

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

COMPLEMENTOS DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

- Tensões e deformações
- Teoria da elasticidade
- Método da energia
- Método das diferenças finitas
- Método plástico

2ª Edição

JOSÉ ELIAS LAIER
JOÃO CARLOS BARREIRO
WALTER SAVASSI

São Carlos, abril de 2024

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Reitor – Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior Vice-Reitora –
Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
Diretor - Fernando Martini Catalano
Vice-diretor – Antônio Néelson Rodrigues da Silva



Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citado a fonte e autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP

L185a Laier, José Elias
Complementos de resistência dos materiais / José Elias
Laier; João Carlos Barreiro; Walter Savassi.-- São Carlos :
EESC/USP, 2024.

[190]p.
ISBN 978-65-86954-42-5
DOI 10.11606/9786586954425

1. Estados de tensão e deformação. 2. Teoria da elasticidade. 3. Método da energia. 4. Método das diferenças finitas. 5. Método plástico. I. Barreiro, João Carlos. II. Walter Savassi. III. Título.

PREFÁCIO

Primeira Edição

O presente texto vem dar continuidade nas publicações referentes às disciplinas de Resistência dos Materiais ministradas na Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo. Constitui pretensão dos autores manter, em boa parte, os assuntos aqui abordados conforme os preceitos da escola posta em prática pelo nosso grande mestre Prof. Dr. Frederico Schiel, autor dos primeiros textos dos cursos básicos.

A primeira parte da exposição é constituída de dois capítulos, apresentando em sequência o estudo das tensões e deformações e uma introdução à Teoria da Elasticidade. A segunda parte é composta de três capítulos, sendo os dois primeiros dedicados ao estudo introdutório dos clássicos métodos de integração numérica; começando-se pelo método da energia, ou de Ritz-Rayleigh, e completando-se com o pioneiro método das diferenças finitas na sua versão formulada mediante operadores denominados centrais. O último capítulo é voltado para o estudo elementar do chamado método plástico, ou método das rótulas plásticas, de análise de estruturas aporticadas.

Tendo-se em vista a pretensão colocada de início, os assuntos são tratados conforme o grau de dificuldade, partindo-se de casos mais simples, para, no final, apresentar os casos mais gerais, de natureza mais complicada.

Os autores expressam aqui os seus agradecimentos aos Srs. Rui Roberto Casale, Antonio Valdair Carneiro e aos Srs. João Paulo Moretti e Francisco Carlos Guete de Brito pelo zeloso trabalho de datilografia e desenho, respectivamente.

A versão, de 2012, contou com a colaboração do Prof. Walter Savassi na revisão geral do texto, correções, e em esparsos aprimoramentos conceituais decorrentes de sua vivência ao ministrar esses assuntos, desde 2001, na disciplina Complementos de Resistência dos Materiais e, desde 1975, quando introduziu a disciplina Introdução ao Método dos Elementos Finitos na EESC.

José Elias Laier

João Carlos Barreiro

São Carlos, agosto de 1982

PREFÁCIO

Segunda Edição

Nesta segunda edição foram adicionados vários assuntos complementares nos capítulos à exceção do Capítulo III que trata do Método da Energia, uma vez que esse método é muito bem explorado nos textos sobre o Método dos Elementos Finitos hoje em dia muito divulgado no meio da engenharia de estruturas, contemplando desde versões para iniciantes até textos bem completos.

No Capítulo I, que aborda o tensor das tensões e das deformações, foi inicialmente trabalhado a questão da ortogonalidade dos autovetores (direções principais) de modo mais expedito, bem como fato de serem sempre reais os autovalores (tensões principais). Além disso, a representação gráfica dos tensores em questão dadas pelo círculo do Mohr foi incluída, não só para esclarecer o caráter extremo das componentes principais, mas pelo fato de que a representação gráfica dos tensores constituir uma ferramenta que permite entender melhor tais grandezas (uma imagem vale mais que mil palavras, diz o dito popular). Uma discussão mais detalhada da Lei de Hooke com pequenas incursões na descrição do tensor de quarta ordem das constantes da Lei de Hooke, bem como uma abordagem mais geral no caso do material isótropo, e finalizando-se discorre-se sobre a energia de deformação bem como apresenta-se um breve esboço da formulação matemática dos tensores cartesianos.

No Capítulo II, que expõe uma introdução à Teoria da Elasticidade, foi acrescentado apenas uma rápida observação sobre o caráter vetorial da equação de equilíbrio expressa em termos de derivadas do tensor das tensões que, em princípio, constitui um tensor de terceira ordem.

No Capítulo IV o Método da Diferenças Finitas é agora formulado com base no desenvolvimento da série de Taylor, procedimento que deixa explícito o grau de convergência dos operadores de diferenças finitas lagrangeanos objeto de maior atenção, além de ser apropriado para a formulação de operadores mais gerais, como os operadores de diferenças finitas hermitianos.

No Capítulo V foi apenas acrescentado o estudo ilustrativo do comportamento plástico para o caso de cargas repetidas e também alternada indicando de modo rudimentar a questão da acomodação plástica e do chamado colapso incremental. Como tais assuntos dependem sobremaneira do comportamento elástico, a simplicidade da aplicação do Método Plástico deixa de existir tornando muito complexa uma formulação mais geral.

Por fim, os autores agradecem aos prestimosos serviços de figuras bem trabalhadas pelo desenhista Francisco Carlos Guete de Brito

José Elias Laier

João Carlos Barreiro

Walter Savassi

ÍNDICE

1- TENSÃO E DEFORMAÇÃO

1.1 – INTRODUÇÃO... 1

1.2 – TENSÃO... 2

1.3 - ESTADO DE TENSÃO... 3

1.4 – ESTADO PLANO DE TENSÃO... 5

1.4.1 – Transformação de Coordenadas... 5

1.5 – ESTADO TRIDIMENSIONAL DE TENSÃO... 10

1.5.1 – Transformação de Coordenadas... 10

1.6 – ESTADOS DE DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO... 17

1.7 – RELAÇÕES ENTRE O ESTADO DE DESLOCAMENTO E ESTADO DE DEFORMAÇÃO – CASO PLANO... 18

1.7.1 – Transformação de Coordenadas... 21

1.8 – RELAÇÕES ENTRE O ESTADO DE DESLOCAMENTO E O ESTADO DE DEFORMAÇÃO – CASO TRIDIMENSIONAL... 24

1.8.1 – Transformação de Coordenadas... 26

1.9 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA – CÍRCULO DE MOHR... 27

1.10- RELAÇÃO ENTRE AS COMPONENTES DO ESTADO DE TENSÃO E AS DO ESTADO DE DEFORMAÇÃO – LEI DE HOOKE... 31

1.11 – EXEMPLOS DE APLICAÇÃO... 36

1.11.1 – Primeiro Exemplo de Aplicação... 37

1.11.2 – Segundo Exemplo de Aplicação... 39

2- ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

2.1 – INTRODUÇÃO... 48

2.2 – COLOCAÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL... 49

2.3 – RELAÇÕES BÁSICAS DA ELASTICIDADE PLANA... 50

2.3.1 – Equação de Equilíbrio... 51

2.3.2 – Equação de Compatibilidade... 53

2.4 – ESTADO PLANO DE TENSÃO...	54
2.5 – ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO...	55
2.6 – FUNÇÃO DE AIRY (FUNÇÃO DE TENSÃO)...	55
2.7 – FUNÇÕES DE AIRY POLINOMIAIS...	57
2.7.1 – Casos Elementares...	58
2.7.2 – Viga em Balanço...	63
2.7.3 – Viga Simplesmente Apoiada...	67
2.8 – TORÇÃO LIVRE...	68
2.8.1 – Equação de Equilíbrio Interno...	72
2.8.2 – Equação de Equilíbrio Externo...	74
2.8.3 – Função de Tensão da Torção...	75
2.8.4 – Primeiro Exemplo de Aplicação...	78
2.8.5 – Analogia de Membrana...	81
2.8.6 – Segundo Exemplo de Aplicação...	85

3- MÉTODO DA ENERGIA

3.1 – INTRODUÇÃO...	88
3.2 - CONCEITOS FUNDAMENTAIS...	88
3.3 – PRIMEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	90
3.4 – SEGUNDO EXEMPLO DE APLICAÇÃO....	96
3.5 – TERCEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	100
3.6 – QUARTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	106
3.7 – QUINTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	110
3.8 – SEXTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	111
3.9 – SÉTIMO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	112
3.10 – OITAVO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	115
3.11 – COMENTÁRIOS FINAIS...	118

4- MÉTODO DA DIFERENÇAS FINITAS

4.1 – INTRODUÇÃO...	119
4.2 – SÉRIE DE TAYLOR E ORDEM DO ERRO...	121
4.3 – PRIMEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	124
4.4 – SEGUNDO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	127
4.5 – TERCEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	131
4.6 – QUARTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	134

4.7 – QUINTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	138
4.8 – OPERADORES DE ORDEM h^2 PARA DERIVADAS PARCIAIS...	140
4.9 – SEXTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	142
4.10 – SÉTIMO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	146
4.11 – COMENTÁRIOS FINAIS...	153

5- MÉTODO PLÁSTICO

5.1 – INTRODUÇÃO...	155
5.2 – MOMENTO D3E PLASTIFICAÇÃO...	157
5.3 – ANÁLISE PLASTICA DE UM CASO SIMPLES...	161
5.4 – PRIMEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	164
5.5 – SEGUNDO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	166
5.6 – TERCEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	169
5.7 – QUARTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	171
5.8 – QUINTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	172
5.9 – SEXTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	173
5.10 – SÉTIMO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	174
5.11 – OITAVO EXEMPLO DE APLICAÇÃO...	177
5.12 – CARREGAMENTO REPETIDO E ALTERNADO...	179

1 - TENSÃO E DEFORMAÇÃO

1.1 – INTRODUÇÃO

O estudo das tensões e deformações é, no presente texto, apresentado por meio de formulação matricial, a qual constitui um procedimento típico da análise tensorial dos tensores de segunda ordem. Outra maneira mais requintada, porém, pouco comum no nosso meio técnico, consiste na formulação indicial, a qual apresenta a propriedade de se aplicar aos tensores de qualquer ordem, sem contar a chamada notação simbólica, mais sintética, mas que necessita ser sempre explicitada por não ser de uso muito uniforme. A exposição dos assuntos atém-se apenas ao lado mais prático da questão, e, por essa razão, negligenciam-se pormenores da Teoria Matemática dos Tensores. Contudo, no que interessa, tais omissões não prejudicam a compreensão, principalmente, no que respeita aos alunos de cursos de graduação em Engenharia.

O tratamento das tensões isolado do das deformações é proposital, e tem em vista deixar evidente o caráter tensorial dessas grandezas, independentemente da relação existente entre elas, expressa pela clássica lei de HOOKE no domínio da teoria linear (pequenas deformações e pequenos deslocamentos cujas definições serão oportunamente discutidas). A lei de HOOKE permite obter as deformações como causa das tensões, e vice-versa, e com isso o caráter tensorial de segunda ordem de uma grandeza é, por assim dizer, transferido para a outra.

A clássica lei de HOOKE, último assunto deste capítulo, é também colocada segundo a formulação matricial. Sem tecer maiores considerações, são discutidas algumas implicações da lei de HOOKE no que diz respeito aos parâmetros do comportamento elástico linear dos materiais usuais.

1.2 - TENSÃO

O conceito de tensão vem a ser uma extensão do conceito elementar de pressão, como, por exemplo, a hidrostática, que consiste numa força normal por unidade de área. Por tensão entende-se uma extensão dessa ideia para os casos onde a força por unidade de área pode não ser normal ao plano daquela área. Como ilustração do conceito de tensão, considere-se um corpo sólido, em equilíbrio, sujeito a certo número de ações externas, conforme se exhibe na Figura 1.1 a). Pois bem, isolando-se uma parte desse sólido, conforme ilustra-se na Figura 1.1 b), sabe-se que o equilíbrio dela é garantido pelo princípio da ação e reação, por tratar-se de uma parte de um sólido em equilíbrio. De uma maneira geral, pode-se dizer que uma área ΔS é responsável por uma parcela ΔF daquelas forças transmitidas (ação ou reação). Na figura 1.1 c) a parcela ΔF é representada pelas suas componentes segundo os eixos coordenados O_{xyz} , com origem no "centro" da área elementar ΔS , sendo o eixo O_z normal à área ΔS no ponto O . Dividindo-se as componentes da força pela área ΔS definem-se as seguintes grandezas:

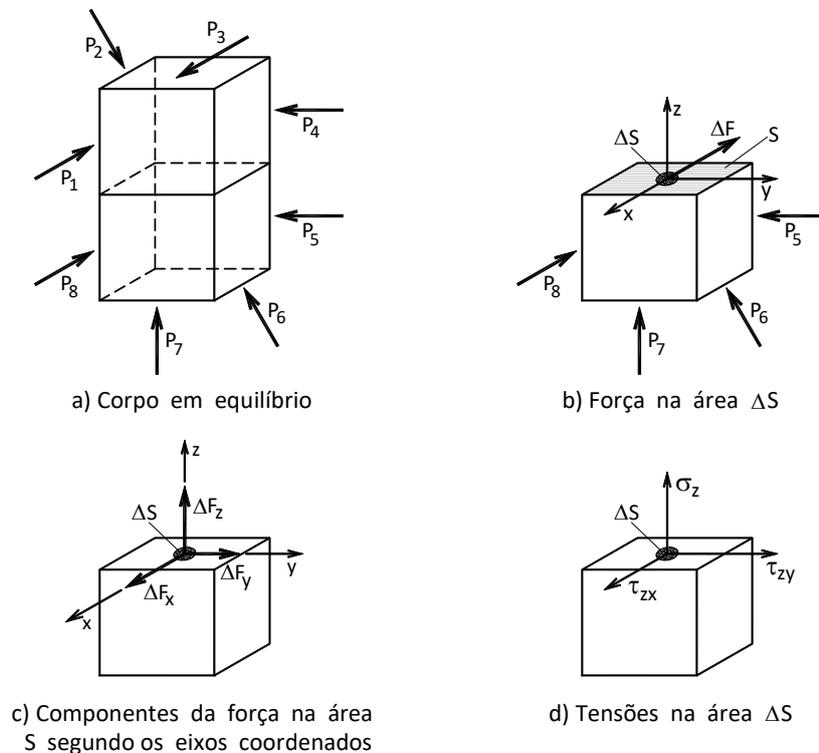


FIGURA 1.1 – Conceito de tensão

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta S} \\
 \tau_{zx} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta S} \\
 \tau_{zy} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta S}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Convém notar que as definições expressas em (1.1) são colocadas na forma de um processo limite, e essa colocação parte da suposição da existência de continuidade. A grandeza σ_z é dita tensão normal (o mesmo que pressão) e as grandezas τ_{zx} e τ_{zy} são ditas tensões cisalhantes ou tangenciais. Cabe ainda assinalar que a força ΔF pode, naturalmente, variar de direção e de sentido dependendo do tamanho da área ΔS ; entretanto, na passagem ao limite tais características ficam definidas no ponto em consideração (continuidade).

1.3 - ESTADO DE TENSÃO

Na Figura 1.2 mostra-se um elemento infinitesimal de volume $dx dy dz$, onde se indicam as tensões atuantes nas faces. De início, cabe assinalar que nas faces opostas as tensões são iguais e de sentidos opostos, em face da continuidade, juntamente com o princípio da ação e reação. Como ilustrado na Figura 1.2 na face de cota y as componentes de tensão σ_y , τ_{yx} e τ_{yz} no limite com dy tendendo para zero ficam iguais as da face localizada dy adiante. Em verdade, tudo se passa como se uma das faces estivesse numa das partes do sólido indicado na Figura 1.1a e a outra face na outra parte (ação e reação); a face de uma parte na posição y e como indicado na Figura 1.2 e essa mesma face logo adiante na posição $y + dy$ (continuidade). Além disso, com a passagem ao limite, ou seja, dx , dy e dz tendendo para zero, pode-se também considerar que as tensões atuantes são uniformes nas faces, visto que eventuais variações são infinitésimas de ordem superior. Posto isso, percebe-se, facilmente, que o estado de tensão fica caracterizado, no ponto, por nove parâmetros, ou componentes, ou seja: $\sigma_x, \sigma_x', \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$ e τ_{zy} .

As tensões como indicadas na Figura 1.2 são consideradas positivas. A convenção é muito simples. A tensão normal de tração é considerada positiva, e a tensão de cisalhamento tem o sinal dado de acordo com a seguinte regra mnemônica: se, na face em que atua, a tensão normal de tração tem o sentido do eixo coordenado correspondente, a tensão cisalhante positiva tem o sentido do seu correspondente eixo; do contrário o sinal da componente de tensão cisalhante é negativo se também contrária. Em outras palavras, o sentido positivo é dado pelo

sentido do sistema de referência dextrorso levado na face correspondente, fazendo coincidir o sentido de um dos eixos com o da tensão normal de tração.

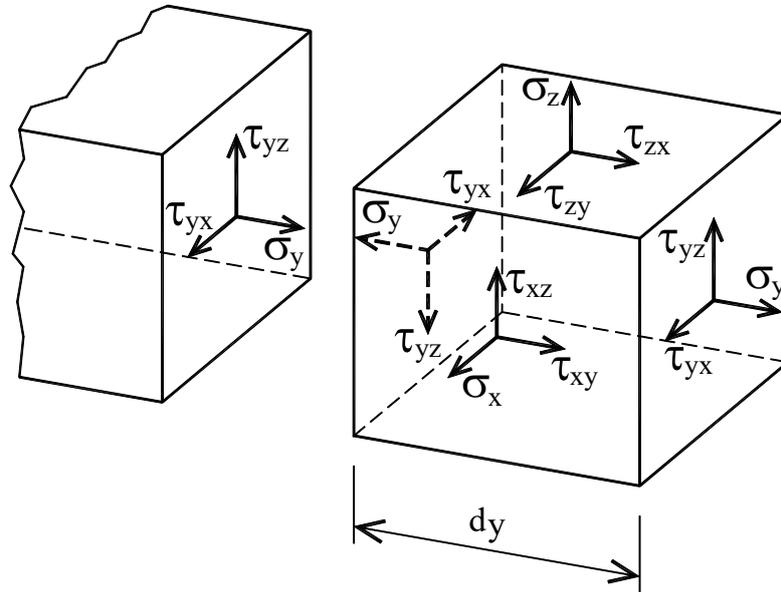


FIGURA 1.2 – Componentes de tensão

O número de parâmetros ou componentes necessários para caracterizar o estado de tensão num ponto pode ser reduzido de nove para seis, porquanto o equilíbrio de momento segundo os eixos coordenados permite estabelecer três relações entre as seis componentes cisalhantes, ou seja, o equilíbrio do momento segundo os eixos Oz , Ox e Oy respectivamente, permite exprimir-se:

$$\begin{aligned} (\tau_{xy} dy dz) dx - (\tau_{yx} dx dz) dy &= 0 \\ (\tau_{yz} dz dx) dy - (\tau_{zy} dy dx) dz &= 0 \\ (\tau_{zx} dx dy) dx - (\tau_{xz} dy dz) dx &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

ou, ainda, cancelando os termos comuns:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ressaltando-se que essa igualdade entre tensões de cisalhamento atuantes em planos perpendiculares, expressa nas equações (1.3), constitui a afirmativa do clássico teorema de CAUCHY. É oportuno assinalar também que a consideração

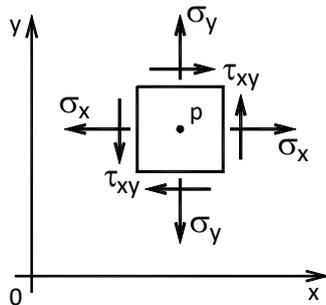
de eventuais forças volumétricas não altera o resultado expresso em (1.3), pois eventuais contribuições são infinitésimos de ordem superior.

1.4 - ESTADO PLANO DE TENSÃO

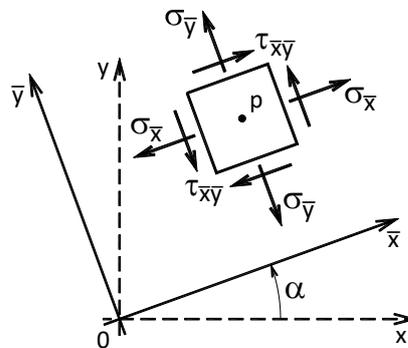
Um estado de tensão é considerado plano quando numa das faces do volume elementar $dx dy dz$ as componentes de tensão correspondentes são nulas; por via de consequência o mesmo acontece na face oposta. No que se segue, as componentes de tensão não nulas são tomadas como sendo σ_x, σ_y e τ_{xy} .

1.4.1 - Transformações de Coordenadas

Admitindo-se que o estado de tensão num determinado ponto P de um corpo sólido apresenta componentes σ_x, σ_y e τ_{xy} , segundo o sistema de referência Oxy é de grande interesse saber as relações existentes entre essas componentes e aquelas referidas a outro sistema de referência $O\bar{x}\bar{y}$ ou seja, $\sigma_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{y}}$ e $\tau_{\bar{x}\bar{y}}$, conforme se ilustra na Figura 1.3 b). Vale dizer-se que $\sigma_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{y}}$ e $\tau_{\bar{x}\bar{y}}$ são componentes do mesmo estado de tensão dado pelas componentes σ_x, σ_y e τ_{xy} , sendo que a única diferença diz respeito ao sistema de referência adotado ser outro.



a) Componentes de tensão segundo eixos coordenados Oxy .



b) Componentes de tensão segundo eixos coordenados $O\bar{x}\bar{y}$.

FIGURA 1.3 – Componentes de um mesmo estado de tensão segundo dois sistemas de coordenadas

Pois bem, as coordenadas x_p e y_p , do ponto P no sistema de referência dextrorso Oxy , estão relacionadas com as coordenadas desse mesmo ponto $x_{\bar{p}}$ e

y_p no sistema de referência dextrorso $O\bar{x}\bar{y}$, por meio da seguinte expressão matricial (vide Figura 1.4 a)):

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_p \\ \bar{y}_p \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

onde

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos \alpha \\ m_1 &= \text{sen} \alpha \\ l_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{sen} \alpha \\ m_2 &= \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.5)$$

sendo l_1 e m_1 os cossenos diretores do eixo $O\bar{x}$ em relação ao sistema de referência Oxy (projeção do versor da direção $O\bar{x}$ nos eixos Ox e Oy respectivamente), l_2 e m_2 os cossenos diretores do eixo $O\bar{y}$. Além disso, o ângulo α é tomado no sentido dextrorso, ou seja, anti-horário (vide Figura 1.4 a)), e também que a inversa da matriz de (1.4) é sua transposta.

