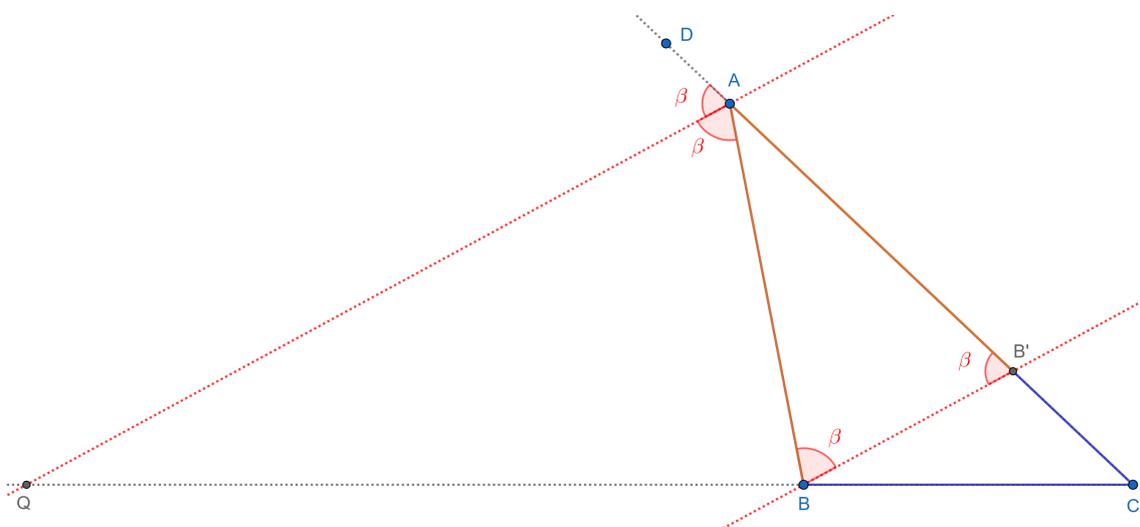
□

## 2.3 Teorema da Bissetriz Externa

**Teorema 3** (Teorema da Bissetriz Externa). *Seja  $ABC$  um triângulo não isósceles e  $AQ$ , como  $Q \in BC$ , a bissetriz externa do  $\angle A$  (Figura 2.3). Então vale que:*

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BQ}{CQ}. \quad (2.3.1)$$

Figura 2.3: Guia para a demonstração do Teorema 3. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Sem perda de generalidade considera-se o caso em que  $AC > AB$ . Traça-se uma reta paralela a  $AQ$  passando por  $B$ . Chama-se  $B'$  ao ponto de interseção desta com  $AC$ .

Seja o ponto  $D \in AC$  e além de  $A$ . Como  $QA \parallel BB'$  valem as igualdades:

$$\angle QAB = \angle ABB' = \beta \quad (\text{Alternos Internos}),$$

$$\angle DAQ = \angle AB'B = \beta \quad (\text{Correspondentes}).$$

Como  $\angle ABB' = \angle AB'B$  o triângulo  $ABB'$  é isósceles de base  $BB'$  e  $AB = AB'$ . Pelo Teorema 1 (Tales) tem-se:

$$\frac{B'A}{CA} = \frac{BQ}{CQ}.$$

Ou seja,

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BQ}{CQ}.$$

□

## 2.4 Teorema da Bissetriz

**Teorema 4** (Teorema da Bissetriz). *Sejam  $ABC$  um triângulo não isósceles,  $P$  o ponto de interseção da bissetriz interna do  $\angle A$  com o lado  $BC$  e  $AQ$ , como  $Q \in BC$ , a bissetriz externa do  $\angle A$ . Então vale que:*

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BP}{CP} = \frac{BQ}{CQ}. \quad (2.4.1)$$

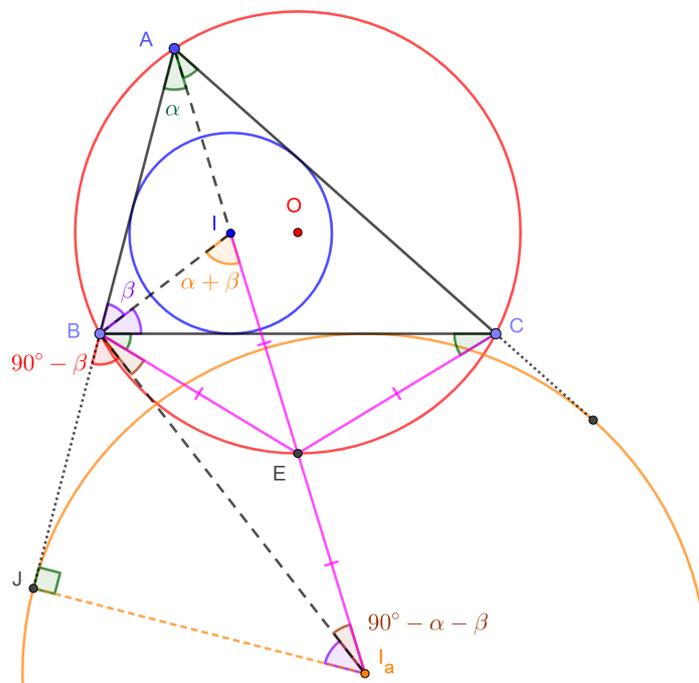
*Demonstração.* O resultado segue das equações (2.2.1) e (2.3.1). □

## 2.5 Ponto equidistante de dois vértices, o incentro e o ex-incentro

**Proposição 5.** *A Figura 2.4 mostra um triângulo  $ABC$ . Seja  $I$  seu Incentro e  $I_a$  o centro da ex-circunferência correspondente ao lado  $BC$ . Seja  $E$  o ponto de interseção de  $AI$  com a circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$ . Então,*

$$EB = EC = EI = EI_a.$$

Figura 2.4: Guia para a demonstração da Proposição 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Pela bissetriz em  $A$  e o quadrilátero inscrito  $ACEB$  tem-se:

$$\angle BAE = \angle CAE = \angle CBE = \angle BCE = \alpha.$$

Portanto, o  $\triangle EBC$  é isósceles, de base  $BC$ , e  $EB = EC$ . Além disso, da bissetriz em  $B$ , sejam  $\angle IBA = \angle IBC = \beta$ . Pela propriedade do ângulo externo,

$$\angle BIE = \alpha + \beta.$$

Segue que,  $\angle BIE = \angle IBE$ , o  $\triangle EBI$  é isósceles, de base  $BI$ , e  $EB = EI$ . Pela bissetriz externa em  $B$ , sejam

$$\angle JBI_a = \angle CBI_a = \gamma.$$

Como o  $\angle JBA = 180^\circ$  tem-se que  $\gamma = 90^\circ - \beta$ . Do  $\triangle BJI_a$ , retângulo em  $J$ , tem-se  $\angle JI_aB = \beta$ . Pela soma dos ângulos internos no  $\triangle AJI_a$  e o ângulo raso em  $B$  encontra-se:

$$\angle EBI_a = \angle EI_aB = 90^\circ - \alpha - \beta.$$

Isto é, o  $\triangle EBI_a$  é isósceles, de base  $BI_a$ , e  $EB = EI_a$ . Conclui-se que:

$$EB = EC = EI = EI_a.$$

□

## 2.6 Divisão Harmônica de um segmento

Inspirada na segunda igualdade da (2.4.1) é feita a definição a seguir.

**Definição 1** (Divisão Harmônica). *Seja um segmento  $BC$ . Os pontos  $P$  (no interior do segmento  $BC$ ) e  $Q$  (na reta  $BC$ , mas no exterior do mesmo segmento) dividem harmonicamente o segmento  $BC$  quando:*

$$\frac{BP}{CP} = \frac{BQ}{CQ} = k. \quad (2.6.1)$$

Onde  $k$  é um número real não negativo e  $k \neq 1$ . Os pontos  $P$  e  $Q$  também são chamados de conjugados harmônicos do segmento  $BC$  na razão  $k$ .

Quando  $k = 1$  ( $BP = CP$ ) o ponto  $P$  é o ponto médio do segmento  $BC$  e o ponto  $Q$  está no infinito.

### 2.6.1 Caso $0 \leq k < 1$ ( $BP < CP$ )

A Figura 2.5 permite acompanhar a dedução que segue.

Figura 2.5: Divisão harmônica. Guia para o caso  $0 \leq k < 1$  ( $BP < CP$ ). Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Quando  $k = 0$  vale que  $BP = BQ = 0$ . Isto é, os pontos  $P$  e  $Q$  coincidem no ponto  $B$ . Se  $0 < k < 1$ , então:

$$PB + PC = BC, \quad (2.6.2)$$

$$QC = QB + BC. \quad (2.6.3)$$

Da equação (2.6.1) obtêm-se:

$$PB = k \cdot PC, \quad (2.6.4)$$

$$QB = k \cdot QC. \quad (2.6.5)$$

Substituindo (2.6.4) e (2.6.5) em (2.6.2) e (2.6.3), respectivamente, encontra-se:

$$PC = \frac{1}{1+k}BC, \quad (2.6.6)$$

$$QC = \frac{1}{1-k}BC. \quad (2.6.7)$$

Adicionalmente, substituindo (2.6.6) e (2.6.7) em (2.6.2) e (2.6.3), respectivamente, obtêm-se:

$$PB = \frac{k}{1+k}BC, \quad (2.6.8)$$

$$QB = \frac{k}{1-k}BC. \quad (2.6.9)$$

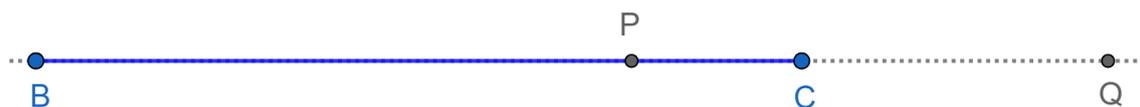
Da soma de (2.6.8) e (2.6.9) chega-se em:

$$QP = \frac{2k}{1-k^2}BC. \quad (2.6.10)$$

### 2.6.2 Caso $k > 1$ ( $BP > CP$ )

A Figura 2.6 permite acompanhar a dedução que segue.

Figura 2.6: Divisão harmônica. Guia para o caso  $k > 1$  ( $BP > CP$ ). Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Se  $k > 1$ , então:

$$PB + PC = BC, \quad (2.6.11)$$

$$QB = QC + BC. \quad (2.6.12)$$

Da equação (2.6.1) obtêm-se:

$$PB = k \cdot PC, \quad (2.6.13)$$

$$QB = k \cdot QC. \quad (2.6.14)$$

Substituindo (2.6.13) e (2.6.14) em (2.6.11) e (2.6.12), respectivamente, encontra-se:

$$PC = \frac{1}{1+k}BC, \quad (2.6.15)$$

$$QC = \frac{1}{k-1}BC. \quad (2.6.16)$$

Adicionalmente, substituindo (2.6.15) e (2.6.16) em (2.6.11) e (2.6.12), respectivamente, obtêm-se:

$$PB = \frac{k}{1+k}BC, \quad (2.6.17)$$

$$QB = \frac{k}{k-1}BC. \quad (2.6.18)$$

Da soma de (2.6.15) e (2.6.16) chega-se em:

$$QP = \frac{2k}{k^2-1}BC. \quad (2.6.19)$$

## 2.7 Teorema de Menelaus

Pelos registros históricos acredita-se que Menelaus de Alexandria, nasceu em 70 d.C., no norte do Egito. Morreu perto do ano 130 d.C. Entre outras coisas fez importantes contribuições na geometria de triângulos esféricos, segundo relatou Ptolomeu anos mais tarde [56].

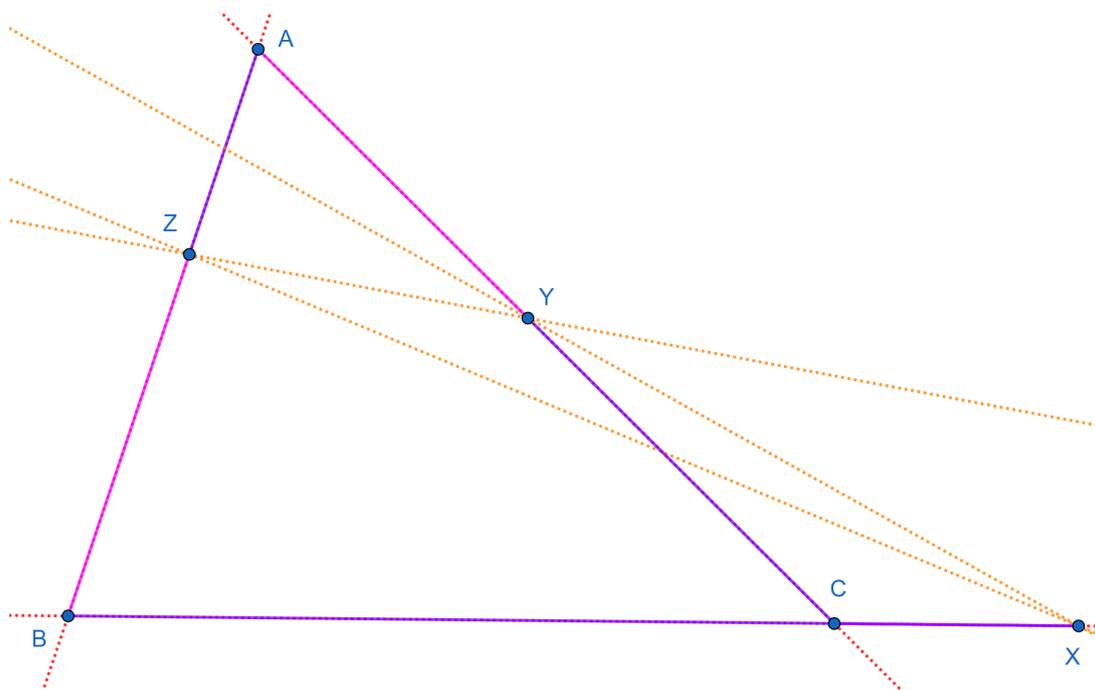
O Teorema a seguir lida com critérios necessários e suficientes para que três pontos sejam colineares. Não será utilizada a notação de segmentos orientados. Isto é, vale que as medidas de  $AB$  e  $BA$  coincidem.

**Teorema 6** (Menelaus). *Sejam  $ABC$  um triângulo e  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  pontos (diferentes de  $A$ ,  $B$  e  $C$ ) sobre as retas  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Então os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são colineares se, e somente se,*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1. \quad (2.7.1)$$

Na versão interativa da Figura 2.7 é possível deslocar os pontos sobre as retas  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , e verificar a validade ou não da equação (2.7.1).

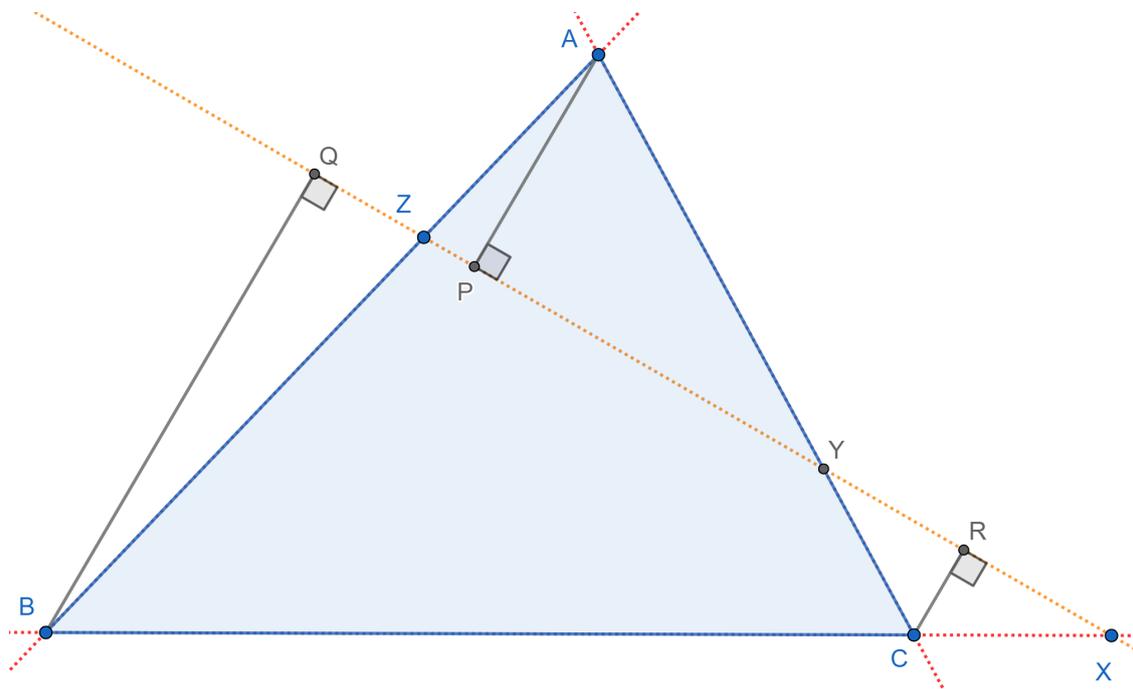
Figura 2.7: Teorema de Menelaus. Caso em que os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  não são colineares. Versão interativa [aqui](#). É possível deslocar os pontos sobre as retas e verificar a validade ou não de (2.7.1).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* (Ida) Inicialmente suponha-se que os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são colineares (Figura 2.8). Sejam  $AP$ ,  $BQ$  e  $CR$  as perpendiculares traçadas a partir de  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, à reta  $XZ$ .

Figura 2.8: Ida do Teorema de Menelaus. Por hipótese os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são colineares. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Os pares de triângulos retângulos  $BQX$  e  $CRX$ ,  $APY$  e  $CRY$  e  $APZ$  e  $BQZ$ , são semelhantes pelo critério AA. Então,

$$\frac{BX}{CX} = \frac{BQ}{CR},$$

$$\frac{CY}{AY} = \frac{CR}{AP},$$

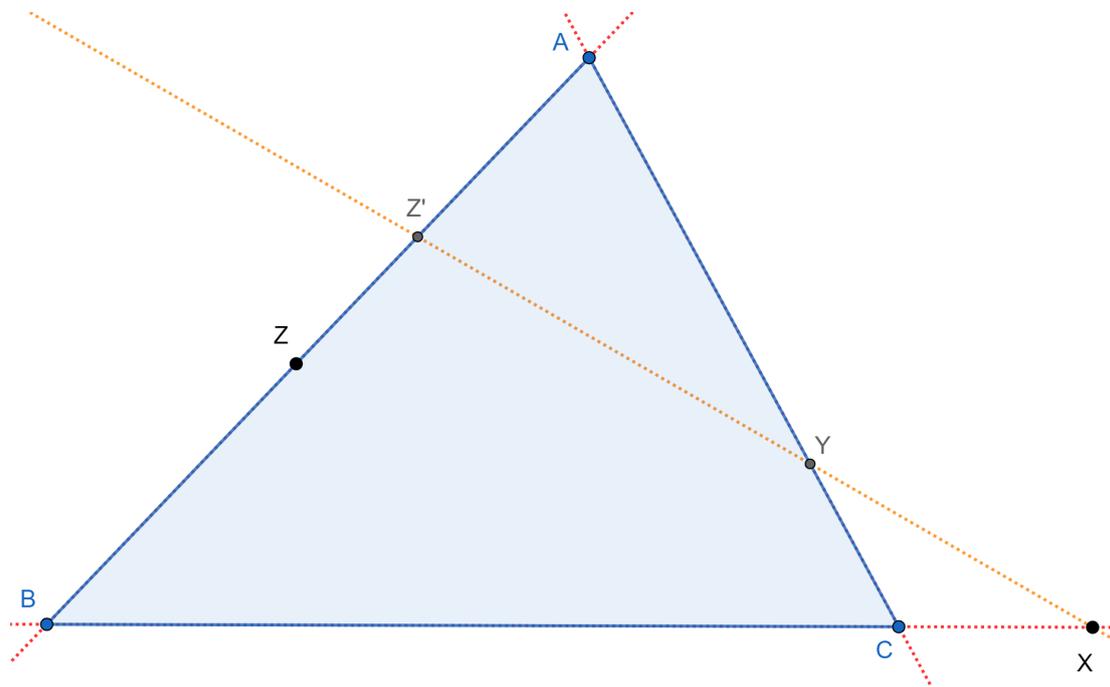
$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{AP}{BQ}.$$

Segue que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BQ}{CR} \cdot \frac{CR}{AP} \cdot \frac{AP}{BQ} = 1.$$

(Volta) Agora suponha-se, por absurdo, que os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  não são colineares, mas vale a equação (2.7.1). Seja o ponto  $Z' = XY \cap AB$  (Figura 2.9).

Figura 2.9: Volta do Teorema de Menelaus. Por hipótese vale a equação (2.7.1). Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Pela ida do Teorema de Menelaus vale que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1.$$

Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} &= \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB}, \\ \frac{AZ'}{Z'B} &= \frac{AZ}{ZB}. \end{aligned}$$

Como  $Z$  e  $Z'$  pertencem a reta  $AB$  o resultado anterior é uma contradição. Ou seja,  $Z = Z'$ .  $\square$

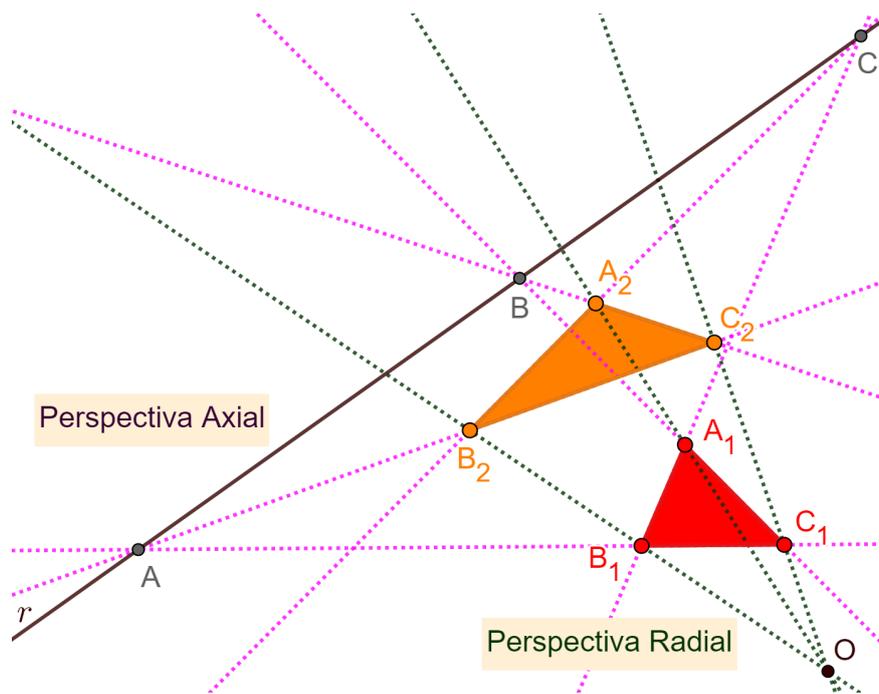
No caso em que mais de um dos pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  pertencem aos prologamentos dos lados do triângulo  $ABC$ , o teorema anterior ainda é válido.

## 2.8 Teorema de Desargues

Girard Desargues foi um matemático francês fundador da geometria projetiva. Seu trabalho centrou-se na teoria das seções cônicas e da perspectiva. Nasceu no dia 21 fevereiro 1591 e morreu em outubro 1661 [55].

**Teorema 7** (Desargues). *Sejam os triângulos  $A_1B_1C_1$  e  $A_2B_2C_2$  e os pontos  $A = B_1C_1 \cap B_2C_2$ ,  $B = C_1A_1 \cap C_2A_2$  e  $C = A_1B_1 \cap A_2B_2$ . Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares, reta  $r$  (eixo de perspectiva), se, e somente se, as linhas que percorrem vértices correspondentes encontram-se num ponto chamado centro de perspectiva  $O = A_1A_2 \cap B_1B_2 \cap C_1C_2$  (Figura 2.10).*

Figura 2.10: Ilustração do Teorema 7 (Desargues). Versão interativa [aqui](#).



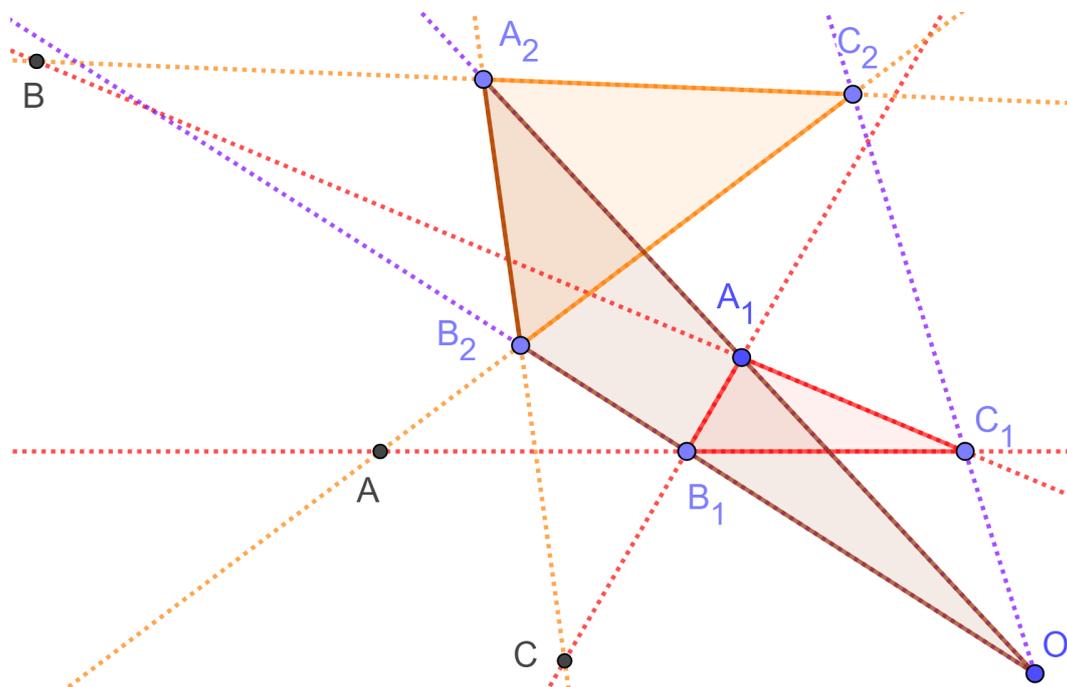
Fonte: O autor.

*Demonstração.* Inicialmente, suponha-se que as retas  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  e  $C_1C_2$  são concorrentes no ponto  $O$ . Isto é,  $O = A_1A_2 \cap B_1B_2 \cap C_1C_2$ . Quer-se provar que os pontos  $A = B_1C_1 \cap B_2C_2$ ,  $B = C_1A_1 \cap C_2A_2$  e  $C = A_1B_1 \cap A_2B_2$  são colineares.

Pelo Teorema de Menelaus, aplicado ao  $\triangle A_2B_2O$  e os pontos colineares  $A_1 \in A_2O$ ,  $B_1 \in B_2O$  e  $C \in A_2B_2$ , escreve-se (Figura 2.11):

$$\frac{A_2C}{CB_2} \cdot \frac{B_2B_1}{B_1O} \cdot \frac{OA_1}{A_1A_2} = 1.$$

Figura 2.11: Primeira aplicação do Teorema de Menelaus para demonstrar a ida do Teorema 7 (Desargues). Versão interativa [aqui](#).

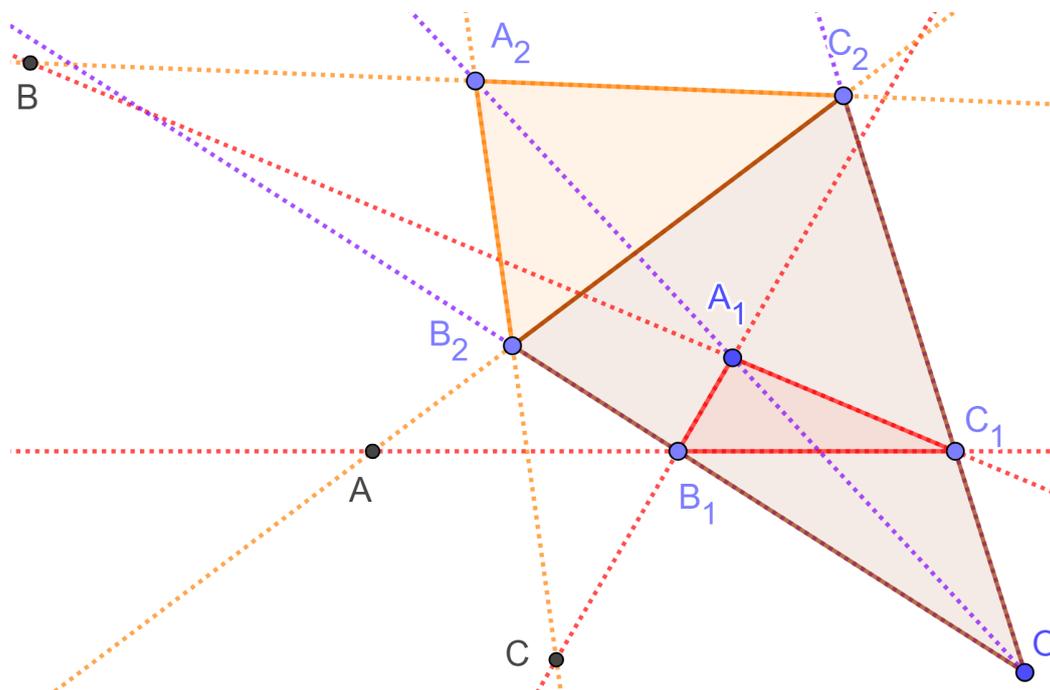


Fonte: O autor.

Pelo Teorema de Menelaus, aplicado ao  $\triangle B_2C_2O$  e os pontos colineares  $B_1 \in B_2O$ ,  $C_1 \in C_2O$  e  $A \in B_2C_2$ , escreve-se (Figura 2.12):

$$\frac{B_2A}{AC_2} \cdot \frac{C_2C_1}{C_1O} \cdot \frac{OB_1}{B_1B_2} = 1.$$

Figura 2.12: Segunda aplicação do Teorema de Menelaus para demonstrar a ida do Teorema 7 (Desargues). Versão interativa [aqui](#).

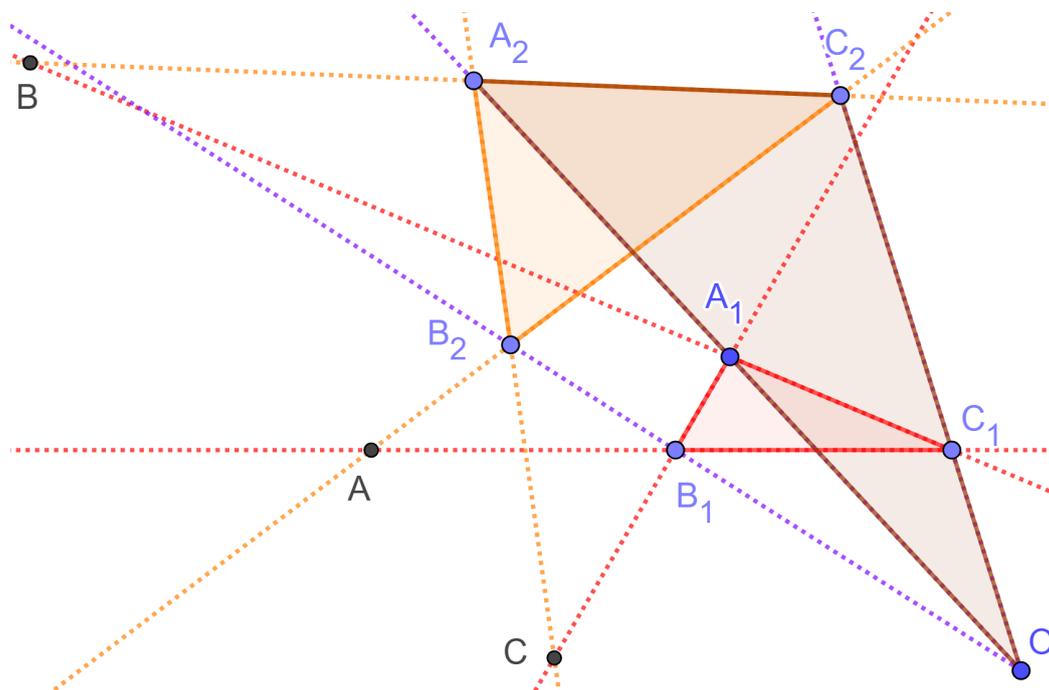


Fonte: O autor.

Pelo Teorema de Menelaus, aplicado ao  $\triangle C_2A_2O$  e os pontos colineares  $C_1 \in C_2O$ ,  $A_1 \in A_2O$  e  $B \in C_2A_2$ , escreve-se (Figura 2.13):

$$\frac{C_2B}{BA_2} \cdot \frac{A_2A_1}{A_1O} \cdot \frac{OC_1}{C_1C_2} = 1.$$

Figura 2.13: Terceira aplicação do Teorema de Menelaus para demonstrar a ida do Teorema 7 (Desargues). Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Isto é:

$$\frac{A_2C}{CB_2} \cdot \frac{B_2B_1}{B_1O} \cdot \frac{OA_1}{A_1A_2} = 1,$$

$$\frac{B_2A}{AC_2} \cdot \frac{C_2C_1}{C_1O} \cdot \frac{OB_1}{B_1B_2} = 1,$$

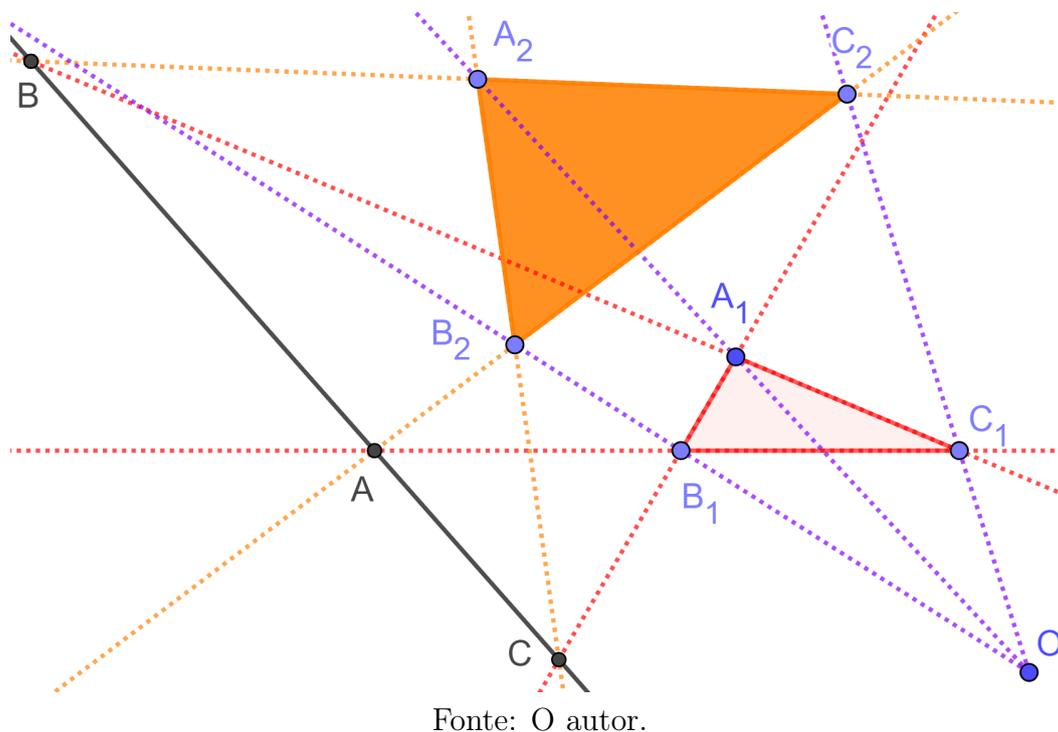
$$\frac{C_2B}{BA_2} \cdot \frac{A_2A_1}{A_1O} \cdot \frac{OC_1}{C_1C_2} = 1.$$

Multiplicando e simplificando as três últimas equações encontra-se:

$$\frac{A_2C}{CB_2} \cdot \frac{B_2A}{AC_2} \cdot \frac{C_2B}{BA_2} = 1.$$

Pela recíproca do Teorema de Menelaus, aplicado ao  $\triangle A_2B_2C_2$ , os pontos  $A \in B_2C_2$ ,  $B \in C_2A_2$  e  $C \in A_2B_2$  são colineares (Figura 2.14).

Figura 2.14: Aplicação da recíproca do Teorema de Menelaus para demonstrar a ida do Teorema 7 (Desargues). Versão interativa [aqui](#).



□

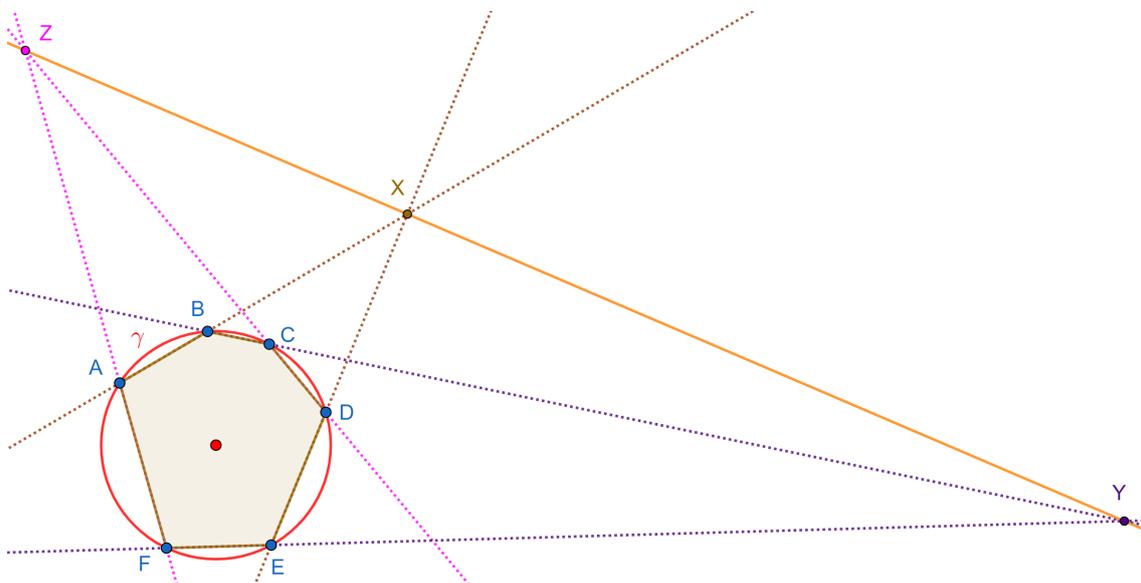
## 2.9 Teoremas de Pascal

Blaise Pascal foi um matemático e filósofo francês muito influente que contribuiu para variadas áreas da Matemática e Física. Trabalhou em seções cônicas e geometria projetiva. Em correspondência com Fermat, lançou as bases para a teoria das probabilidades. Nasceu em 1623 e morreu em 1662 [53].

**Teorema 8** (Pascal). *Se  $A, B, C, D, E$  e  $F$  são pontos distintos sobre uma circunferência  $\gamma$ , então os pontos  $X = AB \cap DE$ ,  $Y = BC \cap EF$  e  $Z = CD \cap FA$  são colineares.*

Na versão interativa da Figura 2.15 é possível deslocar os pontos sobre uma circunferência  $\gamma$  e verificar a colinearidade de  $X, Y$  e  $Z$ .

Figura 2.15: Teorema de Pascal. Versão interativa [aqui](#). É possível deslocar os pontos sobre  $\gamma$  e verificar a colinearidade de  $X, Y$  e  $Z$ . O hexágono  $ABCDEF$  não precisa ser convexo.



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Sejam os pontos  $M = CD \cap EF$ ,  $N = AB \cap CD$  e  $O = AB \cap EF$  (Figura 2.16). Como os pontos  $X, Y$  e  $Z$  pertencem aos prolongamentos dos lados do  $\triangle MNO$  quer-se mostrar que:

$$\frac{MZ}{ZN} \frac{NX}{XO} \frac{OY}{YM} = 1.$$

Nesse caso, pelo Teorema 6 (Menelaus), os pontos  $X, Y$  e  $Z$  são colineares.

Para tal aplica-se três vezes o Teorema 6 (Menelaus) ao  $\triangle MNO$  e os pontos colineares:

$$X, D, E \rightarrow \frac{MD}{DN} \frac{NX}{XO} \frac{OE}{EM} = 1,$$

$$Y, C, B \rightarrow \frac{MC}{CN} \frac{NB}{BO} \frac{OY}{YM} = 1,$$

$$Z, A, F \rightarrow \frac{MZ}{ZN} \frac{NA}{AO} \frac{OF}{FM} = 1.$$

Multiplicam-se as três equações anteriores e agrupam-se as frações:

$$\left( \frac{MZ}{ZN} \frac{NX}{XO} \frac{OY}{YM} \right) \left( \frac{MD}{DN} \frac{OE}{EM} \frac{MC}{CN} \frac{NB}{BO} \frac{NA}{AO} \frac{OF}{FM} \right) = 1.$$

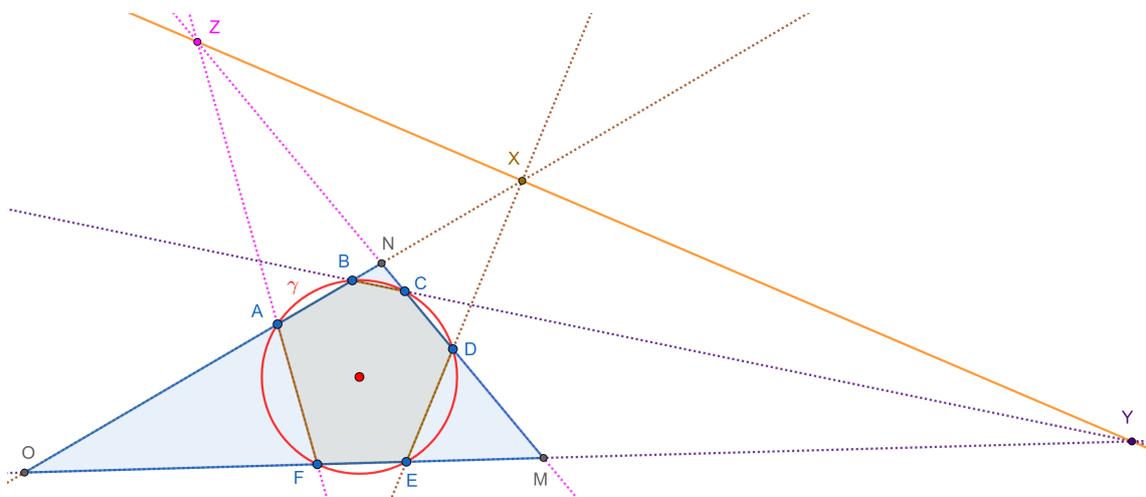
A potência dos pontos  $M, N$  e  $O$  relativos a  $\gamma$  pode ser escrita de duas formas equivalentes

em cada caso. Isso justifica reescrever o segundo parenteses na equação anterior:

$$\left(\frac{MZ}{ZN} \frac{NX}{XO} \frac{OY}{YM}\right) \left(\frac{MC \cdot MD}{ME \cdot MF}\right) \left(\frac{NA \cdot NB}{NC \cdot ND}\right) \left(\frac{OE \cdot OF}{OA \cdot OB}\right) = 1.$$

Como os três últimos parêntesis são todos iguais a um, o teorema fica provado. □

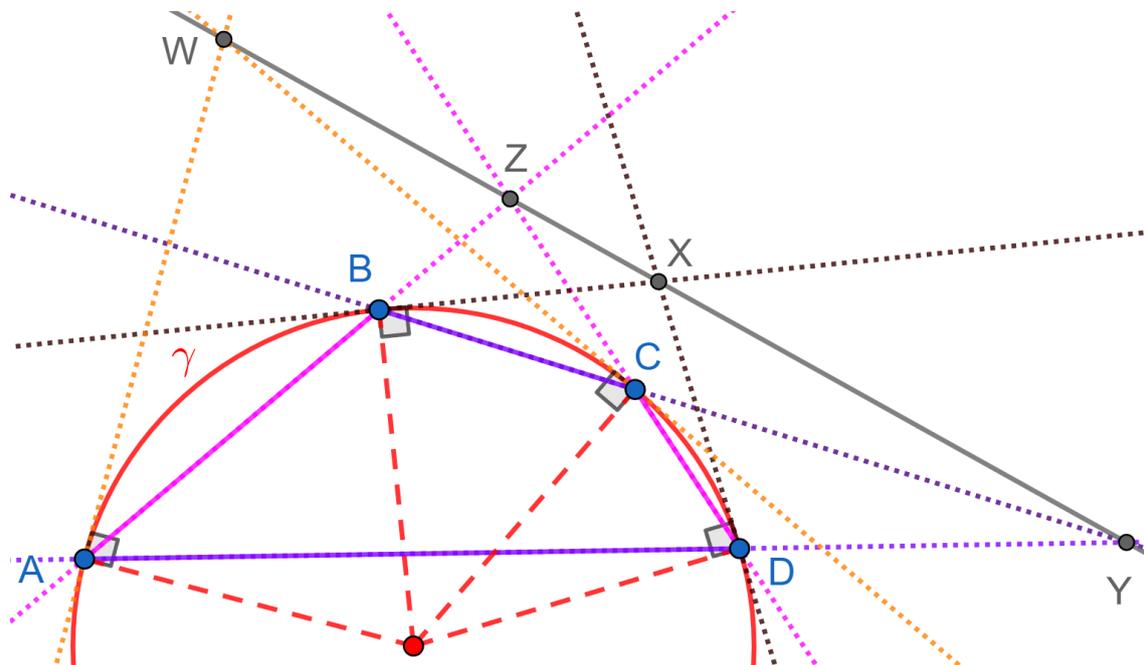
Figura 2.16: Demonstração do Teorema de Pascal. Versão interativa [aqui](#). É possível deslocar os pontos sobre  $\gamma$  e verificar a colinearidade de  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . O hexágono  $ABCDEF$  não precisa ser convexo.



Fonte: O autor.

**Corolário 9** (Pascal para quadrilátero inscrito). *Seja o quadrilátero  $ABCD$  inscrito numa circunferência  $\gamma$ , então os pontos obtidos pela intercepção dos lados opostos e as tangentes em  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são colineares (Figura 2.17).*

Figura 2.17: Pascal para quadrilátero inscrito. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Para demonstrar a colinearidade de  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  basta fazer coincidir os pontos  $A = B$  e  $E = D$  da Figura 2.16. Um raciocínio análogo aplica-se para mostrar a colinearidade de  $W$ ,  $Y$  e  $Z$  □

## 2.10 Inversão, Polo e Polar

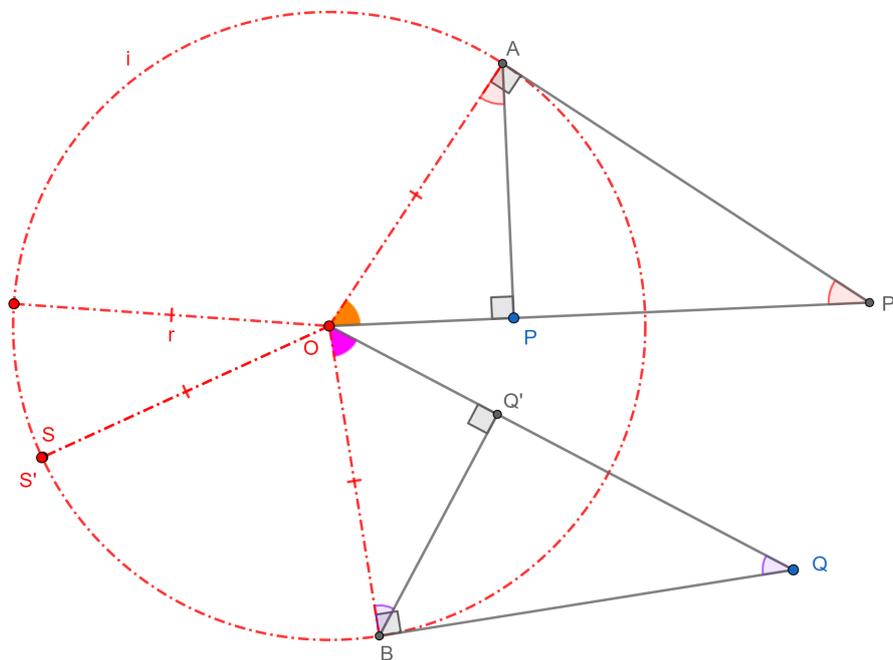
**Definição 2** (Inversão de ponto). *Dados um plano  $l$ , uma circunferência  $i \in l$ , com centro  $O$  e raio  $r$ , e um ponto  $P \in l$ , o ponto  $P'$  que pertence a semirreta  $OP$  e satisfaz*

$$OP' \cdot OP = r^2$$

*é chamado inverso de  $P$  em relação a  $i$  (Figura 2.18). O ponto  $O$  é chamado “centro de inversão” e  $i$  é chamada de “circunferência de inversão”. Também utiliza-se a notação*

$$P' = Inv(P, i).$$

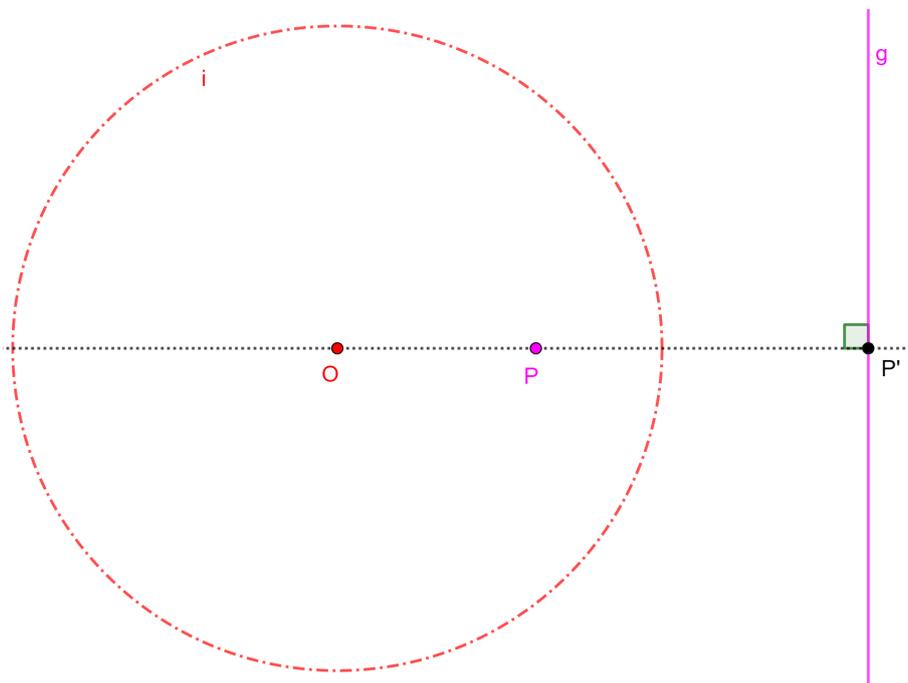
Figura 2.18: Ilustração da Definição 2 e da construção dos pontos inversos  $P'$  e  $Q'$ . Quando  $S \in i \Rightarrow S' = S$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

**Definição 3** (Polo e Polar). *Considera-se uma circunferência de inversão  $i$  de centro  $O$  e os pontos pares de inversão  $P$  e  $P'$ . A reta  $g$ , perpendicular a  $OP'$  passando por  $P'$ , é chamada Polar de  $P$  e o ponto  $P$  é denominado Polo de  $g$  (Figura 2.19).*

Figura 2.19: Guia para a Definição 3. Versão interativa [aqui](#).

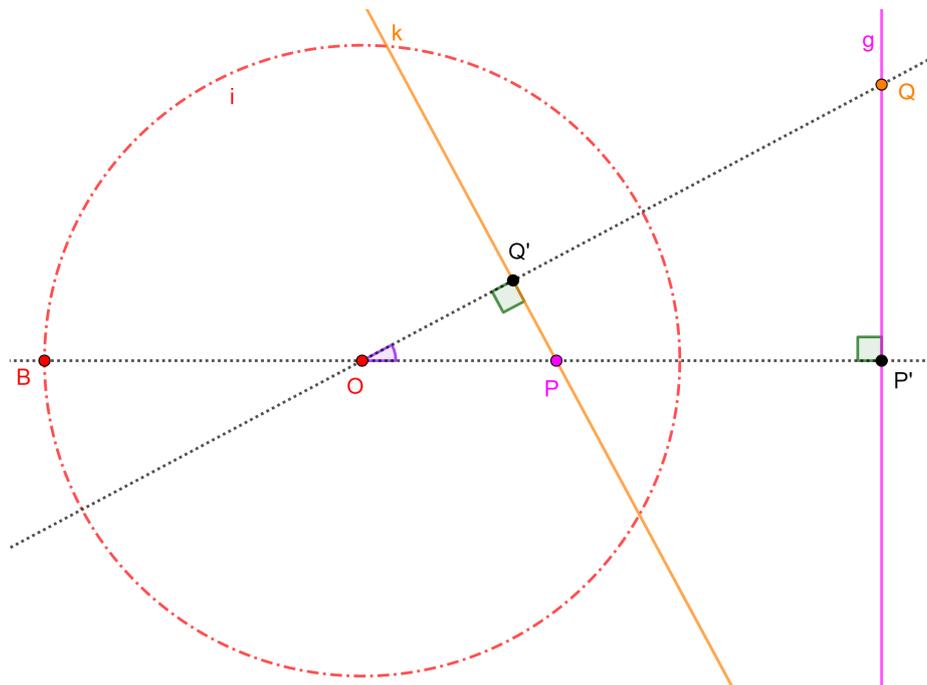


Fonte: O autor.

Philippe de la Hire foi um matemático francês que trabalhou em seções cônicas e em geodésia e astronomia. Nasceu em 1640 e morreu em 1718 [57].

**Teorema 10** (La Hire). *Com referência a Figura 2.20, o ponto  $Q$  está na Polar de  $P$  (reta  $g$ ) se, e somente se,  $P$  está na Polar de  $Q$  (reta  $k$ ).*

Figura 2.20: Guia para a demonstração do Teorema 10. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Considera-se inicialmente que  $Q \in g$ , e  $g$  é a Polar do Polo  $P$ , quer-se provar que  $P \in k$ , sendo  $k$  Polar do Polo  $Q$ . Da definição de inversão

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = OB^2$$

e o ângulo comum  $\angle Q'OP = \angle P'OQ$  tem-se, pelo critério de semelhança LAL, que:

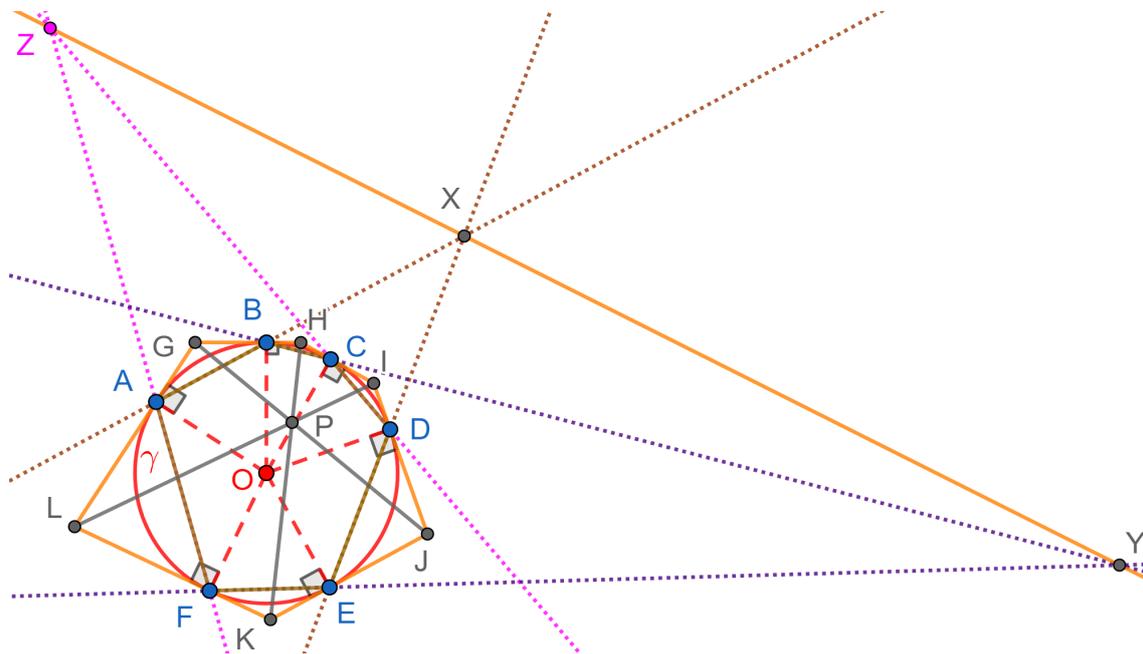
$$\triangle OP'Q \sim \triangle OQ'P.$$

Logo,  $\angle OQ'P = \angle OP'Q = 90^\circ$ . Ou seja,  $P \in k$ . A prova da recíproca é análoga. □

**Corolário 11** (Dualidade entre polares concorrentes e polos colineares). *Com referência a Figura 2.21, seja  $C = k \cap g$ . Se três pontos (Polos) são colineares, por exemplo  $P, Q$  e  $C'$ , então suas Polares,  $g, k$  e  $n$ , são concorrentes e vice-versa.*



Figura 2.22: Dualismo entre os Teoremas de Pascal e Brianchon. Versão interativa [aqui](#).