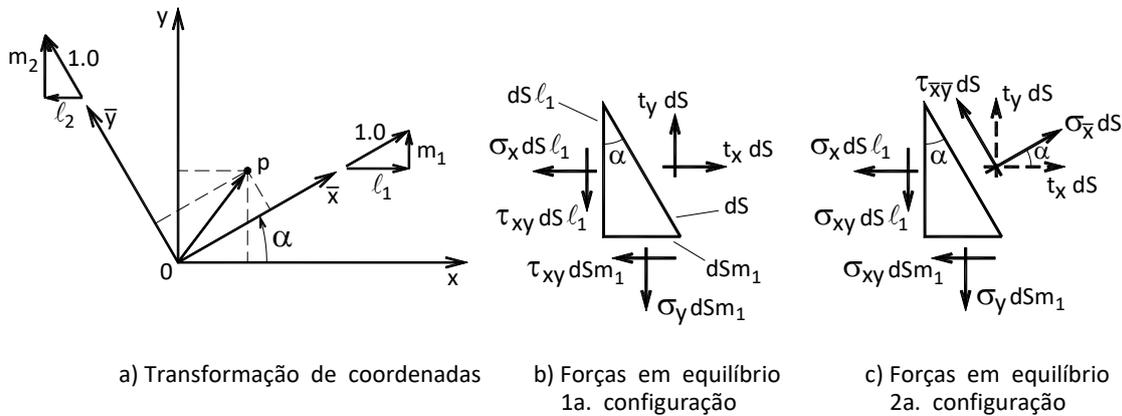


FIGURA 1.4 – Transformações de coordenadas e configurações de equilíbrio

Por seu lado, o equilíbrio do elemento, mostrado na Figura 1.4 b), implica no seguinte relacionamento entre forças:

$$\begin{Bmatrix} t_x dS \\ t_y dS \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 dS \\ m_1 dS \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

onde dS é a área elementar onde atuam as tensões t_x e t_y , cujas resultantes $t_x dS$ e $t_y dS$ são forças segundo, respectivamente, os eixos Ox e Oy . Convém salientar-se que, na expressão (1.6), o diferencial de área pode ser cancelado; todavia tal não se faz de sorte a tornar evidente o fato de que essa equação exprime o equilíbrio de forças.

No sistema de coordenadas $O\bar{x}\bar{y}$, as forças equivalentes a $t_x dS$ e $t_y dS$ são dadas por $\sigma_{\bar{x}} dS$ e $\tau_{\bar{xy}} dS$, conforme ilustra-se na Figura 1.4 c). A exemplo da propriedade expressa em (1.4), tais componentes de força estão relacionadas por:

$$\begin{Bmatrix} t_x dS \\ t_y dS \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{\bar{x}} dS \\ \tau_{\bar{xy}} dS \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

ou seja, a relação (1.7) exprime as transformações de coordenadas, no caso componentes de força, do sistema de referência $O\bar{x}\bar{y}$ para Oxy .

A equação (1.6), tendo em vista (1.7), passa a escrever-se:

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{\bar{x}} dS \\ \tau_{\bar{xy}} dS \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 dS \\ m_1 dS \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

Ou, ainda, eliminando-se os termos comuns dS e pré-multiplicando-se ambos os membros de (1.8) pela matriz transposta dos cossenos diretores, que consiste na matriz inversa, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ \tau_{\bar{xy}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Cabendo-se observar, a propósito, que a inversa da matriz quadrada que contém os cossenos diretores coincide com a própria matriz transposta. Tal fato é facilmente verificado com base nas relações (1.5).

Por outro lado, procedendo-se de modo análogo na procura de $\sigma_{\bar{y}}$ e $\tau_{\bar{xy}}$ encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{\bar{xy}} \\ \sigma_{\bar{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

Reunindo-se, agora, as expressões (1.9) e (1.10) numa só expressão matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\bar{x}} & \tau_{\bar{x}\bar{y}} \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} & \sigma_{\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

e, com isso, tem-se, na expressão (1.11), a lei de transformação de componentes do estado plano de tensão do sistema de referência Oxy para o $O\bar{x}\bar{y}$.

Algumas constatações de grande interesse prático são examinadas no que segue. Em primeiro lugar, é fácil perceber-se que existe um sistema de referência no qual as componentes de tensão tangenciais se anulam. Com efeito, nessa circunstância tem-se, por exemplo, de (1.9) a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

ou seja, (multiplicando à esquerda pela inversa da matriz dos cossenos diretores ambos os membros e arranjando os termos):

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ 0 \end{Bmatrix} = \sigma_{\bar{x}} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

resultando-se no problema de altovalor:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{\bar{x}} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{\bar{x}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

cuja solução, dado que os cossenos diretores não podem ambos ser nulos, implica em:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{\bar{x}} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{\bar{x}} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.15)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}}^2 - \sigma_{\bar{x}}(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 &= 0 \\ \sigma_{\bar{x}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.16)$$

sendo que a primeira de (1.16) é a correspondente equação característica do problema de autovalores (1.14), e a segunda explicita os autovalores que são reais;

e, que, em verdade, são as componentes do estado de tensão no sistema de referência procurado. Esse sistema de referência define as chamadas direções principais do estado de tensão. Com efeito, a nulidade do determinante de (1.14) significa que uma linha da matriz é proporcional à outra, e com isso os autovetores correspondentes podem ser obtidos, adotando-se, por exemplo $m_1 = 1$, resultando:

$$\ell_i = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_i} = -\frac{\sigma_y - \sigma_i}{\tau_{xy}} \quad (1.17)$$

e, com isso os autovetores passam a ser expressos por:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_x} \\ 1 \end{array} \right\} \\ \sigma_2 &\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_x} \\ 1 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (1.18)$$

sendo imediato verificar que as raízes (1.16) implicam que os autovetores (1.18) são ortogonais entre si, e essa ortogonalidade é consistente com o Teorema de Cauchy expresso em (1.3), ou seja, tensão de cisalhamento nula em uma face implica nulidade da tensão de cisalhamento também na face ortogonal.

A teoria das equações algébricas mostra que as raízes de (1.16) estão relacionadas com as componentes do estado de tensão, ou seja:

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_1 \sigma_2 &= \det \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.19)$$

sendo que os termos do lado direito de (1.19) são os autovalores de (1.15), os quais independem do sistema de referência adotado, ou seja, são invariantes, resultando que o segundo membro de (1.19) também o são.

Outra constatação de interesse diz respeito ao fato de que a tensão normal atinge valores extremos nas direções principais, com o máximo valendo σ_1 e o mínimo valendo σ_2 , A representação gráfica do estado de tensão dada pelo clássico círculo de MOHR apresentada mais adiante deixará isso evidente de maneira mais imediata.

1.5 - ESTADO TRIDIMENSIONAL DE TENSÃO

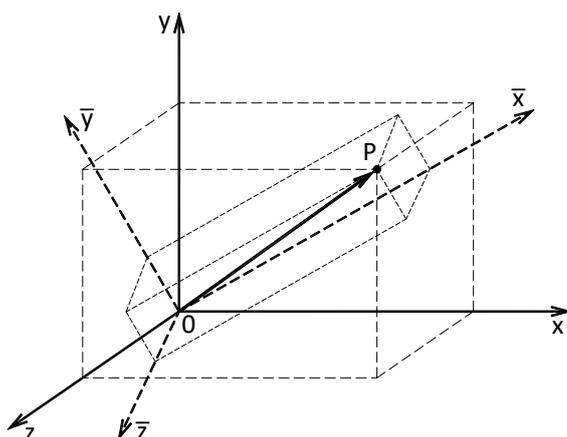
O estado tridimensional de tensão é o caso geral, onde eventualmente algumas das seis componentes podem ser nulas. Seguem-se, aqui, a exemplo do caso anterior, as convenções já estabelecidas no item 1.3 (vide Figura 1.2).

1.5.1 - Transformações de Coordenadas

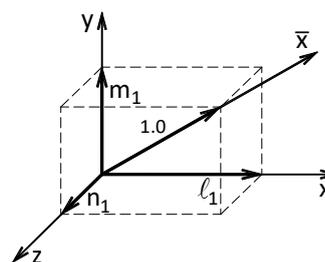
De modo análogo ao que se fez no caso do estado plano de tensão, sendo dado um estado tridimensional de tensão, mediante as componentes segundo um sistema de referência $Oxyz$, procura-se a relação existente entre tais componentes e aquelas, desse mesmo estado de tensão, dadas segundo outro sistema de referência $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

De início tem-se o seguinte. As coordenadas de certo ponto P , onde o estado de tensão é considerado, no sistema de referência $Oxyz$ estão relacionadas com as coordenadas desse mesmo ponto no sistema de referência $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ por meio da seguinte expressão matricial (vide Figura 1.5 a)):

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_p \\ \bar{y}_p \\ \bar{z}_p \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$



a) Coordenadas de um ponto em dois sistemas de referência



b) Cossenos diretores do eixo $O\bar{x}$

FIGURA 1.5 – Transformações de coordenadas

onde $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2$ e n_3 são os cossenos diretores dos eixos $O\bar{x}, O\bar{y}$ e $O\bar{z}$, correspondentemente, segundo o sistema de referência $Oxyz$ (vide Figura 1.5b)). A expressão matricial (1. 20) é facilmente entendida pensando-se no vetor que define a posição do ponto P tomado segundo suas componentes nos eixo $O\bar{x}, O\bar{y}$, e $O\bar{z}$ (\bar{x}, \bar{y} e \bar{z}). Desta feita, a componente segundo o eixo Ox por exemplo, pode ser obtida mediante a superposição das projeções, nesse eixo, das componentes segundo os eixos $O\bar{x}, O\bar{y}$ e $O\bar{z}$, que se faz somando-se a correspondentes multiplicações pelos cossenos diretores l_i .

A matriz que contém os cossenos diretores presente na expressão (1.20) possui uma característica interessante, pois a sua transposta é a própria inversa. Essa propriedade é facilmente verificada, porque o produto daquela matriz pela sua transposta resulta, na posição diagonal, no produto escalar de um versor por ele mesmo; e nas demais posições resulta no produto escalar de versores ortogonais, ou seja, unidade na posição diagonal e valores nulos nas demais posições (matriz unidade).

Por outro lado, o equilíbrio da “pirâmide” de sólido mostrada na Figura 1.6a) implica em:

$$\begin{Bmatrix} t_x dS \\ t_y dS \\ t_z dS \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 dS \\ m_1 dS \\ n_1 dS \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

admitindo-se, naturalmente, que a área dS está contida num plano normal ao eixo $O\bar{x}$, sendo $t_x dS, t_y dS$ e $t_z dS$ as componentes, segundo Ox, Oy e Oz , da força elementar que atua em tal área. Nota-se facilmente que as áreas onde atuam as componentes de tensão segundo o sistema de referência $Oxyz$ podem ser obtidas como projeções da área elementar dS sobre os planos Oxy, Oxz e Oyz , resultando, pois, dSn_1, dSm_1 e dSl_1 .

No sistema de referência $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ as componentes da força atuante na área elementar dS são, conforme se mostra na Figura 1.6b), $\sigma_{\bar{x}} dS, \tau_{\bar{x}\bar{y}} dS$ e $\tau_{\bar{x}\bar{z}} dS$, e estão relacionadas com as componentes dessa mesma força $t_x dS, t_y dS$ e $t_z dS$ como em (1.19), ou seja:

$$\begin{Bmatrix} t_x dS \\ t_y dS \\ t_z dS \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{\bar{x}} dS \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} dS \\ \tau_{\bar{x}\bar{z}} dS \end{Bmatrix} \quad (1.22)$$

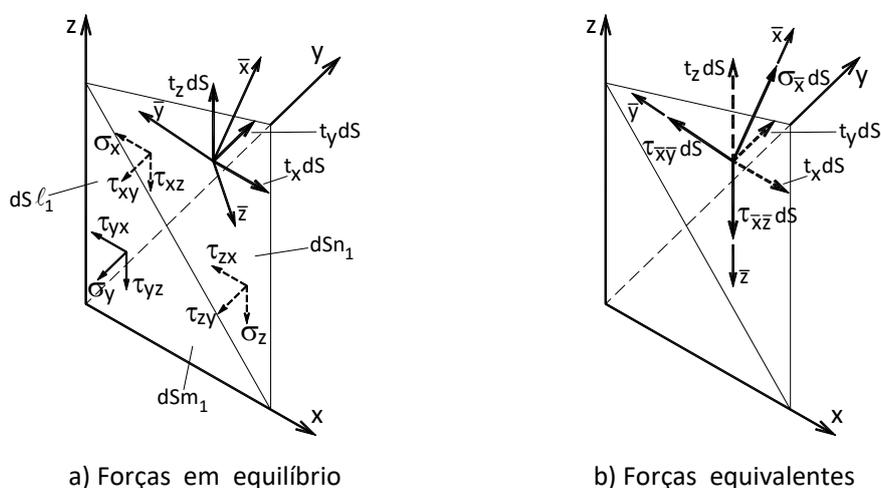


FIGURA 1.6 – Mudanças de coordenadas

As equações (1.21) e (1.22) permitem, finalmente, escrever-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ \tau_{\bar{xy}} \\ \tau_{\bar{xz}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} \quad (1.23)$$

onde o termo dS , comum, foi suprimido. Cabe assinalar que, nas expressões (1.21) e (1.22) o termo dS foi mantido de sorte a deixar evidente o fato de tais equações exprimirem relações entre componentes de forças.

Procedendo-se de maneira análoga na procura das tensões atuantes nos planos normais aos eixos $O\bar{y}$ e $O\bar{z}$ encontram-se expressões similares à (1.23), e, reunindo-se tais expressões numa só expressão matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\bar{x}} & \tau_{\bar{xy}} & \tau_{\bar{xz}} \\ \tau_{\bar{xy}} & \sigma_{\bar{y}} & \tau_{\bar{yz}} \\ \tau_{\bar{xz}} & \tau_{\bar{yz}} & \sigma_{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

que constitui, por assim dizer, a lei de transformação das componentes do estado de tensão tridimensional. Em verdade, trata-se da extensão tridimensional do expresso em (1.11).

Verifica-se, facilmente, de (1.23) que existem direções onde as componentes cisalhantes anulam-se. De fato, nessa circunstância tem-se, por exemplo, de (1.23):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

ou seja, multiplicando à esquerda ambos os membros de (1.25) pela matriz inversa (transposta) da matriz dos cossenos diretores e arrumando os termos todos no primeiro membro:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} - \sigma_{\bar{x}} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.26)$$

resultando no problema de autovalores:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{\bar{x}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{\bar{x}} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{\bar{x}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

cuja solução implica em:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{\bar{x}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{\bar{x}} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{\bar{x}} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.28)$$

uma vez que os cossenos diretores (ℓ_1, m_1 e n_1) não podem ser todos eles nulos.

Pois bem, a expressão (1.28) conduz a uma equação algébrica do terceiro grau assim expressa

$$-\sigma_{\bar{x}}^3 + I_1 \sigma_{\bar{x}}^2 - I_2 \sigma_{\bar{x}} + I_3 = 0 \quad (1.29)$$

onde:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
I_2 &= \det \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \\
I_3 &= \det \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

e que são os chamados invariantes do estado de tensão, uma vez que estão relacionados com as raízes de (1.29) como segue:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \\
I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3
\end{aligned} \tag{1.31}$$

pela teoria das equações algébricas, sendo $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ as três raízes de (1.29). Vale registrar ainda que determinação das raízes de (1.29) vai ser examinada mais adiante (raízes de equação cúbica).

Os autovetores de (1.27) são obtidos facilmente, pois, devido ao fato de o determinante (1.28) anular-se para os autovalores resulta que uma equação de (1.27) é combinação das outras duas. Assim sendo, pode-se arbitrar por exemplo $n_1 = 1$ e ℓ_1 e m_1 decorrem da solução do sistema primeiro menor de (1.27).

Além disso, a ortogonalidade dos autovetores pode ser verificada facilmente, tendo-se em vista o exposto em (1.25) para um caso genérico da raiz σ_i , ou seja:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}_i - \sigma_i \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.32}$$

Multiplicando-se agora ambos os membros de (1.32) pela transposta do autovetor j por exemplo, tem-se:

$$\left\{ \ell_1 \ m_1 \ n_1 \right\}_j \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}_i - \sigma_i \left\{ \ell_1 \ m_1 \ n_1 \right\}_j \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}_i = 0 \tag{1.33}$$

ou transpondo-se (1.33):

$$\left\{ \begin{matrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{matrix} \right\}_i \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}_j - \sigma_i \left\{ \begin{matrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{matrix} \right\}_i \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}_j = 0 \quad (1.34)$$

em razão da simetria da matriz envolvida. Por outro lado, considerando-se (1.33) para o autovalor j tem-se:

$$\left\{ \begin{matrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{matrix} \right\}_i \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}_j - \sigma_j \left\{ \begin{matrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{matrix} \right\}_i \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}_j = 0 \quad (1.35)$$

e assim sendo, subtraindo-se (1.34) de (1.35) tem-se:

$$(\sigma_i - \sigma_j) \left\{ \begin{matrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{matrix} \right\}_i \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}_j = 0 \quad (1.36)$$

concluindo-se, pois, que os auto vetores são ortogonais entre si, uma vez que as raízes são distintas em princípio. O caso de raiz dupla não muda essa constatação, visto que um estudo específico do limite à esquerda e direita da raiz dupla permite essa mesma conclusão.

Outra propriedade interessante decorre do fato de a matriz de (1.32) ser simétrica, resultando que os autovalores são então reais. Tal fato pode ser facilmente entendido, assumindo-se que se uma das raízes for complexa e sendo adotado o eixo $O\bar{x}$ na direção correspondente tem-se:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{\bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y^*} - \sigma_{\bar{x}} & \tau_{yz^*} \\ 0 & \tau_{y^*z^*} & \sigma_{z^*} - \sigma_{\bar{x}} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.37)$$

sendo os eixos Ox^* e Ox^* ortogonais à $O\bar{x}$ e ortogonais entre si. Um exame do expresso em (1.36) mostra não ser isso possível, pois o polinômio da matriz menor deveria contemplar o conjugado complexo da raiz complexa considerada. Todavia isso contraria o fato de que esse polinômio deve contemplar sempre o par de raízes complexas. Sem contar que o determinante menor de (1.37) tem raízes reais (vide segunda de (1.16)). O princípio da indução permite concluir que qualquer matriz simétrica tem autovalores reais.

Uma outra demonstração igualmente elegante é a seguinte. Sabe-se que o número complexo $z = a + bi$ tem como conjugado complexo $\bar{z} = a - bi$. Esse conceito pode ser estendido para matrizes, ou seja, entende-se que a matriz $[\bar{a}_{ij}]$ é conjugada complexo da matriz $[a_{ij}]$ quando todos os seus elementos são conjugados complexos dos correspondentes da matriz original. Além disso é fácil verificar a seguinte propriedade: o conjugado do produto de duas matrizes é igual ao produto do conjugado de cada matriz ($\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$). Assim, retomando-se o problema de autovalor:

$$[a_{ij}]\{h_i\} - \lambda\{h_i\} = \{0\} \quad (1.38)$$

Tomando-se agora o conjugado complexo dessa relação tem-se:

$$\overline{[a_{ij}]\{h_i\} - \lambda\{h_i\}} = \overline{\{0\}} \quad (1.39)$$

Todavia, em sendo a matriz $[a_{ij}]$ real uma nova redação para (1.38) é então:

$$[a_{ij}]\overline{\{h_i\}} = \bar{\lambda}\overline{\{h_i\}} \quad (1.40)$$

ou procedendo-se a transposição:

$$\overline{\{h_i\}}^T [a_{ij}] = \bar{\lambda}\overline{\{h_i\}}^T \quad (1.41)$$

uma vez que a matriz $[a_{ij}]$ é simétrica. Assim sendo, tem-se das relações anteriores que:

$$\lambda\overline{\{h_i\}}^T \{h_i\} = \overline{\{h_i\}}^T \lambda\{h_i\} = \overline{\{h_i\}}^T [a_{ij}]\{h_i\} = \bar{\lambda}\overline{\{h_i\}}^T \{h_i\} \quad (1.42)$$

ou ainda:

$$(\lambda - \bar{\lambda})\overline{\{h_i\}}^T \{h_i\} = 0 \quad (1.43)$$

Por outro lado, como o produto dos vetores conjugados não é nulo, tem-se:

$$\lambda - \bar{\lambda} = 2bi = 0 \quad (1.44)$$

indicando-se então a nulidade da parte complexa do autovalor, ou seja, o autovalor é real.

Em resumo, as tensões principais são reais e os auto vetores correspondentes são ortogonais entre si. O fato de as tensões principais serem reais vai ser explorado mais adiante na sua obtenção mediante as chamadas fórmulas de Cardan, também conhecidas como de Tartaglia.

1.6 - ESTADOS DE DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO

Considere-se, por exemplo, o caso em que uma peça estrutural plana, numa dada situação, apresenta a configuração geométrica ilustrada na Figura 1.7 a), sendo os seus pontos geometricamente definidos em relação a um sistema de referência fixo Oxy . Pois bem, numa dada situação deformada, conforme ilustra-se na Figura 1.7 b), os pontos da estrutura ocupam uma nova posição, ou, em outras palavras, os pontos movimentam-se da posição original para uma nova posição (de B para B' - vide Figura 1.7 b)). Cabe ressaltar que a causa desse acontecimento não é, por ora, objeto de exame; podendo, aliás, ocorrer por qualquer razão.

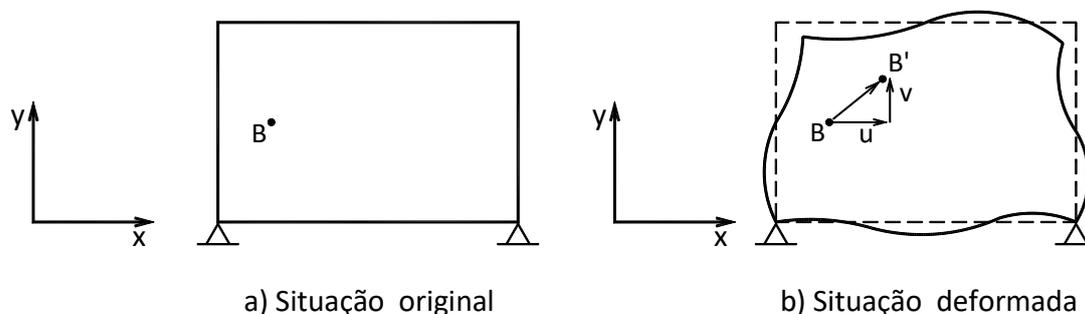


FIGURA 1.7 – Estado de deslocamento

Posto isso, percebe-se que, na realidade, a situação deformada decorre da existência de um campo de deslocamento, ou seja, cada ponto da estrutura sofre um movimento.

Ora, no caso plano, esse campo de deslocamentos, ou estado de deslocamento, é perfeitamente caracterizado por duas componentes u e v , funções das variáveis x e y ; no caso tridimensional por três: u, v e w funções de x, y e z . Todavia, tal colocação só tem significado, em face da integridade da estrutura, com o concurso de condições de continuidade de tais componentes, no domínio da estrutura. Conforme ilustração da Figura 1.7 b), u é o movimento segundo Ox , v segundo Oy ; e, no caso tridimensional, w é o movimento segundo Oz .

Por outro lado, em vista dos movimentos ocorridos no processo de deformação da estrutura (mudança de forma), a posição relativa dos pontos fica, naturalmente, alterada; com isso toma lugar um novo estado denominado estado de deformação, cujas componentes quantificam a nova configuração. Vale lembrar-se que, em virtude de o estado de deslocamento descrever os movimentos dos pontos, não é difícil atentar-se para o fato de haver uma relação entre as componentes do estado de deslocamento e as componentes do estado de

deformação, que quantificam a mudança relativa de forma (movimentos relativos). Em verdade, a mudança de forma (deformação) é mensurada no ponto com dx , dy e dz tendendo-se para zero (processo limite), avaliando-se a variação do comprimento das arestas do cubo elementar (sistema cartesiano) bem como a variação dos ângulos originalmente retos do triedro como ilustrado mais adiante no caso plano na Figura 1.8. As componentes do estado de deformação são, portanto, em número de seis no caso tridimensional e de três no caso plano.