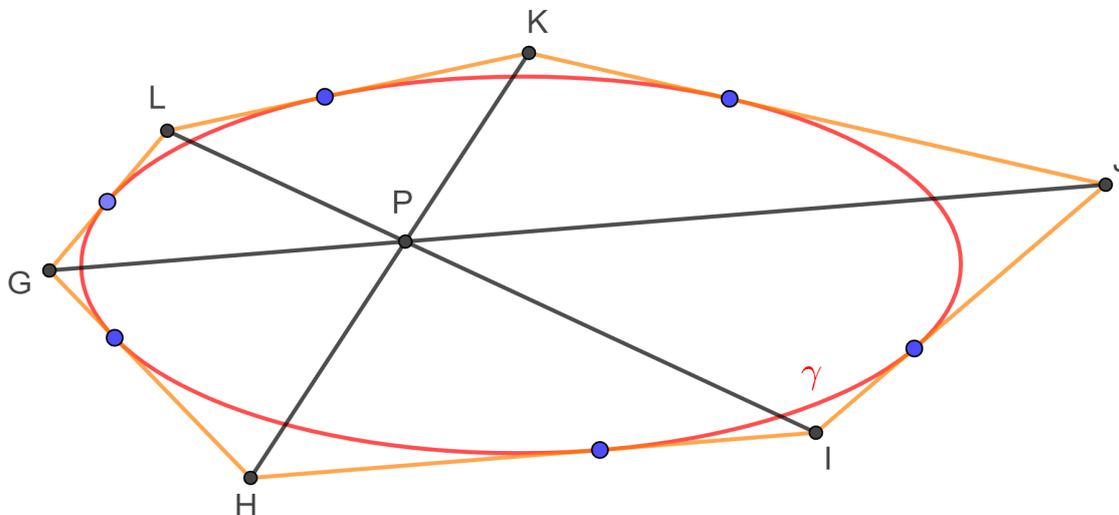


Fonte: O autor.

Nota-se que os pontos  $G, H, I, J, K$  e  $L$  são os polos das retas  $AB, BC, CD, DE, EF$  e  $FA$ , respectivamente. Adicionalmente, como o ponto  $X = AB \cap DE$ , pelo Teorema 10 (La Hire), a reta  $GJ$  é a polar de  $X$ . Analogamente, as retas  $HK$  e  $IJ$  são as polares de  $Y$  e  $Z$ , respectivamente. Como os polos  $X, Y$  e  $Z$  são colineares as polares correspondentes  $GJ, HK$  e  $IJ$  são concorrentes (Corolário 11). Seja o ponto  $P = GJ \cap HK \cap IJ$ .

O resultado anterior pode ser generalizado para qualquer cônica. Sempre existe uma perspectiva que transforma parábolas, elipses e hipérbolas em circunferências. As transformações anteriores não mudam as relações de colinearidade e concorrência entre pontos e retas.

**Teorema 12** (Brianchon). *Seja um hexágono  $GHIJKL$  circunscrito em torno de uma seção cônica  $\gamma$ , suas diagonais principais (aquelas que conectam vértices opostos) encontram-se num único ponto  $P$ . (Figura 2.23).*

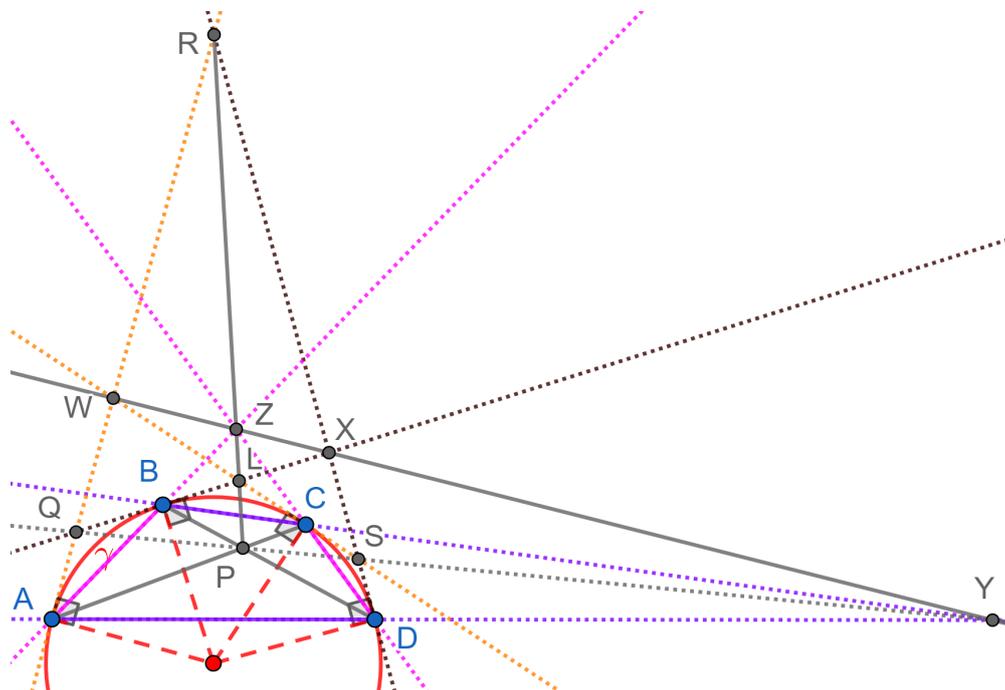
Figura 2.23: Teorema de Brianchon. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Estuda-se agora um caso particular do Teorema anterior para quadriláteros inscritíveis. Parte-se da Figura 2.17. Sejam os pontos  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  e  $L$  as interseções das tangentes em  $A$  e  $B$ ,  $A$  e  $D$ ,  $C$  e  $D$  e  $B$  e  $C$ , respetivamente (Figura 2.24). Pela transformação  $F = A$  e  $E = D$  as diagonais principais do hexágono  $ABCDEF$  circunscrito transformam-se nas retas  $AC$ ,  $BD$  e  $RL$  que concorrem em  $P$ . Adicionalmente, o ponto  $Z = (AB \cap CD) \in RL$ . Com outra transformação análoga mostra-se que os pontos  $Q$ ,  $S$ ,  $P$  e  $Y = AD \cap BC$  também são colineares.

**Corolário 13** (Brianchon para quadriláteros). *Sejam  $ABCD$  um quadrilátero inscrito numa circunferência  $\gamma$ , os pontos  $Z = AB \cap CD$ ,  $Y = AD \cap BC$  e  $P = AC \cap BD$ . Adicionalmente, sejam os pontos  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  e  $L$  as interseções das tangentes em  $A$  e  $B$ ,  $A$  e  $D$ ,  $C$  e  $D$  e  $B$  e  $C$ , respetivamente. As retas  $AC$ ,  $BD$  e  $RL$  concorrem em  $P$ . O ponto  $Z \in RL$ . Também vale que os pontos  $Q$ ,  $S$ ,  $P$  e  $Y$  são colineares.*

Figura 2.24: Corolário de Brianchon para quadrilátero. Versão interativa [aqui](#).



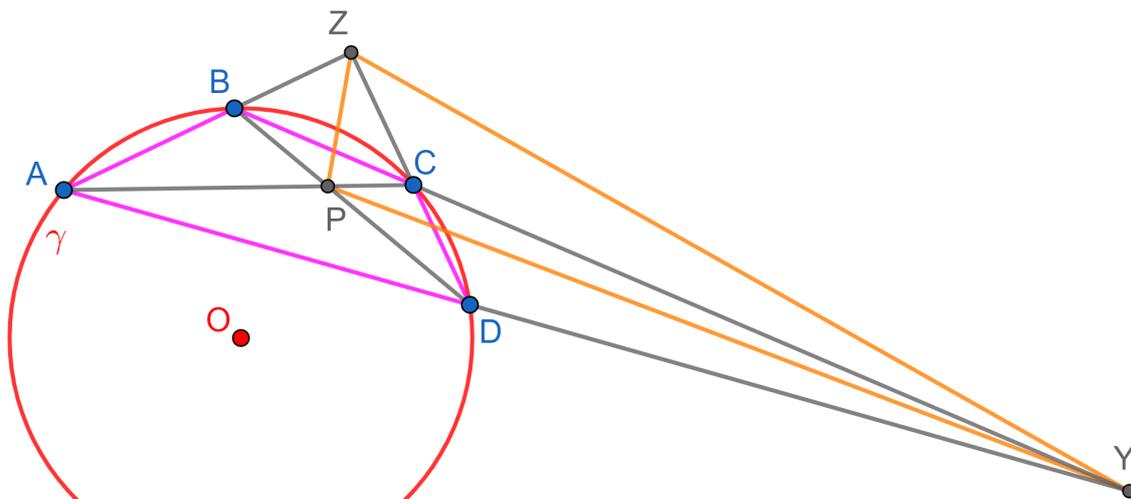
Fonte: O autor.

## 2.12 Teorema de Brocard

Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard foi um matemático francês mais conhecido por sua descoberta dos chamados pontos de Brocard dum triângulo. Nasceu no dia 12 maio 1845 e morreu em 16 janeiro 1922 [58].

**Teorema 14** (Brocard). *Seja  $ABCD$  um quadrilátero inscrito numa circunferência  $\gamma$  de centro  $O$ . Sejam os pontos  $Z = AB \cap CD$ ,  $Y = AD \cap BC$  e  $P = AC \cap BD$ . Então a reta  $YP$  é a polar de  $Z$  relativo a  $\gamma$  e a reta  $PZ$  é a polar de  $Y$  relativo a  $\gamma$ . Ou seja,  $O$  é ortocentro do  $\triangle ZYP$  (Figura 2.25).*

Figura 2.25: Ilustração do Teorema 14 (Brocard). Versão interativa [aqui](#).

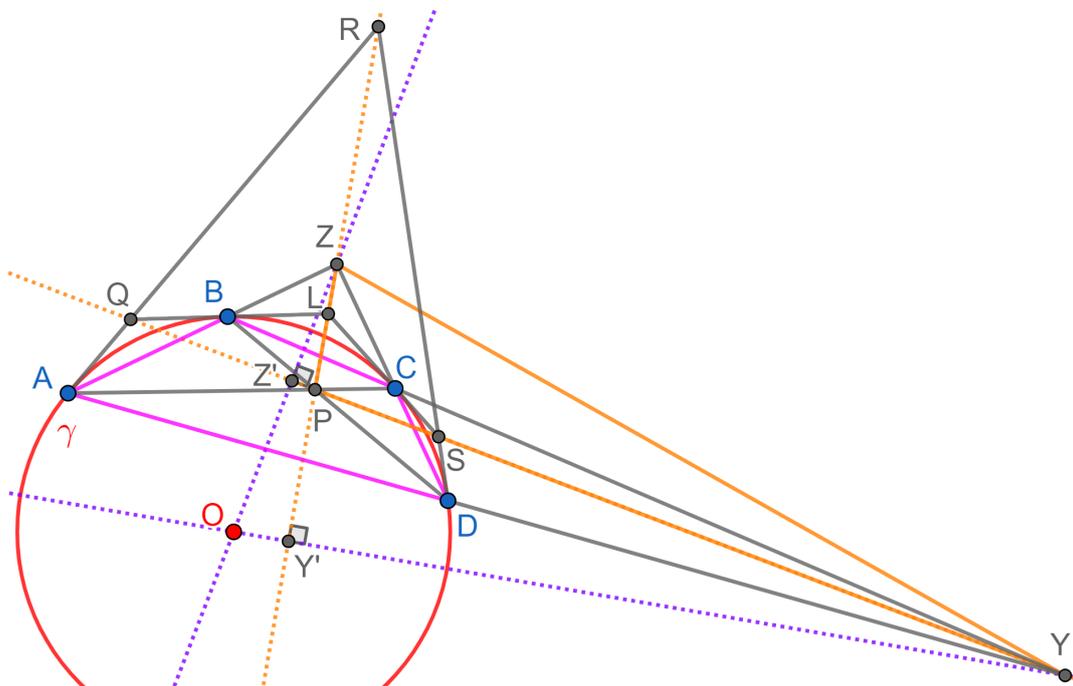


Fonte: O autor.

*Demonstração.* Sejam os pontos  $Q$  e  $S$  as interseções das tangentes em  $A$  e  $B$  e  $C$  e  $D$ , respectivamente (Figura 2.26). Pelo Teorema de Brianchon para quadriláteros os pontos  $Q, P, S$  e  $Y$  são colineares. Como os pontos  $Q$  e  $S$  são os polos das retas polares  $AB$  e  $DC$  e  $Z = AB \cap DC$ , então, pelo Teorema 10 (La Hire), a reta  $QS$ , que coincide com a reta  $YP$ , é polar do ponto  $Z$ . Ou seja,  $\text{Inv}(Z, \gamma) = Z' \in YP, O \in ZZ'$  e  $\angle YZ'Z = 90^\circ$ .

Analogamente, sejam os pontos  $R$  e  $L$  as interseções das tangentes em  $A$  e  $D$  e  $B$  e  $C$ , respectivamente. Pelo Teorema de Brianchon para quadriláteros os pontos  $R, Z, L$  e  $P$  são colineares. Como os pontos  $R$  e  $L$  são os polos das retas polares  $AD$  e  $BC$  e  $Y = AD \cap BC$ , então, pelo Teorema 10 (La Hire), a reta  $RL$ , que coincide com a reta  $ZP$ , é polar do ponto  $Y$ . Ou seja,  $\text{Inv}(Y, \gamma) = Y' \in PZ, O \in YY'$  e  $\angle YY'Z = 90^\circ$ . Portanto,  $O$  é ortocentro do  $\triangle ZYP$  □

Figura 2.26: Demonstração do Teorema 14 (Brocard). Versão interativa [aqui](#).



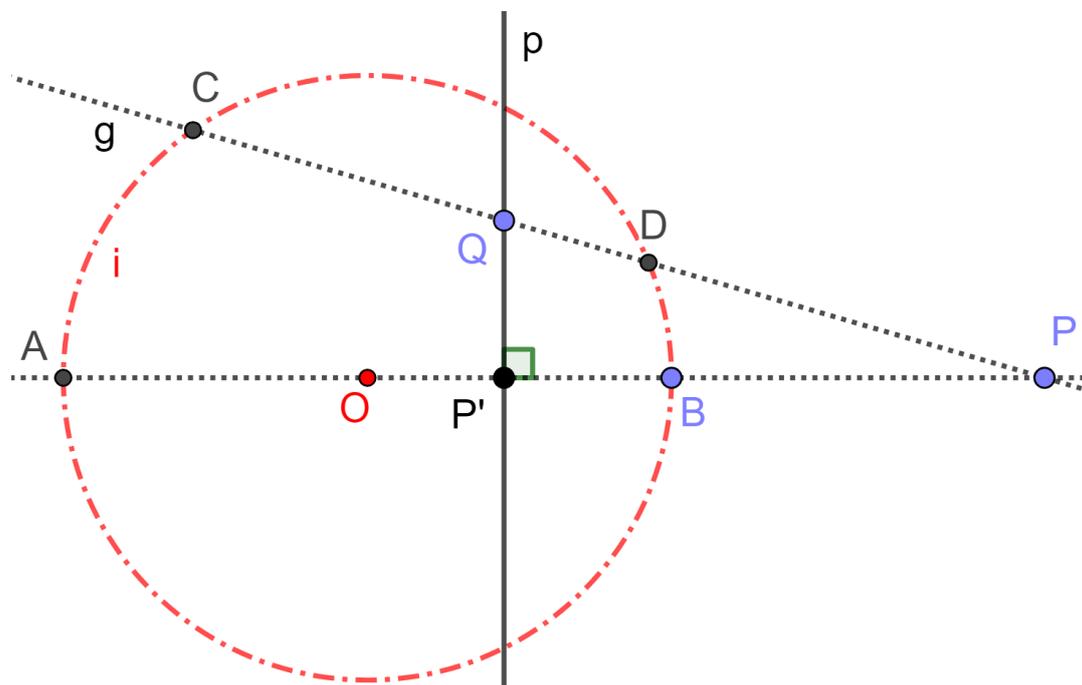
Fonte: O autor.

### 2.13 Divisão harmônica determinada por ponto sobre polar

**Proposição 15** (Divisão harmônica de ponto sobre polar). *Seja  $i$  uma circunferência de raio  $r$  e centro  $O$ . Deixa-se  $P$  ser um ponto arbitrário e  $p$  sua reta polar. Considera-se uma reta  $g$  que passa por  $P$  e que intercepta  $i$  nos pontos  $C$  e  $D$ . Seja ainda o ponto  $Q = p \cap g$  (Figura 2.27). Então os pontos  $P$  e  $Q$  dividem harmonicamente o segmento  $CD$ . Isto é, vale:*

$$\frac{DP}{PC} = \frac{DQ}{QC}.$$

Figura 2.27: Ilustração da Proposição 15. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

O ponto  $P$  pode estar dentro ou fora da circunferência. Uma demonstração utilizando geometria analítica está disponível [aqui](#).

## Capítulo 3

# Circunferências de Apolônio e Pontos Isodinâmicos

Parte do conteúdo deste capítulo está disponível em vídeo-aula do autor de [2022](#).

### 3.1 Circunferências de Apolônio

Apolônio de Perga foi um matemático grego conhecido como "O Grande Geômetra". Suas obras tiveram uma influência muito importante no desenvolvimento da matemática e seu famoso livro *Cônicas* introduziu os termos parábola, elipse e hipérbole. Acredita-se que nasceu no ano 268 e morreu em 190 antes de Cristo [52].

**Definição 4** (Circunferência de Apolônio). *Dado um segmento  $BC$  e um valor  $k$  real positivo diferente de um, a Circunferência de Apolônio é o conjunto dos pontos  $A$  tais que:*

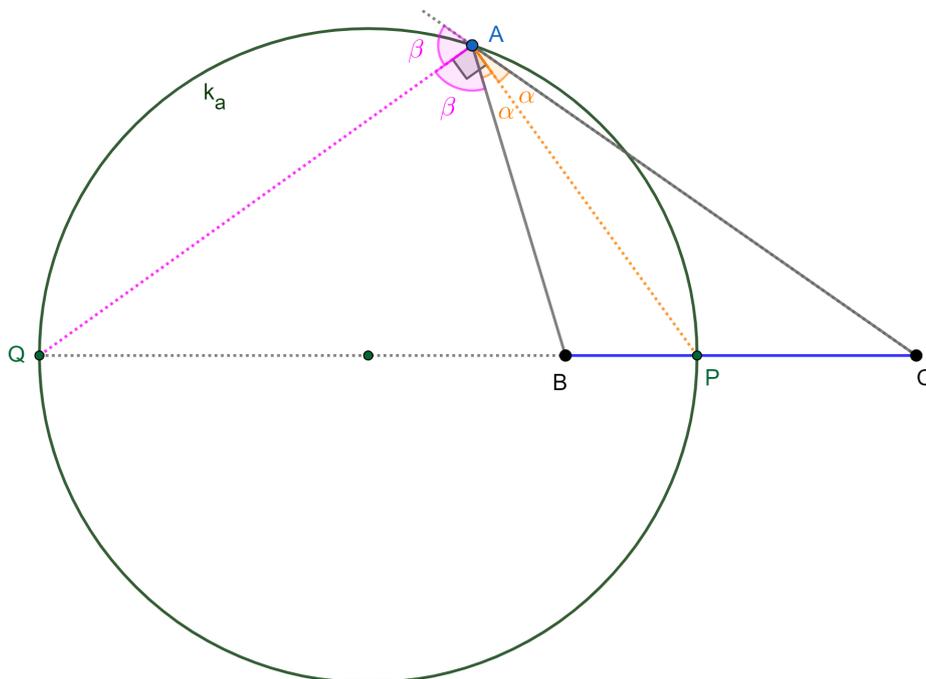
$$\frac{AB}{AC} = k. \quad (3.1.1)$$

Os pontos  $P$  e  $Q$  que dividem harmonicamente o segmento  $BC$  na razão  $k$  são soluções possíveis de (3.1.1), pois:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC} = k. \quad (3.1.2)$$

Quer-se encontrar outros pontos fora da linha  $BC$  (Figura 3.1).

Figura 3.1:  $k_a$  é a Circunferência de Apolônio relativa ao segmento  $BC$  ou o vértice  $A$  do  $\triangle ABC$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

De (3.1.1) e (3.1.2) segue que:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}, \tag{3.1.3}$$

$$\frac{QB}{QC} = \frac{AB}{AC}. \tag{3.1.4}$$

Pela equação (3.1.3) e a recíproca do Teorema 2 (Bissetriz Interna) tem-se que  $P$  é pé da bissetriz interna no vértice  $A$  do triângulo  $ABC$ .

Analogamente, da equação (3.1.4) e a recíproca do Teorema 3 (Bissetriz Externa) tem-se que  $Q$  é pé da bissetriz externa no vértice  $A$  do triângulo  $ABC$ .

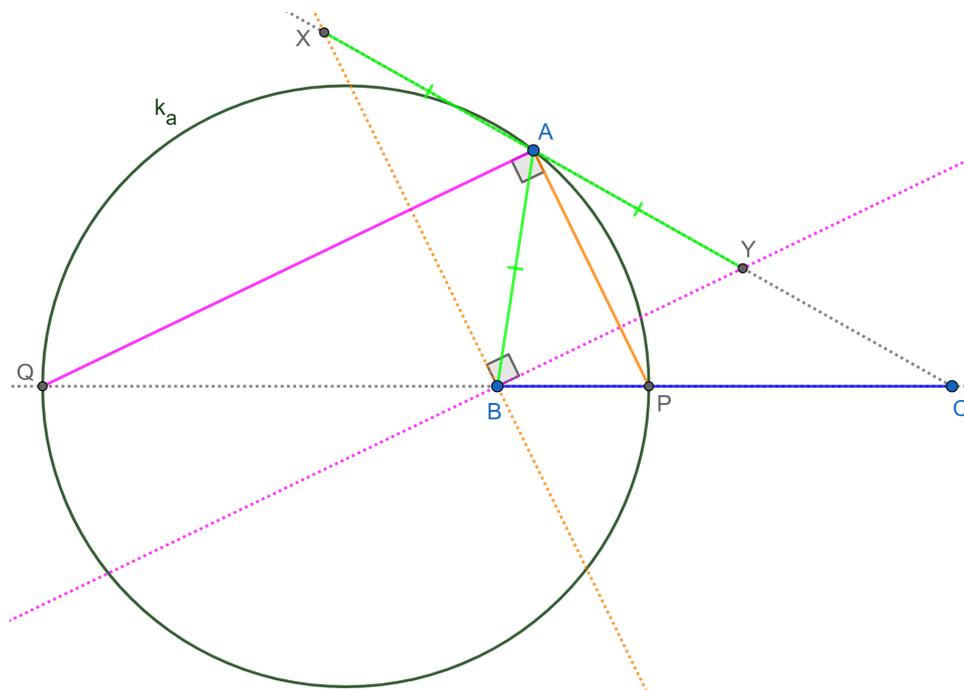
Como  $\angle QAP = 90^\circ$  o ponto  $A$  pertence a uma circunferência  $k_a$  de diâmetro  $QP$ . Ou seja,  $k_a$  é a Circunferência de Apolônio relativa ao segmento  $BC$  ou o vértice  $A$  do  $\triangle ABC$ .

Reciprocamente, seja o ponto  $A \in k_a$  e os pontos  $P$  e  $Q$  dividem harmonicamente o segmento  $BC$  na razão  $k$  (equação (3.1.2)). Quer-se mostrar que vale (3.1.1).

Traça-se a semirreta  $CA$  e uma paralela a  $AP$  passando por  $B$  (Figura 3.2). Marca-se o ponto  $X$  na interseção destas. Pelo Teorema 1 (Tales) vale que:

$$\frac{AX}{AC} = \frac{PB}{PC} = k. \tag{3.1.5}$$

Figura 3.2: A Circunferência de Apolônio pode ser entendida como um Lugar Geométrico. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Adicionalmente, esboça-se uma paralela a  $AQ$  passando por  $B$ . Nomeia-se o ponto  $Y$  na interseção com  $CA$ . Pelo Teorema 1 (Tales) vale que:

$$\frac{AY}{AC} = \frac{QB}{QC} = k. \tag{3.1.6}$$

De (3.1.5) e (3.1.6) segue que  $AX = AY$  e  $A$  é ponto médio de  $XY$ . Como  $BX \parallel PA$  e  $BY \parallel QA$  tem-se que  $\angle XBY = \angle QAP = 90^\circ$ . No triângulo retângulo  $XYB$  a mediana  $AB$  mede a metade da hipotenusa:

$$AB = AX = AY. \tag{3.1.7}$$

Substituindo (3.1.7) em (3.1.5) ou (3.1.6) encontra-se (3.1.1). Portanto, a Circunferência de Apolônio pode ser entendida como um Lugar Geométrico.

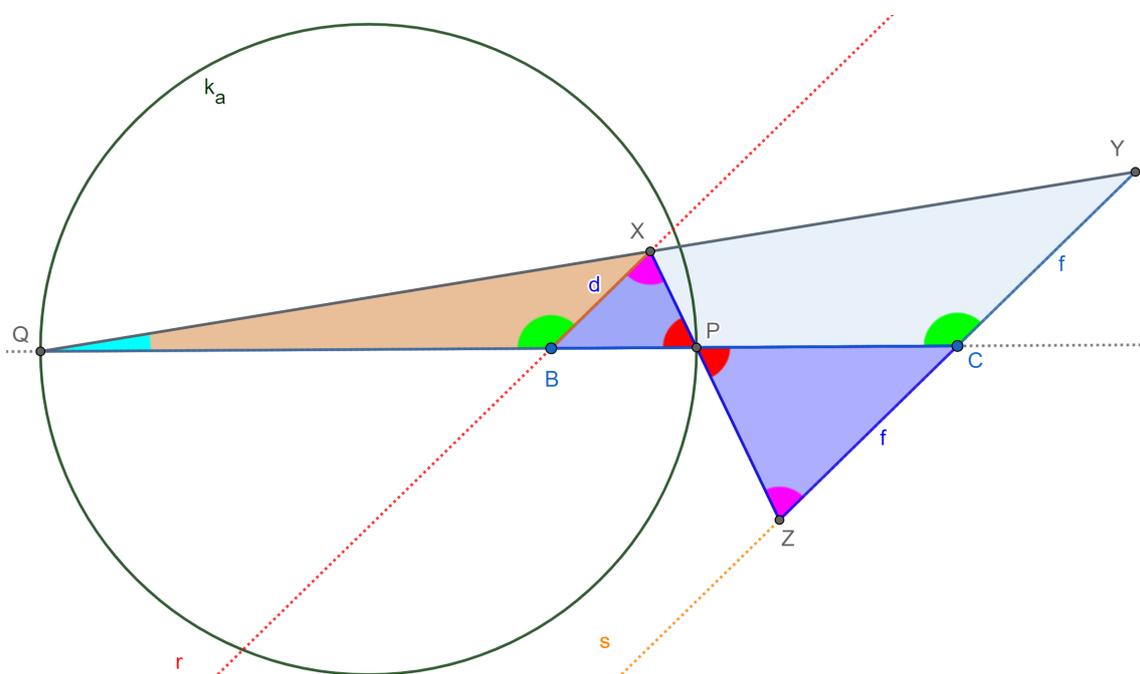
### 3.2 Exercício de construção de circunferência de Apolônio

**Exercício 1.** Dado o segmento  $BC$  e a constante  $k = \frac{d}{f}$ , onde  $d$  e  $f$  são números reais não negativos, construir a circunferência de Apolônio correspondente.

1. Construir as retas  $r$  e  $s$  tais que  $B \in r, C \in s$  e  $r \parallel s$  (Figura 3.3).

2. Com centro em  $B$  e  $C$  construir as circunferências  $m$  e  $n$  de raios  $d$  e  $f$ , respectivamente. Marcar o ponto  $X$  na interseção de  $m$  com  $r$  do semiplano acima de  $BC$  e os pontos  $Y$ , acima de  $BC$ , e  $Z$ , abaixo de  $BC$ , nas interseções de  $n$  com  $s$ .
3. Traçar o segmento  $XZ$  e marcar o ponto  $P = XZ \cap BC$ . Adicionalmente, esboçar a reta  $XY$  e denotar o ponto  $Q = XY \cap BC$ .
4. Construir a Circunferência de Apolônio  $k_a$  com diâmetro  $PQ$ .

Figura 3.3: Exercício de construção da Circunferência de Apolônio dado o segmento  $BC$  e a constante  $k = \frac{d}{f}$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Como  $\angle BXP = \angle CZP$  (alternos entre paralelas) e  $\angle BPX = \angle CPZ$  (opostos pelo vértice), pelo critério de semelhança AA, vale que  $\triangle XBP \sim \triangle ZCP$  e

$$\frac{BP}{CP} = \frac{BX}{CZ} = k. \tag{3.2.1}$$

De  $\angle QBX = \angle QCY$  (correspondentes entre paralelas) e  $\angle XQB = \angle YQC$  (comum), pelo critério de semelhança AA, vale que  $\triangle QBX \sim \triangle QCY$  e

$$\frac{BQ}{CQ} = \frac{BX}{CY} = k. \tag{3.2.2}$$

Combinando (3.2.1) e (3.2.2) encontra-se que os pontos  $P$  e  $Q$  satisfazem:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{BQ}{CQ} = k.$$

Ou seja, dividem harmonicamente o segmento  $BC$  na razão  $k$  e qualquer ponto  $A \in k_a$  também satisfaz:

$$\frac{BA}{CA} = k.$$

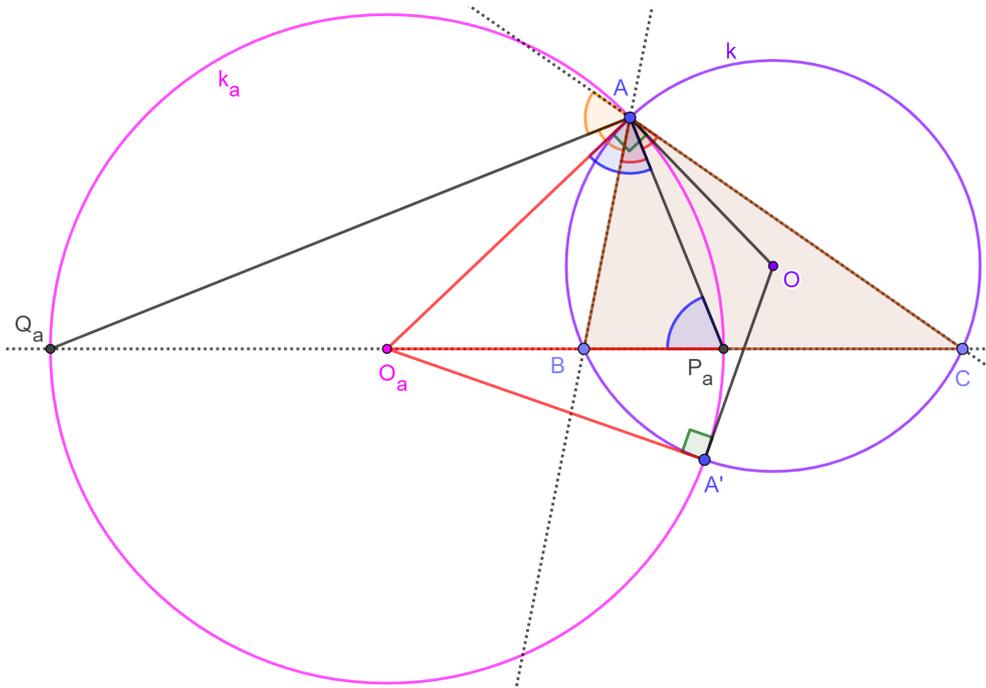
### 3.3 Três circunferências de Apolônio do $\triangle ABC$

**Definição 5.** *Se as bissetrizes internas e externas dos ângulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  de um triângulo  $ABC$  encontram os lados opostos  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  nos pontos  $P_a$ ,  $P_b$  e  $P_c$  e  $Q_a$ ,  $Q_b$  e  $Q_c$ , respectivamente, então as circunferências com  $P_aQ_a$ ,  $P_bQ_b$  e  $P_cQ_c$  como diâmetros são chamadas de  $A-$ ,  $B-$  e  $C-$  Apolônio (respectivamente) ou círculos de Apolônio do  $\triangle ABC$ .*

### 3.4 Circuncírculo e circunferências de Apolônio são ortogonais

**Proposição 16.** *O circuncírculo  $k$  do  $\triangle ABC$  é ortogonal com as circunferências  $A-$ ,  $B-$  e  $C-$  Apolônio do mesmo triângulo.*

Figura 3.4: O circuncírculo  $k$  do  $\triangle ABC$  é ortogonal com a circunferência A-Apolônio  $k_a$  do mesmo triângulo. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Será provada a ortogonalidade entre o circuncírculo  $k$  do  $\triangle ABC$ , com centro em  $O$ , e a circunferência A-Apolônio  $k_a$ , de centro  $O_a$  (Figura 3.4).

Seja o ponto  $A'$  (diferente de  $A$ ) a segunda interseção entre  $k$  e  $k_a$ . A reta  $OO_a$  é a mediatriz do segmento  $AA'$ . Quer mostrar-se que  $\angle O_aAO = \angle O_aA'O = 90^\circ$ .

Por serem raios de  $k_a$  vale que  $O_aA = O_aP_a$ , o  $\triangle O_aAP_a$  é isósceles de base  $AP_a$  e  $\angle O_aAP_a = \angle O_aP_aA$ .

Nota-se que:

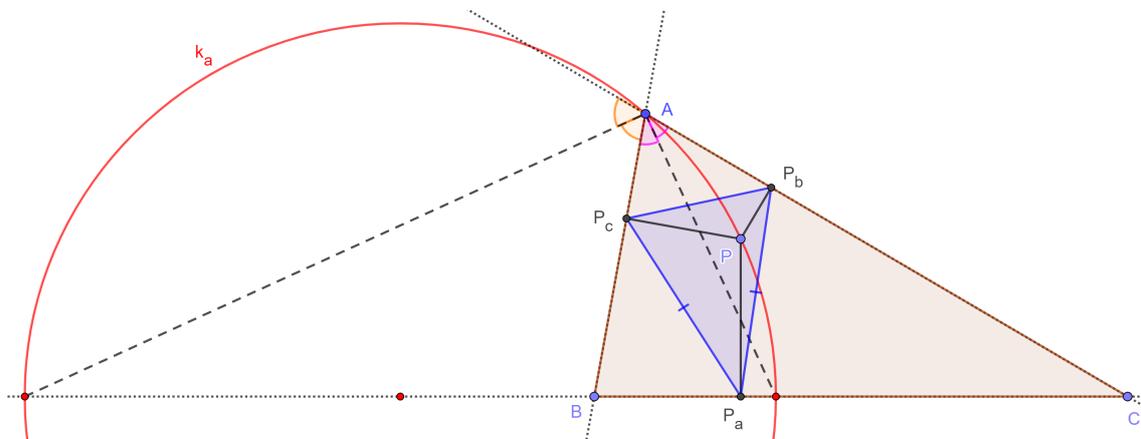
$$\angle O_aAB + \frac{\hat{A}}{2} = \angle O_aAP_a = \angle O_aP_aA = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{C}.$$

Ou seja,  $\angle O_aAB = \hat{C}$ . A igualdade anterior, em conjunto com o fato que o ângulo  $\hat{C}$  é inscrito relativo a corda  $AB$  da circunferência  $k$ , implica que o  $\angle O_aAB$  é de segmento e  $\angle O_aAO = 90^\circ$ . □

### 3.5 Pedais de Apolônio gera isósceles

**Proposição 17.** *Seja o  $\triangle ABC$ ,  $P$  um ponto do plano e  $P_a, P_b$  e  $P_c$  as projeções ortogonais de  $P$  sobre os lados  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente. O conjunto de pontos  $P$  tais que  $P_aP_b = P_aP_c$  é a circunferência A-Apolônio  $k_a$ .*

Figura 3.5: O conjunto de pontos  $P$  tais que o triângulo Pedal  $P_aP_bP_c$  seja isósceles de base  $P_bP_c$  coincide com a circunferência A-Apolônio  $k_a$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Pela proposição sobre os lados do triângulo pedal pode-se escrever:

$$P_aP_b = PC \operatorname{sen}(\hat{C}),$$

$$P_aP_c = PB \operatorname{sen}(\hat{B}).$$

Da igualdade  $P_aP_b = P_aP_c$  e as duas equações anteriores encontra-se:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\operatorname{sen}(\hat{C})}{\operatorname{sen}(\hat{B})}.$$

Mas pela Lei dos Senos aplicada no  $\triangle ABC$  segue que:

$$\frac{\operatorname{sen}(\hat{C})}{\operatorname{sen}(\hat{B})} = \frac{AB}{AC}.$$

Ou seja,

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

O último resultado significa que o ponto  $P \in k_a$ . □

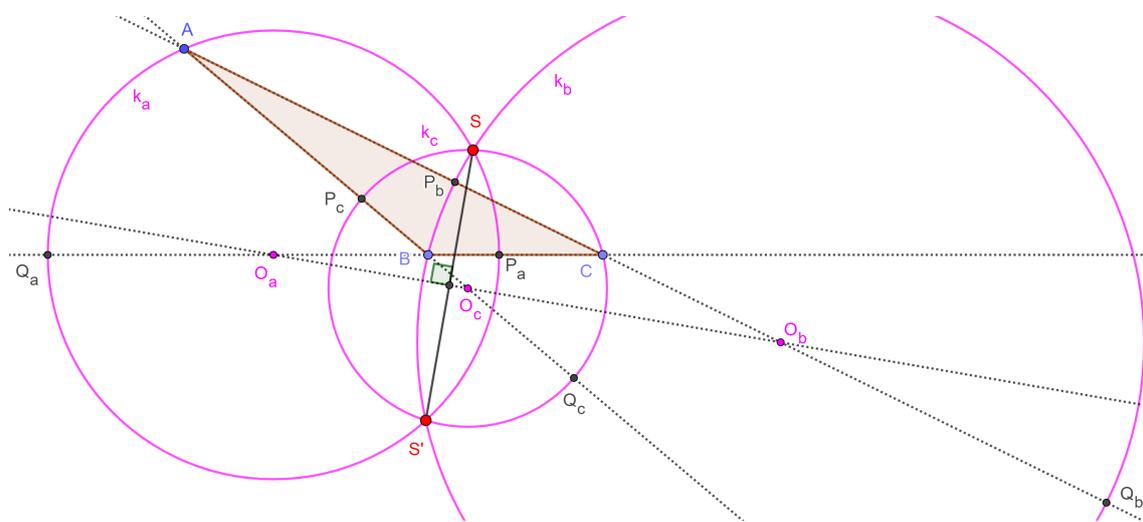
### 3.6 Pontos Isodinâmicos

Seja o  $\triangle ABC$  (Figura 3.6). A interseção das bissetrizes internas (retas tracejadas vermelhas) com os lados opostos determinam os pontos  $P_a$ ,  $P_b$  e  $P_c$ . Analogamente, a interseção das bissetrizes externas (retas tracejadas amarelas) com o prolongamento dos lados opostos

determinam os pontos  $Q_a, Q_b$  e  $Q_c$ . Cada distância  $P_iQ_i$ , com  $i = a, b, c$ , é diâmetro de uma circunferência de Apolônio.

**Teorema 18** (Existência dos Pontos Isodinâmicos). *As três circunferências de Apolônio concorrem nos Pontos Isodinâmicos  $S = X(15)$  e  $S' = X(16)$ . A reta  $SS'$  é o eixo radical comum dos três pares de círculos de Apolônio e a mediatriz do segmento  $SS'$  passa pelo centro das três circunferências.*

Figura 3.6: As três circunferências de Apolônio concorrem nos Pontos Isodinâmicos  $S$  e  $S'$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Seja  $S$  um dos pontos de interseção das circunferências A-Apolônio  $k_a$  e B-Apolônio  $k_b$ . Então vale que:

$$\frac{SB}{SC} = \frac{AB}{AC},$$

$$\frac{SC}{SA} = \frac{BC}{BA}.$$

Multiplicando as duas equações anteriores encontra-se:

$$\frac{SB}{SA} = \frac{CB}{CA}.$$

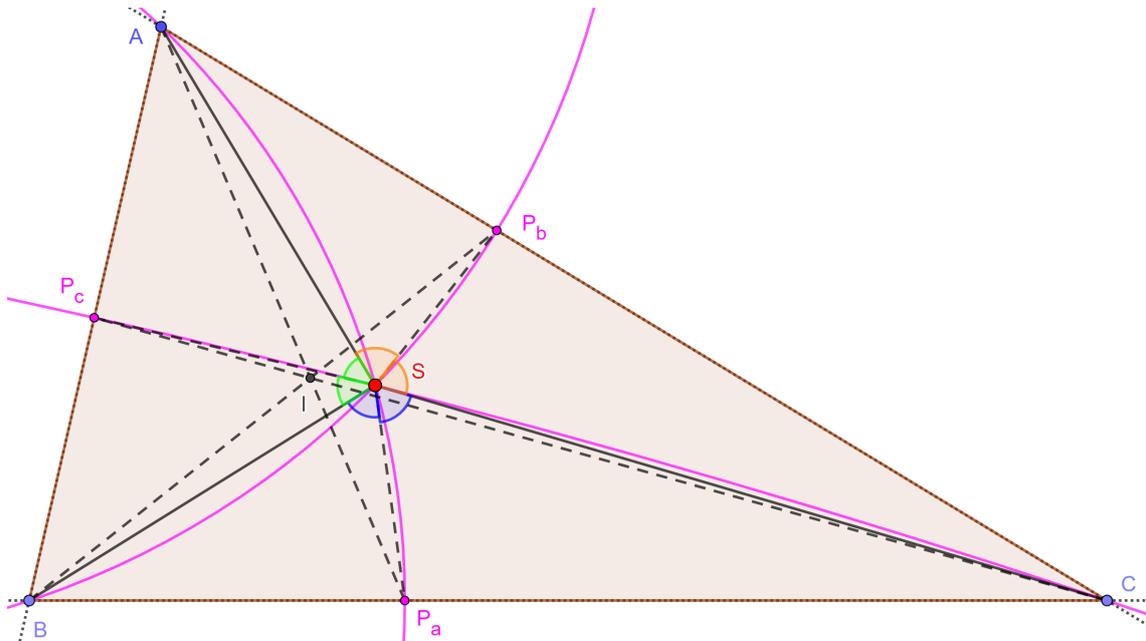
Isto significa que o ponto  $S$  também pertence a circunferências C-Apolônio  $k_c$ . Analogamente para o ponto  $S'$ . □

**Proposição 19.** *Para os Pontos Isodinâmicos  $S$  e  $S'$  do  $\triangle ABC$ , Figura 3.7, vale:*

$$BC \cdot AS = CA \cdot BS = AB \cdot CS,$$

$$BC \cdot AS' = CA \cdot BS' = AB \cdot CS'.$$

Figura 3.7: Propriedade dos Pontos Isodinâmicos  $S$  e  $S'$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Como o ponto  $S$  pertence aos três circunferências de Apolônio segue que  $SP_a$ ,  $SP_b$  e  $SP_c$  são bissetrizes internas dos triângulos  $SBC$ ,  $SCA$  e  $SAB$ , respectivamente (Figura 3.7).

Pelo Teorema da bissetriz interna aplicado aos triângulos  $ABC$  e  $SBC$  segue que:

$$\frac{AB}{CA} = \frac{BP_a}{P_aC} = \frac{BS}{CS}.$$

Logo,

$$AB \cdot CS = CA \cdot BS. \quad (3.6.1)$$

Pelo Teorema da bissetriz interna aplicado aos triângulos  $ABC$  e  $SCA$  encontra-se:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CP_b}{P_bA} = \frac{CS}{AS}.$$

Logo,

$$BC \cdot AS = AB \cdot CS. \quad (3.6.2)$$

De (3.6.1) e (3.6.2) tem-se:

$$BC \cdot AS = CA \cdot BS = AB \cdot CS. \tag{3.6.3}$$

A equação (3.6.3) significa que  $AS$ ,  $BS$  e  $CS$  são inversamente proporcionais a  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente.

Analogamente, demonstra-se que:

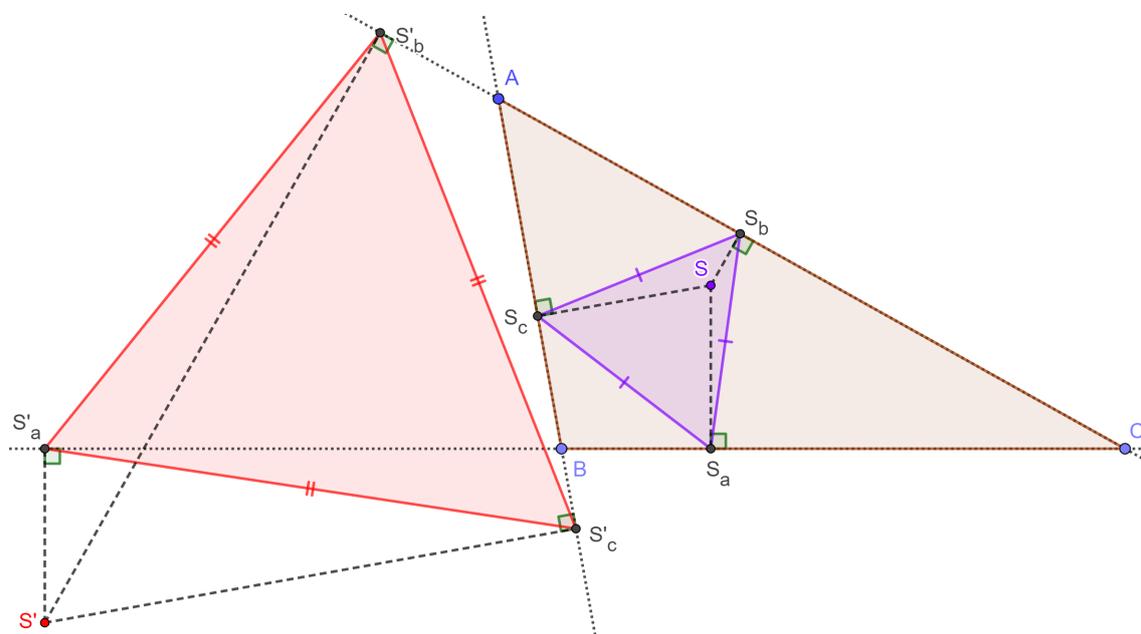
$$BC \cdot AS' = CA \cdot BS' = AB \cdot CS'.$$

□

### 3.7 Pedais dos pontos isodinâmicos são equiláteros

**Proposição 20.** *Seja o  $\triangle ABC$ . Os triângulos Pedais  $S_a S_b S_c$  e  $S'_a S'_b S'_c$  dos pontos isodinâmicos  $S$  e  $S'$  do  $\triangle ABC$  são equiláteros (Figura 3.8).*

Figura 3.8: Os triângulos Pedais  $S_a S_b S_c$  e  $S'_a S'_b S'_c$  dos pontos isodinâmico  $S$  e  $S'$  do  $\triangle ABC$  são equiláteros. Versão interativa [aqui](#).



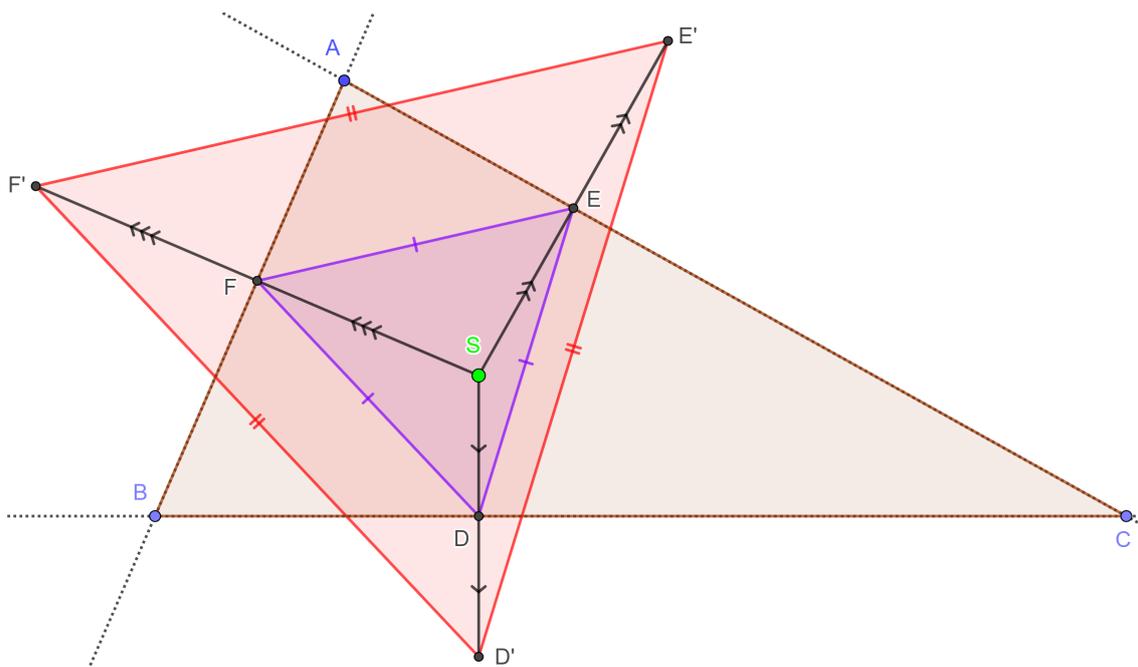
Fonte: O autor.

*Demonstração.* Como  $S$  e  $S'$  pertencem as três circunferências de Apolônio do  $\triangle ABC$  o resultado segue da Proposição 17. □

### 3.8 Reflexões de isodinâmico gera equilátero

**Proposição 21.** *O triângulo  $D'E'F'$ , formado pelas reflexões relativas aos lados do  $\triangle ABC$  do primeiro ponto isodinâmico  $S$ , é equilátero (Figura 3.9).*

Figura 3.9: Os triângulos  $DEF$  e  $D'E'F'$  são equiláteros. Versão interativa [aqui](#).



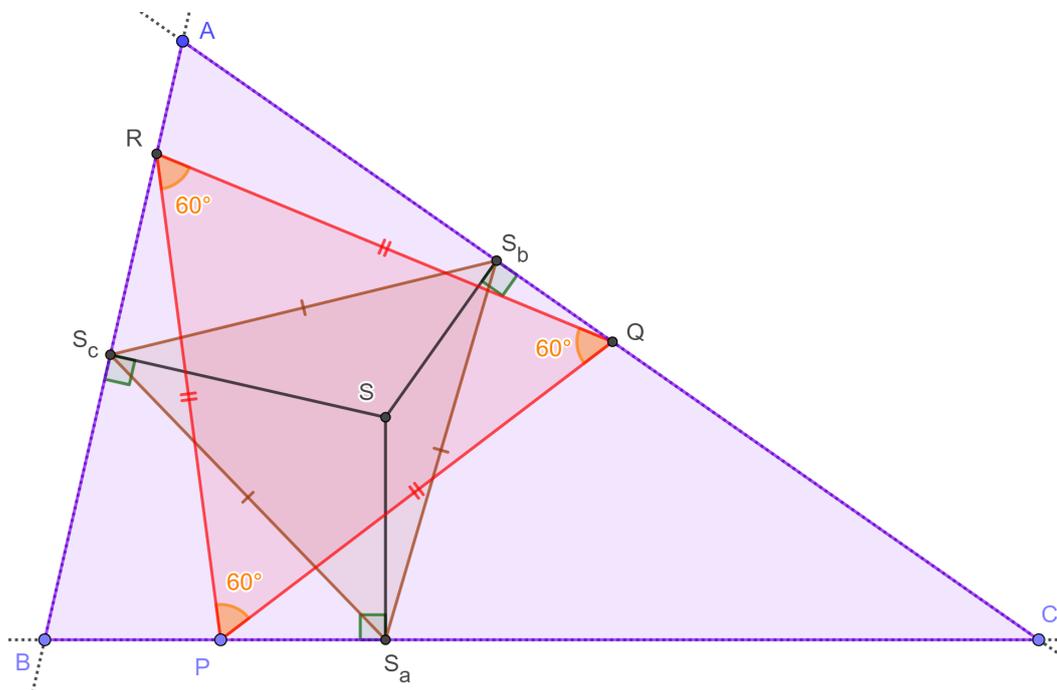
Fonte: O autor.

*Demonstração.* Viu-se na Proposição 20 que o triângulo Pedal  $DEF$  do ponto isodinâmico  $S$  do  $\triangle ABC$  é equilátero. O triângulo  $D'E'F'$  pode ser obtido partindo de  $DEF$  por uma homotetia com centro em  $S$  e razão 2. Logo, também será equilátero.  $\square$

### 3.9 Área mínima de equiláteros inscritos no $\triangle ABC$

**Proposição 22.** *Seja o  $\triangle ABC$ . Entre todos os triângulos equiláteros  $PQR$  inscritos no  $\triangle ABC$  o triângulo Pedal  $S_aS_bS_c$  do primeiro ponto isodinâmico  $S$  é o de menor área (Figura 3.10).*

Figura 3.10: Entre todos os triângulos equiláteros  $PQR$  inscritos no  $\triangle ABC$  o triângulo Pedal  $S_aS_bS_c$  do primeiro ponto isodinâmico  $S$  é o de menor área. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Dado um ponto  $P \in BC$  pode ser construída a circunferência circunscrita ao  $\triangle CPS$ . A interseção desta com a reta  $AC$  determina o ponto  $Q$ . Analogamente, a circunferência circunscrita ao  $\triangle AQS$  intersesta a reta  $AB$  no ponto  $R$ . Pelo Teorema de Miquel o quadrilátero  $RBPS$  é cíclico.

*Demonstração.* Este é um caso particular da proposição sobre a área mínima do triângulo pedal,  $S_aS_bS_c$ , em relação a outros triângulos inscritos nos lados  $PQR$  e obtidos por Roto-Homotetia. □

Outro estudo interessante sobre os pontos isodinâmicos pode ser encontrado em [49].

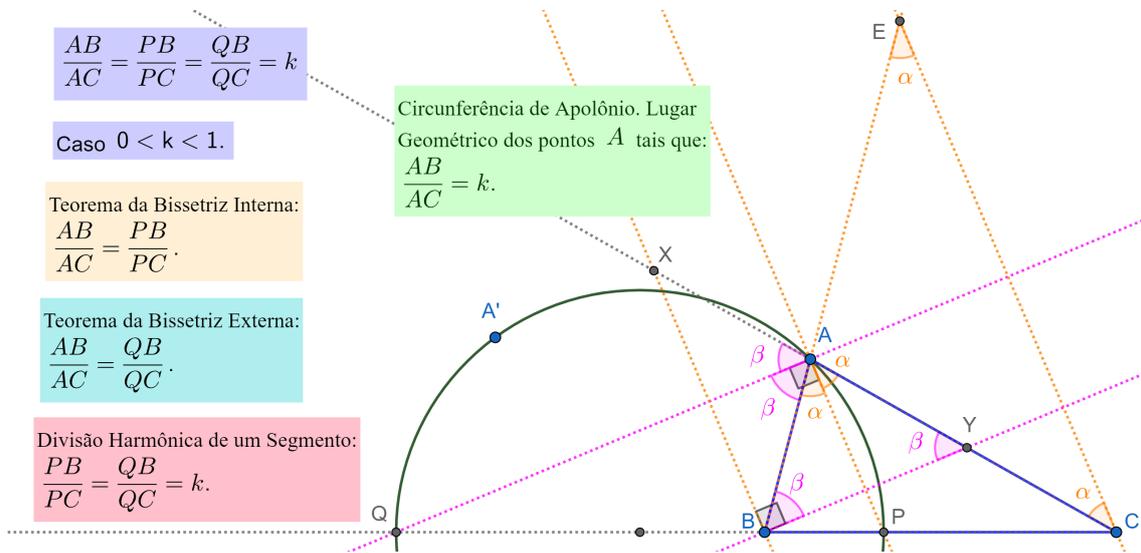
### 3.10 Resumão Teorema da Bissetriz e Apolônio

Sejam  $ABC$  um triângulo não isósceles, o número real não negativo  $k \neq 1$ , o ponto  $P$  de interseção da bissetriz interna do  $\angle A$  com o lado  $BC$  e  $AQ$ , como  $Q \in BC$ , a bissetriz externa do  $\angle A$ . Então vale que:

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BP}{CP} = \frac{BQ}{CQ} = k. \tag{3.10.1}$$

A Figura 3.11 resume o enunciado anterior no caso  $0 < k < 1$ .