Antes, porém, de se abordarem as relações existentes entre as componentes do estado de deslocamentos e do estado de deformação, é oportuno acrescentar algumas considerações a respeito da magnitude das grandezas, agora, em jogo. Em primeiro lugar, nos casos da prática, as estruturas devem ser projetadas e dimensionadas para exibirem deslocamentos muito pequenos, ou seja, bem menores, em valor, que as dimensões características da estrutura. Aliás, esta é uma das características básicas que se exige de uma estrutura, não só por razões de conforto dos usuários, mas, sobretudo, por razões de ordem psicológicas (pouquíssimas pessoas se sentem à vontade numa corda bamba). Além disso, estruturas muito flexíveis, ou seja, passíveis de grandes movimentos, são também muito sensíveis aos efeitos dinâmicos. Em segundo lugar, por via de consequência, dos deslocamentos pequenos decorrem também deformações pequenas. Cabe ressaltar, a propósito, que, nas estruturas de cabos, por exemplo, as deformações pequenas não implicam em deslocamentos pequenos, pois os movimentos, nesse caso, se devem às configurações diferentes de equilíbrio para diferentes carregamentos. Deformações pequenas é também uma condição decorrente dos casos práticos, conquanto os materiais geralmente empregados, nas condições de utilização normais, trabalham em regime de pequenas deformações; mais que isso, entram em ruptura ainda com pequenas deformações.

Em face das considerações levantadas, enormes simplificações podem ser introduzidas na análise das relações entre as componentes do estado de deslocamento e as do estado de deformação, em decorrência da consideração de pequenos deslocamentos. A primeira delas reside na consideração da geometria original como válida para a posição deformada, e uma segunda, sem contar as outras, consiste na consideração das variações de deformação como infinitésimos de segunda ordem. Outra simplificação de grande importância, que consiste na base da chamada teoria de primeira ordem, é a consideração de que o estado de deslocamentos não altera o estado de carregamento, ou seja, a configuração de equilíbrio não sofre alteração na mudança de forma da estrutura.

1.7 – RELAÇÕES ENTRE O ESTADO DE DESLOCAMENTO E O ESTADO DE DEFORMAÇÃO – CASO PLANO

A Figura 1.8 exhibe três pontos vizinhos P , Q e R , onde os pontos Q e R estão contidos em retas ortogonais concorrentes no ponto P , e afastados de P , respectivamente, por distâncias elementares dx e dy . Os pontos P' , Q' e R' indicam, de maneira genérica, as novas posições ocupadas pelos pontos P , Q e R na situação deformada. Posto isso, e admitindo-se tratar de deslocamentos e

deformações pequenos, com base na geometria dos pequenos deslocamentos têm-se as seguintes relações:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\Delta dy}{dy} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

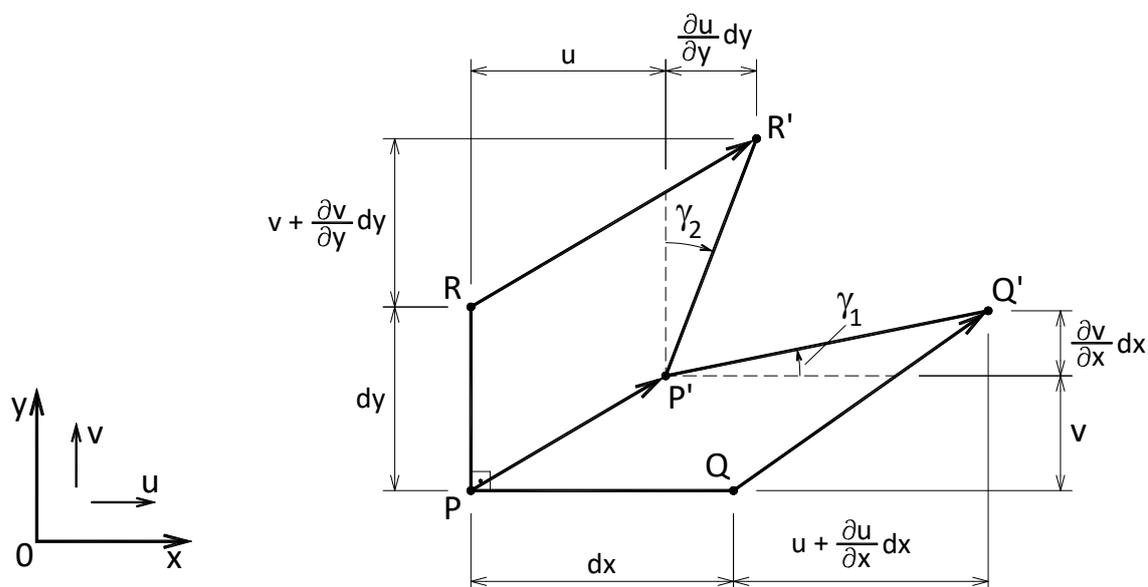


FIGURA 1.8 – Posições inicial e deslocada de três pontos próximos

onde Δdx e Δdy são os alongamentos experimentados pelos comprimentos elementares dx e dy , respectivamente; as rotações experimentadas são objeto da terceira das (1.45).

É oportuno, nesse ponto, levantar algumas considerações. Em primeiro lugar, a consideração

$$\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (1.46)$$

só tem sentido para

$$dx \gg \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (1.47)$$

ou seja

$$\frac{\partial v}{\partial x} \ll 1 \quad (1.48)$$

porquanto, nessa situação, o ângulo γ_1 é pequeno, de tal sorte a se ter $\cos \gamma_1 \cong \cos \frac{\partial v}{\partial x} \cong 1$. De modo análogo, tem-se também $\cos \gamma_2 \cong \cos \frac{\partial u}{\partial y} \cong 1$. Por outro, tais condições permanecem válidas para outras orientações do sistema de referência no caso de se ter também:

$$\begin{aligned} \frac{\partial dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} &\ll 1 \\ \frac{\partial dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} &\ll 1 \end{aligned} \quad (1.49)$$

em vista de certas relações apresentadas no item seguinte. Todavia, nos casos da prática tais considerações se verificam.

Pois bem, com base nas relações (1.45) definem-se, então, as componentes de deformação

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\Delta dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.50)$$

que quantificam os alongamentos específicos, no ponto em consideração, segundo os eixos coordenados O_x e O_y , juntamente com a variação angular experimentada pelo ângulo reto original. Assim, dado um retângulo inicial, de lados elementares dx e dy , de posse das grandezas definidas em (1.50), sabe-se da nova forma apresentada por tal retângulo na posição deformada. Convém alertar-se para o fato de que, em todas as considerações levantadas, confere-se aos comprimentos elementares dx e dy um tratamento infinitesimal. Como se percebe, o estado plano de deformação, a exemplo do estado plano de tensão, fica caracterizado por três parâmetros ou componentes, quais sejam ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} . Decorre da definição (1.50)

o fato de se considerar funções u e v contínuas.

1.7.1 - Transformações de Coordenadas - Caso Plano

A Figura 1.9 exibe dois sistemas de referência cartesianos, Oxy e $O\bar{x}\bar{y}$, defasados de ângulo α . No sistema de referência Oxy os movimentos de um dado ponto P são dados por u e v , respectivamente, segundo Ox e Oy , e no sistema de referência $O\bar{x}\bar{y}$ os movimentos desse ponto são dados por \bar{u} e \bar{v} conforme se ilustra na Figura 1.9. Tais componentes de movimento estão, como se sabe, relacionadas pela seguinte expressão matricial (vide (1.4)):

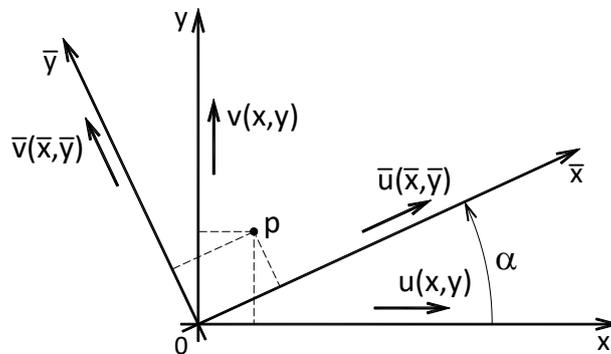


FIGURA 1.9 – Transformações de coordenadas

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (1.51)$$

Onde l_1 e m_1 são os cossenos diretores do eixo $O\bar{x}$ segundo o sistema original Oxy , e l_2 e m_2 são os cossenos diretores do eixo $O\bar{y}$, ou seja:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos \alpha \\ m_1 &= \operatorname{sen} \alpha \\ l_2 &= -\operatorname{sen} \alpha \\ m_2 &= \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.52)$$

Em suma, a expressão (1.51) relaciona as componentes do vetor deslocamento no sistema Oxy com as componentes desse mesmo vetor no sistema $O\bar{x}\bar{y}$.

As componentes de deformação no sistema de referência $O\bar{x}\bar{y}$, em face das condições aventadas em (1.50), por força das relações (1.51), são dadas por (vide (1.50)):

$$\begin{aligned}\epsilon_{\bar{x}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \\ \epsilon_{\bar{y}} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \\ \gamma_{\bar{xy}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\end{aligned}\quad (1.53)$$

Ou, ainda, tendo em vista (1.51):

$$\begin{aligned}\epsilon_{\bar{x}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \ell_1 \frac{\partial u}{\partial x} + m_1 \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_{\bar{y}} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = \ell_2 \frac{\partial u}{\partial y} + m_2 \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{\bar{xy}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = \ell_1 \frac{\partial u}{\partial y} + m_1 \frac{\partial v}{\partial y} + \ell_2 \frac{\partial u}{\partial x} + m_2 \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad (1.54)$$

por outro lado, sabe-se, por exemplo, que:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\quad (1.55)$$

pois, dado um acréscimo $d\bar{x}$, tudo se passa como se experimentassem acréscimos dx e dy (regra da cadeia), conforme condição expressa em (1.4), de onde se deduz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} &= \ell_1 \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} &= m_1\end{aligned}\quad (1.56)$$

e ainda, $\partial x/\partial \bar{y} = \ell_2$ e $\partial y/\partial \bar{y} = m_2$. Assim, levando (1.56) na (1.55), e o resultado na primeira das (1.54) tem-se:

$$\epsilon_{\bar{x}} = \frac{\partial u}{\partial x} \ell_1^2 + \frac{\partial v}{\partial y} m_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \ell_1 m_1\quad (1.57)$$

ou seja, tendo em vista (1.50):

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \varepsilon_x \ell_1^2 + \varepsilon_y m_1^2 + \gamma_{xy} \ell_1 m_1 \quad (1.58)$$

Finalmente, reunindo-se numa única expressão matricial o resultado expresso em (1.58), juntamente com as expressões similares para $\varepsilon_{\bar{y}}$ e $\gamma_{\bar{x}\bar{y}}$ tem-se:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}} & \frac{1}{2} \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \\ \frac{1}{2} \gamma_{\bar{x}\bar{y}} & \varepsilon_{\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

que é, em tudo, similar a expressão (1.11), a exceção do fator 1/2 aplicado na componente de deformação γ_{xy} . Percebe-se, pois, que a lei de transformação de coordenadas do estado plano de deformação é a mesma da do estado plano de tensão. Assim sendo, as deformações principais são dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\bar{x}}^2 - \varepsilon_{\bar{x}}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \varepsilon_x \varepsilon_y - \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2 &= 0 \\ \varepsilon_{\bar{x}} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.60)$$

onde ε_1 e ε_2 são as deformações principais e as direções principais de deformação ortogonais entre si, a exemplo de (1.17), são dadas por:

$$\begin{aligned} m_i &= 1 \\ \ell_i &= -\frac{\frac{1}{2} \gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_i} = -\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_i}{\frac{1}{2} \gamma_{xy}} \end{aligned} \quad (1.61)$$

direções nas quais a componente γ_{xy} se anula (o ângulo reto permanece reto). As deformações principais, igualmente, constituem valores extremos, máximo e mínimo, da deformação $\varepsilon_{\bar{x}}$. Os invariantes do estado de deformação, a exemplo de (1.19), são expressos por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 &= \det \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.62)$$

Finalizando-se é oportuno salientar que o sinal da componente de deformação ε_x é positivo no caso de alongamento, e, por via de consequência, negativo no caso de encurtamento; além disso, a componente γ_{xy} (distorção, ou deformação angular) é considerada positiva no caso de decréscimo do ângulo reto, conforme se aponta na Figura 1.8, e negativa em caso contrário.

1.8 – RELAÇÕES ENTRE O ESTADO DE DESLOCAMENTO E O ESTADO DE DEFORMAÇÃO – CASO TRIDIMENSIONAL

Considere-se o caso de um corpo sólido, devidamente vinculado, que experimenta um estado de deslocamentos, cuja componente u, v e w são funções contínuas que descrevem os movimentos segundo, respectivamente, eixos coordenados Ox, Oy e Oz de um sistema de referência dextrorso $Oxyz$. Tais funções, naturalmente, nas variáveis x, y e z , estão relacionadas, por meio de derivações, com as componentes do estado de deformação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (1.63)$$

porquanto o mesmo procedimento levado a efeito no plano xy , no caso plano, estende-se para os demais planos (yz e zx) Ora, dado um volume elementar $dx dy dz$, a configuração deformada desse volume pode ser conhecida sabendo-se o alongamento específico das arestas dx, dy e dz (três primeiras das expressões (1.51)), juntamente com as variações experimentadas pelos ângulos retos do triedro de arestas dx, dy e dz (três últimas das (1.63)).

1.8.1 – Mudança do sistema de referência - Caso Tridimensional

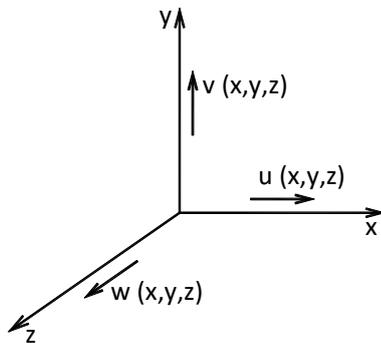
Um dado ponto de uma estrutura experimenta movimentos u, v e w segundo um sistema de coordenadas $Oxyz$, conforme se indica na Figura 1.10 a). Por outro lado, esse ponto experimenta movimentos denominados \bar{u}, \bar{v} e \bar{w} num sistema de referência $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, conforme se indica na Figura 1.10 b). Pois bem, as relações existentes entre tais componentes do mesmo estado de deslocamento do ponto em consideração nestes dois sistemas de referência são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1.64)$$

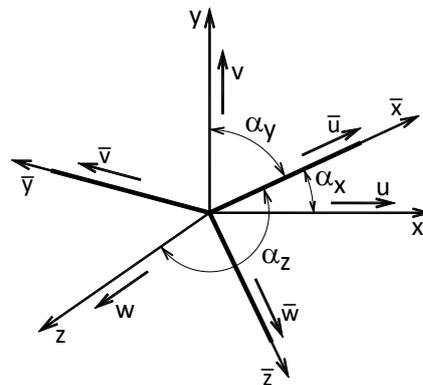
onde l_1, m_1 e n_1 , l_2, m_2 e n_2 e l_3, m_3 e n_3 são, respectivamente, os cossenos diretores das direções dos eixos $O\bar{x}, O\bar{y}$ e $O\bar{z}$ segundo o sistema dextrorso original $Oxyz$, a exemplo da notação já utilizada anteriormente, conforme expressão (1.20).

A título de ilustração, conforme Figura 1.10 b), tem-se:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos \alpha_x \\ m_1 &= \cos \alpha_y \\ n_1 &= \cos \alpha_z \end{aligned} \quad (1.65)$$



a) Deslocamentos segundo os eixos coordenados $Oxyz$.



b) Mudança de coordenadas para os deslocamentos.

FIGURA 1.10 – Estado de deslocamentos e transformações de coordenadas

sendo α_x, α_y e α_z os ângulos entre o eixo $O\bar{x}$ e os eixos Ox, Oy e Oz , respectivamente. Cabe lembrar-se, em tempo, que a inversa da matriz quadrada

que contém os cossenos diretores, conforme já mencionado, tem por matriz inversa a sua matriz transposta.

De acordo com as definições expressas em (1.51), no sistema de referência dextrorso \overline{Oxyz} as componentes de deformação são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\bar{x}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \\
 \varepsilon_{\bar{y}} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \\
 \varepsilon_{\bar{z}} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \\
 \gamma_{\bar{xy}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \\
 \gamma_{\bar{xz}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \\
 \gamma_{\bar{yz}} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

Por outro lado, a primeira, por exemplo, das (1.66), tendo em vista a relação (1.64), permite escrever-se:

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial u}{\partial x} \ell_1 + \frac{\partial u}{\partial y} m_1 + \frac{\partial u}{\partial z} n_1 \tag{1.67}$$

visto que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} &= \ell_1 \\
 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} &= m_1 \\
 \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} &= n_1
 \end{aligned} \tag{1.68}$$

Ora, no caso em questão trata-se de funções de três variáveis; assim sendo tem-se pela regra da cadeia, por exemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} \tag{1.69}$$

e, com isso, de (1.69), juntamente com similares correspondentes à $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial x}$, tem-se para (1.67) uma nova redação, ou seja:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\bar{x}} = & \frac{\partial u}{\partial x} \ell_1^2 + \frac{\partial v}{\partial y} m_1^2 + \frac{\partial w}{\partial z} n_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \ell_1 m_1 + \\ & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) m_1 n_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \ell_1 n_1 \end{aligned} \quad (1.70)$$

ou, ainda, tendo em vista (1.63):

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \varepsilon_x \ell_1^2 + \varepsilon_y m_1^2 + \varepsilon_z n_1^2 + \gamma_{xy} \ell_1 m_1 + \gamma_{xz} \ell_1 n_1 + \gamma_{yz} m_1 n_1 \quad (1.71)$$

Reunindo (1.71), juntamente com as similares relativas às demais componentes do estado de deformação, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}} & \frac{\gamma_{\bar{xy}}}{2} & \frac{\gamma_{\bar{xz}}}{2} \\ \frac{\gamma_{\bar{xy}}}{2} & \varepsilon_{\bar{y}} & \frac{\gamma_{\bar{yz}}}{2} \\ \frac{\gamma_{\bar{xz}}}{2} & \frac{\gamma_{\bar{yz}}}{2} & \varepsilon_{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

cuja semelhança com (1.24) é evidente. Assim sendo, todas as propriedades lá discutidas valem também no caso do estado de deformação tridimensional, como deformações principais reais, direções principais de deformação ortogonais e invariantes do estado de deformação, trocando-se na notação as componentes normais de tensão σ_i pela deformação axial ε_i e as componentes cisalhantes τ_{ij} pela distorção $\gamma_{ij}/2$.

1.9 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA: CÍRCULO DE MOHR

Em primeiro lugar, vale ressaltar que a inteligência humana tem mais facilidade de lidar com imagens, como registra o dito popular de que uma imagem vale mais que mil palavras. Dessa forma, a busca pela representação de qualquer grandeza por meio de uma imagem é sempre desejável, especialmente para o estado de tensão, cuja dimensão não permite visualização direta.

Para se chegar a representação em questão, retoma-se, inicialmente, o expresso em (1.11) com a consideração de que o sistema de referência Oxy está

localizado de tal forma que eixo Ox coincide com a direção principal correspondente à tensão principal σ_1 supondo-se $\sigma_1 > \sigma_2$, e com isso, tem-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}} &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \\ \tau_{\bar{xy}} &= -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}\quad (1.73)$$

ou ainda uma nova redação, tendo-se em conta a consideração de arco duplo, ou seja:

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_{\bar{xy}} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (1.74)$$

que consiste na equação paramétrica do circunferência mostrada na Figura 1.11. Em outras palavras, o estado de tensão pode então ser representado pela circunferência indicada, que é chamada de círculo de Mohr do caso plano. Claramente, a maior tensão normal $\sigma_{\bar{x}}$ é σ_1 , a menor é σ_2 e o maior cisalhamento em módulo $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

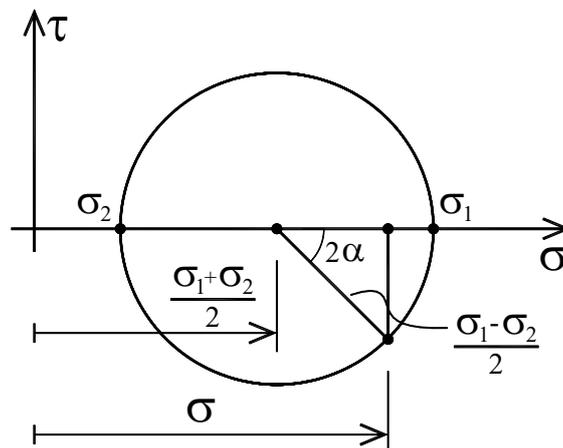


FIGURA 1.11 - Círculo de Mohr

Do mesmo modo, existe também a representação do estado de deformação por meio do correspondente círculo de Mohr, trocando-se a tensão normal pela deformação axial ε_i e o cisalhamento τ_{ij} pela distorção $\gamma_{ij}/2$.

A representação gráfica do estado tridimensional pode ser obtida tomando-se o sistema de referência coincidente com as direções principais assumindo-se $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, e tendo-se em conta o expresso em (1.21) com eliminação do termo de área dS , ou seja:

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_1 \ell_1 \\ t_y &= \sigma_2 m_1 \\ t_z &= \sigma_3 n_1 \end{aligned} \quad (1.74)$$

que são componentes da mesma força dada pelas componentes $\sigma_{\bar{x}}$, $\tau_{\bar{xy}}$ e $\tau_{\bar{xz}}$ como ilustrado na Figura 1.6 b). Assim, tem-se a igualdade:

$$t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = \sigma_1^2 \ell_1^2 + \sigma_2^2 m_1^2 + \sigma_3^2 n_1^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \tau_{\bar{xy}}^2 + \tau_{\bar{xz}}^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (1.75)$$

na qual:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{\bar{x}} \\ \tau &= \sqrt{\tau_{\bar{xy}}^2 + \tau_{\bar{xz}}^2} \end{aligned} \quad (1.76)$$

sendo que a última de (1.76) vem a ser o cisalhamento resultante na plano perpendicular ao eixo $O\bar{x}$.

A expressão (1.23), tomando-se também sistema de referência coincidente com as direções principais, permite, por sua vez, escrever:

$$\sigma = \sigma_{\bar{x}} = \sigma_1 \ell_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2 \quad (1.77)$$

Finalmente, o fato de se considerar que ℓ_1 , m_1 e n_1 são componentes de um versor, juntamente com (1.75) e (1.77) permite formular a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1^2 \\ m_1^2 \\ n_1^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sigma^2 + \tau^2 \\ \sigma^2 \end{Bmatrix} \quad (1.78)$$

cuja solução fornece:

$$\begin{aligned}
\ell_1^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\
m_1^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\
n_1^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}
\end{aligned} \tag{1.79}$$

Por outro lado, como $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, a primeira de (1.79) permite escrever:

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \geq 0 \tag{1.80}$$

ou ainda:

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \tag{1.81}$$

indicando-se que o ponto dado pelas coordenadas σ e τ situa-se fora do círculo definido por σ_2 e σ_3 , como mostrado na Figura 12 a).