Figura 3.11: Resumão Teorema da Bissetriz e Apolônio no caso  $0 < k < 1$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

# Capítulo 4

## Construções, exercícios e desafios

### 4.1 Dividir um segmento em partes iguais

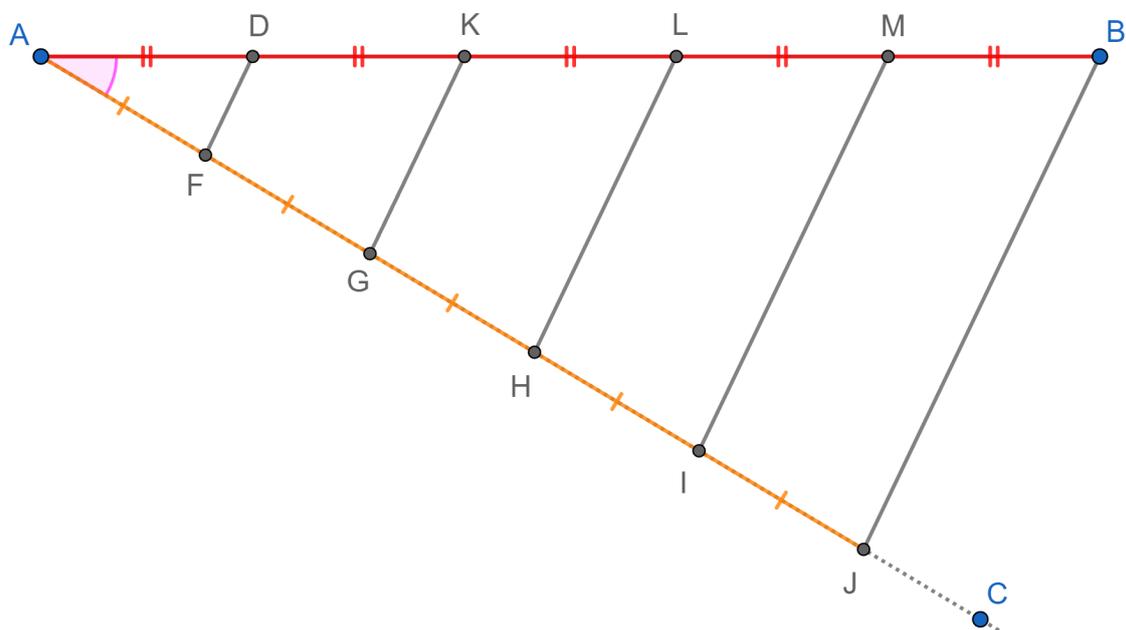
**Exercício 2.** *Dividir o segmento  $AB$  em 5 partes iguais.*

#### 4.1.1 Resolução do Exercício 2

1. Por  $A$  passa-se uma semirreta auxiliar  $AC$  determinando um ângulo qualquer com o segmento  $AB$  (Figura 4.1).
2. Com a utilização do compasso ou de uma régua graduada marcam-se, sobre  $AC$ , cinco distâncias iguais.
3. Traçam-se o segmento  $BJ$  e paralelas a  $BJ$  passando por  $F, G, H$  e  $I$ . Marcam-se as interseções destas com o segmento  $AB$ .
4. Como  $AF = FG = GH = HI = IJ$ , pelo Teorema 1 (Tales), obtêm-se que:

$$AD = DK = KL = LM = MB.$$

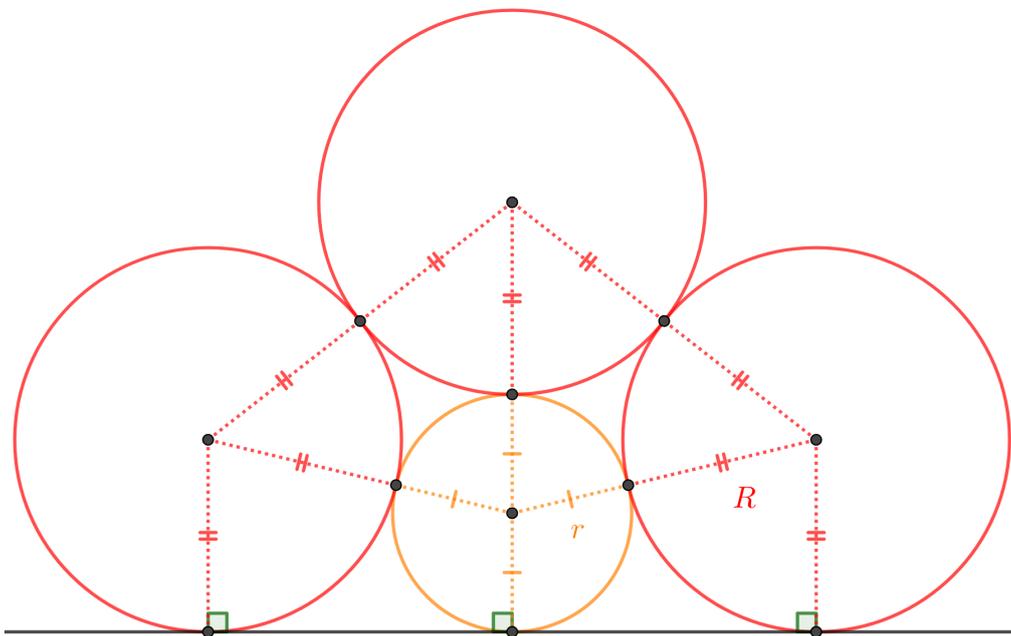
Figura 4.1: Guia para a construção do Exercício 2. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

## 4.2 Circunferência, Pitágoras e razão áurea.

**Problema 1.** Com referência a Figura 4.2 demonstrar que  $\frac{R}{r}$  é a razão áurea.

Figura 4.2: Construção do Problema 1. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

### 4.2.1 Resolução do Problema 1

Sejam  $O_1$  o centro da circunferência de raio  $r$  e  $O_2$ ,  $O_3$  e  $O_4$  os centros das circunferências de raio  $R$  (Figura 4.3). Os segmentos  $O_1O_3$  e  $O_2O_4$  intersectam-se perpendicularmente no ponto  $A$ . Nota-se que  $O_1A = R - r$ ,  $AO_3 = 2r$ ,  $O_1O_2 = R + r$  e  $O_2O_3 = 2R$ .

Pela ida do Teorema de Pitágoras aplicado no  $\triangle AO_1O_2$  encontra-se:

$$AO_2^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2,$$

$$AO_2^2 = 4Rr.$$

Pela ida do Teorema de Pitágoras aplicado no  $\triangle AO_2O_3$  encontra-se:

$$AO_2^2 = (2R)^2 - (2r)^2,$$

$$4Rr = 4(R^2 - r^2),$$

$$R^2 - Rr - r^2 = 0.$$

Dividindo os dois lados da última equação por  $r^2$  e definindo  $\phi = \frac{R}{r}$  encontra-se:

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0,$$

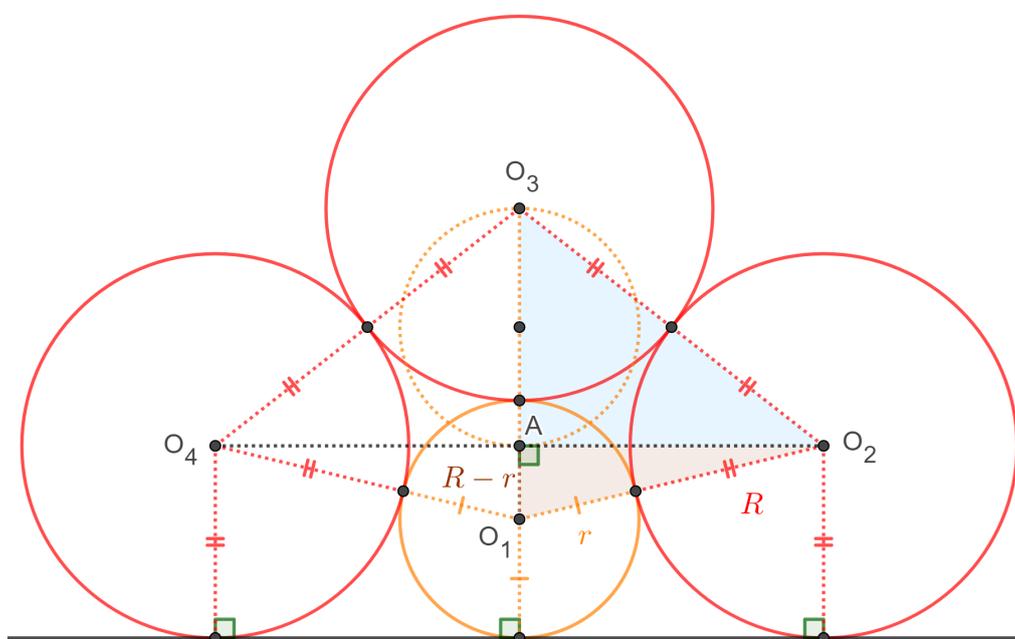
$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como  $0 < r < R$  segue:

$$\phi = \frac{R}{r} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ou seja,  $\frac{R}{r}$  é igual a razão áurea maior.

Figura 4.3: Resolução do Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

### 4.3 Construção das circunferências inscrita e ex-inscrita de um triângulo.

**Exercício 3.** *Construir a circunferência que tangencie os três lados do triângulo ABC (inscrita) e a circunferência que tangencia o lado AC e as prolongações dos lados AB e BC (ex-inscrita).*

### 4.3.1 Resolução do Exercício 3

Construir as bissetrizes de pelo menos dois ângulos internos do triângulo  $ABC$ . Marcar o ponto de interseção delas,  $I$ , chamado Incentro (Figura 4.4). O ponto  $I$  equidista dos três lados. Traçar pelo menos uma das perpendiculares aos lados que passe por  $I$ . Sejam  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pés destas em  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , respectivamente. Com centro em  $I$  e raio  $r = ID$  traçar a circunferência  $k$ , inscrita no triângulo  $ABC$ .

Sejam  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$  e

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

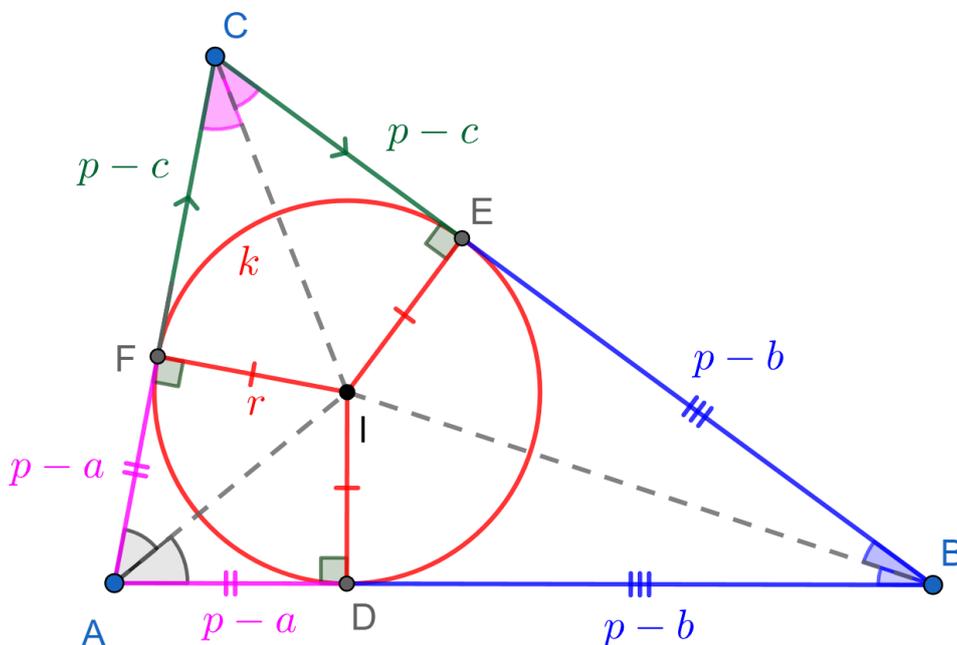
Como os segmentos são tangentes a  $k$  demonstra-se:

$$AF = AD = p - a,$$

$$BD = BE = p - b,$$

$$CF = CE = p - c.$$

Figura 4.4: Primeira construção do Exercício 3. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Traçam-se as bissetrizes externas no vértices  $C$  e  $A$ . Estas e a bissetriz interna em  $B$  interseccionam-se no ponto  $I_b$ , ex-incentro relativo ao lado  $AC$  (Figura 4.5). Sejam  $J$ ,  $K$  e  $L$  os pés

das perpendiculares passando por  $I_b$  aos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. A circunferência  $k_b$ , de raio  $r_b = I_bJ = I_bK = I_bL$ , é chamada ex-inscrita relativa ao vértice  $B$  ou ao lado  $AC$ .

Pode ser mostrado que:

$$CJ = CK = p - a,$$

$$AL = AK = p - c,$$

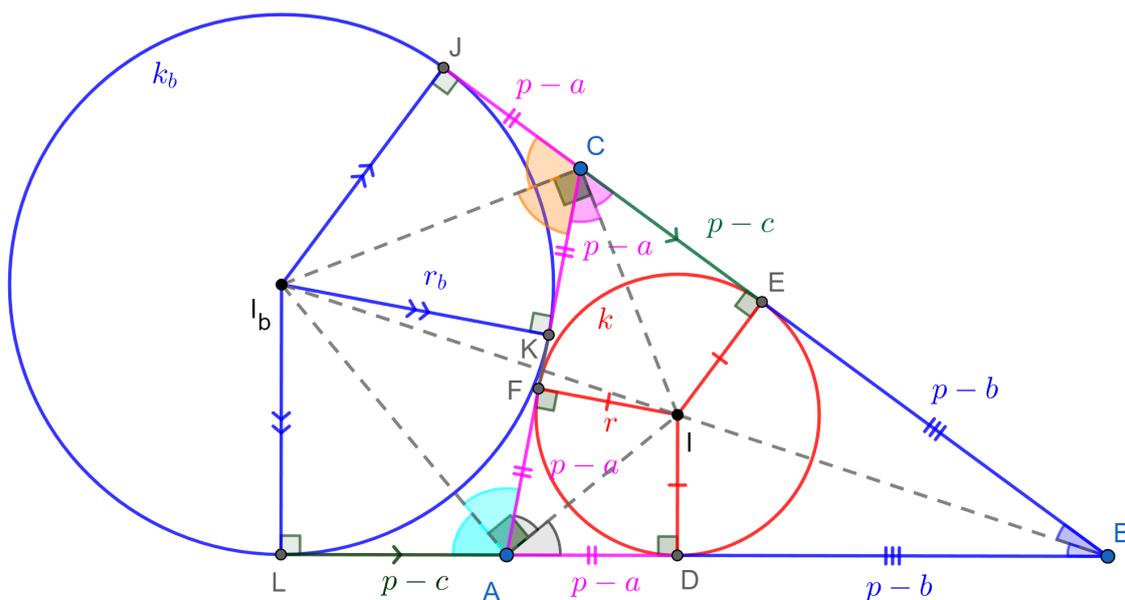
$$BL = BJ = p,$$

$$LD = JE = b,$$

$$FK = ||a - c||,$$

$$\text{Área}(\triangle ABC) = p \cdot r = r_b(p - b).$$

Figura 4.5: Segunda construção do Exercício 3. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

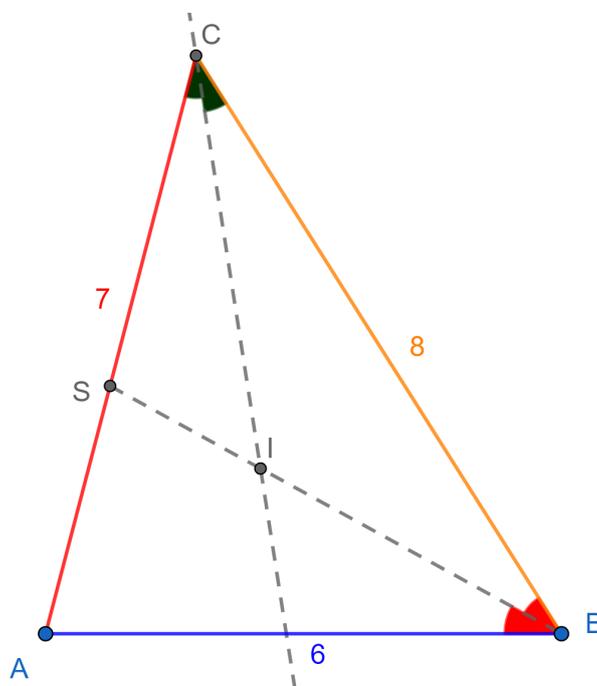
## 4.4 Duas vezes o teorema da bissetriz.

**Problema 2.** Seja  $ABC$  um triângulo tal que  $AB = 6$ ,  $AC = 7$  e  $BC = 8$ . Tomar  $S \in AC$  onde  $BS$  é bissetriz do ângulo em  $B$  e tomar  $I \in BS$  tal que  $CI$  é bissetriz do ângulo em  $C$ , determinar a razão  $\frac{BI}{IS}$ .

### 4.4.1 Resolução do Problema 2

A Figura 4.6 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.6: Construção inicial do Problema 2. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja  $SC = x$ . Segue que  $AS = 7 - x$ . Pelo Teorema da Bissetriz Interna no triângulo  $ABC$  relativo a  $BS$  tem-se:

$$\frac{7 - x}{x} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

$$4(7 - x) = 3x,$$

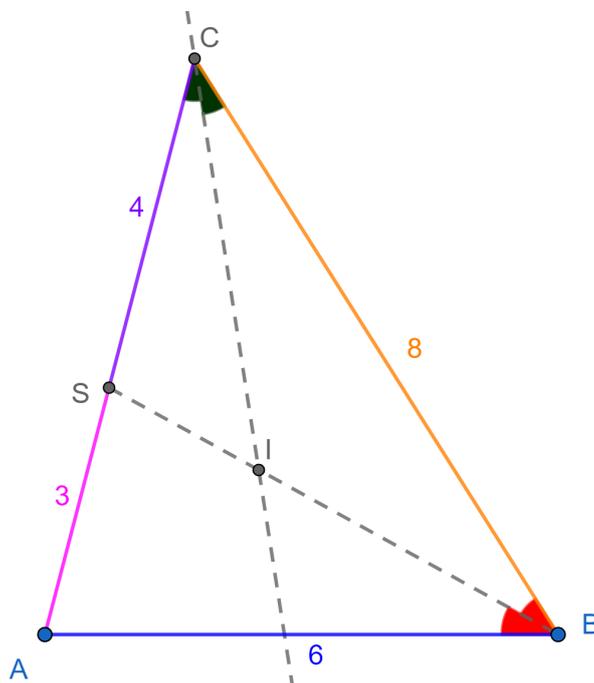
$$28 - 4x = 3x,$$

$$28 = 7x,$$

$$x = 4 = SC.$$

Pelo Teorema da Bissetriz Interna no triângulo  $SBC$  relativo a  $CI$  (Figura 4.7) vale:

$$\frac{BI}{IS} = \frac{8}{x} = \frac{8}{4} = 2.$$

Figura 4.7: Construção do Problema 2. Versão interativa [aqui](#).

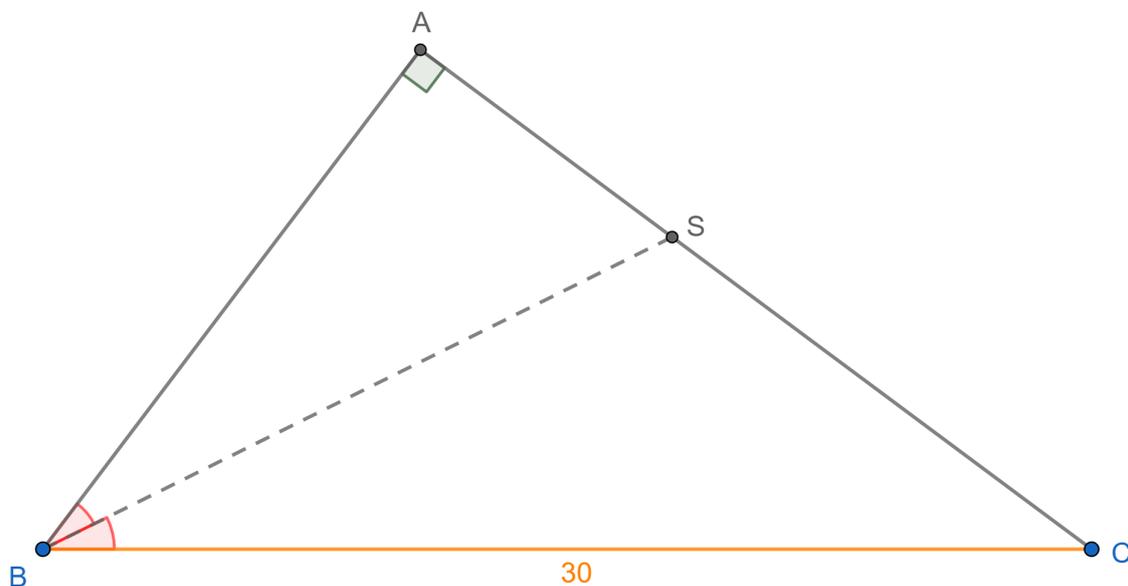
Fonte: O autor.

## 4.5 Triângulo retângulo, equação de segundo grau e teorema da bissetriz interna.

**Problema 3.** *Seja  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$ , com hipotenusa  $BC = 30$  e  $AC - AB = 6$ . Calcular o comprimento da bissetriz  $BS$ .*

### 4.5.1 Resolução do Problema 3

A Figura 4.8 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.8: Construção inicial do Problema 3. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Sejam  $AC = x$  e  $AB = y$ . Segue que:

$$x - y = 6 \Rightarrow x = y + 6.$$

Pela ida do Teorema de Pitágoras no  $\triangle ABC$  :

$$x^2 + y^2 = 900.$$

Isolando  $x$  na primeira equação e substituindo na segunda, encontra-se:

$$(y + 6)^2 + y^2 = 900,$$

$$2y^2 + 12y + 36 = 900,$$

$$y^2 + 6y + 18 = 450,$$

$$y^2 + 6y - 432 = 0.$$

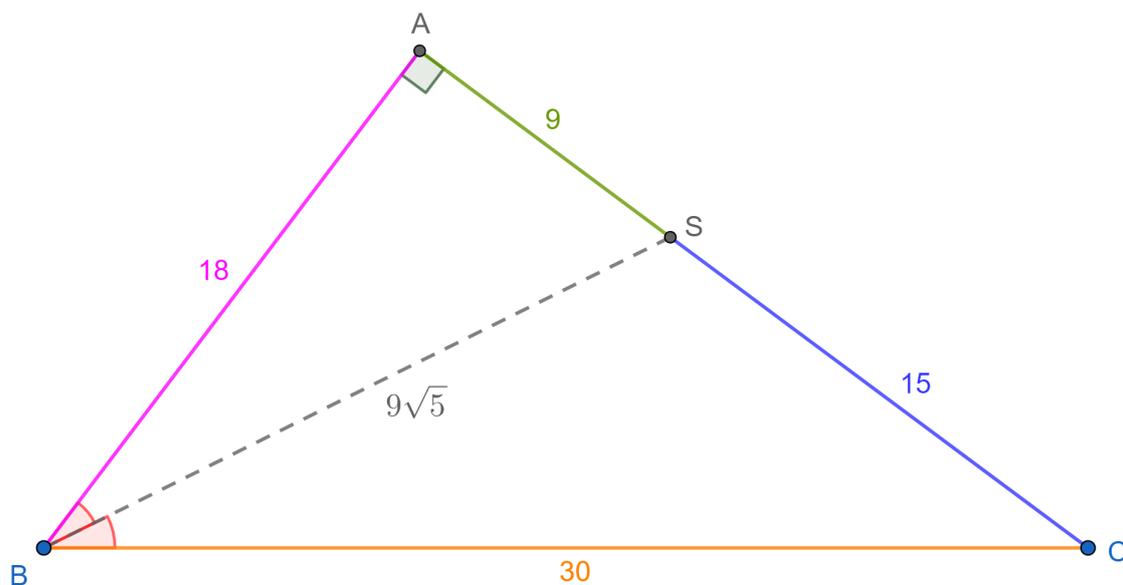
As raízes são 18 e  $-24$ . Portanto,  $y = 18$  e  $x = 24$ . Seja  $AS = z$ . Pelo Teorema da Bissetriz Interna no triângulo  $ABC$  relativo a  $BS$ :

$$\frac{18}{30} = \frac{z}{24 - z}.$$

Resolvendo encontra-se  $z = 9$  (Figura 4.9). Finalmente, pela ida do Teorema de Pitágoras no  $\triangle ABS$  :

$$BS^2 = 18^2 + 9^2 \Rightarrow BS = 9\sqrt{5}.$$

Figura 4.9: Construção do Problema 3. Versão interativa [aqui](#).



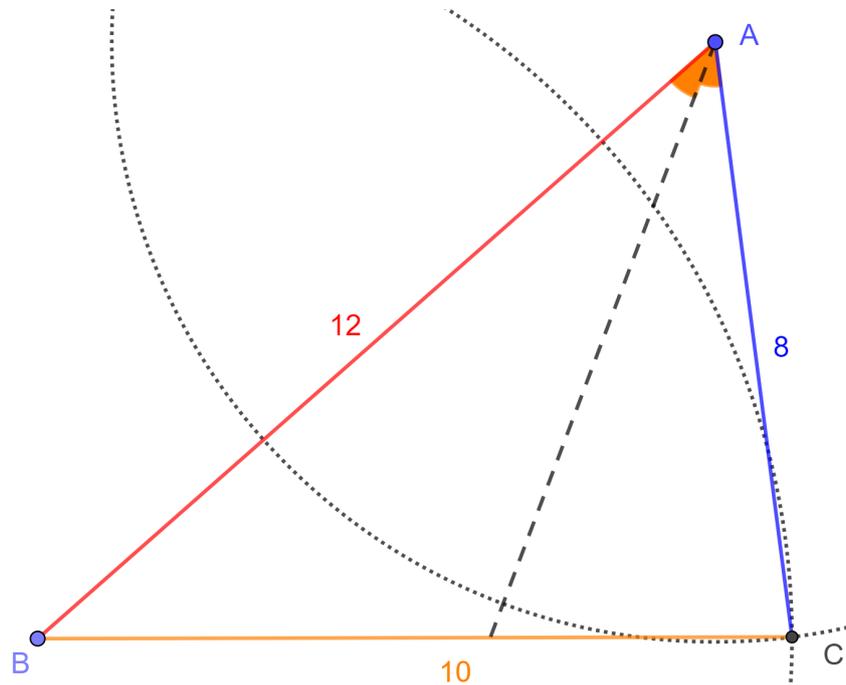
Fonte: O autor.

## 4.6 Construção LLL e teorema da bissetriz interna.

**Problema 4.** *Em um triângulo ABC, de lados  $AB = 12$ ,  $AC = 8$  e  $BC = 10$ , encontre o maior segmento que a bissetriz interna de A determina sobre BC.*

### 4.6.1 Resolução do Problema 4

A Figura 4.10 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.10: Construção inicial do Problema 4. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Seja  $D$  o pé da bissetriz do ângulo em  $A$  sobre  $BC$ ,  $BD = x$  e  $DC = 10 - x$  (Figura 4.11). Pelo Teorema da Bissetriz Interna tem-se:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}.$$

Logo,

$$\frac{12}{x} = \frac{8}{10 - x},$$

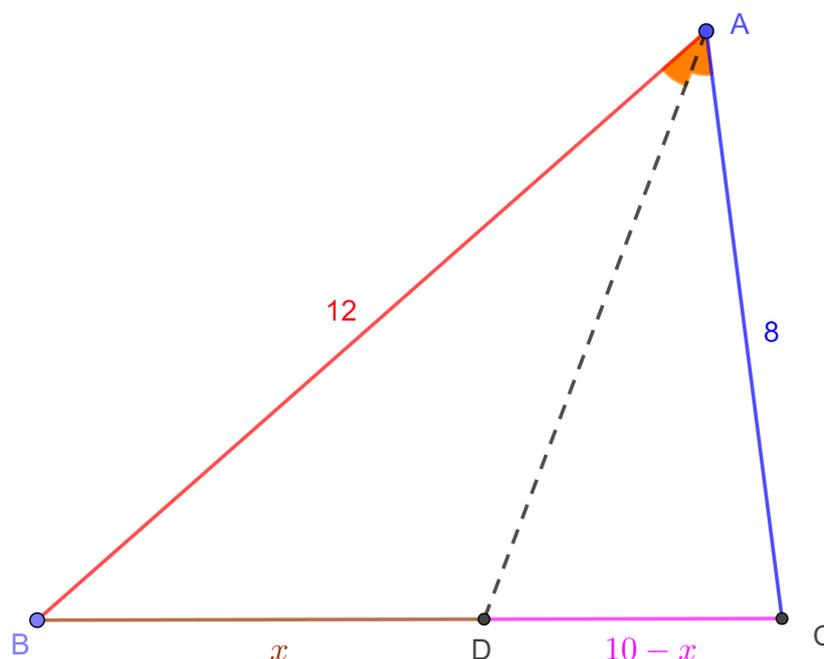
$$\frac{3}{x} = \frac{2}{10 - x},$$

$$30 - 3x = 2x,$$

$$30 = 5x,$$

$$x = 6.$$

Ou seja,  $BD = 6$  é o maior segmento determinado pela bissetriz  $AD$ .

Figura 4.11: Construção do Problema 4. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

## 4.7 Divisão harmônica e teorema da bissetriz.

**Problema 5.** Sendo  $AS$  e  $AP$  bissetrizes dos ângulos internos e externos em  $A$ , determinar o valor de  $CP$ , sabendo que  $BS = 8$  e  $CS = 6$ .

### 4.7.1 Resolução do Problema 5

A Figura 4.12 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.12: Construção inicial do Problema 5. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Como os pontos  $S$  e  $P$  são pés das bissetrizes dos ângulos internos e externos no vértice

A do  $\triangle ABC$ , então  $S$  e  $P$  dividem harmonicamente o segmento  $BC$  :

$$\frac{SB}{SC} = \frac{PB}{PC},$$

$$\frac{8}{6} = \frac{8+6+PC}{PC},$$

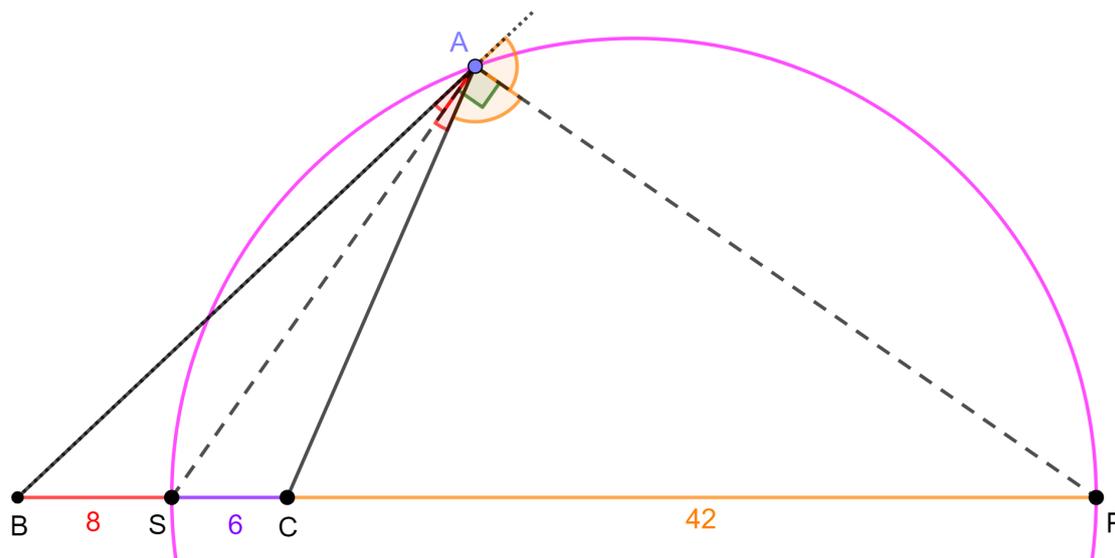
$$\frac{4}{3} = \frac{14+PC}{PC},$$

$$4PC = 42 + 3PC,$$

$$PC = 42.$$

O ponto  $A$  pertence a circunferência (Apolônio) de diâmetro  $SP$  (Figura 4.13).

Figura 4.13: Construção do Problema 5. Versão interativa [aqui](#).

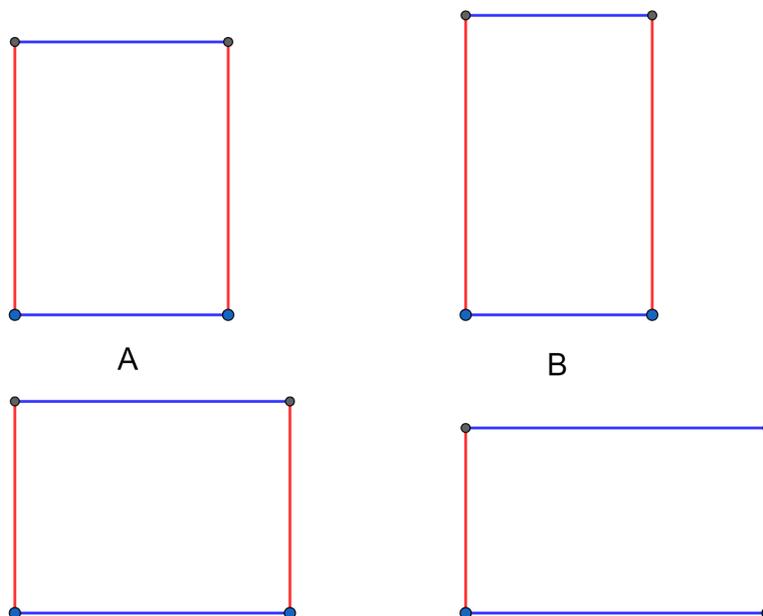


Fonte: O autor.

## 4.8 Razão Áurea

A Figura 4.14 ilustra duas colunas de retângulos. Qual das duas é esteticamente mais agradável?

Figura 4.14: Qual das duas colunas é esteticamente mais agradável? Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

A coluna  $B$  na Figura 4.14 está formada por segmentos que respeitam a Razão Áurea.

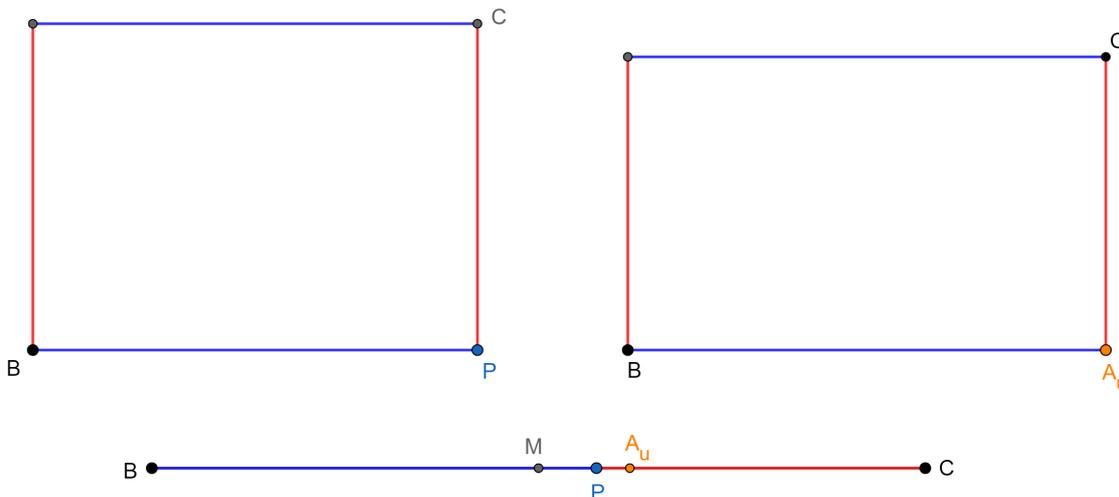
**Definição 6** (Razão Áurea). *Seja um segmento  $BC$ . É chamado de Áureo o ponto  $A_u$ , no interior de  $BC$ , que satisfaz:*

$$\frac{BC}{BA_u} = \frac{BA_u}{A_uC} = \phi. \quad (4.8.1)$$

*Em palavras, após a divisão o segmento todo  $BC$  está para a maior parte  $BA_u$  como a maior parte  $BA_u$  está para a menor  $A_uC$ . O razão  $\phi$  é denominada áurea.*

Como mostrado na Figura 4.15 o segmento  $BC$  é dividido nos segmentos  $BP$  e  $PC$  para formar o retângulo da esquerda e nos segmentos  $BA_u$  e  $A_uC$  para formar o retângulo da direita. Como referência também é marcado o ponto  $M$ , médio de  $BC$ .

Figura 4.15: O retângulo da direita foi construído com segmentos na Proporção ou Razão Áurea. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Da (4.8.1) pode-se escrever que:

$$\frac{BC}{BA_u} = \frac{BA_u + A_uC}{BA_u} = \frac{BA_u}{A_uC}.$$

Troca-se  $BA_u = \phi \cdot A_uC$  :

$$\frac{BA_u + A_uC}{BA_u} = \frac{\phi \cdot A_uC + A_uC}{\phi \cdot A_uC} = \frac{BA_u}{A_uC},$$

$$\frac{\phi \cdot A_uC + A_uC}{\phi \cdot A_uC} = \frac{\phi \cdot A_uC}{A_uC} = \frac{BA_u}{A_uC}.$$

Simplificando a primeira igualdade da última equação encontra-se:

$$\phi + 1 = \phi^2,$$

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática anterior obtêm-se:

$$\phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618,$$

$$\phi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,618.$$

O valor de  $\phi_1$  é denominado razão áurea maior ou simplesmente razão áurea. A solução

$\phi_2$  não ter sentido na geometria deste caso. Porém, pode ser verificado que:

$$\phi_2 = -\frac{1}{\phi_1}.$$

O número

$$\frac{1}{\phi_1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

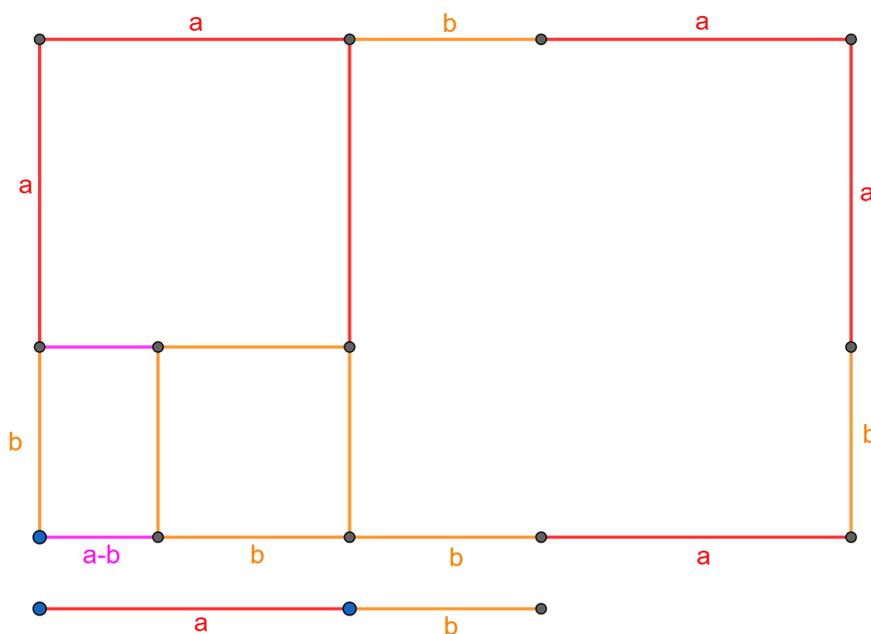
é denominado razão áurea menor. Aparece quando considera-se divisão da medida do menor segmento pelo maior.

O Retângulo de Ouro, Figura 4.16, apresenta a propriedade de auto similaridade quando um quadrado é adicionado ou removido. Por exemplo,

$$\frac{b}{a-b} = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{2a+b}{a+b} = \phi_1.$$

Isto é, todos os retângulos da Figura 4.16 estão em proporções áureas.

Figura 4.16: O Retângulo de Ouro apresenta a propriedade de auto similaridade quando um quadrado é adicionado ou removido. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.



Pela ida do Teorema de Pitágoras, aplicado ao  $\triangle ABD$ , tem-se:

$$(x + y)^2 + \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{x + y}{2}\right)^2.$$

Desenvolvendo e simplificando encontra-se:

$$x^2 + 2xy + y^2 + \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 = x^2 + x(x + y) + \left(\frac{x + y}{2}\right)^2,$$

$$2xy + y^2 = x(x + y),$$

$$2xy + y^2 = x^2 + xy,$$

$$xy + y^2 = x^2,$$

$$y(x + y) = x^2,$$

$$CB \cdot AB = AC^2,$$

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

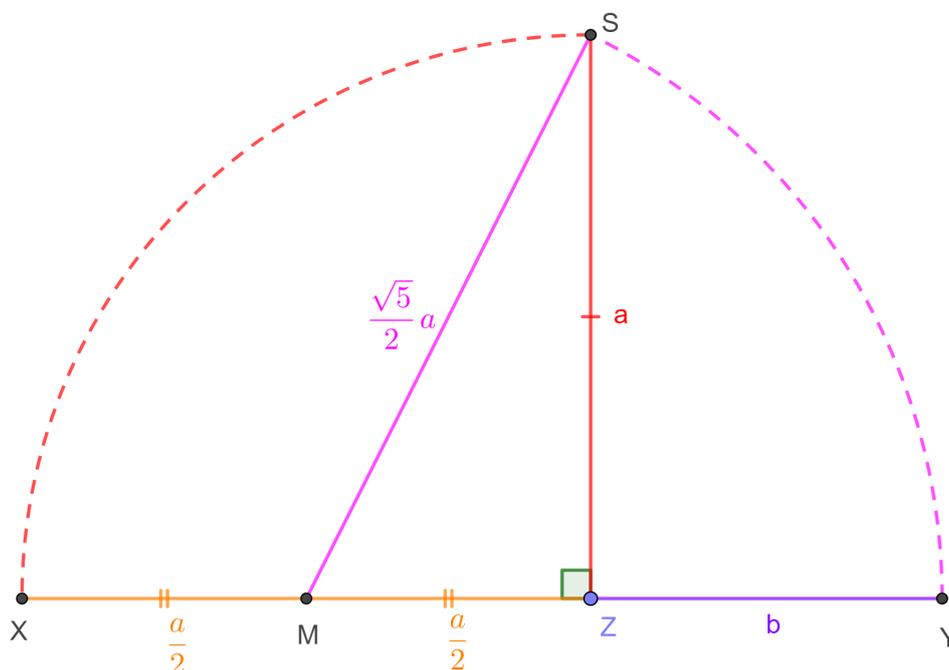
## 4.10 Construção de segmentos em Proporções Áureas-II

**Exercício 5.** *Dado o segmento  $XZ = a$  construir o ponto  $Y$  pertencente a semirreta  $XZ$ , tal que  $Z$  divida o segmento  $XY = a + b$ , com  $a > b$ , em proporções áureas. Implementar no GeoGebra com um controle deslizante. Justificar algebricamente o porquê da construção.*

### 4.10.1 Resolução do Exercício 5

1. Por  $Z$  traça-se uma perpendicular  $p$  ao segmento  $XZ$ . Um arco de circunferência com centro em  $Z$  e raio  $XZ$  intersepta  $p$  no ponto  $S$  (Figura 4.18).
2. Indicar o ponto médio  $M$  do segmento  $XZ$ .
3. Construir o segmento  $MS$  e um arco de circunferência com centro em  $M$  e raio  $MS$  que intersepta a semirreta  $XZ$  no ponto  $Y$ . Traçar o segmento  $ZY = b$ .

Figura 4.18: Segunda construção de segmentos em Proporções Áureas. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Pela ida do Teorema de Pitágoras, aplicado ao  $\triangle MZS$ , tem-se:

$$MS^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$MS = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Segue que:

$$b = MY - MZ = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{a}{2},$$

$$b = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a.$$

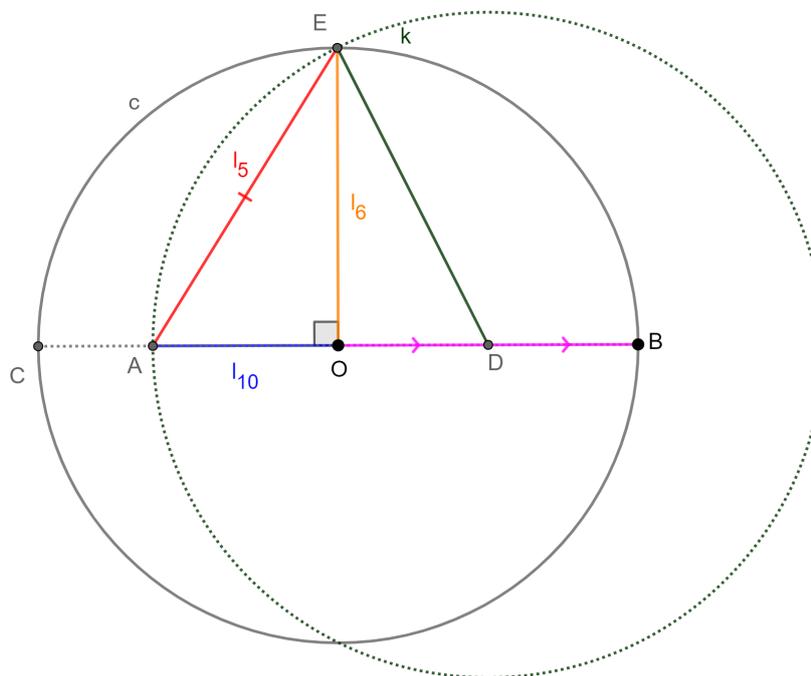
Conseqüentemente,

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi_1.$$

## 4.11 Razão Áurea no Pentágono Regular

Seja uma circunferência  $c$  de centro  $O$ , raio  $OB = 1$  e  $BC$  um dos seus diâmetros. Seja  $D$  o ponto médio do segmento  $OB$ . Passando por  $O$  é construída uma perpendicular a  $BC$  que intercepta  $c$ , acima de  $BC$ , no ponto  $E$  (Figura 4.19).

Figura 4.19: Razão Áurea no Pentágono Regular, primeira construção. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

O segmento  $OE = OB = 1 = l_6$ . Pois é a medida do lado de um hexágono regular inscrito em  $c$ . O  $\triangle ODE$ , retângulo em  $O$ , permite calcular  $DE$  pela ida do Teorema de Pitágoras:

$$DE = \sqrt{OD^2 + OE^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Seja  $k$  uma circunferência de centro  $D$  e raio  $DE$ . Marca-se o ponto  $A$  na interseção de  $k$  com o diâmetro  $BC$ . Tem-se que:

$$AO = DE - OD = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = l_{10}.$$

Sendo  $l_{10}$  a medida do lado de um decágono regular inscrito em  $c$ .

O  $\triangle OAE$ , retângulo em  $O$ , permite calcular  $AE$  pela ida do Teorema de Pitágoras:

$$AE = \sqrt{AO^2 + OE^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = l_5.$$

$l_5$  é a medida do lado de um pentágono regular inscrito em  $c$ .

Adicionalmente,

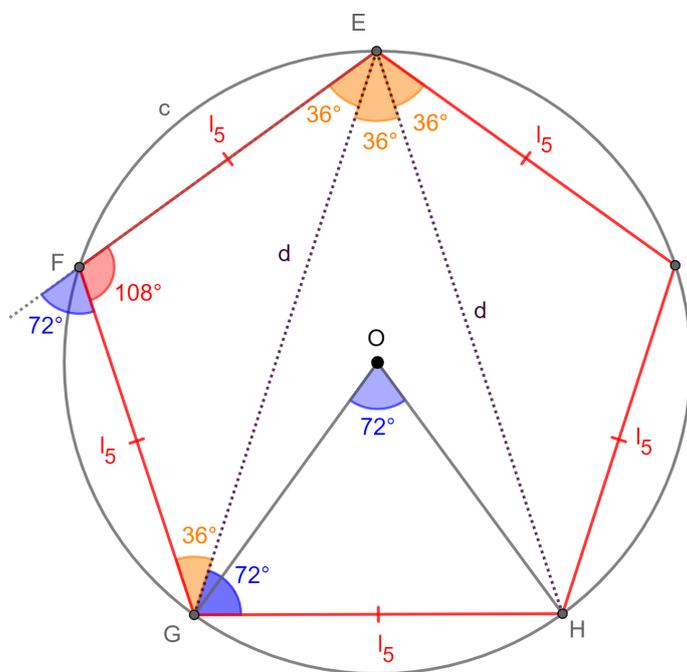
$$AC = CO - AO = 1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Com os resultados anteriores é possível calcular:

$$\frac{AO}{AC} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi_1.$$

De posse da medida de  $l_5$  é possível construir o pentágono regular  $EFGHI$  inscrito em  $c$  (Figura 4.20).

Figura 4.20: Razão Áurea no Pentágono Regular, segunda construção. Versão interativa [aqui](#).



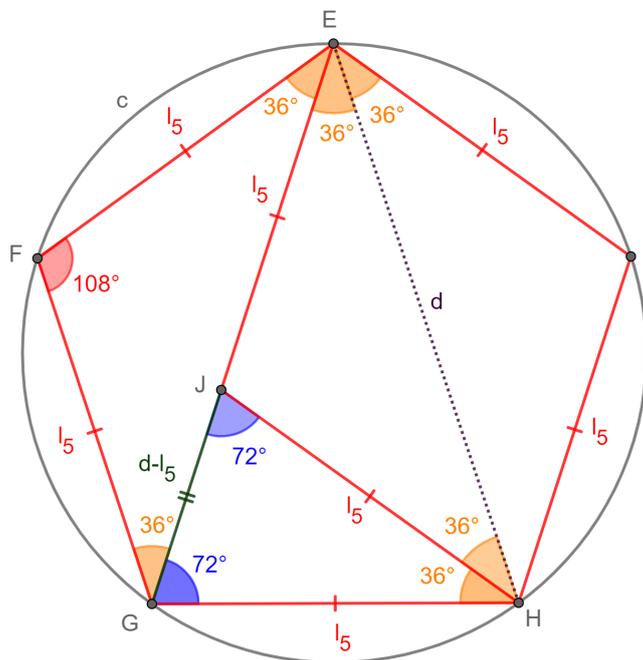
Fonte: O autor.

Prolongando um dos lados, neste caso  $EF$ , nota-se que a medida do ângulo externo em  $F$  do  $\triangle EFG$  é:

$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

Conseqüentemente  $\angle EFG = 108^\circ$  e  $\angle FGE = \angle FEG = 36^\circ$ . Pela simetria  $\angle IEH = \angle HEG = 36^\circ$ . Como o  $\triangle EGH$  é isósceles tem-se  $\angle EGH = \angle EHG = 72^\circ$ . A bissetriz do  $\angle GHE$  intercepta o segmento  $GE$  no ponto  $J$  (Figura 4.21).

Figura 4.21: Razão Áurea no Pentágono Regular, terceira construção. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Pelo critério de congruência ALA vale que  $\triangle EJH \equiv \triangle EFG$  e  $EJ = JH = l_5$ . Sendo  $EG = EH = d$  segue que  $JG = d - l_5$ .

Pelo critério de semelhança AA encontra-se que  $\triangle EGH \sim \triangle HGJ$  e:

$$\frac{d}{l_5} = \frac{l_5}{d - l_5}.$$

A equação anterior pode-se escrever de forma quadrática na variável  $d$  :

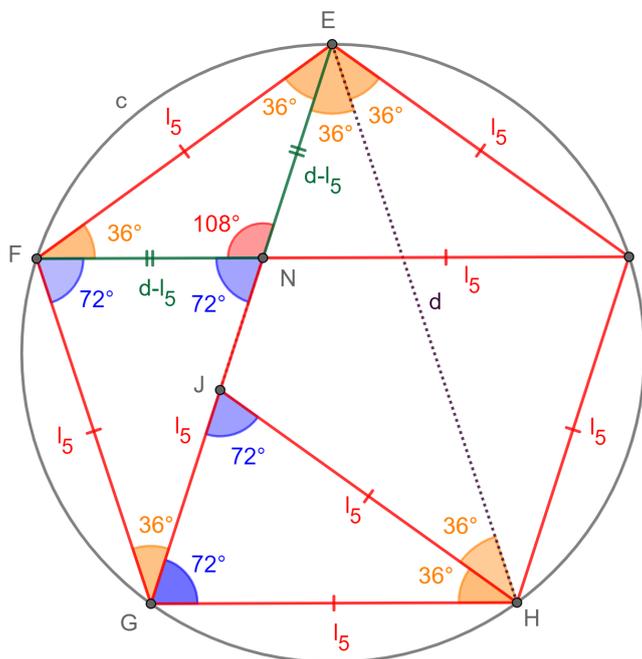
$$d^2 - l_5 \cdot d - l_5^2 = 0.$$

Segue que:

$$\frac{d}{l_5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi_1. \tag{4.11.1}$$

Traça-se o segmento  $IF$  e marca-se o ponto  $N = EG \cap IF$  (Figura 4.22).

Figura 4.22: Razão Áurea no Pentágono Regular, quarta construção. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Por simetria também vale que:

$$\frac{GN}{NE} = \frac{IN}{NF} = \phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Também pode ser calculado:

$$NE = d - l_5 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} l_5,$$

$$JN = 2l_5 - d = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} l_5,$$

$$\frac{NE}{JN} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi_1.$$

## 4.12 Razão Áurea, Pentágono Regular, Semelhança de Triângulos. P3 NE IGO 2017.

**Problema 6.** Em um pentágono regular  $ABCDE$ , a perpendicular em  $C$  a  $CD$  encontra  $AB$  em  $F$ . Provar que  $AE + AF = BE$ .



Ou seja,

$$\begin{aligned}x &= \frac{l}{\phi_1}, \\x + l &= l \left( \frac{1}{\phi_1} + 1 \right), \\x + l &= l \left( \frac{2}{1 + \sqrt{5}} + \frac{2}{2} \right) = l \left( \frac{4 + 2 + 2\sqrt{5}}{2(1 + \sqrt{5})} \right), \\x + l &= l \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right) \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \right), \\x + l &= l \left( \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{-4} \right) = l \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = l\phi_1, \\x + l &= d.\end{aligned}$$

Como queria-se provar. Uma resolução em vídeo está disponível [aqui](#).

## Capítulo 5

# Problemas resolvidos de olimpíadas internacionais

### 5.1 Bissetriz, semelhança, lugar geométrico. P5 IMO 1959.

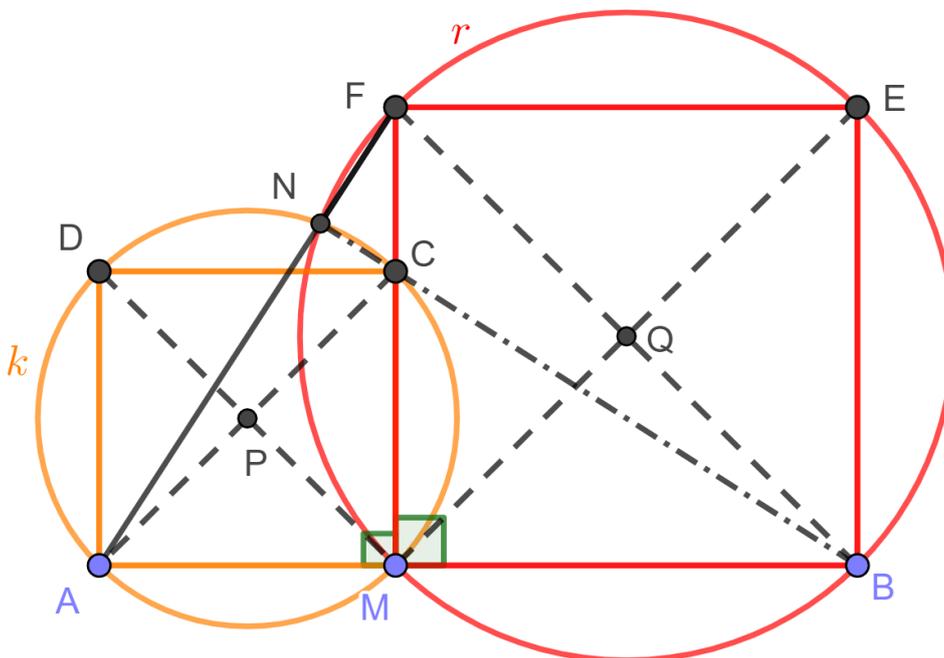
**Problema 7.** *É dado um segmento  $AB$  e nele um ponto  $M$ . Do mesmo lado de  $AB$  são construídos os quadrados  $AMCD$  e  $BMFE$ . As circunferências circunscritas dos dois quadrados, cujos centros são  $P$  e  $Q$ , cruzam-se em  $M$  e  $N$ . (a) Provar que as retas  $FA$  e  $BC$  interceptam-se em  $N$ . (b) Provar que todas as retas  $MN$  passam por um ponto  $S$ , independentemente da seleção de  $M$ . (c) Encontrar o lugar geométrico dos pontos médios de todos os segmentos  $PQ$ , à medida que  $M$  varia ao longo do segmento  $AB$ .*

A IMO 1959 foi realizada na cidade de Bucareste, capital da Romênia. Problema 5 da competição, proposto pela delegação da Romênia [4].

#### 5.1.1 Resolução do Problema 7

A Figura 5.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 5.1: Construção geométrica inicial para o Problema 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

(a) Como  $AM = MC$ ,  $\angle FMA = \angle BMC = 90^\circ$  e  $MF = MB$ , pelo critério de congruência LAL, segue:

$$\triangle FMA \equiv \triangle BMC.$$

Isto é, uma rotação de  $90^\circ$ , centrada no ponto  $M$ , transforma o  $\triangle BMC$  no  $\triangle FMA$ . Sendo que o segmento  $BC$  gira  $90^\circ$  para virar o segmento  $FA$  tem-se que:

$$\angle CNF = 90^\circ.$$

Adicionalmente,  $AC$  e  $BF$  são diâmetros das circunferência  $k$  e  $r$  circunscritas aos quadrados  $AMCD$  e  $MBEF$ , respetivamente. Logo,

$$\angle ANC = \angle BNF = 90^\circ.$$

Os resultados anteriores e  $N$  ponto comum de  $k$  e  $r$  levam a  $N = AF \cap BC$ .

(b) Como  $BF$  é diâmetro no quadrado  $MBEF$ , segue que  $\angle MFB = 45^\circ$  (Figura 5.2). O quadrilátero  $BMNF$  está inscrito em  $r$ , logo

$$\angle MNB = \angle MFB = 45^\circ.$$



$$Q = \left( t + \frac{1-t}{2}, \frac{1-t}{2} \right) = \left( \frac{1+t}{2}, \frac{1-t}{2} \right) = (Q_x, Q_y).$$

Seja  $Y$  o ponto médio do segmento  $PQ$ . Então calcula-se:

$$Y = \left( \frac{P_x + Q_x}{2}, \frac{P_y + Q_y}{2} \right),$$

$$Y = \left( \frac{1+2t}{4}, \frac{1}{4} \right).$$

Isto é, o lugar geométrico do ponto  $Y$  é um segmento de reta entre os pontos:

$$\left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \quad (t = 0),$$

$$\left( \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right) \quad (t = 1).$$

## 5.2 Teorema de Tales. Semelhança. P5 IMO 1965.

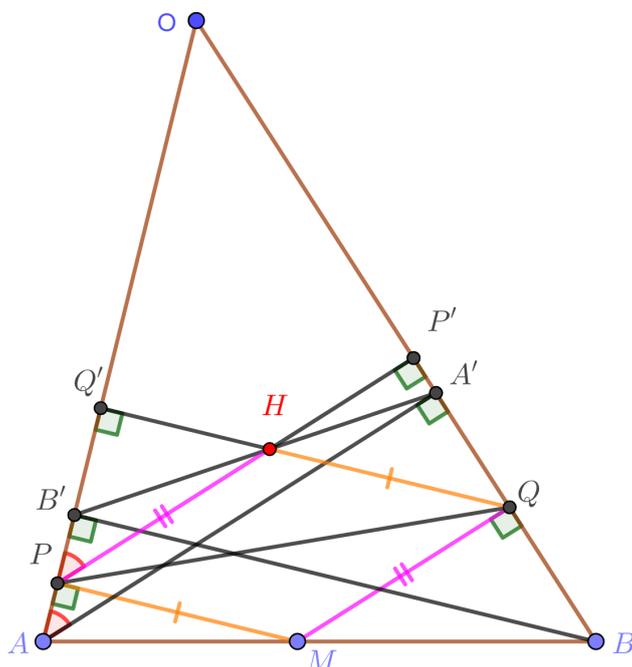
**Problema 8.** *Dado um triângulo  $OAB$  tal que  $\angle AOB < 90^\circ$ , seja  $M \neq O$  um ponto arbitrário do triângulo. Denotam-se por  $P$  e  $Q$  os pés das perpendiculares de  $M$  a  $OA$  e  $OB$ , respectivamente. Seja  $H$  o ortocentro do  $\triangle OPQ$ . Encontrar o lugar geométrico dos pontos  $H$  quando: (a)  $M$  pertence ao segmento  $AB$ ; (b)  $M$  pertence ao interior do  $\triangle OAB$ .*

A IMO 1965 foi realizada na cidade de Berlim, capital da Alemanha. Este é o P5 da competição, proposto pela delegação da Romênia [4].