A segunda de (1.79) seguindo-se raciocínio similar resulta:

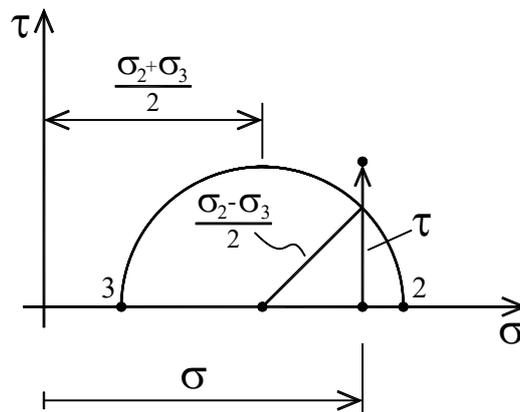
$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \tag{1.82}$$

indicando-se que o ponto referente ao estado de tensão em questão fica dentro do círculo definido por σ_1 e σ_3 . A última de (1.79) resulta:

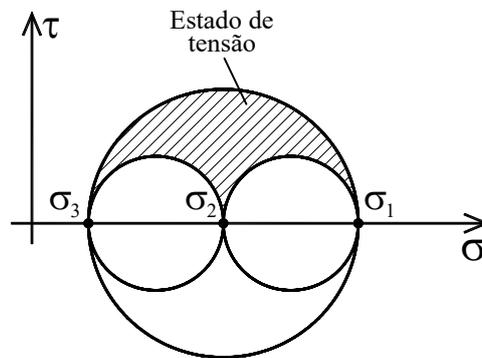
$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \tag{1.83}$$

indicando-se que o ponto correspondente fica do lado de fora do círculo definido por σ_1 e σ_2 . Reunindo-se tais resultados conclui-se então que os pontos referentes ao estado tripló de tensão ficam sempre na região hachurada na Figura 1.12 b).

Vale finalmente assinalar que o estado de deformação também pode ser representado por um círculo de Mohr similar ao da Figura 1.12 b), pelas razões já mencionadas no exame do caso duplo de tensão.



a) Situação $\ell_1^2 > 1$



b) Lugar geométrico do estado de tensão

FIGURA 1.12 –Círculo de Mohr: Estado Triplo

1.10 - RELAÇÕES ENTRE AS COMPONENTES DO ESTADO DE TENSÃO E AS DO ESTADO DE DEFORMAÇÃO - LEI DE HOOKE

Segundo os historiadores, por volta do distante ano de 1676, o grande pensador Robert Hooke enunciou uma clássica lei, que leva o seu nome, de acordo com a qual as deformações acontecem na mesma proporção que as tensões. Assim sendo, admite-se, portanto, que existe entre as componentes desses dois estados de tensão uma relação linear envolvendo uma matriz contemplando constantes que dependem, naturalmente, do material em consideração. No caso tridimensional tem-se então em notação matricial portanto o expresso em (1.84).

Em primeiro lugar, vale assinalar que a matriz de constantes em (1.84) é simétrica em decorrência do Teorema de Maxwell, assumindo-se que o processo da deformação ocorre nos termos do princípio da Conservação da Energia. Esse tema será melhor esclarecido mais adiante na abordagem da energia de deformação, que consiste na energia envolvida no processo da mudança de forma,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1.84)$$

assumindo-se que esse processo é conservativo, ou seja, que a energia em jogo só depende dos estados iniciais e finais, não sendo influenciada pelo histórico intermediário. Assim sendo, o número de constantes independentes passa a ser 21 ($21 = 3 + 6 \times 6 / 2$), e esse é o caso do material denominado anisótropo (comportamento diferente em diferentes direções), ou material do tipo Green, no qual, por exemplo, tensão normal provoca distorção, e cisalhamento provoca deformação axial; sem contar igualmente que o cisalhamento num plano provoca distorções nos outros planos. Vale assinalar também que as constantes de (1.84) têm, naturalmente, dimensão de unidade de área por força.

O material de comportamento mais simples é o denominado isótropo (mesmo comportamento em todas as direções), envolvendo apenas duas constantes independentes, e mais que isso, são elas invariantes; ou seja, em qualquer direção essas constantes não se alteram. A matriz de constantes nesse caso é classicamente assim redigida:

$$\begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu)/E & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & 2(1+\nu)/E & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu)/E \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

sendo E o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

Para evidenciar a natureza tensorial de quarta ordem da grandeza em questão e simplificar a exposição, considere o caso plano, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu)/E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.84)$$

levando-se em consideração o expresso em (1.11) e (1.59) em nova redação, ou seja:

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & 2l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & 2m_1m_2 \\ l_1m_1 & l_2m_2 & l_1m_2 + l_2m_2 \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_{\bar{x}} \\ \sigma_{\bar{y}} \\ \tau_{\bar{xy}} \end{cases} \quad (1.85)$$

$$\begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_1m_2 \\ 2l_1m_1 & 2l_2m_2 & l_1m_2 + l_2m_2 \end{bmatrix} \begin{cases} \epsilon_{\bar{x}} \\ \epsilon_{\bar{y}} \\ \gamma_{\bar{xy}} \end{cases}$$

e, com isso, o expresso em (1.84) permite redigir:

$$\begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_1m_2 \\ 2l_1m_1 & 2l_2m_2 & l_1m_2 + l_2m_2 \end{bmatrix} \begin{cases} \epsilon_{\bar{x}} \\ \epsilon_{\bar{y}} \\ \gamma_{\bar{xy}} \end{cases} = \quad (1.86)$$

$$\begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu)/E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & 2l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & 2m_1m_2 \\ l_1m_1 & l_2m_2 & l_1m_2 + l_2m_2 \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_{\bar{x}} \\ \sigma_{\bar{y}} \\ \tau_{\bar{xy}} \end{cases}$$

podendo-se verificar então, após trabalho algébrico de certa monta, que:

$$\frac{1}{(l_1m_2 - l_2m_1)^3} \begin{bmatrix} l_1m_2^3 - l_2m_2^2m_1 & l_2^2l_1m_2 - l_2^3m_1 & l_2^2m_1m_2 - l_1l_2m_2^2 \\ l_1m_1^2m_2 - l_2m_1^3 & l_1^3m_2 - l_1^2l_2m_1 & l_1l_2m_1^2 - l_1^2m_1m_2 \\ 2l_2m_1^2m_2 - 2l_1m_1m_2^2 & 2l_1l_2^2m_1 - 2l_2l_1^2m_2 & l_1^2m_2^2 - l_2^2m_1^2 \end{bmatrix} \quad (1.87)$$

$$\begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & 2l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & 2m_1m_2 \\ l_1m_1 & l_2m_2 & l_1m_2 + l_2m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}$$

mostrando-se que, na mudança do sistema de referência, no caso do material isótropo, as constantes em apreço não se alteram, mas os cossenos diretores agora estão presentes nas matrizes de (1.86) de forma quadrática, e não mais linear como em (1.24) e (1.72), mostrando que a matriz de constantes da Lei de Hooke são um grandeza tensorial de quarta ordem.

O próximo material em complexidade de comportamento é o denominado material monótropo, indicado para representar material formado por camadas planas (tipo folheado), como é o caso de barragem de terra compactada por camadas. Com o eixo Ox transversal às camadas a matriz de constantes fica:

$$\begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu_z/E_z & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu_z/E_z & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & 1/G_z & 0 \\ & & & & & 1/G_z \end{bmatrix} \quad (1.88)$$

na qual E é o módulo de elasticidade das camadas no seu plano, ν o coeficiente de Poisson correspondente, E_z o módulo de elasticidade transversal às camadas e ν_z o coeficiente de Poisson correspondente,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.89)$$

e a quinta constante G_z é o módulo de elasticidade transversal na direção normal às camadas. Vale ressaltar que, para esse material, a mudança do sistema de referência já resulta matriz de constantes não nulas nas 21 posições.

Materiais ortótropos é a denominação dada quando o número de constantes elásticas independentes é igual a 9. Nesse caso existe uma simetria de comportamento segundo os três planos ortogonais entre si. A matriz de constantes elásticas tem, então, o seguinte aspecto

$$\begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_x/E_x & -\nu_y/E_y & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_y & -\nu_z/E_z & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G_x & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & 1/G_y & 0 \\ & & & & & 1/G_z \end{bmatrix} \quad (1.90)$$

Cabe ser notado que, no caso desses materiais, tensões cisalhantes segundo um dos planos de simetria não promovem distorção segundo os outros planos, ou seja, por exemplo, que a tensão de cisalhamento τ_{xy} não promove distorções γ_{xz} e γ_{yz} . Todavia, como no caso do material monótropo, a mudança do sistema de referência resulta matriz de constantes com termos também não nulos nas 21 posições.

A respeito da relação (1.89) cabe um esclarecimento. Em primeiro lugar, tomando-se como básico o sistema de referência $Oxyz$ segundo as direções

principais, o estado de deformação fica então definido envolvendo apenas duas constantes. Assim sendo o módulo de elasticidade transversal pode, em princípio, ser uma combinação dessas duas constantes. Essa combinação expressa em (1.89) pode ser obtida como segue. A tensão de cisalhamento e a distorção correspondente, por exemplo, $\tau_{\overline{xy}}$ e $\gamma_{\overline{xy}}$, num dado plano do sistema de referência $O_{\overline{xyz}}$, tendo em vista (1.24) e (1.72), ficam:

$$\begin{aligned}\tau_{\overline{xy}} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 \\ \gamma_{\overline{xy}} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_x l_1 l_2 + \varepsilon_y m_1 m_2 + \varepsilon_z n_1 n_2)\end{aligned}\quad (1.91)$$

Pois bem, a primeira das (1.91), tendo em vista a lei de HOOKE para material isótropo, passa a escrever-se

$$\gamma_{\overline{xy}} = 2 \left[\begin{aligned} &\frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) l_1 l_2 + \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) m_1 m_2 \\ &+ \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)) n_1 n_2 \end{aligned} \right] \quad (1.92)$$

ou, ainda, arrumando os termos:

$$\gamma_{\overline{xy}} = 2 \left[\begin{aligned} &\frac{\sigma_x}{E} (l_1 l_2 - \nu m_1 m_2 - \nu n_1 n_2) + \frac{\sigma_y}{E} (-\nu l_1 l_2 + m_1 m_2 - \nu n_1 n_2) \\ &\frac{\sigma_z}{E} (-\nu l_1 l_2 - \nu m_1 m_2 + n_1 n_2) \end{aligned} \right] \quad (1.93)$$

Acrescentando, agora, termos nulos nas parcelas do segundo membro da expressão (1.93), ou seja, $-\nu(l_1 l_2 - l_1 l_2)$ na primeira parcela, $-\nu(m_1 m_2 - m_1 m_2)$ na segunda e $-\nu(n_1 n_2 - n_1 n_2)$ na terceira, tem-se:

$$\gamma_{\overline{xy}} = 2 \left[\begin{aligned} &\frac{\sigma_x}{E} ((1 + \nu) l_1 l_2 - \nu(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)) \\ &+ \frac{\sigma_y}{E} ((1 + \nu) m_1 m_2 - \nu(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)) \\ &+ \frac{\sigma_z}{E} ((1 + \nu) n_1 n_2 - \nu(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)) \end{aligned} \right] \quad (1.94)$$

onde os termos com ν em evidência são nulos, pois tratam-se do produto escalar de versores ortogonais. Assim, tem-se então:

$$\gamma_{\overline{xy}} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_x \ell_1 \ell_2 + \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_y m_1 m_2 + \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_z n_1 n_2 \quad (1.95)$$

e, com isso, tendo-se em vista a segunda das (1.91) verifica-se, facilmente, a razão da relação apontada em (1.89), e também já explícita em (1.85).

Resta ainda registrar que o coeficiente de Poisson de para que o material na deformação não venha a gerar energia (material instável) deve ser maior que 0.5, e de modo a não violar a consideração de isotropia não deve ser negativo. Senão, vejamos. Considere-se o caso do estado de tensão principal $\sigma_1 = -p$, com confinamento $\sigma_2 = \sigma_3 = -p_1$, supondo-se $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ (confinamento), de modo a não haver alteração da seção transversal no plano 2 – 3. Assim sendo, tem-se:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{E} (p_1 + \nu(p_1 + p)) = 0$$

$$p_1 = \frac{\nu}{\nu + 1} p$$

indicando-se que o coeficiente de Poisson não pode ser negativo, pois nesse caso a tensão de confinamento seria de tração! Por outro lado:

$$\varepsilon_1 = -\frac{p}{E} \left(1 - 2\nu \frac{\nu}{1-\nu} \right) = -\frac{p}{E} \frac{2(0.5 - \nu)(1 + \nu)}{1 - \nu}$$

Indicando-se que, para coeficiente de Poisson maior que 0.5 o processo da deformação gera energia, pois a deformação ε_1 passa então a ser alongamento, algo não compatível com material dito estável.

Vale também registrar que, para materiais anisótropos, tomando-se por referência as direções principais de tensão, o estado de deformação fica definido por apenas 15 constantes; aparentemente indicando que as outras 6 constantes são combinação dessas 15 constantes. Sucede que, para uma nova orientação do sistema de referência a transformação da matriz de constantes (tensor de quarta ordem) vai envolver aquelas 6 constantes. Com isso, as constantes para material anisótropo são então em número de 21 como já mencionado. No caso do material isótropo, conforme (1.91) a (1.95) as constantes envolvidas no cisalhamento e distorção se isolam e são invariantes, valendo também para as direções principais. Claramente, como deve ser esperado, não é fácil lidar com tensores de ordem alta.

1.11 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Apresentam-se, no que segue, dois exemplos de aplicação, onde se chama a atenção para aspectos ligados à utilização das expressões desenvolvidas.

Contudo, é oportuno apresentar antes as chamadas fórmulas de CARDAN, que consistem numa maneira exata e expedita de se expressar as raízes de uma

equação do terceiro grau. Como nos casos abordados as raízes são reais, dada a natureza do problema, grandes simplificações podem ser conseguidas.

Dada uma equação do terceiro grau do tipo canônico:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.96)$$

as raízes podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - a / 3 \\ x_2 &= y_2 - a / 3 \\ x_3 &= y_3 - a / 3 \end{aligned} \quad (1.97)$$

Por outro lado, sabendo-se que as três raízes são reais, têm-se:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\sqrt[3]{\rho} \cos(\theta / 3) \\ y_2 &= 2\sqrt[3]{\rho} \cos((2\pi - \theta) / 3) \\ y_3 &= 2\sqrt[3]{\rho} \cos((2\pi + \theta) / 3) \end{aligned} \quad (1.98)$$

onde:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{R^2 + Q^2} \\ \theta &= \text{arc.tg.}(Q / R) \end{aligned} \quad (1.99)$$

sendo:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \left(\frac{ba}{3} - c - \frac{2a^3}{27} \right) \\ Q &= \sqrt{\frac{1}{27} \left(\frac{a^2}{3} - b \right)^3 - R^2} \end{aligned} \quad (1.100)$$

com a, b e c tomados com sinal conforme (1.96); sendo necessário tomar cuidado com os sinais desses coeficientes. Cabe apontar, além disso, que o arco θ pertence ao primeiro quadrante no caso de R positivo e ao segundo em caso contrário (essa observação diz respeito à posição do número complexo no plano de Gauss).

1.11.1 – Primeiro exemplo de aplicação

Num dado ponto da superfície de uma estrutura foram medidas, com extensômetros elétricos de resistência as deformações em três direções, conforme

ilustrado na Figura 1.13 (roseta equiângula), sendo encontrados $\varepsilon_a = 10^{-3}$, $\varepsilon_b = 10^{-3}$ e $\varepsilon_c = -10^{-3}$. Pede-se determinar as deformações principais e as direções onde ocorrem. Trata-se, naturalmente, de um estado plano de deformação.

No sistema de referência adotado (vide Figura 1.13), das componentes do estado de deformação só se conhece uma, ou seja:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_c = -10^{-3}$$

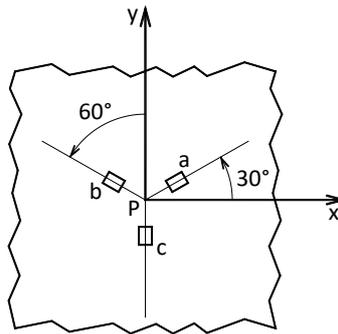


FIGURA 1.13 - Disposições de medidas das deformações

sendo desconhecidas as componentes ε_x e γ_{xy} . Todavia, tendo-se em vista a expressão (1.47), tem-se:

$$\varepsilon_a = 10^{-3} = \varepsilon_x \cos^2 \frac{\pi}{6} + (-10^{-3}) \sin^2 \frac{\pi}{6} + \gamma_{xy} \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\varepsilon_b = 10^{-3} = \varepsilon_x \cos^2 \frac{5\pi}{6} + (-10^{-3}) \sin^2 \frac{5\pi}{6} + \gamma_{xy} \sin \frac{5\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{6}$$

ou seja

$$10^{-3} = 0.75\varepsilon_x - 0.25 \times 10^{-3} + 0.433\gamma_{xy}$$

$$10^{-3} = 0.75\varepsilon_x - 0.25 \times 10^{-3} - 0.433\gamma_{xy}$$

Resolvendo vem:

$$\varepsilon_x = 1.67 \times 10^{-3}$$

$$\gamma_{xy} = 0.0$$

De posse dos valores das componentes do estado de deformação no sistema de referência adotado ou seja, $\varepsilon_x = 1.67 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_y = -10^{-3}$ e $\gamma_{xy} = 0$, tem-se:

$$\varepsilon_1 = \frac{1.67 \times 10^{-3} - 10^{-3}}{2} + \sqrt{\left(\frac{1.67 \times 10^{-3} + 10^{-3}}{2}\right)^2} = 1.67 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1.67 \times 10^{-3} - 10^{-3}}{2} - \sqrt{\left(\frac{1.67 \times 10^{-3} + 10^{-3}}{2}\right)^2} = -10^{-3}$$

e de (1.49) tem-se:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\frac{1}{2}(0.0)}{1.67 \times 10^{-3} - (-10^{-3})} = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\frac{1}{2}(0.0)}{-10^{-3} - (-10^{-3})} = \text{indefinida}$$

ou seja $\alpha_1 = 0$ em primeira determinação, significando que a direção principal correspondente a $\varepsilon_1 = 1.67 \times 10^{-3}$ é coincidente com a do eixo Ox . Por outro lado, como a direção principal correspondente a $\varepsilon_2 = -10^{-3}$ é perpendicular, tem-se que ela coincide, naturalmente, com a do eixo Oy . No caso desse exemplo, pelo fato de se ter $\gamma_{xy} = 0$ sabe-se, de início, que os eixos Ox e Oy já são os principais; por definição.

1.11.2 – Segundo exemplo de aplicação

Num dado ponto de uma estrutura são conhecidas as componentes do estado de tensão em N/cm^2 , ou seja:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \text{sim.} & & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 10^3 & -4 \times 10^3 & 5 \times 10^3 \\ & 7 \times 10^3 & 2 \times 10^3 \\ \text{sim.} & & 8 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

Podem-se, em primeiro lugar, as tensões principais e as direções onde ocorrem; e em segundo lugar, sabendo-se que se trata de material elástico, linear e isótropo, com $E = 2 \times 10^7 N/cm^2$ e $\nu = 0.3$, pedem-se as deformações principais.

Pois bem, de (1.28) tem-se:

$$\det. \begin{bmatrix} 3 \times 10^3 - \sigma_{\bar{x}} & -4 \times 10^3 & 5 \times 10^3 \\ -4 \times 10^3 & 7 \times 10^3 - \sigma_{\bar{x}} & 2 \times 10^3 \\ 5 \times 10^3 & 2 \times 10^3 & 8 \times 10^3 - \sigma_{\bar{x}} \end{bmatrix} = 0$$

ou seja:

$$\sigma_{\bar{x}}^3 - 1.8 \times 10^3 \sigma_{\bar{x}}^2 - 56 \times 10^6 \sigma_{\bar{x}} + 227 \times 10^9 = 0$$

De acordo com a forma canônica (1.27) têm-se, então:

$$a = -18 \times 10^3$$

$$b = 56 \times 10^6$$

$$c = 227 \times 10^9$$

e, com isso, de (1.100) têm-se:

$$R = \frac{10^9}{2} \left(\frac{5.6(-18)}{3} - 2.27 - \frac{2(-18)^3}{27} \right) = -0.0655 \times 10^{10}$$

$$Q = 10^9 \sqrt{\frac{1}{27} \left(\frac{(-18)^3}{3} - 5.6 \right)^3 - (-0.655)^2} = 0.0303 \times 10^{10}$$

Com esses valores, de (1.99) têm-se

$$\rho = 10^9 \sqrt{(-0.655)^2 + (0.3030)^2} = 72.2 \times 10^9$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{0.303}{-0.655} = -0.4626$$

$$\theta = 155.2^\circ \rightarrow -24.8^\circ$$

Finalmente, de (1.98) têm-se:

$$y_1 = 2 \times 10^3 \sqrt[3]{0.0722} \cos \left(\frac{155,2^\circ}{3} \right) = 5160 \text{ N / cm}^2$$

$$y_2 = 2 \times 10^3 \sqrt[3]{0.0722} \cos \left(\frac{360^\circ - 155,2^\circ}{3} \right) = 3080 \text{ N / cm}^2$$

$$y_3 = 2 \times 10^3 \sqrt[3]{0.0722} \cos \left(\frac{360^\circ + 155,2^\circ}{3} \right) = -8240 \text{ N / cm}^2$$

e de (1.97) têm-se as três raízes ($-a / 3 = 6000$):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 11160 \text{ N / cm}^2 \\ \sigma_2 &= 9080 \text{ N / cm}^2 \\ \sigma_3 &= -2240 \text{ N / cm}^2\end{aligned}$$

que são naturalmente, as componentes de tensão não nulas nas direções principais. Por sua vez, a direção correspondente à tensão $\sigma_1 = 11160 \text{ N / cm}^2$ pode ser encontrada, tomando-se, por exemplo, $n_1^* = 1$ em (1.27). Com os valores em questão tem-se então:

$$\begin{bmatrix} 3000 - 11160 & -4000 \\ -4000 & 7000 - 11160 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1^* \\ m_1^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -2000 \end{Bmatrix}$$

encontrando-se, pois:

$$\begin{aligned}\ell_1^* &= 0.713 \\ m_1^* &= -0.205\end{aligned}$$

Todavia, em termos do versor dessa direção, tem-se

$$\begin{aligned}\ell_1 &= \frac{0.713}{\sqrt{0.713^2 + 0.205^2 + 1}} = 0.573 \\ m_1 &= \frac{-0.205}{\sqrt{0.713^2 + 0.205^2 + 1}} = -0.165 \\ n_1 &= \frac{1}{\sqrt{0.713^2 + 0.205^2 + 1}} = 0.803\end{aligned}$$

De maneira similar, para as tensões $\sigma_2 = 9080$ e $\sigma_3 = -2240$ encontram-se as seguintes direções, respectivamente:

$$\begin{aligned}\ell_2 &= -0.271 \\ m_2 &= 0.885 \\ n_2 &= 0.378 \\ \ell_3 &= -0.773 \\ m_3 &= -0.435 \\ n_3 &= 0.462\end{aligned}$$

Cabe, todavia, comentar que os versores correspondentes às direções principais resultam, em termos numéricos, praticamente ortogonais. Chama-se a atenção para esse fato no sentido de alertar para a "sensibilidade" numérica verificada na determinação dos autovetores (a precisão dispensada na determinação dos autovalores σ_1, σ_2 e σ_3 sofre redução na determinação dos auto-vetores).

A segunda questão levantada tem resposta imediata, porquanto a lei de Hooke permite escrever-se, com (1.85):

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{2 \times 10^7} (11160 - 0.3(9080 - 2240)) = 4.55 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2 \times 10^7} (9080 - 0.3(11160 - 2240)) = 3.20 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{2 \times 10^7} (-2240 - 0.3(11160 + 9080)) = -4.16 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

lembrando-se, outrossim, que, no caso do material em apreço, as direções principais de deformação são as mesmas das de tensões.