### 5.2.1 Resolução do Problema 8

A Figura 5.3 ilustra uma construção geométrica para o item (a).

Figura 5.3: Uma construção geométrica para o item (a) do Problema 8. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam  $P'$  e  $Q'$  os pés das alturas dos pontos  $P$  e  $Q$  relativos aos lados  $OB$  e  $OA$ , respectivamente. Analogamente, sejam  $A'$  e  $B'$  os pés das alturas dos pontos  $A$  e  $B$  relativos aos lados  $OB$  e  $OA$ , respectivamente. Pela definição de ortocentro tem-se que  $H = PP' \cap QQ'$ . Intuitivamente verifica-se que, quando  $M = A$ , então  $P = M = A$  e  $Q = P' = A' = H$ . Adicionalmente, quando  $M = B$ , então  $Q = M = B$  e  $P = Q' = B' = H$ . Isto leva a conjecturar que  $H \in A'B'$ .

Por serem perpendiculares ao lado  $OA$  segue que  $PM \parallel B'B \parallel Q'Q$ . Analogamente, sendo perpendiculares ao lado  $OB$  encontra-se que  $QM \parallel A'A \parallel P'P$ . Pela ida do Teorema de Tales para as transversais  $AB'$  e  $AB$  vale:

$$\frac{B'P}{B'A} = \frac{BM}{BA}.$$

Pela semelhança  $\triangle BMQ \sim \triangle BAA'$  encontra-se:

$$\frac{B'P}{B'A} = \frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{AA'}.$$

Nota-se ainda que o quadrilátero  $MPHQ$  é um paralelogramo. Isto é,  $MP = QH$  e  $MQ = PH$ . Ou seja,

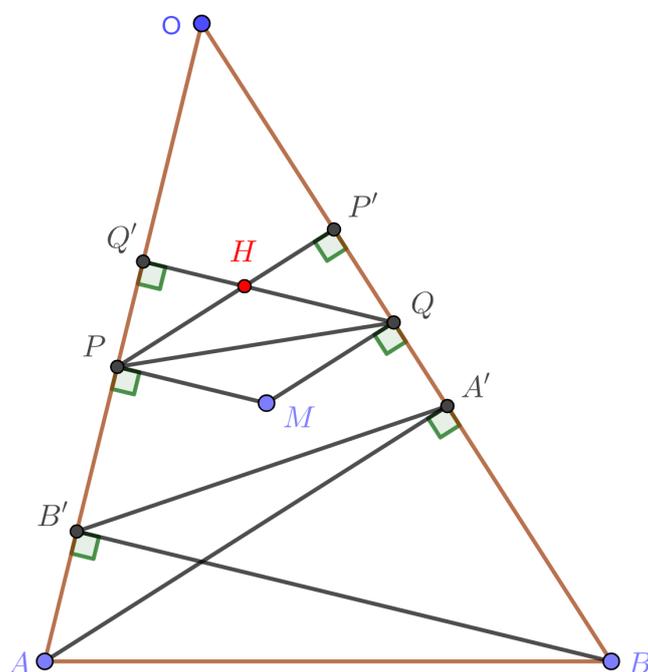
$$\frac{B'P}{B'A} = \frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{AA'} = \frac{PH}{AA'},$$

$$\frac{B'P}{B'A} = \frac{PH}{AA'}$$

A última equação e  $\angle HPB' = \angle A'AB'$  ( $PH \parallel AA'$ ) levam, pelo critério de semelhança LAL, a  $\triangle HPB' \sim \triangle A'AB'$ . Portanto,  $H \in A'B'$ . Em outras palavras, o lugar geométrico dos pontos  $H$  quando  $M$  pertence ao segmento  $AB$  é o segmento  $A'B'$ .

A Figura 5.4 ilustra uma construção geométrica para o item (b). Pelo resultado discutido no item (a), quando  $M$  está em qualquer lugar do interior do  $\triangle OAB$ , então o lugar geométrico dos pontos  $H$  é no interior do  $\triangle OA'B'$ .

Figura 5.4: Uma construção geométrica para o item (b) do Problema 8. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

### 5.3 Teorema da bissetriz interna. Desigualdade das médias aritmética e geométrica. P1 IMO 1991.

**Problema 9.** *Seja o triângulo ABC arbitrário. Provar a desigualdade:*

$$\frac{1}{4} < \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} \leq \frac{8}{27},$$

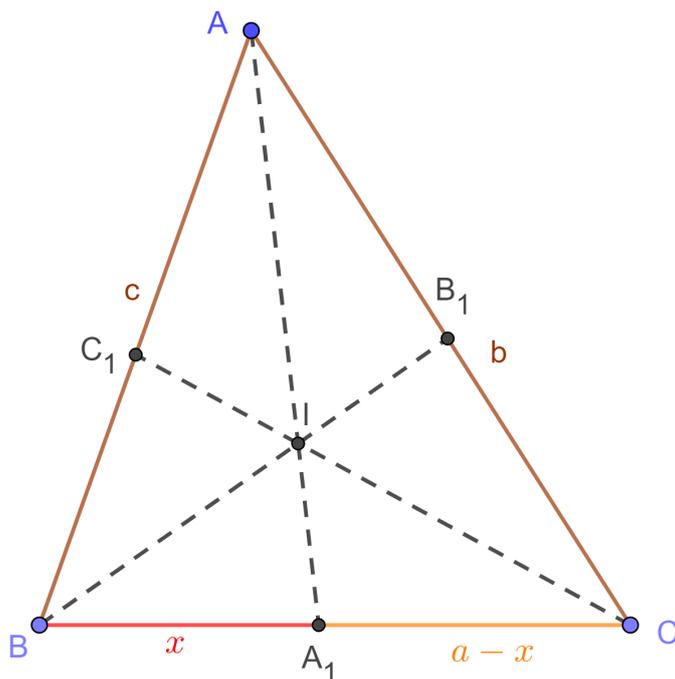
onde  $I$  é o incentro e  $l_A, l_B$  e  $l_C$  são os comprimentos das bissetrizes internas dos ângulos do  $\triangle ABC$ .

A IMO 1991 foi realizada na cidade de Sigtuna, Suécia. Este é o P1 da competição e o P6 da SL, proposto pela delegação da antiga União Soviética [4].

### 5.3.1 Resolução do Problema 9

A Figura 5.5 ilustra uma construção geométrica inicial.

Figura 5.5: Uma construção geométrica inicial do Problema 9. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam  $BC = a$ ,  $CA = b$  e  $AB = c$  as medidas dos lados e  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  a intersecção das bissetrizes internas com os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respetivamente. Isto é,  $l_A = AA_1$ ,  $l_B = BB_1$  e  $l_C = CC_1$ . Pelo Teorema da Bissetriz Interna relativo a bissetriz  $AA_1$  tem-se:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}.$$

Seja  $BA_1 = x$ . Logo,  $A_1C = a - x$ . Portanto,

$$\frac{x}{a - x} = \frac{c}{b},$$

$$x = BA_1 = \frac{ac}{b + c},$$

$$a - x = A_1C = \frac{ab}{b + c}.$$

Adicionalmente, pelo Teorema da Bissetriz Interna, relativo a bissetriz  $BI$ , segue:

$$\frac{IA}{IA_1} = \frac{c}{x}.$$

Substituindo  $x$  dos resultados anteriores encontra-se:

$$\frac{IA}{IA_1} = \frac{b+c}{a}.$$

Portanto, a fração de interesse pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{IA}{l_A} &= \frac{IA}{IA + IA_1} = \frac{\frac{IA}{IA_1}}{\frac{IA}{IA_1} + 1} = \\ &= \frac{\frac{b+c}{a}}{\frac{b+c}{a} + \frac{a}{a}} = \frac{b+c}{a+b+c}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{IB}{l_B} &= \frac{c+a}{a+b+c}, \\ \frac{IC}{l_C} &= \frac{a+b}{a+b+c}. \end{aligned}$$

Segue que:

$$\frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} = \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(a+b+c)^3}.$$

Sejam  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  as projeções ortogonais de  $I$  sobre os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente (Figura 5.6). Então,

$$C'B = BA' = m > 0,$$

$$A'C = CB' = n > 0,$$

$$B'A = AC' = p > 0,$$

$$a = m + n,$$

$$b = n + p,$$

$$c = p + m.$$

Em função de  $m$ ,  $n$  e  $p$  a fração de interesse transforma-se em:

$$\frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} = \frac{(n+2p+m)(p+2m+n)(m+2n+p)}{8(m+n+p)^3}.$$

A desigualdade no enunciado do problema pode ser reescrita como:

$$2 < \frac{(n + 2p + m)(p + 2m + n)(m + 2n + p)}{(m + n + p)^3} \leq \frac{64}{27}.$$

Para demonstrar a validade do lado direito escreve-se:

$$(n + 2p + m)(p + 2m + n)(m + 2n + p) \leq \left( \frac{4(m + n + p)}{3} \right)^3,$$

$$\sqrt[3]{(n + 2p + m)(p + 2m + n)(m + 2n + p)} \leq \frac{4(m + n + p)}{3},$$

$$\sqrt[3]{(n + 2p + m)(p + 2m + n)(m + 2n + p)} \leq \frac{(n + 2p + m) + (p + 2m + n) + (m + 2n + p)}{3}.$$

O resultado anterior é verdadeiro pela aplicação da desigualdade entre as médias geométrica e aritmética aos números positivos  $n + 2p + m$ ,  $p + 2m + n$  e  $m + 2n + p$ . A igualdade acontece quando  $m = n = p$ . Ou seja, para  $a = b = c$ . Para demonstrar a validade do lado esquerdo escreve-se:

$$2(m + n + p)^3 < (n + 2p + m)(p + 2m + n)(m + 2n + p).$$

Com a mudança de variável  $T = m + n + p$  a desigualdade anterior é reescrita como:

$$2T^3 < (T + p)(T + m)(T + n),$$

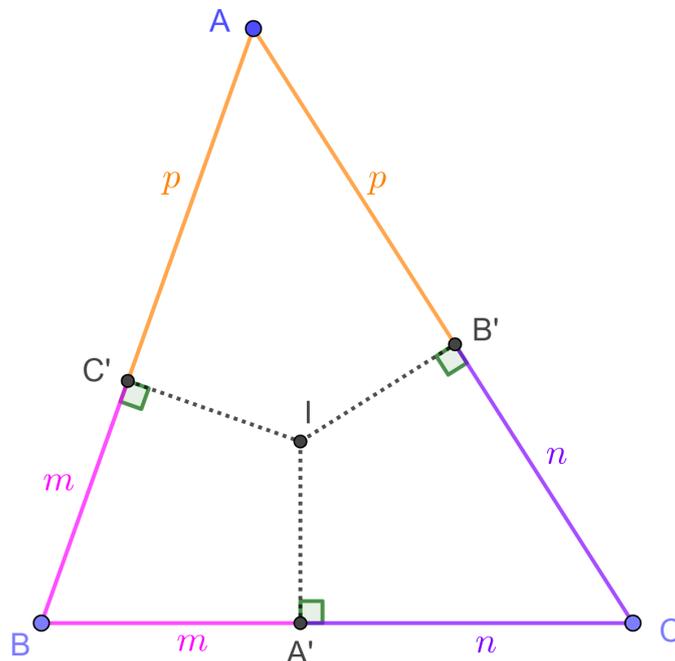
$$2T^3 < T^3 + (m + n + p)T^2 + (mn + np + pm)T + pmn,$$

$$2T^3 < 2T^3 + (mn + np + pm)T + pmn,$$

$$0 < (mn + np + pm)T + pmn.$$

A última linha é verdadeira pois todas as variáveis envolvidas são números positivos.

Figura 5.6: Uma construção geométrica do Problema 9. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

### 5.4 Incentro. Divisão harmônica. Trapézio isósceles. Semelhança de triângulos. P19 SL IMO 2005.

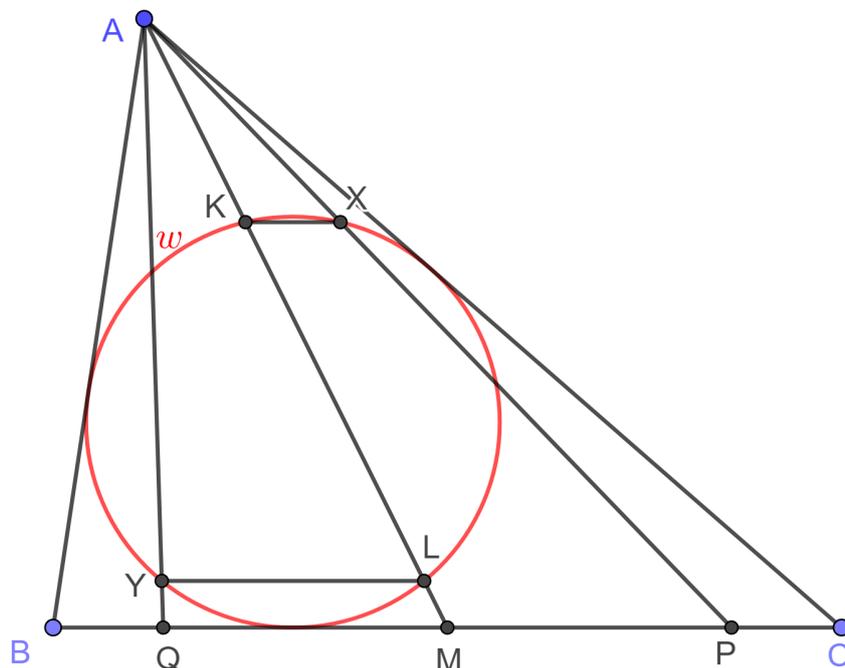
**Problema 10.** *A mediana  $AM$  dum triângulo  $ABC$  intercepta seu incírculo  $w$  nos pontos  $K$  e  $L$ . As retas que passam por  $K$  e  $L$  paralelas a  $BC$  cruzam  $w$  novamente em  $X$  e  $Y$ , respectivamente. As linhas  $AX$  e  $AY$  interceptam  $BC$  em  $P$  e  $Q$ . Provar que  $BP = CQ$ .*

A IMO 2005 foi realizada na cidade de Mérida, no México. Este é o P19 da SL, proposto pela delegação da Rússia [4].

#### 5.4.1 Resolução do Problema 10

A Figura 5.7 ilustra uma construção geométrica inicial.

Figura 5.7: Uma construção geométrica inicial do Problema 10. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Denotam-se por  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pontos de tangência de  $w$  com  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Sejam os pontos  $I$  o incentro,  $Y' = AX \cap LY$  e  $R = AM \cap EF$  (Figura 5.8). Como a reta  $EF$  é a polar do ponto  $A$  em relação  $w$ , então  $A$ ,  $R$ ,  $K$  e  $L$  são conjugados harmônicos (Proposição 15). Ou seja,

$$\frac{KR}{RL} = \frac{KA}{AL}.$$

Como  $BC \parallel KX \parallel LY'$  e o critério de semelhança AA, então vale:

$$\triangle AKX \sim \triangle ALY',$$

$$\frac{KA}{AL} = \frac{KX}{LY'}.$$

Portanto,

$$\frac{KR}{RL} = \frac{KX}{LY'}.$$

De  $KX \parallel YL$  segue que o quadrilátero inscrito  $KXLY$  é um trapézio isósceles. Ou seja,  $KY = XL$  e  $XY = KL$ . Quer-se provar que  $BQ = PC$ . Como  $M$  é ponto médio isto implica que  $QM = MP$ . Se  $LY = LY'$ , então da semelhança

$$\triangle KXR \sim \triangle LYR$$

encontra-se  $R \in XY$ . Como  $DI$  é o eixo de simetria de  $KXLY$ , bastará provar que  $R \in DI$ .

Por hipótese,  $R$  é um ponto da mediana  $AM$ . Logo, vale a igualdade de áreas:

$$[\triangle ARB] = [\triangle ARC],$$

$$AB \cdot FR \cdot \text{sen}(\angle RFA) = AC \cdot ER \cdot \text{sen}(\angle AER).$$

Como os  $\triangle IFE$  e  $\triangle AFE$  são isósceles, de base  $FE$ , então

$$\angle IFE = \angle FEI,$$

$$\angle RFA = \angle AER,$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{ER}{FR}.$$

Seja o ponto  $I'$  a interseção da reta por  $F$  paralela a  $IE$  com a reta  $IR$ . Pela semelhança

$$\triangle FI'R \sim \triangle EIR$$

escreve-se:

$$\frac{ER}{FR} = \frac{EI}{FI'} = \frac{FI}{FI'},$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{FI}{FI'}.$$

Estudando os ângulos nos  $\triangle AFE$  e  $IFE$  encontra-se que:

$$\angle EFI' = \angle IFE = \angle FEI,$$

$$\angle IFI' = \angle BAC.$$

Pelo critério de semelhança LAL vale:

$$\triangle IFI' \sim \triangle BAC.$$

Portanto,

$$\angle I'IF = \angle CBA.$$

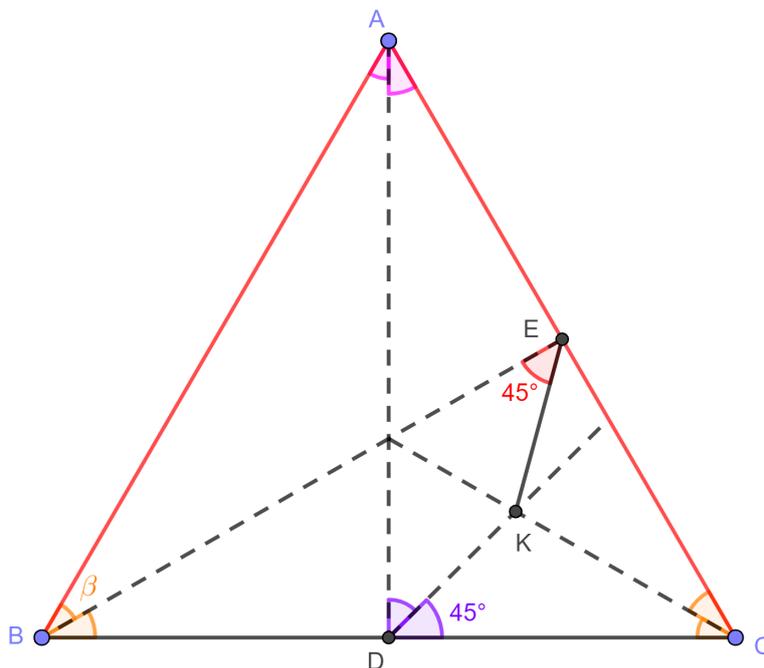
Por outro lado, o quadrilátero  $BDIF$  é inscrito pois a soma dos ângulos opostos é  $180^\circ$ . Segue que:

$$\angle FID = 180^\circ - \angle CBA.$$

Como  $\angle FID + \angle I'IF = 180^\circ$ , os pontos  $D$ ,  $I$  e  $R$  são colineares.



Figura 5.9: Uma construção geométrica inicial do Problema 11. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

De  $AB = AC$  o  $\triangle ABC$  é isósceles, de base  $BC$ , e  $AD$  é bissetriz, altura e mediana. Denotam-se por  $I$  e  $L$  os incentros dos  $\triangle ABC$  e  $\triangle BDA$ , respectivamente. Como  $AL$  e  $BL$  são bissetrizes e considerando o triângulo retângulo  $ADB$ , vale que:

$$\angle BAL = \angle LAD = \alpha,$$

$$\angle ABL = \angle LBD = \beta,$$

$$2(\alpha + \beta) = 90^\circ,$$

$$\alpha + \beta = 45^\circ.$$

O  $\angle ALI$  é externo em  $L$  do  $\triangle ALB$ . Segue:

$$\angle ALI = \angle BAL + \angle ABL,$$

$$\angle ALI = \alpha + \beta = 45^\circ.$$

Considerando a hipótese  $\angle BEK = 45^\circ$  e a recíproca de ângulos alternos entre paralelas encontra-se  $AL \parallel EK$ . Seja o ponto  $L' = BI \cap DK$ . Como

$$\angle L'LA = \angle L'DA = 45^\circ,$$

então o quadrilátero  $ALDL'$  é inscrito pela circunferência  $m$ . Portanto,

$$\angle LAL' = 180^\circ - \angle L'DL = 90^\circ,$$

$$\angle AL'L = \angle ADL = 45^\circ,$$

$$\angle LL'D = \angle LAD = \alpha.$$

Adicionalmente,  $LL'$  é diâmetro de  $m$  e  $AL = AL'$ . Sendo o segmento  $AK$  bissetriz do  $\angle DAC$  tem-se:

$$\angle DAK = \angle KAC = \alpha,$$

$$AK = AL = AL'.$$

O  $\angle AKI$  é externo em  $K$  do  $\triangle AKC$ . Segue:

$$\angle AKI = \angle KAC + \angle ACK,$$

$$\angle ALI = \alpha + \beta = 45^\circ.$$

Como  $AL \parallel EK$  e  $\angle LAL' = 90^\circ$  o prolongamento do segmento  $KE$  é perpendicular com  $AL'$ . Sejam os pontos  $P = AK \cap L'E$  e  $Q = AC \cap L'K$ . De

$$\angle PAQ = \angle PL'Q = \alpha$$

encontra-se que o quadrilátero  $APQL'$  é inscrito pela circunferência  $n$ . Podem acontecer dois casos: a)  $PQ \parallel AL'$  (Figura 5.10) e b)  $PQ \not\parallel AL'$  (Figura 5.11). No caso a)  $PQ \parallel AL'$  segue que o quadrilátero  $APQL'$  é um trapézio isósceles e

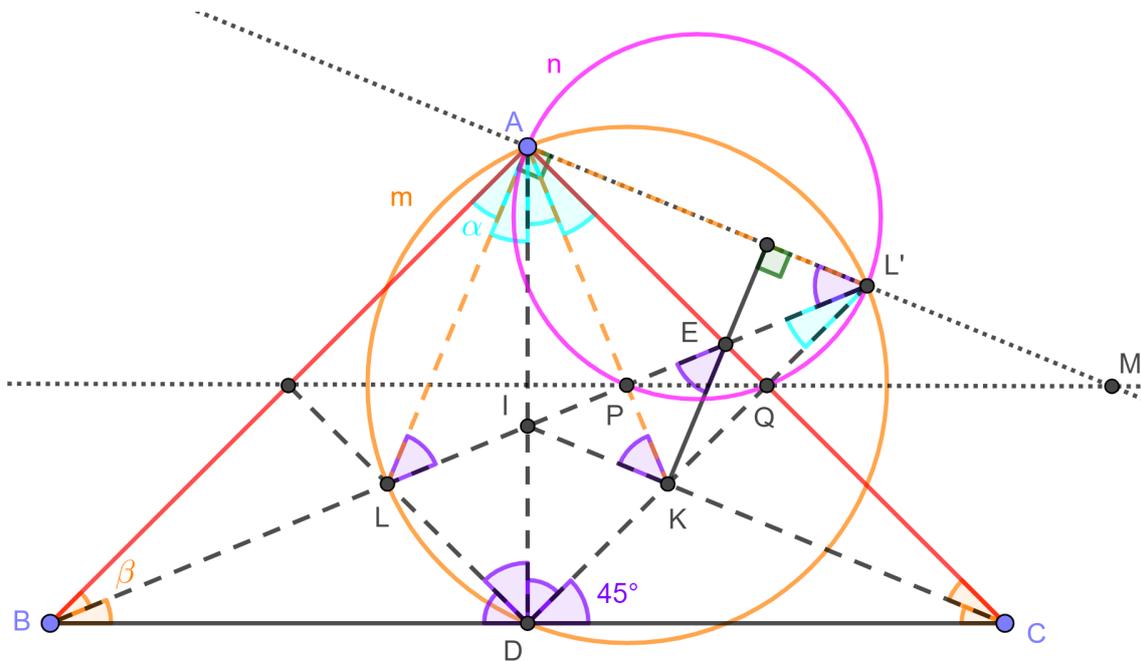
$$AK = KL'.$$



$$2\alpha = 45^\circ,$$

$$\angle BAC = 4\alpha = 90^\circ.$$

Figura 5.11: Uma construção geométrica do caso b) do Problema 11. Versão interativa [aqui](#).



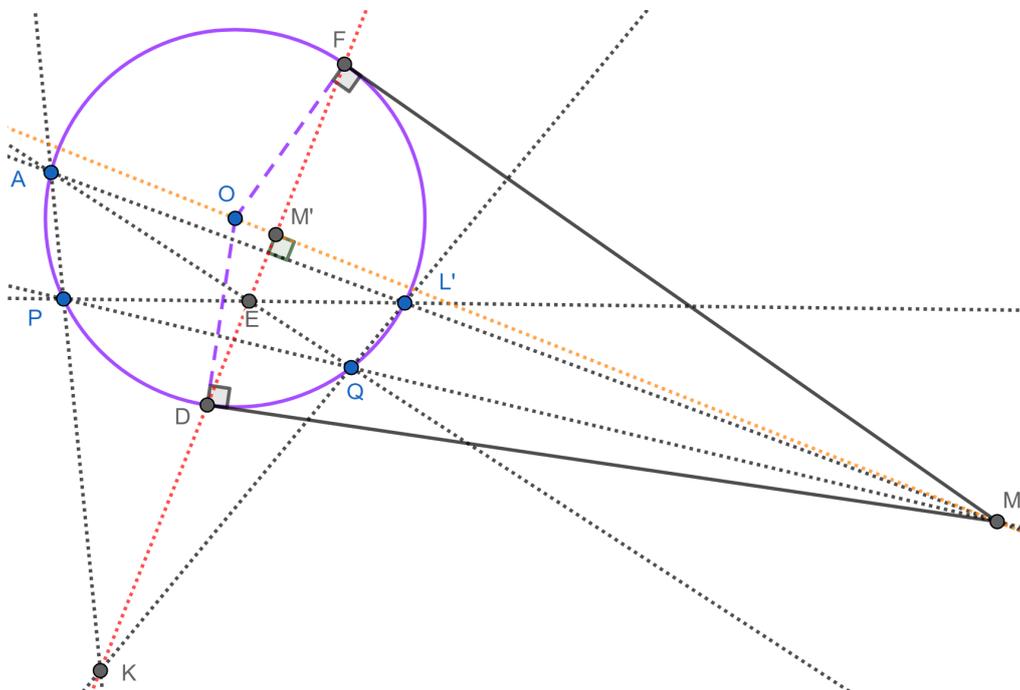
Fonte: O autor.

O anterior termina a resolução do problema. Isto é,  $\angle BAC = 60^\circ$  ou  $\angle BAC = 90^\circ$ . A Figura 5.12 exibe um caso hipotético em que  $KE$  é a reta polar do ponto  $M$  relativo a circunferência  $n$ , de centro  $O$ . Isto é,

$$M' = \text{Inv}(M, n) \in KE$$

e  $\angle KM'M = 90^\circ$ . Porém,  $AL'$  não é diâmetro de  $n$ . Por construção,  $A, L', P, Q \in n$ ,  $E = AQ \cap PL'$ ,  $K = AP \cap L'Q$  e  $M = AL' \cap PQ$ . Este resultado é conhecido como Teorema 14 (Brocard).