1.12 – Energia de deformação

A Figura 1.14 a) ilustra a componente de deformação ε_y correspondente à componente de tensão σ_y . A Figura a.14 b) exhibe o gráfico $\sigma_y \times \varepsilon_y$ representando o comportamento linear decorrente da Lei de Hooke. Nesse processo o trabalho realizado vale:

$$dT_1 = \frac{1}{2} (\sigma_y dx dz) \varepsilon_y dy = \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y dx dy dz = \frac{1}{2} \sigma_y c_{22} \sigma_y dx dy dz \quad (1.101)$$

Pois bem, considere-se agora, que depois de aplicada integralmente a componente de tensão σ_y , aplica-se a componente de tensão τ_{xz} , que produz segundo a Lei de Hooke as deformações:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y^* &= c_{25} \tau_{xz} \\ \gamma_{xz} &= c_{55} \tau_{xz}\end{aligned} \quad (1.102)$$

valendo assinalar que a deformação na direção y indicada na primeira de (1.102) ocorre em superposição à deformação provocada pela aplicação anterior de σ_y .

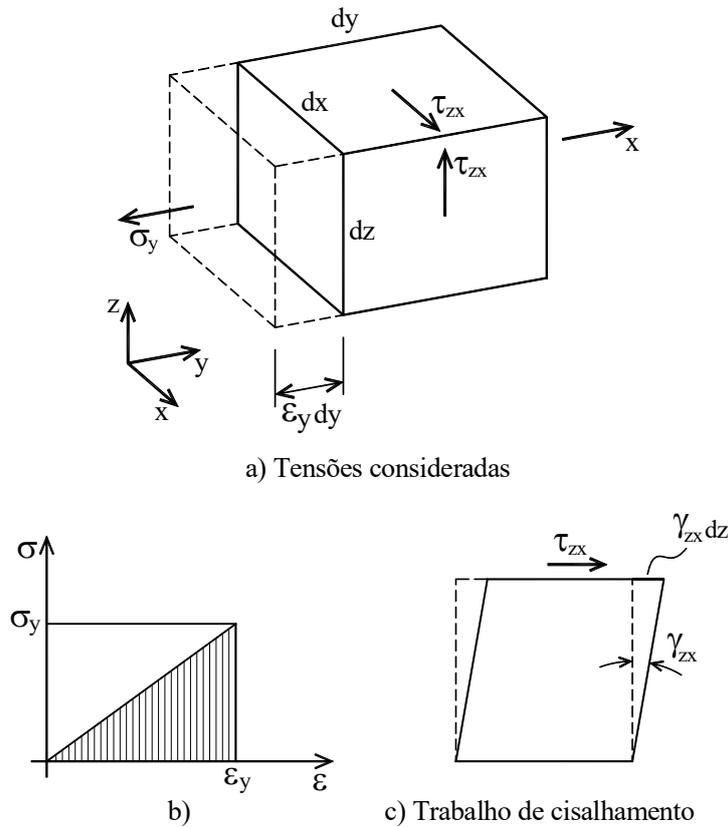


FIGURA 1.14 Energia de deformação

A Figura 1.14 c) exibe a configuração de deslocamento provocada pela ação da componente de tensão τ_{xz} . O trabalho desenvolvido nessa fase de carregamento fica então:

$$dT_2 = (\sigma_y dx dz) (c_{25} \tau_{xz} dy) + \frac{1}{2} (\tau_{xz} dx dy) (c_{55} \tau_{xz} dz) \quad (1.103)$$

uma vez que ao acontecer na direção Oy a deformação provocada pela aplicação da componente τ_{xz} a força $\sigma_y dx dz$ já estava totalmente aplicada, mas a deformação provocada pela componente de deformação τ_{xz} cresce linearmente com ela (daí o fator $1/2$ na sua parcela). O trabalho total envolvido nessa história de carregamento fica então:

$$dT = dT_1 + dT_2 = \frac{1}{2} \sigma_y c_{22} \sigma_y dx dy dz + \sigma_y \tau_{xz} c_{25} dx dy dz + \frac{1}{2} \tau_{xz} c_{55} \tau_{xz} dx dy dz \quad (1.104)$$

Invertendo-se a seqüência, primeiro aplicando-se totalmente a componente de cisalhamento τ_{xz} e depois a componente de tensão σ_y , o trabalho total resulta:

$$dT = \frac{1}{2} \sigma_y c_{22} \sigma_y dx dy dz + \sigma_y \tau_{xz} c_{52} dx dy dz + \frac{1}{2} \tau_{xz} c_{55} \tau_{xz} dx dy dz \quad (1.105)$$

verificando-se que os únicos parâmetros diferentes nos dois casos são as constantes c_{25} e c_{52} que devem ser iguais assumindo-se que a energia no processo de deformação seja conservativa, ou seja, independente da história considerada.

Procedendo-se de modo análogo com as demais componentes conclui-se que:

$$c_{ij} = c_{ji} \quad (1.106)$$

que consiste no conhecido teorema de Maxwell, já mencionado.

O trabalho total quando todas as componentes de tensão são aplicadas pode ser avaliado considerando-se que todas as componentes de tensão crescem simultaneamente e na mesma proporção, da posição de repouso até a posição final. Dada a natureza linear da Lei de Hooke, nesse caso as deformações correspondentes crescem também linearmente, e com isso o trabalho total envolvido permite redigir:

$$U_0 = \frac{dT}{dx dy dz} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (1.107)$$

que consiste na expressão da energia de deformação específica (energia por unidade de volume). Vale assinalar que o expresso em (1.107) é invariante, ou seja, não se altera com a mudança do sistema de referência, pois energia é uma grandeza escalar, e esse fato pode ser facilmente verificado no caso plano, ou seja:

$$\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} = \sigma_{\bar{x}} \varepsilon_{\bar{x}} + \sigma_{\bar{y}} \varepsilon_{\bar{y}} + \tau_{\bar{xy}} \gamma_{\bar{xy}} \quad (1.108)$$

tendo-se que de (1.11) e (1.56) resulta:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\bar{x}} &= \sigma_x l_1^2 + 2\tau_{xy} m_1 l_1 + \sigma_y m_1^2 \\
\tau_{\bar{xy}} &= \sigma_x l_1 l_2 + \tau_{xy} (m_1 l_2 + m_2 l_1) + \sigma_y m_1 m_2 \\
\sigma_{\bar{y}} &= \sigma_x l_2^2 + 2\tau_{xy} m_2 l_2 + \sigma_y m_2^2 \\
\varepsilon_{\bar{x}} &= \varepsilon_x l_1^2 + \gamma_{xy} m_1 l_1 + \varepsilon_y m_1^2 \\
\varepsilon_{\bar{y}} &= \varepsilon_x l_2^2 + \gamma_{xy} m_2 l_2 + \varepsilon_y m_2^2 \\
\gamma_{\bar{xy}} &= 2 \left(\varepsilon_x l_1 l_2 + \frac{\gamma_{xy}}{2} (m_1 l_2 + m_2 l_1) + \varepsilon_y m_1 m_2 \right)
\end{aligned} \tag{1.109}$$

e, com isso, (1.108) pode ser verificada, após manipulações algébricas de alguma monta, tendo-se em conta que a ortogonalidade dos autovetores implica em:

$$\begin{aligned}
l_1^2 + l_2^2 &= 1 \\
l_1 m_1 + l_2 m_2 &= 0 \\
m_1^2 + m_2^2 &= 1 \\
(l_1^2 + l_2^2)(m_1^2 + m_2^2) &= 1 \\
\text{etc.}
\end{aligned} \tag{1.110}$$

A energia de deformação expressa em (1.107) considerando-se as direções principais de tensão fica:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \tag{1.111}$$

Por outro lado, tendo-se em conta a deformação média, ou seja:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \tag{1.112}$$

e definindo-se novas deformações como sendo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^* &= \varepsilon_m + \varepsilon_1 \\
\varepsilon_2^* &= \varepsilon_m + \varepsilon_2 \\
\varepsilon_3^* &= \varepsilon_m + \varepsilon_3
\end{aligned} \tag{1.113}$$

o expresso em (1.111) ganha uma nova redação, ou seja:

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\varepsilon_m + \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1^* + \sigma_2\varepsilon_2^* + \sigma_3\varepsilon_3^*) \quad (1.114)$$

sendo que a primeira parcela da energia de deformação específica pode ser entendida como sendo a parcela da energia referente à expansão volumétrica e a segunda conhecida como **energia de distorção**. No caso de material isotrópico, após operações algébricas, a segunda parcela de (1.114) se exprime:

$$\frac{1+\nu}{E} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right) \quad (1.115)$$

que consiste na grandeza envolvida na definição do critério de V. Mises para a resistência do aço, por exemplo.

Uma outra relação importante decorre do expresso em (1.107), qual seja:

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_i} = \sigma_i \quad (1.116)$$

mostrando que a variação (derivada) da energia específica de deformação em relação a uma componente de deformação resulta na correspondente componente de tensão.

Para materiais isótropos mais gerais, a Lei de Hooke pode ser expressa segundo (1.116) em termos da energia específica expressa por:

$$U_0 = \frac{\lambda + 2G}{2} l_1^2 + 2G l_2 + \frac{\ell + 2m}{3} l_1^3 - 2m l_1 l_2 + n l_3 \quad (1.117)$$

onde ℓ, m e n são os chamados coeficientes de Murnaghan para o caso da relação entre tensões e deformações de ordem superior, e l_1, l_2 e l_3 são os invariantes do estado de deformação que, no caso das direções principais de deformação são dados por:

$$\begin{aligned} l_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ l_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 \\ l_3 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \end{aligned} \quad (1.118)$$

valendo-se assinalar que as constantes do material isótropo são então invariantes do tensor de quarta ordem da Lei de Hooke.

Uma maneira mais direta de se formular tensores cartesianos é a seguinte. Iniciando-se com uma função escalar $\varphi(x, y, z)$, denominada tensor de ordem zero, suas derivadas parciais em relação às três variáveis formam então o vetor:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{array} \right\} \quad (1.119)$$

contendo-se, pois, três componentes. As derivadas parciais das componentes do vetor (1.119) resultam, por conseguinte, em nove componentes, mas devido à igualdade das derivadas mistas, o número de componentes cai para seis, que consiste no tensor de segunda ordem. Procedendo-se com a derivação parcial das componentes do tensor de segunda ordem obtém-se as componentes do tensor de terceira ordem, e assim por diante.

2 - ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

2.1 – INTRODUÇÃO

No estudo elementar da Resistência dos Materiais o comportamento das estruturas é descrito a partir de hipóteses plausíveis quanto à distribuição das tensões ou das deformações, como, por exemplo, no caso da flexão de barras, onde se admite que seções planas permaneçam planas na deformação por flexão (distribuição linear das deformações). É bem verdade que tais hipóteses conduzem a resultados muito próximos da realidade na maioria dos casos da prática; contudo, bastantes numerosos são também os casos nos quais aquelas hipóteses conduzem a resultados muito incorretos, e, além disso, resultados até comprometedores com relação à segurança.

No modelo matemático da elasticidade as tensões e as deformações resultam da integração de sistemas de equações diferenciais obtidos a partir de hipóteses de continuidade, acrescidas da consideração de relações lineares entre tensões e deformação (Lei de Hooke). As hipóteses de continuidade podem ser, à primeira vista, contestadas tendo-se por base a descontinuidade da matéria, que é constituída, como se sabe, por partículas elementares; porém as dimensões dessas partículas são tão reduzidas que não comprometem em nada os resultados. Por outro lado, a linearidade entre as tensões e deformações nem sempre é respeitada pela maioria dos materiais empregados na prática. Contudo, mesmo nesses casos, a elasticidade pode fornecer algumas indicações de interesse, ou, pelo menos, constituir ponto de partida para uma análise mais rigorosa.

Por último cabe assinalar que a consideração de se tratar de estruturas sujeitas a pequenos deslocamentos (ou seja, a ordem de grandeza dos deslocamentos é muito menor que a ordem de grandeza das medidas geométricas características das estruturas) permite grandes simplificações (teoria linear). Essa consideração provém de constatações da prática, porquanto, mesmo nas vizinhanças do colapso, as estruturas, de um modo geral, não apresentam deslocamentos significativos em relação às suas medidas geométricas características (o alongamento de uma barra tracionada na iminência do colapso é muito menor que o comprimento original).

2.2 - COLOCAÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL

Considere-se, de início, a estrutura mostrada na Figura 2.1a), onde se considera não haver solicitação de qualquer natureza. Sob efeito de uma solicitação genérica, a estrutura em tela altera a sua forma, que, de maneira exagerada, ilustra-se na Figura 2.1b). Pois bem, nessa situação dois pontos, P e Q , ocupam, na posição deformada outras posições, P' e Q' . Assim sendo, supondo-se haver continuidade antes e depois da deformação pode-se afirmar que existem duas funções contínuas $u(x, y)$ e $v(x, y)$ que descrevem os movimentos dos pontos da estrutura no caso plano, e $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$ no caso tridimensional. Tais funções, u e v no caso plano e u , v e w no caso tridimensional, são as componentes do denominado estado de deslocamento.

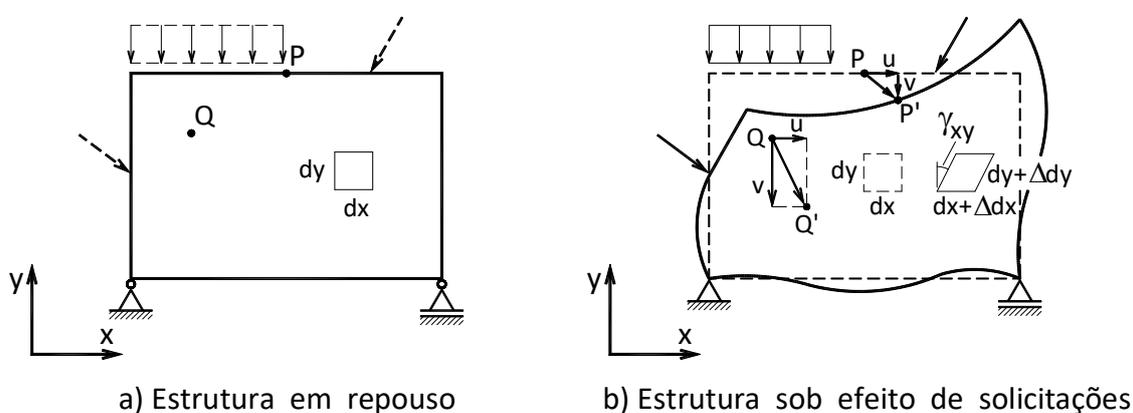


FIGURA 2.1 – Estrutura original e deformada

Outro acontecimento nesse fenômeno da deformação que merece destaque diz respeito à medida da deformação. Nesse propósito, convém analisar de perto o que sucede com um retângulo elementar de lados dx e dy . Pois bem, na situação deformada, conforme se exagera na Figura 2.1b), o retângulo elementar está com uma configuração de paralelogramo (dx e dy são comprimentos elementares e, por conseguinte (continuidade) $dx + \Delta dx$ e $dy + \Delta dy$ são também elementares; daí a consideração de lados retos e paralelos na situação deformada), cujos lados são diferentes dos do retângulo original, e os ângulos deixam de ser retos; isso num caso genérico. Assim sendo, para se definir a configuração deformada torna-se necessário o conhecimento de três parâmetros, ou seja, distorção γ_{xy} e alongamentos Δdx e Δdy no caso plano; e seis parâmetros no caso tridimensional, como já visto no capítulo anterior. Por comodidade, adotam-se, como já visto também no capítulo anterior, no lugar de Δdx e Δdy os parâmetros adimensionais

$\varepsilon_x = \Delta dx/dx$ e $\varepsilon_y = \Delta dy/dy$ a exemplo da distorção γ_{xy} . Disso tudo se percebe que entra em cena o denominado estado de deformação, cujas componentes ε_x , ε_y e γ_{xy} são os parâmetros que quantificam, de modo adimensional, a deformação ocorrida em cada ponto, ou seja, ε_x , ε_y e γ_{xy} são funções contínuas das variáveis x e y no caso plano, conforme já oportunamente mencionado no capítulo anterior.

Por último resta saber-se das interações, ações e reações, que aparecem na estrutura quando da sollicitação. Convém lembrar-se das condições de equilíbrio, já mencionadas no capítulo precedente, onde se evidencia a necessidade de três parâmetros σ_x , σ_y e τ_{xy} , no caso plano, para caracterizar as condições, sob as quais um cubo elementar fica em equilíbrio. Com isso verifica-se a existência de um estado denominado de tensão, cujas componentes são aqueles parâmetros mencionados.

Pelo exposto verifica-se, facilmente, que o problema estrutural, ou estudo do comportamento da estrutura, consiste na busca das componentes de três estados, quais sejam, estado de deslocamento, deformação e tensão, obedecidas, ainda, as condições de contorno. Assim sendo, no caso plano tem-se um total de oito funções incógnitas que são u , v , ε_x , ε_y , γ_{xy} , σ_x , σ_y e τ_{xy} . No que se segue buscam-se as oito relações necessárias, de modo a se ter um sistema de equações compatíveis com tal número de incógnitas.

2.3 - RELAÇÕES BÁSICAS DA ELASTICIDADE PLANA

Pelo exposto no capítulo anterior têm-se já, de início, seis relações entre as componentes dos estados envolvidos no problema estrutural, ou seja, três relações entre as componentes do estado de deslocamento e o de deformação:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.1}$$

e mais três relações entre as componentes do estado de deformação e as do de tensão, expressas pela clássica lei de Hooke, que, no caso plano de tensão, ou seja: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

e que, no caso plano de deformação: $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & -(1+\nu)\nu & 0 \\ -(1+\nu)\nu & 1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

restando saber, agora, das duas relações que ainda faltam para completar as oito necessárias. A propósito, as condições de equilíbrio em forças não foram ainda utilizadas, pois ao nível das tensões constituem expressões redundantes (tensões em faces opostas são iguais e opostas).

2.3.1 - Equações de Equilíbrio

Em resposta à especulação colocada, estudam-se, agora, as condições de equilíbrio em forças (em momento conduz ao resultado preconizado pelo Teorema de Cauchy); todavia, visto que ao nível de tensões tratam-se de condições redundantes, a atenção é agora voltada para os infinitésimos de ordem superior; com isso devem-se considerar também as forças volumétricas.

A Figura 2.2 mostra um elemento infinitesimal, de lados dx e dy , sujeito, no ponto P , ao estado de tensão, cujas componentes são σ_x , σ_y e τ_{xy} . Por outro lado, na face distante dx do ponto P as componentes σ_x e τ_{xy} são incrementadas de seus diferenciais segundo a variável x , e na face distante dy as componentes σ_y e τ_{xy} recebem incrementos diferenciais segundo a variável y . A força por unidade de volume apresenta componentes X e Y , respectivamente, segundo os eixos coordenados Ox e Oy . A espessura é simplesmente designada por dz , no sentido de se ater ao carácter elementar, porém, tratando-se de um caso plano, tal dimensão e comum às faces onde agem as componentes de tensão em jogo no equilíbrio, podendo, pois, ser substituída até pela unidade.

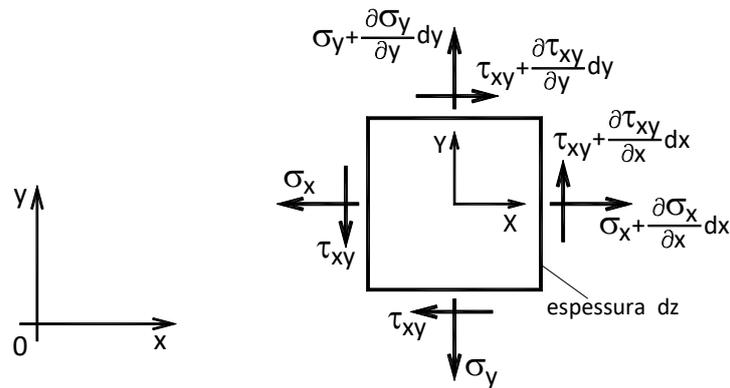


FIGURA 2.2 – Diferenciais de tensão

O equilíbrio de forças segundo o eixo Ox e Oy é expresso, respectivamente, por (vide Figura 2.2):

$$\begin{aligned}
 & \sigma_x dydz - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz + \\
 & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz + X dx dy dz = 0 \\
 & \sigma_y dx dz - \tau_{xy} dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz + \\
 & \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx dz + Y dx dy dz = 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

ou, ainda, excluindo-se os fatores comuns:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

que consiste nas duas relações que faltavam. Cabe assinalar que tais relações exprimem condições no que respeita às derivadas das componentes do estado de tensão, que, em princípio, são tensores de terceira ordem. Todavia tais relações são vetoriais, e assim, a combinação dos tensores de terceira ordem devem resultar em grandeza vetorial. O equilíbrio expresso em (2.5) ganha a seguinte redação num outro sistema de referência:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{\bar{xy}}}{\partial \bar{y}} + \bar{X} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \tau_{\bar{xy}}}{\partial \bar{x}} + \bar{Y} &= 0\end{aligned}\tag{2.6}$$

e isso pode ser verificado com base nas relações (1.4) e (1.11) apresentadas no capítulo anterior, resultando para (2.5) depois de algumas operações algébricas:

$$\begin{aligned}\ell_1 \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \right] + \left[\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y \right] \ell_2 &= 0 \\ m_1 \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \right] + \left[\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y \right] m_2 &= 0\end{aligned}\tag{2.7}$$

indicando-se a equivalência entre o equilíbrio expresso em (2.5) e em (2.6), visto que os cossenos diretores não são nulos simultaneamente.

2.3.2 - Equação de Compatibilidade

As componentes do estado de deformação, ε_x , ε_y e γ_{xy} são, naturalmente, parâmetros independentes; contudo, convém ser observada a natureza das relações (2.1), onde as três componentes do estado de deformação (parâmetros independentes) são definidas em termos de apenas duas funções (componentes do estado de deslocamento); por conseguinte deve-se esperar alguma relação ao nível de derivadas daquelas componentes que amarra, por assim dizer, tais componentes, uma vez que se relacionam com as duas componentes do estado de deslocamento (em resumo, três parâmetros independentes derivados de apenas dois!). Pois bem, especulativamente devem-se esperar também relações dessa natureza entre as componentes do estado de tensão.

Com efeito, as relações (2.1) permitem que se escreva:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\end{aligned}\tag{2.8}$$

e, por via de consequência, tem-se

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.9)$$

que constitui a denominada equação de compatibilidade, pois exprime uma condição que se origina da suposta continuidade dos deslocamentos (as derivadas mistas são idênticas independentemente da ordem de derivação).

2.4 – ESTADO PLANO DE TENSÃO

Um grande número de peças estruturais, nas quais uma das dimensões é bem menor que as demais que, por outro lado, apresentam a mesma ordem de grandeza, possuem a função estrutural de resistir esforços contidos no plano das grandes dimensões. É o caso, por exemplo, das vigas paredes. Nessa situação, o tratamento plano justifica-se tendo-se em vista que a dimensão menor pode ser considerada como um diferencial em relação às demais (dimensão menor dz). Assim sendo, tudo se passa como se as componentes dos estados de deslocamento, tensão e deformação não variassem com a coordenada z . Todavia, cabe adiantar que tratamento plano conduz às discrepâncias nas regiões próximas do contorno, porém esse assunto é objeto de comentários posteriores (Princípio de Saint-Venant).