Figura 5.12: Caso hipotético em que  $KE$  é a reta polar do ponto  $M$  relativo a circunferência  $n$ , de centro  $O$ . Por construção,  $A, L', P, Q \in n$ ,  $E = AQ \cap PL'$ ,  $K = AP \cap L'Q$  e  $M = AL' \cap PQ$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

## 5.6 Incentro. Circuncentro. Homotetia. P5 IMO 1981.

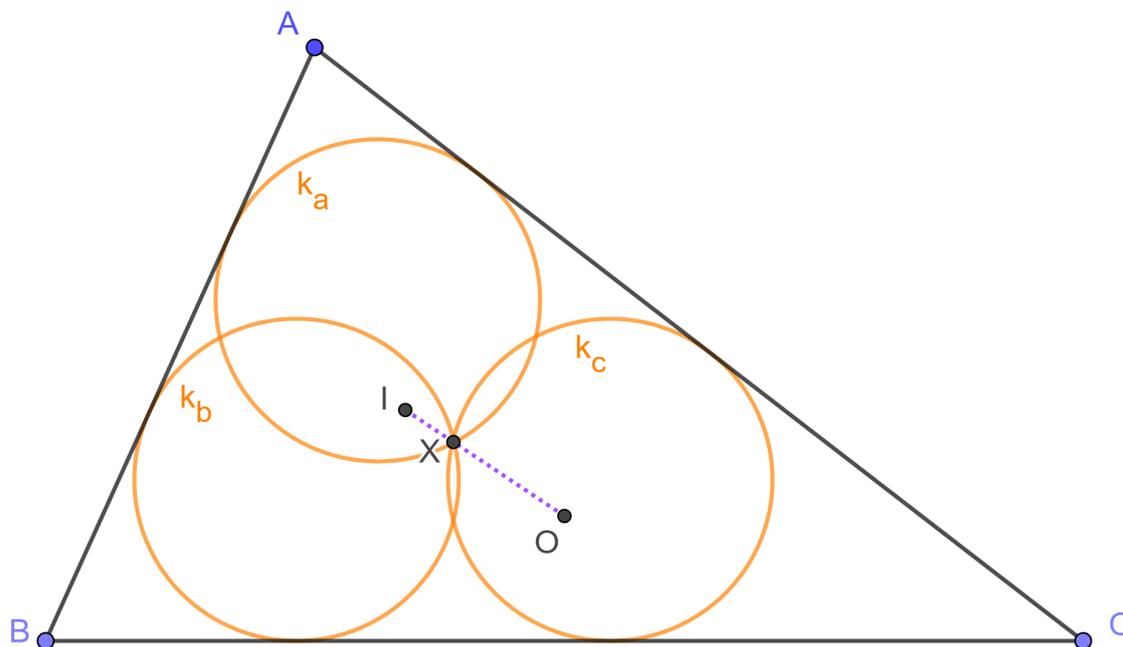
**Problema 12.** *Três circunferências de igual raio são tangentes, cada uma, a dois lados dum triângulo  $ABC$  e têm um ponto comum  $X$ . Mostrar que o incentro  $I$  e o circuncentro  $O$  do  $\triangle ABC$  são colineares com  $X$ .*

A IMO 1981 foi realizada na cidade de Washington, D.C., Estados Unidos. Este é o P5 da competição e o P17 da SL, proposto pela delegação da antiga União Soviética [4].

### 5.6.1 Resolução do Problema 12

A Figura 5.13 ilustra uma construção geométrica inicial.

Figura 5.13: Uma construção geométrica inicial do Problema 12. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam  $k_a$ ,  $k_b$  e  $k_c$  as circunferências de raio comum e centradas em  $S_a$ ,  $S_b$  e  $S_c$ , respectivamente. Para  $k_a$  ser tangente simultaneamente aos lados  $AB$  e  $AC$  deve-se ter que  $S_a$  é um ponto da bissetriz do  $\angle A$ . Pelo mesmo raciocínio,  $S_b$  e  $S_c$  são pontos da bissetrizes dos  $\angle B$  e  $\angle C$  (Figura 5.14).

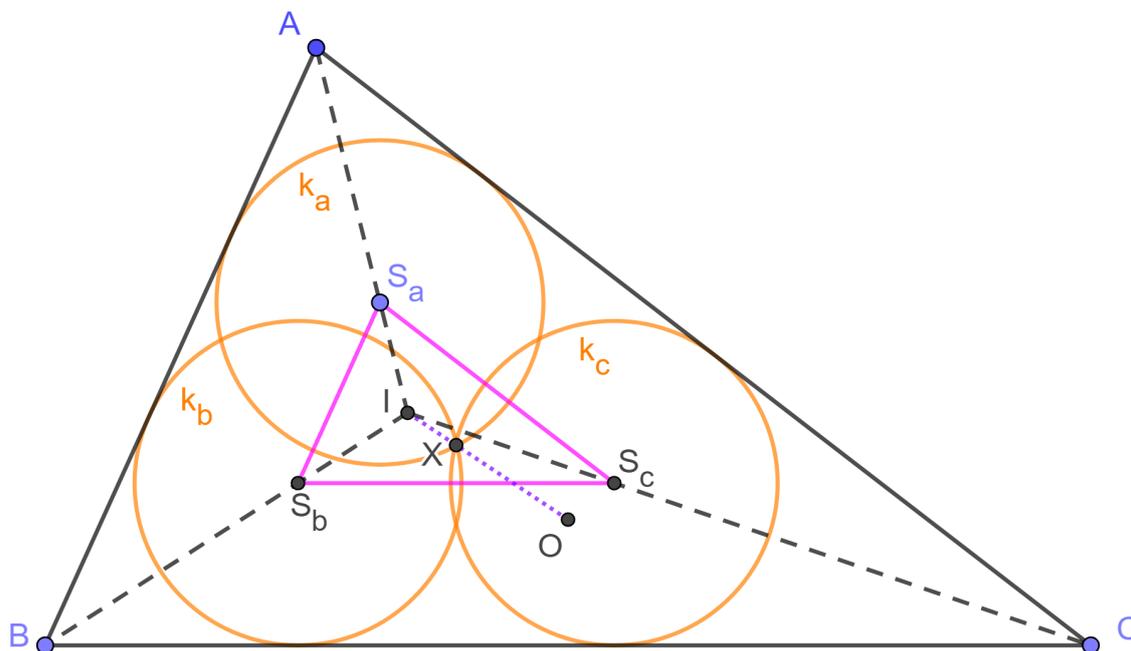
Como  $k_a$  e  $k_b$  são tangentes com  $AB$  e compartilham o mesmo raio, então  $S_a S_b \parallel AB$ . Analogamente,  $S_b S_c \parallel BC$  e  $S_c S_a \parallel CA$ . Pelo critério de semelhança AA, o anterior implica que  $\triangle S_a S_b S_c \sim \triangle ABC$ .

Adicionalmente, o incentro do  $\triangle S_a S_b S_c$  coincide com o incentro  $I$  do  $\triangle ABC$ . Portanto, existe uma homotetia  $\mathbb{H}$ , centrada em  $I$ , que transforma o  $\triangle S_a S_b S_c$  no  $\triangle ABC$ .

Por hipótese,  $X$  é o ponto comum de  $k_a$ ,  $k_b$  e  $k_c$  (circunferências de igual raio). Logo,  $X$  equidista de  $S_a$ ,  $S_b$  e  $S_c$ . Isto é,  $X$  é o circuncentro do  $\triangle S_a S_b S_c$ .

Conclui-se que a mesma homotetia  $\mathbb{H}$  também transforma o circuncentro  $X$  do  $\triangle S_a S_b S_c$  no circuncentro  $O$  do  $\triangle ABC$ . Ou seja,  $I$ ,  $X$  e  $O$  são colineares.

Figura 5.14: Uma construção geométrica do Problema 12. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

## 5.7 Teorema da Bissetriz. Triângulo Pedal. Lei dos Senos. Inversão. P2 IMO 1996.

**Problema 13.** *Seja  $P$  um ponto no interior do  $\triangle ABC$  tal que:*

$$\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B. \tag{5.7.1}$$

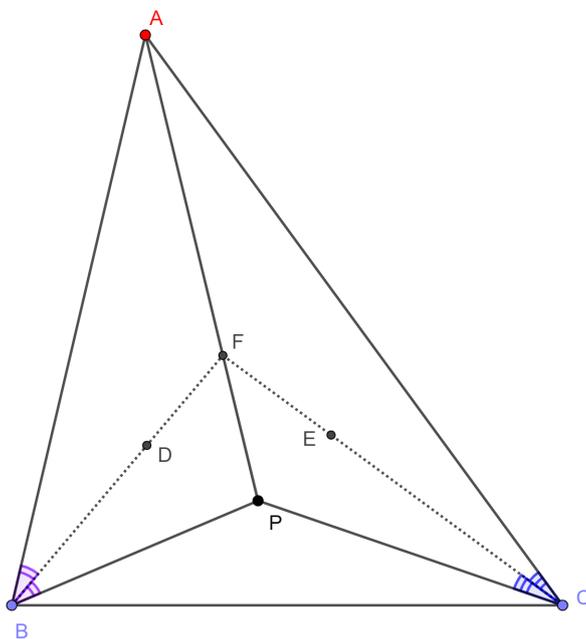
*Sejam  $D$  e  $E$  os incentros dos  $\triangle APB$  e  $\triangle APC$ , respectivamente. Mostrar que  $AP$ ,  $BD$  e  $CE$  são concorrentes.*

A IMO 1996 foi realizada na cidade de Mumbai, Índia. Problema 11 da lista curta e escolhido como P2 da competição, proposto pela delegação do Canadá [4].

### 5.7.1 Primeira resolução do Problema 13.

A Figura 5.15 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 5.15: Construção geométrica inicial para o Problema 13. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja  $F = BD \cap CE$ . Quer-se mostrar que  $F \in AP$ . Como  $BD$  e  $CE$  são bissetrizes, pois  $D$  e  $E$  são incentros, pela forma recíproca do Teorema da Bissetriz, bastará provar que:

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AF}{FP} = \frac{AC}{CP}. \tag{5.7.2}$$

Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  os pés das projeções ortogonais do ponto  $P$  nos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente (Figura 5.16). Os quadriláteros  $AZPY$ ,  $BZPX$  e  $CXPY$  são cíclicos, pois a soma de um par de ângulos opostos é  $180^\circ$ .

No quadrilátero  $CXPY$  tem-se que:

$$\angle XPY = 180^\circ - \angle C. \tag{5.7.3}$$

Pelo ângulo raso em  $Z$  vale que:

$$\angle XZY = 180^\circ - \angle XZB - \angle YZA. \tag{5.7.4}$$

Utilizando agora que  $BZPX$  e  $AZPY$  são inscritíveis e (5.7.4) segue:

$$\angle XZY = 180^\circ - \angle XPB - \angle YPA. \tag{5.7.5}$$

De (5.7.3) e considerando a soma dos ângulos em torno ao ponto  $P$  tem-se:

$$\angle APB = 180^\circ - \angle XPB - \angle YPA + \angle C. \quad (5.7.6)$$

Da comparação entre (5.7.5) e (5.7.6) chega-se a:

$$\angle XZY = \angle APB - \angle C. \quad (5.7.7)$$

Analogamente demonstra-se que:

$$\angle XYZ = \angle APC - \angle B. \quad (5.7.8)$$

De (5.7.1), (5.7.7) e (5.7.8) obtêm-se  $\angle XZY = \angle XYZ$ , o  $\triangle XYZ$  é isósceles e

$$XY = XZ. \quad (5.7.9)$$

Adicionalmente,  $BP$  e  $CP$  são diâmetros das circunferências circunscritas a  $BZPX$  e  $CXPY$ , respectivamente. Pela Lei dos Senos aplicada aos  $\triangle XBZ$  e  $\triangle XCY$  obtêm-se:

$$XZ = BP \operatorname{sen}(\angle B),$$

$$XY = CP \operatorname{sen}(\angle C).$$

De (5.7.9) e as duas equações anteriores segue:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{\operatorname{sen}(\angle C)}{\operatorname{sen}(\angle B)}. \quad (5.7.10)$$

Utilizando mais uma vez a Lei dos Senos, agora no  $\triangle ABC$ , encontra-se:

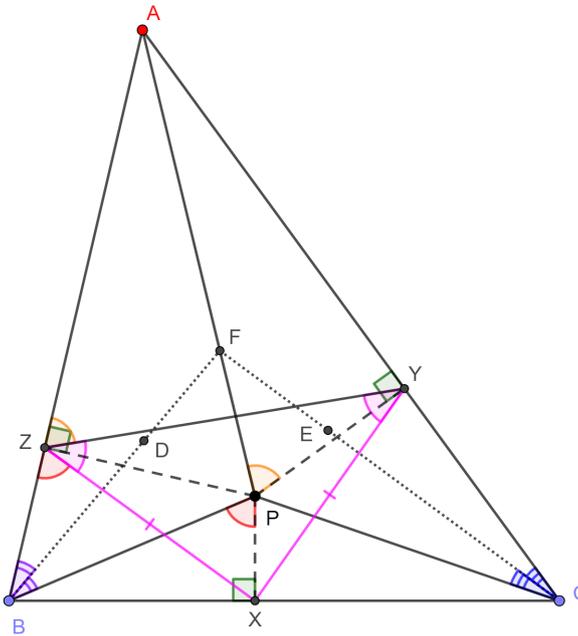
$$\frac{\operatorname{sen}(\angle C)}{\operatorname{sen}(\angle B)} = \frac{AB}{AC}. \quad (5.7.11)$$

Logo, juntando (5.7.10) e (5.7.11) conclui-se:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC}.$$

A equação anterior é a parte de (5.7.2) que queria-se demonstrar. A Figura 5.16 mostra uma construção geométrica.

Figura 5.16: Construção geométrica para o Problema 13. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

### 5.7.2 Construção e resolução do Problema 13 por inversão.

A localização do ponto  $P$  foi feita partindo de uma construção mais simples no espaço inverso. Seja  $i$  uma circunferência de inversão de centro em  $A$  e raio arbitrário  $r$ . Sejam  $B' = Inv(B, i)$ ,  $C' = Inv(C, i)$  e  $P = Inv(P', i)$ .

Constrói-se a reta mediatriz  $m$  dos pontos  $B'$  e  $C'$  e posiciona-se  $P' \in m$ , de tal forma que  $P$  esteja no interior do  $\triangle ABC$ . Ter-se-á que  $B'P' = C'P'$ .

Na inversão de dois pontos obtêm-se que:

$$B'P' = \frac{r^2}{AB \cdot AP} PB,$$

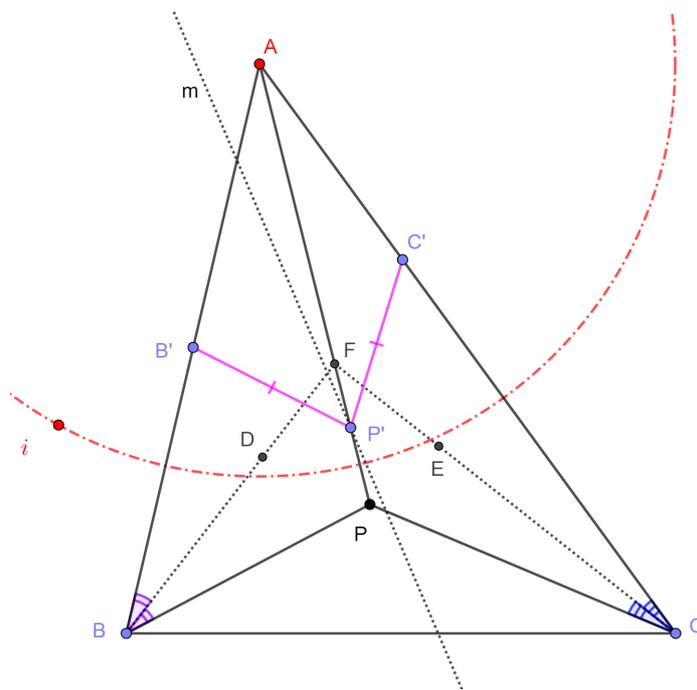
$$C'P' = \frac{r^2}{AC \cdot AP} PC.$$

Logo, dividindo as duas equações anteriores, encontra-se:

$$\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}.$$

Pela forma recíproca do Teorema da Bissetriz o resultado segue. A Figura 5.17 mostra uma construção geométrica utilizando inversão.

Figura 5.17: Construção geométrica utilizando inversão para o Problema 13. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

## Capítulo 6

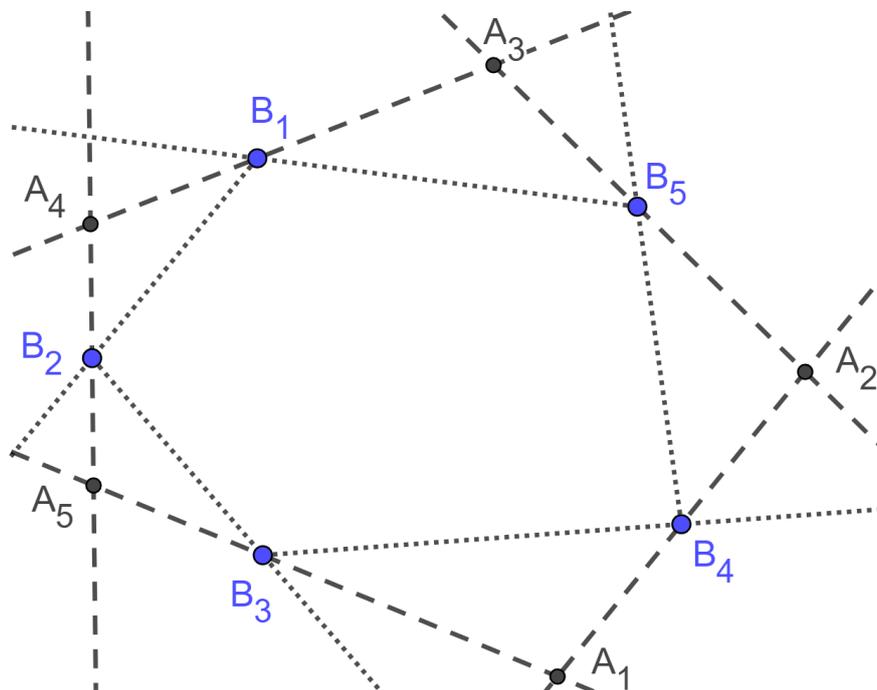
### Problemas propostos

#### 6.1 Pentágono, bissetrizes. P50 LL IMO 1969.

**Problema 14.** *As bissetrizes dos ângulos externos de um pentágono  $B_1B_2B_3B_4B_5$  formam outro pentágono  $A_1A_2A_3A_4A_5$ . Construir  $B_1B_2B_3B_4B_5$  a partir do pentágono fornecido  $A_1A_2A_3A_4A_5$ .*

A IMO 1969 foi realizada na cidade de Bucareste, capital da Romênia. Problema 50 da lista longa, proposto pela delegação dos Países Baixos [4]. A Figura 6.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 6.1: Construção geométrica inicial para o Problema 14. Versão interativa [aqui](#).

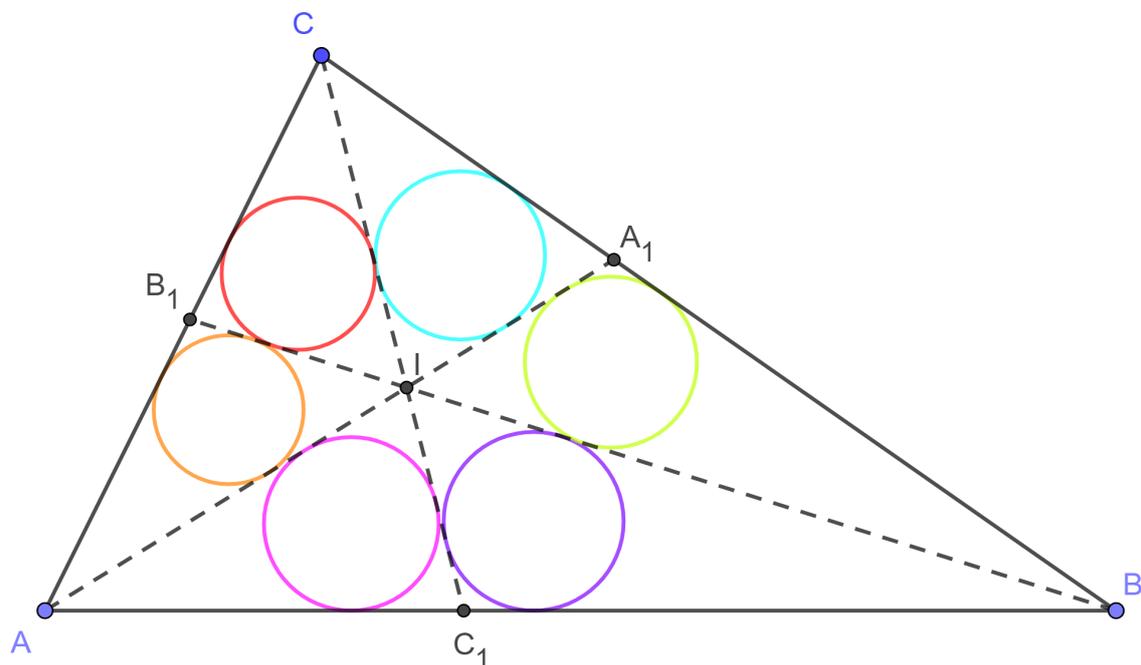


Fonte: O autor.

## 6.2 Bissetrizes, incírculos. P1 SL IMO 1976.

**Problema 15.** *Seja  $ABC$  um triângulo com bissetrizes  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  ( $A_1 \in BC$ ,  $B_1 \in CA$  e  $C_1 \in AB$ ) e  $I$  seu incentro. Consideram-se os triângulos  $IB_1A$ ,  $IC_1A$ ,  $IC_1B$ ,  $IA_1B$ ,  $IA_1C$ ,  $IB_1C$  e seus círculos inscritos. Provar que se quatro destas seis circunferências têm raios iguais, então  $AB = BC = CA$ .*

A IMO 1976 foi realizada na cidade de Viena, capital da Áustria. Problema 1 da lista curta, proposto pela delegação da Bulgária [4]. A Figura 6.2 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 6.2: Construção geométrica inicial para o Problema 15. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

# Capítulo 7

## Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**, 11 edição, Coleção Professor de Matemática, SBM, Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. (Página 15)
- [2] DA CRUZ, MARCOS PAULO MESQUITA AND DE OLIVEIRA HOLANDA FILHO, IVAN, **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, Variação de Soluções na Geometria com a Utilização do GeoGebra, 2019, n.2, p.78-101, vol.8. (Página 15)
- [3] DELGADO, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Página 15)
- [4] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009**. New York: Springer, 2011. (Página 84, 87, 90, 93, 96, 101, 103, 108, 109)
- [5] DOLCE, O. **Fundamentos de Matemática Elementar Geometria Plana - Vol.9, ATUAL (DIDÁTICO) - GRUPO SARAIVA**, 2013. (Página 15)
- [6] FERREIRA, ROBERTO, **Enciclopédia Biosfera**, Ensinando matemática com o GeoGebra, 2010, n.10, vol.6. (Página 15)
- [7] HOLANDA, B. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2011. (Página 15)
- [8] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: [10.22533/at.ed.24221310814](https://doi.org/10.22533/at.ed.24221310814). Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)

- [9] LÓPEZ LINARES, J. **Áreas: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Publicado: março 6, 2024. 93 p. ISBN 978-65-87023-40-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023403>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [10] LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023311>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [11] LÓPEZ LINARES, J. Bissetrizes: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Revista de Matemática da UFOP - RMAT**, v. 2, n.1, pp: 01-26, 28 jul. 2024. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://doi.org/10.5281/zenodo.13119227>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [12] LÓPEZ LINARES, J. Cálculo de áreas: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Revista de Matemática da UFOP - RMAT**, v. 1, n.1, pp: 01-21, 27 fev. 2024. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://doi.org/10.5281/zenodo.10806293>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [13] LÓPEZ LINARES, J. Circuncentro e Ortocentro: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Revista de Matemática da UFOP - RMAT**, v. 1, n.1, pp: 01-18, 3 mai. 2024. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11111106>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [14] LÓPEZ LINARES, J. **Circuncentro e ortocentro : teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2024. 68 p. ISBN 978-65-87023-41-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023410>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [15] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [16] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [17] LÓPEZ LINARES, J. **Ex-incentros: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de

---

LÓPEZ LINARES, J. **Teoremas de Tales, da bissetriz e Apolônio: teoria, construções e problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2024. 120 p. ISBN 978-65-87023-43-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023434>.

Alimentos, 2023. 80 p. ISBN 978-65-87023-32-8 (e-book). Disponível em:  
<https://doi.org/10.11606/9786587023328>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)

- [18] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [19] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [20] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [21] LÓPEZ LINARES, J. Jogos com a desigualdade triangular. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 3, p. 73-94, dez. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n32022073094. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [22] LÓPEZ LINARES, J. **Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e desigualdades**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 85 p. ISBN 978-65-87023-28-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023281>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [23] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática**. 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. DOI:10.13140/RG.2.2.30312.70406. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)

---

LÓPEZ LINARES, J. **Teoremas de Tales, da bissetriz e Apolônio: teoria, construções e problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2024. 120 p. ISBN 978-65-87023-43-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023434>.

- [24] LÓPEZ LINARES, J. **Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 57 p. ISBN 978-65-87023-26-7 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023267>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [25] LÓPEZ LINARES, J. Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 1, p. 27-47, jul. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n12022027047. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [26] LÓPEZ LINARES, J. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023250>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [27] LÓPEZ LINARES, J. **Treinamento de Professores e Estudantes do Ensino Fundamental e Médio com Problemas de Olimpíadas de Matemática**. 155 f. Tese (Livre-docência) Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, 2022. DOI: 10.11606/t.74.2022.tde-28112022-091705. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/livredocencia/74/tde-28112022-091705/pt-br.php>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [28] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdv19202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [29] LÓPEZ LINARES, J. **Potência de ponto relativo a uma circunferência: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 64 p. ISBN 978-65-87023-30-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023304>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [30] LÓPEZ LINARES, J. Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis: cinco problemas resolvidos propostos para olimpíadas internacionais de matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 23, n. 1, p. 317-334, jul. 2023. DOI:

---

LÓPEZ LINARES, J. **Teoremas de Tales, da bissetriz e Apolônio: teoria, construções e problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2024. 120 p. ISBN 978-65-87023-43-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023434>.

10.21167/cqdv23n12023317334. ISSN 2316-9664. Disponível em:

<https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/373/382>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)

- [31] LÓPEZ LINARES, J. **Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicêntricos: problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 72 p. ISBN 978-65-87023-34-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023342>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [32] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [33] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A. Trigonometria: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:14-36, jun. 2023. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6799/5334>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [34] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A. **Trigonometria: dos conceitos básicos até problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 83 p. ISBN 978-65-87023-35-9 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023359>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [35] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [36] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Congruências numéricas: cinco problemas resolvidos propostos para olimpíadas internacionais de matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 23, n. 2, p. 01-15, 20 dez. 2023. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://doi.org/10.21167/cqdv23n22023001015>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [37] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista**

---

LÓPEZ LINARES, J. **Teoremas de Tales, da bissetriz e Apolônio: teoria, construções e problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2024. 120 p. ISBN 978-65-87023-43-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023434>.

- Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdvoll8202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [38] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [39] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvoll7ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [40] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [41] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22–40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdvoll20202123169664jlljpmsafj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [42] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdvoll21202123169664jlljpmsafj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)

- [43] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023212>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [44] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [45] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra - v. 3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 91 p. ISBN 978-65-87023-24-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [46] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [47] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [48] MENEGALLI, RUAN SIEWERT AND BRANDL, Eduardo, **Anais da Feira do Conhecimento do IFC Campus Ibirama, GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO**, 2022, n.1, vol. 3. (Página 15)
- [49] MOON, T. A. The Apollonian Circles and Isodynamic Points. **Mathematical Reflections** 6, p. 1, 2010. (Página 57)
- [50] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção ProfMat). (Página 15)

- [51] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Página 15)
- [52] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Apollonius of Perga**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2015. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Apollonius/>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 46)
- [53] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Blaise Pascal**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1996. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pascal/>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 32)
- [54] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Charles Julien Brianchon**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2000. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brianchon/>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 39)
- [55] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Girard Desargues**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2020. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Desargues/>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 27)
- [56] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Menelaus of Alexandria**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Menelaus/>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 24)
- [57] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Philippe de La Hire**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2008. Disponível em: [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/La\\_Hire/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/La_Hire/). Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 37)
- [58] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2006. Disponível em:

- <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brocard/>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 42)
- [59] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Thales of Miletus**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Thales/>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 16)
- [60] PEREIRA, AMANDA CORREIA TEIXEIRA and DA SILVA, MARIA JOSÉ FERREIRA, **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, Um levantamento das pesquisas que tratam a bissetriz como lugar geométrico, 2020, n.1, vol.9. (Página 15)
- [61] PEREIRA, THALES DE LÉLIS MARTINS, **Juiz de Fora: UFJF**, O uso do software Geogebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio, 2012. (Página 15)
- [62] PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Página 15)
- [63] SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [64] SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J.; RAMALHO DE FREITAS, M.P.O. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol.3, N.1, Jan-Jun 2022, pp. 70-87. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [65] SANTOS, J. P. M.; MARCUS VINÍCIUS DE ARAÚJO LIMA; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J. Minimização da soma de quadrados de distâncias aos vértices em polígonos convexos, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol. 3, N. 2, Jul - Dez 2022, pp. 66 – 82. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i2.11309>. Acesso em: 01 ago. 2024. (Página 15)
- [66] SILVA, FÁBIO BERNARDO DA, **Conceitos de geometria plana com Software GeoGebra: um estudo de caso no ensino médio**, 2018. (Página 15)

- [67] THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria-Nível 2, 2006. (Página 15)