Na integração das oito equações nas componentes dos três estados envolvidos no problema estrutural é clássica a variante onde se procura colocar as expressões em deformação e deslocamentos em termos das componentes de tensão (Método dos esforços ou da flexibilidade). Para tanto, torna-se conveniente redigir a equação de compatibilidade (2.9), tirando-se partido, no caso do estado plano de tensão, das relações (2.2), tendo-se em vista as (2.5), ou seja:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = -(1 - \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (2.10)$$

ou, ainda, em termos simbólicos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 - \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (2.11)$$

Com isso, do conjunto de oito equações, destaca-se um conjunto de apenas três equações nas componentes do estado de tensão, ou seja, as equações (2.5) juntamente com (2.11). Esse procedimento de buscar a solução com essas três relações é denominado processo dos esforços, uma vez que as incógnitas são todas mecânicas, não envolvendo incógnitas geométricas.

2.5 - ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO

O estado plano de deformação caracteriza-se pelo fato de serem nulas três das componentes de deformação, ou seja: $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Dentre as estruturas, esse é o caso, por exemplo, de algumas estruturas de barragens de gravidade e das estruturas de revestimento de túneis em rocha (para a estrutura se alongar segundo o seu eixo longitudinal carece que os grandes maciços de suporte também se alonguem; o que na prática não ocorre).

Pois bem, a variante do Método dos Esforços implica, de modo análogo ao caso plano de tensão, na seguinte equação de compatibilidade; expressa, agora, em termos das componentes de tensão:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (2.12)$$

lembrando-se, em tempo, que essa nova redação deriva da equação (2.9), tendo-se em vista as relações (2.3) e (2.5).

2.6 - FUNÇÕES DE AIRY (FUNÇÃO DE TENSÃO)

Uma notável contribuição à Teoria da Elasticidade foi dada pelo inglês G.B. AIRY (1862) ao descobrir uma engenhosa manobra algébrica, segundo a qual aquele conjunto de três equações nas componentes do estado de tensão pode de ser reduzido a tão somente uma equação a uma incógnita, à custa de um levantamento da ordem de derivação (na matemática, como no mundo, tudo tem o seu preço, mesmo com o concurso de procedimentos geniais).

Antes, porém, de se abordar esse assunto, carece esclarecer certos pormenores referentes à natureza das forças de volume. De acordo com os conceitos da Física clássica, as forças de volume encontram razão de ser na existência de campos de força como, por exemplo, o gravitacional, que mais de perto interessa aos técnicos do ramo civil. Pois bem, tais forças podem ser expressas por meio da variação do potencial do campo correspondente, ou seja:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ Y &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde Ω é o potencial, sendo que o sinal negativo provém do fato de que o trabalho da força sendo positivo, por exemplo, Xdx positivo, indica uma queda no campo de forças. Convém atentar-se para o fato de que, no caso plano, o potencial Ω é uma função das variáveis x e y , a exemplo das componentes dos estados envolvidos no problema estrutural.

A função de AIRY, denominada de φ , é definida a partir da suposição da existência de uma função que possui as seguintes características

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \sigma_x - \Omega \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \sigma_y - \Omega \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= -\tau_{xy}\end{aligned}\tag{2.14}$$

ou seja, da existência de uma função, cujas derivadas segundas resultam nas componentes de tensão, a menos do potencial para as componentes normais.

Constata-se facilmente que a função φ , que goza das propriedades apontadas em (2.14), satisfaz, de imediato e simultaneamente, as equações de equilíbrio (2.5), recaindo-se numa identidade verificada para derivadas mistas. Por outro lado, a equação de compatibilidade (2.11), correspondente ao caso plano de tensão ganha, em termos de φ , uma nova redação, ou seja:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = -(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right)\tag{2.15}$$

e a equação de compatibilidade (2.12), que corresponde ao caso plano de deformação, ganha a redação:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = - \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right)\tag{2.16}$$

e, assim sendo, o problema estrutural consiste na procura de uma função ϕ que obedece a equação (2.15) ou (2.16), conforme o caso, e que no contorno é compatível com as ações aí aplicadas.

Nos problemas práticos a integração da equação (2.15), ou (2.16), é em parte aliviada, porquanto as forças volumétricas de origem gravitacional variam muito pouco no espaço ocupado pelas estruturas, ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial x} &= - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \cong 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial y} &= - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \cong 0\end{aligned}\tag{2.17}$$

A propósito cabe esclarecer que uma mesma massa tem, no alto da cordilheira dos Andes, por exemplo, praticamente o mesmo peso que tem ao nível do mar. Assim,

tanto no caso plano de tensão, como no de deformação, a equação a ser integrada consiste em:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.18)$$

e simplificação adicional ocorre nos casos onde o peso próprio pode ser desprezado em face das demais solicitações, pois, nesses casos, as expressões (2.12) simplificam, ou seja:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.19)$$

valendo acrescentar que mesmo nos problemas onde o peso próprio é significativo, a integração pode ser alcançada lançando-se mão da propriedade da superposição de soluções, ou seja, nesse caso φ é dada pela soma de duas funções, na qual a primeira conduz às tensões referentes à solicitação externa e a segunda às tensões referentes às forças de volume, sendo que essas duas funções devem obedecer às equações (2.18) e (2.19) e as correspondentes condições de contorno (compatível no contorno com as solicitações aí existentes).

Para finalizar, convém esclarecer que, na Teoria da Elasticidade, os problemas têm sido tratados com um procedimento inverso, ou seja, dada uma solução da equação (2.18), por exemplo, procura-se o problema estrutural resolvido com tal solução. Parece, à primeira vista, um procedimento muito estranho, pois o normal é o contrário, ou seja, dado um problema procura-se a solução; e não dada uma solução procura-se o problema. Todavia, achar o problema resolvido com uma dada solução constitui também um problema. O procedimento normal, que consiste na análise do comportamento de uma estrutura dada, em geral só é viável mediante integração numérica, pois o caminho analítico (soluções de forma fechada) não parece meio eficiente, a não ser em casos muito particulares (em geral a solução não é nenhuma das funções conhecidas). A propósito dos métodos de integração numérica, dois deles serão objeto dos próximos capítulos.

2.7 - FUNÇÕES DE AIRY POLINOMIAIS

Alguns problemas práticos podem ser resolvidos satisfatoriamente por meio de polinômios (algébricos, por exemplo). É o caso da flexão de barras sob certas condições de carregamento. No que se segue são expostos alguns casos, onde soluções polinomiais resolvem alguns problemas da prática.

2.7.1 - Casos Elementares

Considere-se, em primeiro lugar, a função de AIRY que obedece à relação (2.18):

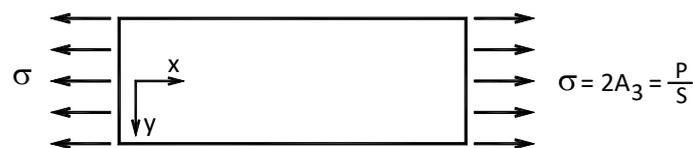
$$\varphi = A_1x^2 + A_2xy + A_3y^2 \quad (2.20)$$

que consiste num polinômio, cujos termos são do segundo grau. Naturalmente, em face das relações (2.19), verifica-se, facilmente, que a inclusão de termos de grau menor em nada altera o campo de tensão. Pois bem, a função expressa em (2.20) corresponde às seguintes componentes de tensão (vide (2.19)):

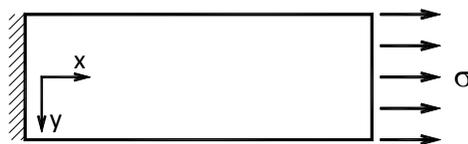
$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2A_3 \\ \sigma_y &= 2A_1 \\ \sigma_{xy} &= -A_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

ou seja, um estado de tensão uniforme. Essa resposta parece trivial, porém deve-se atentar para o fato de que tal solução garante a existência de estados uniformes de tensão mesmo em casos não a nível elementar, onde a uniformidade é garantida pela continuidade das funções em jogo.

É interessante constatar que, no caso de se ter $A_1 = A_2 = 0$, o problema resolvido trata do conhecido caso de solitação de uma barra, ou chapa, por força normal, ou tração uniforme, com A_3 valendo, naturalmente, $P/2S$, sendo P a força axial e S a área da seção transversal da barra. A Figura 2.3a) e b) ilustra o problema em questão.



a) Configuração da solitação



b) Barra vinculada

FIGURA 2.3 – Barra sob tração uniforme

Com relação ao estado de deformação tem-se nesse caso de força normal o seguinte (Lei de Hooke):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{2A_2}{E} = \frac{P}{ES} \\ \varepsilon_y &= -\nu \frac{2A_2}{E} = -\nu \frac{P}{ES} \\ \gamma_{xy} &= 0\end{aligned}\quad (2.22)$$

e, com relação ao estado de deslocamento:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x = \frac{P}{ES} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \varepsilon_y = -\nu \frac{P}{ES} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \gamma_{xy} = 0\end{aligned}\quad (2.23)$$

Por outro lado, integrando-se as duas primeiras das (2.23) encontram-se:

$$\begin{aligned}u &= \frac{Px}{ES} + f_1(y) + C_1 \\ v &= -\nu \frac{Py}{ES} + f_2(x) + C_2\end{aligned}\quad (2.24)$$

onde $f_1(y)$ e $f_2(x)$ são funções apenas nas variáveis y e x , respectivamente, sendo C_1 e C_2 constantes de integração. Levando as (2.24) na terceira das (2.23) encontra-se:

$$\frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = 0\quad (2.25)$$

cabendo-se, agora, analisar em que condições a (2.25) pode ser satisfeita, lembrando-se que esta relação deve ser obedecida para todo x e y , como, por exemplo, para o ponto de coordenadas $x = 1$ e $y = 2$; e também para o ponto de coordenadas $x = 2$ e $y = 1$. Ora, tal condição só pode se verificar com:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1(y)}{\partial y} &= C_3 \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} &= -C_3\end{aligned}\tag{2.26}$$

com c_3 sendo uma constante. Assim sendo, a (2.24) ganha a redação:

$$\begin{aligned}u &= \frac{Px}{ES} + C_3y + C_1 \\ u &= -v \frac{Py}{ES} - C_3x + C_2\end{aligned}\tag{2.27}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração (vide expressão (2.24)).

No caso da vinculação apontada na Figura 2.3b), lembrando-se que o engaste indicado não impede movimentos transversais, tem-se:

$$\begin{aligned}u(x = 0, y = 0) &= 0 \rightarrow C_1 = 0 \\ v(x = 0, y = 0) &= 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ u(x = 0, y \neq 0) &= 0 \rightarrow C_3 = 0\end{aligned}\tag{2.28}$$

e, com isso, tem-se, nesse caso:

$$\begin{aligned}u &= Px/ES \\ u &= -vPy/ES\end{aligned}\tag{2.29}$$

sendo oportuno assinalar que o problema em tela, dentro das considerações levantadas, está resolvido, pois as componentes do estado de deslocamentos são dadas por (2.29), as do estado de deformação por (2.22) e as do de tensão por (2.21) com $A_3 = P/2S$ e $A_1 = A_2 = 0$.

Outro caso interessante é o da flexão pura, conforme ilustra-se na Figura 2.4, sendo esse caso resolvido com a função de tensão:

$$\varphi = Ay^3\tag{2.30}$$

sendo A uma constante. Com efeito, o estado de tensão correspondente (vide 2.19) é dado por:

$$\sigma_x = 6Ay\tag{2.31}$$

com $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

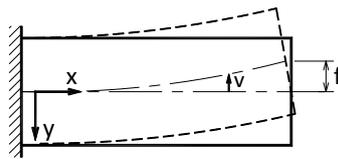
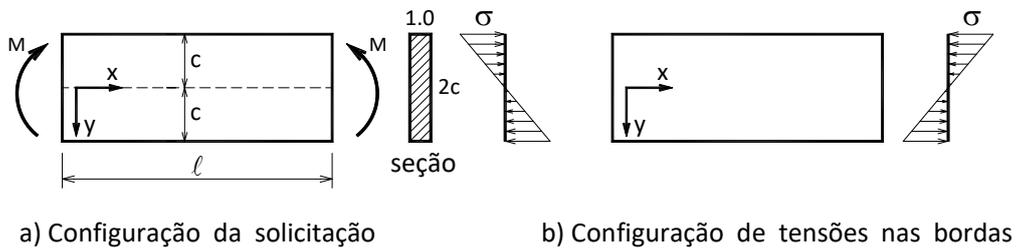


FIGURA 2.4 – Barra sob flexão pura

Por outro lado, a constante A está relacionada com a magnitude do momento fletor aplicado; portanto, por considerações de equilíbrio, tem-se:

$$\int_S (\sigma_x dS) y = M \quad (2.32)$$

onde S é a área da seção transversal da viga, ou seja:

$$\begin{aligned} 6A \int_S y^2 dS &= M \\ A &= \frac{M}{6I} \\ I &= \int_S y^2 dS \end{aligned} \quad (2.33)$$

sendo I o momento de inércia da seção transversal da viga. Com isso tem-se, finalmente:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M}{I} y \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

o que confirma os resultados já preconizados pela Resistência dos Materiais. No que respeita às componentes do estado de deformação, supondo-se material obediente à lei de Hooke, têm-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M}{EI} y \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} = -\frac{\nu M}{EI} y \\ \gamma_{xy} &= 0\end{aligned}\tag{2.35}$$

e, finalmente, as componentes do estado de deslocamento podem ser encontradas mediante um procedimento análogo ao já utilizado no caso anterior. De início tem-se:

$$\begin{aligned}u &= \frac{M}{EI} yx + f_1(y) + C_1 \\ v &= -\frac{\nu M}{EI} \frac{y^2}{2} + f_2(x) + C_2\end{aligned}\tag{2.36}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração. Todavia, a terceira das (2.35), que consiste na nulidade da distorção, implica em:

$$\frac{Mx}{EI} + \frac{df_2(x)}{dx} + \frac{df_1(y)}{dy} = 0\tag{2.37}$$

ou seja, com base nas mesmas considerações já levantadas anteriormente, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{Mx}{EI} + \frac{df_2(x)}{dx} &= C_3 \\ \frac{df_1(y)}{dy} &= -C_3\end{aligned}\tag{2.38}$$

onde C_3 é uma nova constante de integração; ou, ainda, por integração de (2.38):

$$\begin{aligned}f_2(x) &= C_3x - \frac{Mx^2}{2EI} \\ f_1(y) &= -C_3y\end{aligned}\tag{2.39}$$

e, com isso, a (2.36) fica, agora, com a seguinte redação:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{M}{EI} yx - C_3 y + C_1 \\
 v &= -\frac{M}{EI} \left(v \frac{y^2}{2} + \frac{x_2}{2} \right) + C_3 x + C_2
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

onde as constantes de integração C_1 , C_2 e C_3 dependem do tipo de vinculação da viga. Por exemplo, no caso de viga em balanço, conforme se exhibe na figura 2.4c), tem-se:

$$\begin{aligned}
 u(x = 0, y = 0) &= 0 \\
 v(x = 0, y = 0) &= 0 \\
 \frac{\partial v(x = 0, y = 0)}{\partial x} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

ou seja, da primeira das (2.42) deduz-se $C_1 = 0$, da segunda $C_2 = 0$ e da terceira $C_3 = 0$. Assim sendo, nesse caso tem-se:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{M}{EI} xy \\
 v &= -\frac{M}{EI} \left(\frac{x^2}{2} + v \frac{y^2}{2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

o que vem confirmar, mais uma vez, os resultados da Resistência dos Materiais com relação ao movimento da linha de ordenada média dada por $y = 0$. Cabe ressaltar, a propósito, que não deve causar estranheza o fato de ser nulo na linha média o movimento u , porquanto, conforme reiteradas vezes mencionado, aborda-se o assunto em teoria de pequenos deslocamentos (o movimento u dos pontos da linha média é muito menor que o movimento v , e dessa forma é que deve ser entendido esse valor nulo).

2.7.2 - Viga em Balanço

A Figura 2.5 mostra uma viga em balanço de largura unitária, altura $2c$ e comprimento ℓ , engastada numa extremidade e submetida a uma solicitação de resultante P na extremidade livre. O engastamento da viga e o modo como a solicitação é aplicada será assunto para um comentário posterior.

Em conformidade com a solicitação em pauta, as tensões no contorno devem obedecer às seguintes condições (vide Figura 2.5).

a) para $y = \pm c$ e x qualquer se tem: $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$

b) para $x = 0$ e y qualquer (extremidade livre) tem-se $\sigma_x = 0$ e ainda:

$$\int_S \tau_{xy} dS = P \quad (2.43)$$

e tais condições podem ser obedecidas combinando convenientemente um polinômio com termos do quarto grau com um de termos do segundo grau. No caso em apreço a função de AIRY é dada por:

$$\varphi = \frac{3P}{4c} \left(xy - \frac{xy^3}{3c^2} \right) \quad (2.44)$$

(é fácil constatar-se que o polinômio em questão constitui uma função de AIRY, pois na variável x a potência é unitária) e as tensões correspondentes por:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{3P}{2c^3} xy \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{3P}{4c^3} \left[1 - \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

cabendo ser notado que as expressões (2.45) coincidem com as preconizadas pela Resistência dos Materiais, uma vez que:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1(2c)^3}{12} = \frac{2}{3} c^3 \\ m_s &= 1(c-y) \left[y + (c-y) / 2 \right] \\ M &= -Px \\ V &= -P \end{aligned} \quad (2.46)$$

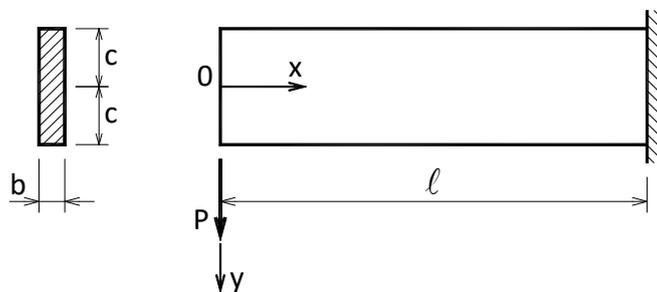


FIGURA 2.5 – Viga em balanço

sendo I o momento de inércia da seção transversal, m_s o momento estático da área correspondente ao nível onde se calcula o cisalhamento, M e V , respectivamente, o momento fletor e a força cortante na seção em consideração.

Exibem-se na Figura 2.6 as tensões que ocorrem no contorno, para essa solução apontada.

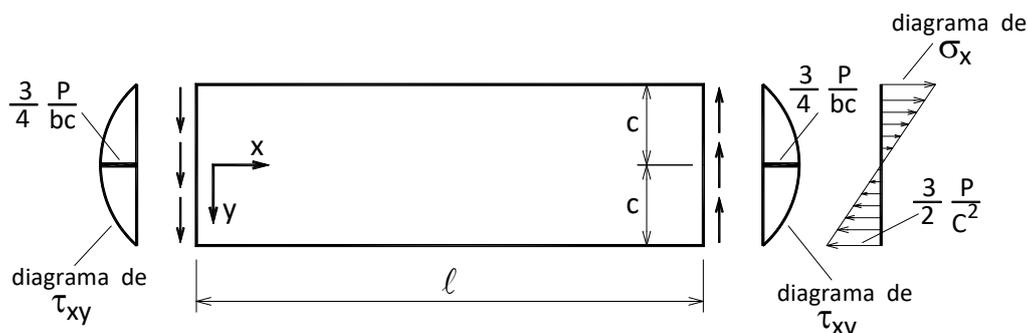


FIGURA 2.6 – Tensões no contorno da viga em balanço

Cabe, neste ponto, esclarecer um aspecto de grande interesse prático. Na solução apresentada o carregamento externo é dado por uma distribuição parabólica de cisalhamento na face da extremidade livre, cuja resultante é P ; todavia há outras maneiras de aplicação do carregamento como, por exemplo, cisalhamento uniforme num certo trecho da face da extremidade livre e de resultante P . Esse carregamento promove em regiões afastadas tensões praticamente iguais às do caso anterior. Tal constatação fundamenta-se no Princípio de Saint-Venant, que garante a propagação limitada das perturbações locais do estado de tensão. De um modo geral, são duas as maneiras de se enunciar esse Princípio.

Primeira Maneira: As tensões criadas por forças em equilíbrio -resultante nula- aplicadas numa parte pequena de um corpo elástico desaparecem, praticamente, numa extensão que tem por ordem de grandeza a dimensão da zona de aplicação das forças. Como ilustração imediata dessa colocação tem-se o caso das tensões criadas por uma ferramenta de corte, como mostra a Figura 2.7a). As tensões criadas por uma turquesa ao se cortar um arame ficam restritas à região do corte (não faz muito sentido uma propagação ilimitada, pois, se assim fosse, os danos causados pelo corte se estenderiam por uma grande extensão). Cumpre, contudo, chamar a atenção para a necessidade de se definir bem o que seja parte pequena, conforme colocado no Princípio. As tensões criadas por momentos opostos aplicados nas mesas de um perfil I, conforme se ilustra na Figura 2.7b), propagam-se para dentro da peça, pois o perfil, nesse caso de seção delgada, comporta-se como se as mesas fossem duas vigas independentes, e cada uma, isoladamente, sujeita à flexão (a alma por ser também delgada apresenta pouca rigidez transversal). Assim sendo a altura h do perfil não seria, nesse caso, uma dimensão pequena, todavia a espessura d das mesas e a da alma.

Segunda Maneira: Substituindo-se um grupo de forças por outro estaticamente equivalente -de mesma resultante- as variações criadas no estado de tensão

desaparecem, praticamente, numa extensão, cuja ordem de grandeza é de ordem das da zona na qual foram aplicadas as forças.

Exemplifica-se essa segunda maneira de enunciar o Princípio com o caso do ensaio de peças à tração. As castanhas da máquina de ensaio introduzem a tração mediante pressões locais e forças de atrito, criando localmente, nas regiões de engastes, tensões muito irregulares, conforme se ilustra na Figura 2.8a).

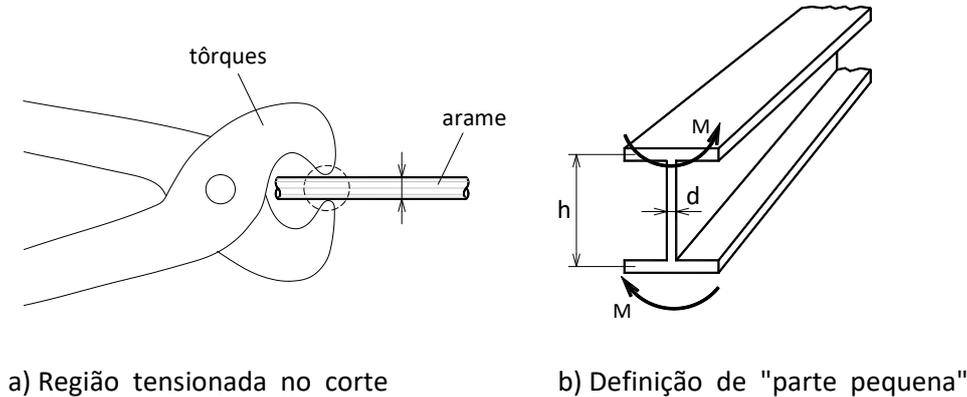


FIGURA 2.7 – Ilustração do Princípio de Saint-Venant (1º enunciado)

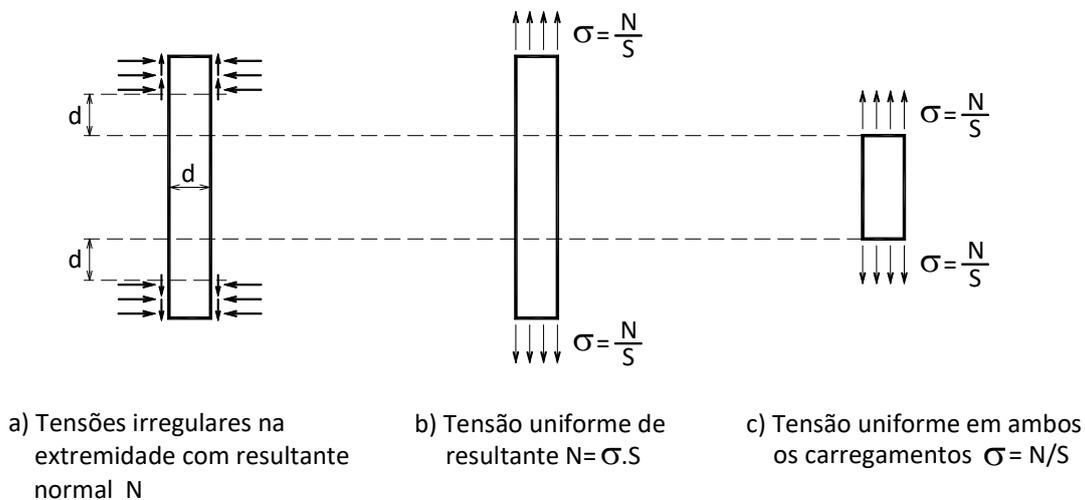


FIGURA 2.8 – Ilustração do Princípio de Saint-Venant (2º enunciado)

Na Figura 2.8b) a mesma tração é vista como uma solicitação aplicada segundo tensão uniforme; e nesse caso a tensão é uniforme também no interior da peça, conforme já visto anteriormente. Assim sendo, o Princípio de Saint-Venant garante que em ambos os casos a tensão no interior da peça, conforme mostra a Figura 2.8c), é uniforme (se isso não ocorresse, os resultados obtidos em ensaios de tração não teriam nenhuma validade).

Como se nota, o Princípio de Saint-Venant não permite uma definição muito clara, e também não é possível prová-lo na sua generalidade; contudo sua veracidade é constatada em inúmeros casos especiais de cálculo mais requintado. Tais defeitos conceituais não diminuem em nada a utilidade do Princípio, pois ele

permite, por certas idealizações, tornar acessíveis ao cálculo problemas estruturais bastante complexos.

2.7.3 - Viga Simplesmente apoiada

A viga mostrada na Figura 2.9 apresenta vão livre de 2ℓ , altura $2c$, espessura unitária, e a solicitação provém de uma carga uniformemente distribuída aplicada na face superior.

As condições que o estado de tensão deve satisfazer no contorno da viga, tendo em vista a colocação do sistema de referência indicado na Figura 2.9, são:

- a) para $y = \pm c$ e x qualquer tem-se: $\tau_{xy} = 0$
- b) para $y = -c$ e x qualquer tem-se: $\sigma_y = -q$
- c) para $y = c$ e x qualquer tem-se: $\sigma_y = 0$
- d) para $x = \pm \ell$ (extremidades) tem-se:

$$\begin{aligned} \int_S \tau_{xy} &= \pm q\ell \\ \int_S \sigma_x ds &= 0 \\ \int_S \sigma_x y dS &= 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

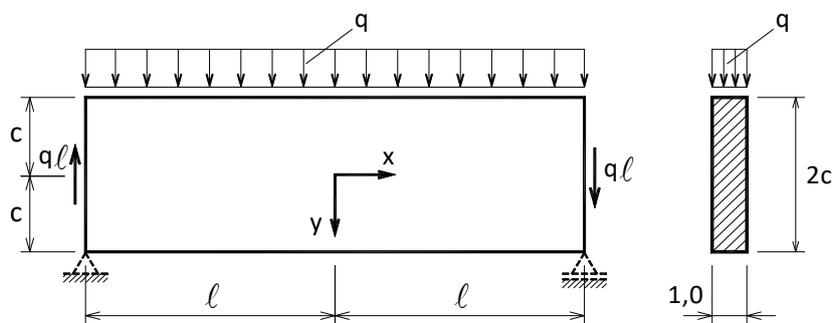


FIGURA 2.9 – Viga sobre dois apoios

onde S indica a área da seção. Convém ser notado que as integrais indicadas em (2.47) correspondem, respectivamente, à força cortante, força normal e momento fletor nas extremidades da barra.

As condições de contorno apontadas são satisfeitas por uma conveniente combinação de termos de polinômios do segundo, terceiro e quarto graus. A função de AIRY desse caso conduz ao seguinte estado de tensão:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{q}{2I}(\ell^2 - x^2)y + \frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right) \\
\sigma_y &= -\frac{q}{2I}\left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3\right) \\
\tau_{xy} &= -\frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x
\end{aligned} \tag{2.48}$$

cabendo-se esclarecer que a primeira parcela da expressão de σ_x corresponde à já conhecida da Resistência dos Materiais. A segunda, conforme se percebe facilmente, corresponde a um carregamento auto-equilibrado e, mais que isso, nos casos onde $\ell \gg c$ a magnitude do valor correspondente é muito menor que o da primeira; o que indica a validade prática da teoria técnica da flexão. O mesmo fato ocorre com σ_y , segunda das expressões (2.48). Finalizando, a expressão de τ_{xy} coincide com a preconizada pela Resistência dos Materiais.

São poucos os problemas práticos resolvidos de maneira explícita como até aqui analisado. Em verdade, a solução geral de equações diferenciais parciais são transcendentais, uma vez que o contorno contempla uma infinidade de pontos e, em decorrência, uma infinidade de constantes de integração. Em consequência, apenas soluções aproximadas via integração numérica são viáveis; a exemplo do método das diferenças finitas, método dos elementos finitos, dos elementos de contorno, entre outros.

2.8 - TORÇÃO LIVRE

Para simplificar a exposição, considere-se, por exemplo, uma barra de seção qualquer, porém constante ao longo do comprimento, sujeita a uma solicitação por torção, conforme se ilustra na Figura 2.10. Nessa situação, tudo indica ser plausível supor que, dentre as componentes do estado de tensão, apenas as componentes τ_{xy} e τ_{xz} , conforme sistema de referência apontado na figura, tenham valores não nulos, sendo as demais nulas em qualquer ponto da barra. Tal consideração faz sentido, pelo menos à primeira vista, pois o exame do equilíbrio de uma parte da barra mostra que a resultante das tensões atuantes na seção da barra consiste apenas num momento torçor, igual e de sentido contrário ao do aplicado na extremidade.

Pois bem, em se tratando de material elástico, linear, homogêneo e isótropo, aquelas considerações implicam em algumas restrições no estado de deslocamentos. Em primeiro lugar, pelo fato de serem nulas as tensões normais, ou seja: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0\end{aligned}\tag{2.49}$$

e com isso percebe-se que o movimento u não varia com x , v com y e w com z , ou seja:

$$\begin{aligned}u &= u(y, z) \\ v &= v(x, z) \\ w &= w(x, y)\end{aligned}\tag{2.50}$$

mas, por outro lado, as componentes de distorção ficam então:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, z)}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z)}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z)}{\partial y} = 0\end{aligned}\tag{2.51}$$

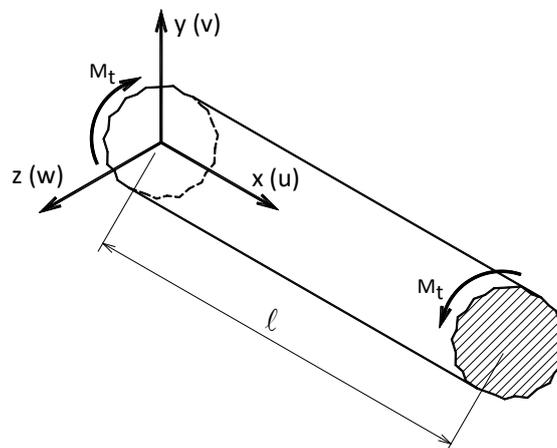


FIGURA 2.10 – Barra de seção qualquer submetida à torção

e mais, tendo-se em vista que em todas as seções o momento torçor solicitante é o mesmo, torna-se também plausível supor que τ_{xy} e τ_{xz} não variam com x , ou seja, γ_{xy} e γ_{xz} não variam com x . Assim sendo, de (2.51) constata-se algo de grande interesse. Com efeito, da primeira de (2.51) tira-se que $\partial v(x, z)/\partial x$ é uma função só

de z , pois γ_{xy} não varia com x ; do mesmo modo, da segunda de (2.51) tira-se que $\partial w(x, y)/\partial x$ é uma função só de y . Com relação à terceira de (2.51) duas situações são possíveis, ou seja: ou $\partial v(x, z)/\partial z = C$ e $\partial w(x, z)/\partial y = -C$, onde C é uma constante; ou então $\partial v(x, z)/\partial z = f(x)$ e $\partial w(x, y)/\partial y = -f(x)$, onde $f(x)$ é uma função exclusiva da variável x . O primeiro caso não faz sentido pois, por exemplo, $\partial v(x, z)/\partial z$ é, por força de considerações anteriores, uma função exclusiva de z , ou seja, v é do tipo:

$$v = xf(z)$$

e, assim sendo, $\partial v(x, z)/\partial z = x df/dz$ e, por isso, não pode ser constante. Dessa forma só resta como situação possível o segundo caso, e mesmo assim com df/dz resultando constante. Esclarecendo melhor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= x \frac{df(z)}{dz} = Kx \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= x \frac{df(z)}{dz} = -Kx \end{aligned} \tag{2.52}$$

onde K é uma constante. Em resumo, o estado de deslocamento tem por componentes funções do tipo:

$$\begin{aligned} u &= F(y, z) \\ v &= Kxz \\ w &= -Kxy \end{aligned} \tag{2.53}$$

finalizando assim a parte cinemática da torção.

O problema em estudo é colocado de uma forma mais clássica, tendo-se em vista as duas últimas de (2.53), mediante a consideração de rotações elásticas relativas, onde K é a rotação relativa por unidade de comprimento, denominada doravante de θ . Ilustra-se essa colocação na Figura 2.11. Considere-se, de início, um ponto genérico "A", distante "x" de uma dada seção em consideração. Após a rotação θx , ou seja, sob efeito de um momento torçor, o ponto "A" passa a ocupar uma posição A' . Pois bem, em se tratando de pequenas rotações, ou seja, ângulo θx pequeno (para se ter uma ordem de grandeza, $\theta x < 5\pi/180$), é lícito escrever-se:

$$\begin{aligned} v &= -r\theta x \cos \alpha = -\theta x z \\ w &= r\theta x \sin \alpha = \theta x y \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde r é a distância do ponto A ao centro de rotação e α o ângulo que r faz com eixo z . Para maior facilidade algébrica, o movimento u é expresso na forma:

$$u = \theta\psi(y, z) \quad (2.55)$$

e não como expresso na primeira das (2.53). Sendo oportuno registrar que a função $\psi(y, z)$ expressa o empenamento da seção.

As componentes não nulas do estado de deformação, com base nas expressões (2.54) e (2.55), passam a ser expressas por:

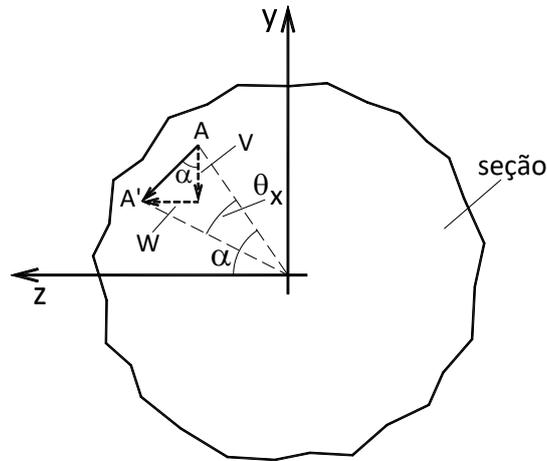


FIGURA 2.11 – Configuração de deslocamentos na rotação elástica

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

e as correspondentes componentes do estado de tensão ganham a seguinte redação:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal. Assim sendo, resta, agora, buscar duas relações de modo a permitir a determinação das duas incógnitas em jogo, ou

seja, θ e $\psi(y, z)$, lembrando-se, todavia, que as relações entre as componentes do estado de deslocamentos e as do de deformação já foram utilizadas; o mesmo acontecendo com as relativas à lei de Hooke. Assim sendo, resta, no fundo, lançar mão de equações de equilíbrio: uma interna, ou seja, uma condição nas variações das tensões, e outra relativa ao equilíbrio entre as tensões internas e o esforço torçor aplicado.

2.8.1 - Equação de Equilíbrio Interno

A Figura 2.12 mostra um elemento infinitesimal da barra, onde aparecem as tensões atuantes nas faces do paralelepípedo elementar. Cabe ressaltar, conforme considerações anteriores, que as tensões cisalhantes não variam com a variável longitudinal x . Assim, são indicados apenas os diferenciais correspondentes às variações segundo Ox , Oy e Oz . Pois bem, o equilíbrio segundo Ox implica em:

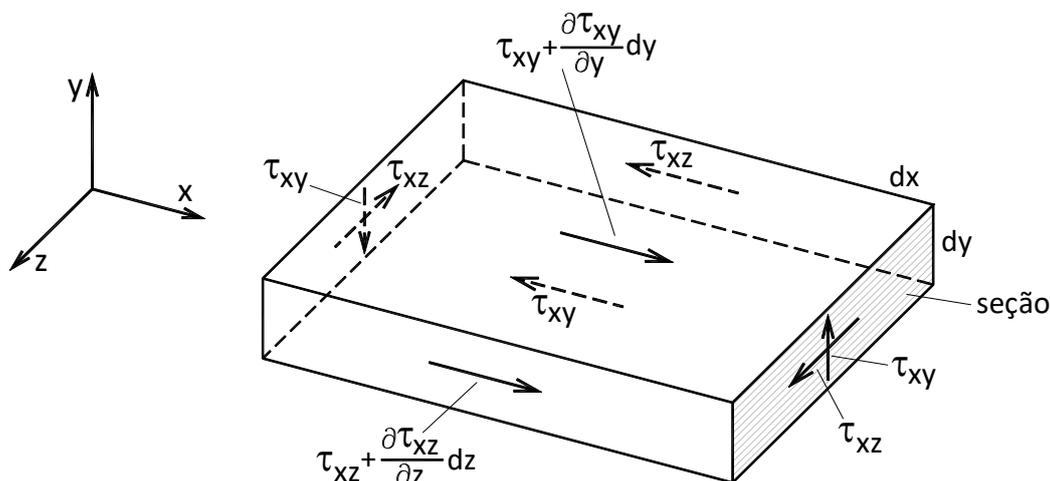


FIGURA 2.12 – Configuração de tensão num volume elementar

$$-\tau_{xz} dx dy - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz = 0 \quad (2.58)$$

ou seja, cancelando os termos comuns tem-se:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.59)$$

ou, ainda, tendo-se em vista (2.57), essa expressão ganha a seguinte redação:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.60)$$

sendo que no contorno da seção transversal, a equação diferencial (2.59), ou (2.60), deve obedecer às condições aí impostas ao estado de tensão, ou seja, a componente de cisalhamento normal ao contorno deve ser nula, por força do teorema de CAUCHY, porquanto na face externa da barra supõe-se não haver sollicitação. A Figura 2.13 exhibe uma seção transversal genérica, onde se indica a configuração de tensão no contorno. Tomando, para o contorno, uma coordenada curvilínea s , a componente de cisalhamento normal ao contorno é dada por

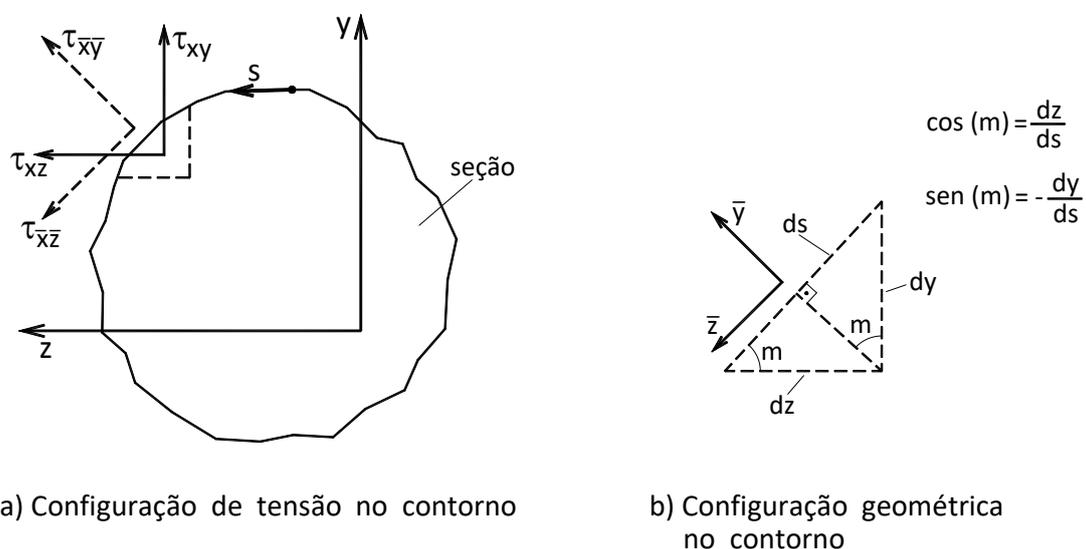


FIGURA 2.13 – Condições de contorno

$$\tau = \tau_{\bar{y}\bar{z}} = \tau_{xy} \frac{dz}{ds} - \tau_{xz} \frac{dy}{ds} = 0 \quad (2.61)$$

que consiste na transformação de coordenadas do sistema Oyz para um sistema $O\bar{y}\bar{z}$ com o eixo $O\bar{y}$ normal ao contorno (vide Figura 2.13a), onde o sinal negativo do segundo termo indica, no caso em questão, o fato de y decrescer com o aumento da coordenada s , conforme se ilustra na figura 2.13b). A expressão (2.61), tendo em vista (2.57), passa a escrever-se:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \frac{dz}{ds} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + y \right) \frac{dy}{ds} = 0 \quad (2.62)$$

encerrando-se assim a formulação cinemática do problema, pois a função $\psi(y, z)$ expressa deslocamento.

2.8.2 - Equação de Equilíbrio Externo

Supondo-se a barra sujeita a uma solicitação por momento torçor M_t , o equilíbrio de uma parte genérica da barra, tendo em vista a configuração de tensões apontada na Figura 2.14, implica em:

$$M_t = \int_S (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dS \quad (2.63)$$

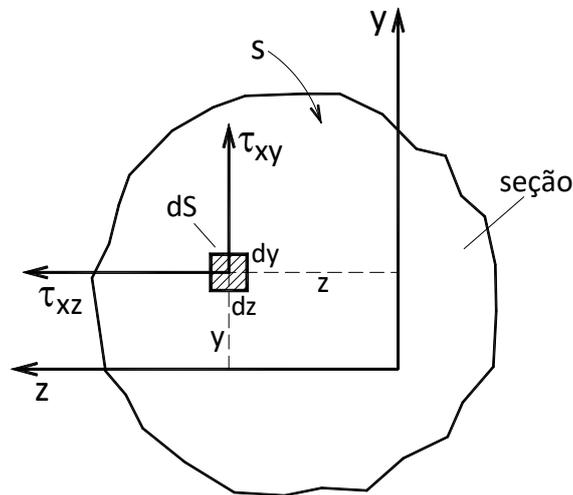


FIGURA 2.14 – Configuração de tensão na seção

ou ainda, tendo-se em vista (2.57):

$$M_t = G\theta \int_S \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} z + y^2 + z^2 \right) dS \quad (2.64)$$

resultando:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} \quad (2.65)$$

onde:

$$I_t = \int_S \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} y - \frac{\partial \Psi}{\partial y} z + y^2 + z^2 \right) dS \quad (2.66)$$

sendo I_t comumente denominado momento de inércia à torção.

Além da equação de equilíbrio (2.63) duas outras devem também ser satisfeitas em decorrência do fato de o esforço cortante ser nulo, ou seja:

$$\begin{aligned} V_y &= \int_S \tau_{xy} dS = 0 \\ V_z &= \int_S \tau_{xz} dS = 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

ou, ainda, tendo-se em vista (2.57):

$$\begin{aligned} \int_S \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - z \right) dS &= 0 \\ \int_S \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + y \right) dS &= 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

e, para finalizar, cumpre esclarecer que o problema da torção está, agora, equacionado, visto que a solução da equação diferencial (2.60), cuja condição no contorno se expressa em (2.62), levada em (2.64), permite obter a rotação por unidade de comprimento em função do momento torçor; além disso, levados tais resultados em (2.54), (2.55), (2.56) e (2.57) encerrando-se assim a formulação em questão.

2.8.3 - Função de Tensão da Torção

A exemplo da simplificação alcançada na elasticidade plana com a função de AIRY, aqui também é possível lançar mão de artifícios analíticos de modo a simplificar a solução do problema. De fato, definindo-se uma função $\varphi(y, z)$ tal que:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.69)$$

verificando-se, de imediato, que a equação de equilíbrio interno (2.59) fica automaticamente satisfeita, porquanto recai-se numa subtração de derivadas mistas, ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}\end{aligned}\quad (2.70)$$

Por outro lado, tendo-se em vista (2.57) e (2.69), têm-se ainda:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = G\theta \left(1 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = G\theta \left(1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} \right)\end{aligned}\quad (2.71)$$

ou seja:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2G\theta \quad (2.72)$$

que consiste na equação diferencial envolvendo a função de tensão da torção. Tendo-se em conta agora (2.69), a condição de contorno expressa em (2.61) ganha a seguinte redação:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0 \quad (2.73)$$

e verifica-se que a expressão (2.73) exprime, em verdade, a condição:

$$\frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad (2.74)$$

ou seja, a condição de contorno, agora em termos da função φ , exprime-se na forma de φ constante no contorno ($d\varphi/ds = 0$ implica em $\varphi = \text{constante}$ no contorno s). Tendo-se em vista que as grandezas de interesse em jogo dependem de derivadas da função φ , é natural arbitrar-se um valor nulo no contorno para tal função; o que permite simplificar a parte numérica do problema.

A condições expressas em (2.67) ficam também obedecidas, pois, por exemplo:

$$V_z = \int_s \tau_{xz} dS = \int_s \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS \quad (2.75)$$

ou seja:

$$V_z = \int_{z_1}^{z_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right] dz \quad (2.76)$$

onde y_1, y_2, z_1 e z_2 são coordenadas genéricas do contorno; porém:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \varphi(y_2) - \varphi(y_1) = 0 \quad (2.77)$$

pois, no contorno, φ , conforme já mencionado, é constante. De modo similar verifica-se a nulidade da força cortante na direção y ($V_y = 0$) que consiste na primeira das (2.67).

Para finalizar, levando, agora, (2.69) em (2.63) tem-se:

$$M_t = \int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z \right) dS \quad (2.78)$$

mas, por outro lado:

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial y} y dS = \int_{z_1}^{z_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} y dy \right] dz \quad (2.79)$$

porém, integrando por partes, tem-se:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} y dy = [\varphi y]_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \varphi dy \quad (2.80)$$

na qual:

$$[\varphi y]_{y_1}^{y_2} = 0 \quad (2.81)$$

quando se considera φ nulo no contorno. Com isso tem-se que:

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial y} y dS = - \int_S \varphi dS \quad (2.82)$$

e de modo similar tem-se também:

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial z} z dS = - \int_S \varphi dS \quad (2.83)$$

e, assim sendo, a expressão (2.78) permite escrever:

$$M_t = -2 \int_S \varphi dS \quad (2.84)$$

e assim, nessa nova formulação, o problema da torção de barras de seção constante qualquer consiste na procura de uma solução da equação diferencial (2.72), cuja condição de contorno se expressa pela nulidade da função no contorno (equação de LAPLACE). Essa formulação é denominada método dos esforços, pois a incógnita φ está relacionada diretamente com tensão, como explicita a expressão (2.69).

2.8.4 - Primeiro Exemplo de Aplicação

Considere-se, por exemplo, o caso da torção de barra de seção circular, cuja solução já se conhece da Resistência dos Materiais. Trata-se, aqui, apenas de constatar que aquela solução é correta sob todos os aspectos.

A equação da circunferência que define o contorno, como ilustra a Figura 2.15a), é dada por:

$$y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (2.85)$$

sendo R o raio, e assim,, se função de tensão da torção φ for expressa por:

$$\varphi = K(y^2 + z^2 - R^2) \quad (2.86)$$

seus valores, como se percebe facilmente, anulam-se no contorno do círculo de raio R, conforme se ilustra na figura 2.15a). Levando (2.86) em (2.72) tem-se:

$$2K + 2K = 2G\theta \quad (2.87)$$

ou seja, a constante K nesse caso é dada por:

$$K = \frac{G\theta}{2} \quad (2.88)$$

E assim, tendo-se em conta (2.86) a expressão (2.84) ganha a redação:

$$M_t = G\theta \int_S (R^2 - y^2 - z^2) dS = G\theta \left(\pi R^4 - \frac{\pi R^4}{2} \right) = G\theta \frac{\pi R^4}{2} \quad (2.89)$$

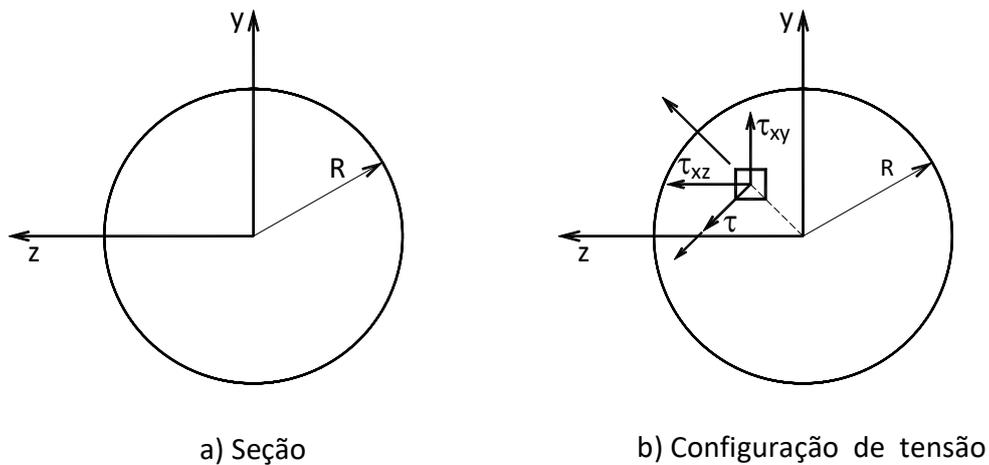


FIG. 2.15 – Seção circular de raio R

ou ainda:

$$\theta = \frac{2M_t}{\pi G R^4} = \frac{M_t}{G I_t} \quad (2.90)$$

onde:

$$I_t = \frac{\pi R^4}{2} \quad (2.91)$$

que consiste no momento de inércia à torção da seção circular.

As tensões de cisalhamento correspondentes à solução apresentada são dadas por:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\left(\frac{2M_t}{\pi R^4}\right) z \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(\frac{2M_t}{\pi R^4}\right) y \end{aligned} \quad (2.92)$$

podendo-se verificar com certa facilidade, que a tensão resultante apresenta direção perpendicular ao raio e é proporcional a este, conforme hipótese da Resistência dos Materiais, como ilustrado na Figura 2.15b).

Cabe, para finalizar, examinar o que sucede em termos do empenamento, ou seja, qual a função ψ correspondente. Pois bem, em face de (2.57) e (2.92) tem-se:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= -\frac{2M_t}{\pi R^4} z = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \\ \tau_{xz} &= \frac{2M_t}{\pi R^4} y = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)\end{aligned}\quad (2.93)$$

cuja integração conduz, respectivamente, a:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{2M_t}{\pi R^4} \frac{yz}{G\theta} - yz + f_1(y) + C_1 \\ \psi &= -\frac{2M_t}{\pi R^4} \frac{yz}{G\theta} + yz + f_2(z) + C_2\end{aligned}\quad (2.94)$$

onde $f_1(y)$ e $f_2(z)$ são funções exclusivas das variáveis apontadas, e C_1 e C_2 são constantes de integração. Pois bem, um exame das expressões (2.94) leva, respectivamente a concluir, ainda, que:

$$\begin{aligned}\psi &= f_1(y) + C_1 \\ \psi &= f_2(z) + C_2\end{aligned}\quad (2.95)$$

porquanto as somas das duas primeiras parcelas são identicamente nulas (note-se, a propósito, o exposto em (2.90)). Obviamente a única solução viável em face de (2.95) é a condição ψ constante na seção, que pode ser:

$$\psi(y, z) = 0 \quad (2.96)$$

ou, em outras palavras, no caso da seção circular, a torção não promove empenamento. Convém esclarecer que as hipóteses da Resistência dos Materiais levaram à solução desse particular problema por causa dessa propriedade. Todavia, para outras seções uma imposição na distribuição das tensões não apresenta sucesso, dada a complexidade real de tal distribuição (de certa forma, a ocorrência de empenamento dificulta visualizar uma plausível distribuição de tensão).

Outros dois casos com solução analítica explícita são a seção elítica, cuja função de tensão da torção é dada por:

$$\varphi = K \left(\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

resultando:

$$I_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

$$W_t = \frac{\pi a b^2}{2}$$

considerando-se b o raio menor; e a seção em forma de triângulo equilátero, cuja função de tensão da torção é expressa por:

$$\varphi = -G\theta \left[\frac{z^2 + y^2}{2} - \frac{z^3 - 3xy^2}{2a} - \frac{2a^2}{27} \right]$$

sendo a a altura do triângulo, o sistema de referência com origem no centro de gravidade do triângulo e eixo Oy paralelo a uma dos lados do triângulo. Cumpre assinalar que a função de tensão da torção nesse caso é o produto das equações das retas segundo os lados do triângulo. Os parâmetros de torção são então:

$$I_t = \frac{\sqrt{3}a^4}{45}$$

$$W_t = \frac{2\sqrt{3}a^3}{45}$$

encerrando-se assim as possíveis soluções de analíticas de interesse prático em forma fechada.

Para seções de forma diferentes destas abordadas a solução envolve o concurso de integrações numéricas (diferenças finitas, elementos finitos e outros), mas a chamada analogia de membrana, assunto a seguir, permite encontrar várias soluções aproximadas expeditas.

2.8.5 - Analogia de Membrana

O problema da torção é, do ponto de vista puramente matemático, em tudo parecido com o problema do equilíbrio de uma membrana sujeita à pressão; e por essa razão existe uma analogia entre tais problemas.

A Figura 2.16 mostra uma configuração genérica de equilíbrio de uma membrana sujeita a uma pressão interna ' p ', onde h é a ordenada da superfície apresentada pela membrana. No contorno a membrana encontra-se vinculada, ou seja, no contorno tem-se h nulo. Pois bem, dentro da consideração de pequenos deslocamentos (h pequeno em face das dimensões da membrana) o equilíbrio da membrana assim se expressa (vide fig. 2.16b) e c)):

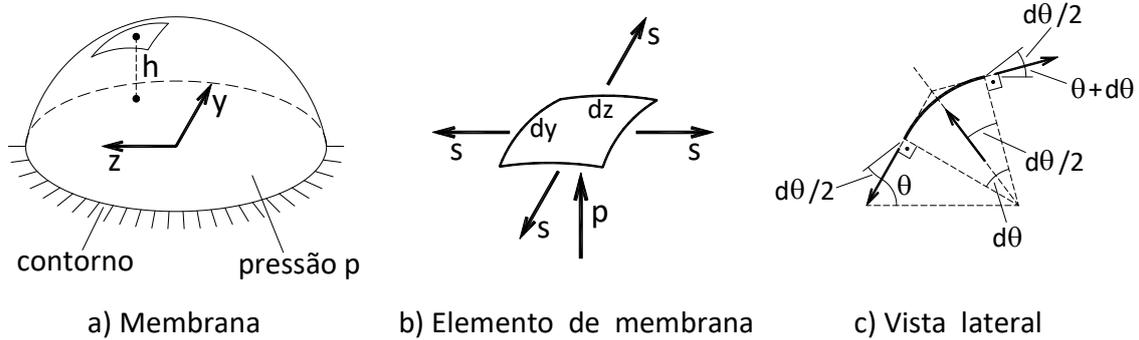


FIGURA 2.16 – Configuração de equilíbrio de membrana

$$pdzdy = 2sdy\text{sen}\frac{d\theta}{2} + 2sdz\text{sen}\frac{d\theta'}{2} \quad (2.97)$$

onde s é a força por unidade de comprimento da membrana, suposta constante, $d\theta$ e $d\theta'$ são os ângulos contidos entre os raios de curvatura segundo os planos xz e xy . Em se tratando de pequenos deslocamentos têm-se ainda:

$$\begin{aligned} \theta &\cong \frac{\partial h}{\partial z} \\ \theta' &\cong \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\text{sen}\theta}{2} &\cong \frac{d\theta}{2} \cong -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dz \\ \frac{\text{sen}\theta'}{2} &\cong \frac{d\theta'}{2} \cong -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} dy \end{aligned} \quad (2.98)$$

e, com isso a expressão (2.97) permite escrever:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -\frac{p}{s} \quad (2.99)$$

cabendo-se esclarecer que, nas deduções aqui apresentadas, as simplificações decorrentes da consideração de pequenos deslocamentos são as seguintes: Em primeiro lugar, da consideração de h pequeno decorre pequenas inclinações na membrana, ou seja:

$$\theta = \text{sen}\theta = \text{tg}\theta = \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\theta^l = \text{sen}\theta^l = \text{tg}\theta^l = \frac{\partial h}{\partial y}$$

e, por outro lado, em sendo θ e θ^l ângulos pequenos tem-se também:

$$\cos \theta = \cos \theta^l \cong 1$$

e, com isso, a projeção horizontal da área do elemento infinitesimal de membrana $dydz$ coincide com a área desse elemento. Para finalizar, cabe ainda ressaltar que o sinal negativo nas duas últimas das (2.98) provem do fato de h decrescer, respectivamente, com z e y , ou seja, as segundas derivadas de h são negativas; lembrando-se de terem sido os ângulos considerados em primeira determinação na equação de equilíbrio (2.97). Além disso, resta ainda chamar a atenção para o fato de se considerarem verticais os raios de curvatura. A equação (2.99) é conhecida como Equação de Laplace.

Tendo-se em vista a mesma natureza matemática das equações (2.99) e (2.72), inclusive no que diz respeito às condições de contorno ($h = 0$ e $\varphi = 0$ no contorno), pode-se dizer que, a menos de um fator, as duas funções, h e φ , são idênticas, ou seja:

$$h = -K\varphi \quad (2.100)$$

onde K é um fator constante, cuja dimensão é área dividida por força (h tem dimensão de comprimento e φ tem dimensão de força por unidade de comprimento pois a derivada de φ tem dimensão de tensão).

Essa analogia permite, mediante a experimentação com membrana de bolha de sabão, cujas propriedades satisfazem a condições estabelecidas: s constante, e no contorno não ocorrem perturbações de molhamento, obter os parâmetros de torção I_t e W_t , que constituem os parâmetros geométricos da seção de interesse no caso. Com efeito, de (2.84) e (2.100) tem-se:

$$M_t = -2 \int_S \varphi ds = \frac{2}{K} \int_S h dS \quad (2.101)$$

ou ainda:

$$M_t = \frac{2V}{K} \quad (2.102)$$

onde V é o volume desenvolvido pela membrana deformada. Por outro lado, de um exame de (2.99) e (2.72) deduz-se:

$$K = \frac{p}{2G\theta s} \quad (2.103)$$

e, com isso, (2.102) ganha uma nova redação, ou seja:

$$M_t = \frac{4V}{p/s} G\theta \quad (2.104)$$

ou ainda, tendo-se em vista (2.65):

$$\frac{M_t}{G\theta} = I_t = \frac{4V}{p/s} \quad (2.105)$$

ou seja, o momento de inércia a torção é igual a quatro vezes o volume desenvolvido pela membrana dividido pela razão da pressão aplicada e a força por unidade de comprimento da membrana, parâmetros estes passíveis de medição em laboratório.

Para encerrar a questão, resta agora estudar a relação existente entre as tensões cisalhantes e os correspondentes parâmetros do problema da membrana.

Ilustra-se na Figura 2.17a) configuração de tensão num dado ponto da seção transversal de uma barra, indicando-se a tensão cisalhante resultante nesse ponto. Pois bem, a exemplo do expresso em (2.61) tem-se:

$$\tau_{\bar{xy}} = \tau_{xy} \cos \alpha + \tau_{xz} \operatorname{sen} \alpha \quad (2.106)$$

ou, ainda, tendo-se em vista (2.69):

$$\tau_{\bar{xy}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha \quad (2.107)$$

e, por outro lado, como os cossenos diretores são dados por:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} \\ \operatorname{sen} \alpha &= -\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \quad (2.108)$$

o expresso em (2.107) permite a redação:

$$\tau_{\bar{xy}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \quad (2.109)$$

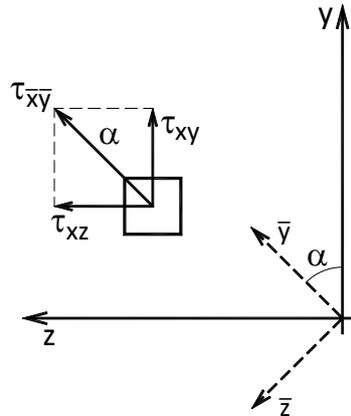


FIGURA. 2.17 – Tensão cisalhante resultante

ou seja, a tensão de cisalhamento resultante é dada pela inclinação da função ϕ , com o sinal trocado, segundo a direção normal à da tensão resultante. Tendo-se em vista (2.100) a (2.109) permite exprimir-se:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{K} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{\beta}{K} \quad (2.110)$$

onde β é a inclinação da membrana segundo a direção $O\bar{Z}$, ou, tendo-se em vista (2.103) e (2.105):

$$\tau_{xy} = 2G\theta \frac{\beta}{p/s} = \frac{M_t \beta}{2V} \quad (2.111)$$

resultando-se:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M_t}{W_t} \\ W_t &= \frac{2V}{\beta_{\max}} \end{aligned} \quad (2.112)$$

onde β_{\max} é a maior inclinação verificada na superfície da membrana inflada.

2.8.6 – Segundo exemplo de aplicação

Considere-se, por exemplo, a função de tensão de torção:

$$\varphi = K \left(y^2 - \frac{t^2}{4} \right) \quad (2.113)$$

que tem valor nulo para $y = \pm t/2$. Trata-se, por conseguinte, da solução de um problema de torção de uma barra, cuja seção transversal é um retângulo de comprimento, a rigor, infinito (vide Figura. 2.18a). Todavia, cabe ressaltar que tal solução constitui uma boa aproximação para os casos de retângulos muito delgados como o mostrado na Figura 2.18b), visto que o volume deslocado pela membrana correspondente é praticamente o mesmo, tendo ou não o retângulo comprimento infinito. Em verdade, as perturbações existentes nas extremidades do retângulo comprido pouco alteram o resultado final e, mais que isso, as grandes inclinações da membrana não ocorrem nas extremidades e sim ao longo das bordas mais longas, como o sentimento indica.

Pois bem, levando (2.113) em (2.72) tem-se:

$$K = G\theta \quad (2.114)$$

e, com isso o expresso em (2.84) permite redigir:

$$M_t = -2 \int_{-c/2}^{c/2} \left[\int_{-t/2}^{t/2} G\theta \left(y^2 - \frac{t^2}{4} \right) dy \right] dz = G\theta \frac{t^3 c}{3} \quad (2.115)$$

ou seja, nesse caso o momento de inércia à torção vale:

$$I_t = \frac{t^3 c}{3} \quad (2.116)$$

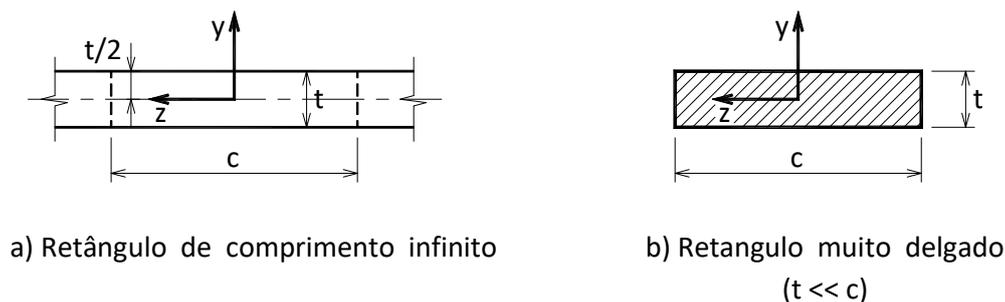


FIGURA 2.18 – Seção retangular delgada

e, com relação à inclinação, ou tensão de cisalhamento, tem-se:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2G\theta y \quad (2.117)$$

com o máximo cisalhamento ocorrendo, naturalmente, para $y = \pm t/2$ e tendo-se em vista (2.115) resulta:

$$\tau_{\max} = G\theta t = \frac{3M_t}{t^2 c} \quad (2.118)$$

ou seja:

$$W_t = \frac{t^2 c}{3} \quad (2.119)$$

a exemplo de (2.112).

A solução aqui apresentada serve de base para resolver também os casos de seção transversal formada por retângulos alongados, a exemplo do ilustrado na Figura 2.19. Nesses casos, onde as perturbações criadas nas regiões de conexão dos retângulos não introduzem alterações apreciáveis, os parâmetros podem ser assim estimados:

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n t_i^3 c_i \quad (2.120)$$

$$W_t = \frac{1}{3t_{\max}} \sum_{i=1}^n t_i^2 c_i$$

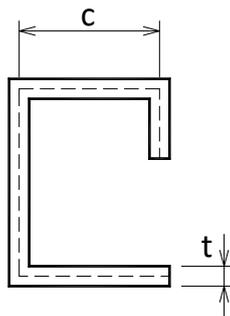


FIGURA 2.19 – Seção aberta de parede delgada

onde n é o número de retângulos na seção. Cumpre esclarecer que, na região de maior espessura, o cisalhamento é máximo, porquanto nessa região a inclinação da membrana é maior, daí a presença de t_{\max} no denominador da segunda das (2.120).

3 - MÉTODO DA ENERGIA

3.1 – INTRODUÇÃO

O Método da Energia enquadra-se dentro da área de conhecimento da Matemática Operacional no chamado Cálculo Variacional. Todavia, em conformidade com o espírito do presente texto, o tratamento matemático mais requintado é, aqui, contornado no intuito de não perturbar o leitor pouco familiarizado com as costumeiras abstrações típicas da Matemática. Por outro lado, cabe esclarecer que se procura substituir, no tratamento matemático, a abstração pela intuição, na medida do possível.

3.2 - CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Convém ressaltar, de início, que no estudo da estática e da instabilidade das estruturas apenas duas manifestações de energia estão, por assim dizer, em jogo. A primeira, relacionada com o trabalho das forças atuantes, é conhecida como energia potencial das forças externas, e a segunda, relacionada com o trabalho das forças reativas, é conhecida como energia de deformação. Por outro lado, pode-se afirmar com base no Princípio da Conservação da Energia que, em qualquer

situação, a energia retirada de uma das manifestações passa a pertencer à outra. Por exemplo, o trabalho produzido pelas forças atuantes segundo os deslocamentos da estrutura acumula-se sob a forma de energia de deformação da estrutura.

Para conceituar melhor a energia potencial das forças externas, considere-se, por exemplo, o movimento de uma força \vec{P} segundo um caminho elementar $\delta\vec{d}$, conforme se ilustra na Figura 3.1. O trabalho elementar produzido nesse acontecimento é dado pelo produto escalar do vetor \vec{P} pelo vetor $\delta\vec{d}$, ou seja:

$$\delta T = \vec{P} \cdot \delta\vec{d} \quad (3.1)$$

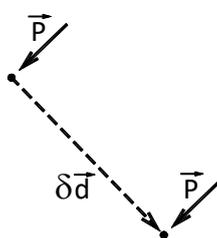


FIGURA 3.1 – Movimento elementar de uma força

sendo positivo o trabalho da força, ou seja, resultando positivo o produto escalar indicado em (3.1), entende-se que a força perdeu potencial, o que, de certa forma, indica que ocorreu uma diminuição na capacidade de trabalho da força. Assim, chamando de Ω o potencial da força, tem-se:

$$\delta\Omega = -\delta T \quad (3.2)$$

e essa colocação provém do fato de que toda força tem a sua razão na existência de um campo, como, por exemplo, o gravitacional, e o trabalho positivo da força corresponde, no fundo, a uma queda nesse campo.

Por sua vez, a energia de deformação origina-se, conforme já foi mencionado, do trabalho das forças internas. É oportuno lembrar que as forças internas não trabalham em movimentos de corpo rígido, uma vez que tais forças são auto equilibradas (são ações e reações entre vizinhos). Assim, a energia em consideração provém do trabalho realizado pelas forças internas segundo os deslocamentos oriundos da deformação da estrutura. A energia de deformação, em se tratando de material elástico linear (material obediente à lei de HOOKE), é dada, como já exposto no primeiro capítulo, por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (3.3)$$

onde V é o volume da estrutura.

O Princípio da Conservação da Energia, tendo-se em vista haver apenas as duas manifestações de energia em jogo, permite escrever:

$$\delta U + \delta \Omega = 0 \quad (3.4)$$

onde a notação δ significa qualquer variação. Em outras palavras, no fenômeno de deformação da estrutura pela ação de forças a energia total não se altera; o que ganha de energia uma dada manifestação decorre da diminuição da outra. Nesse ponto vale ressaltar que, no fenômeno em apreço, outras manifestações de energia também intervêm. É o caso, por exemplo, de mudanças no estado interno do material, manifestações térmicas, etc.; todavia tais manifestações apresentam magnitudes desprezíveis na maioria dos casos da prática da engenharia.

Por outro lado, chamando a energia total de π , ou seja:

$$\pi = U + \Omega \quad (3.5)$$

o princípio da conservação da energia passa a ser dado por

$$\delta \pi = \delta U + \delta \Omega = 0 \quad (3.6)$$

ou seja, o princípio da conservação da energia impõe condição estacionária para a energia total. A condição de energia total estacionária, uma lei da natureza, serve de suporte para a obtenção de soluções aproximadas e, mediante um tratamento variacional, alcançar as condições de equilíbrio, e daí as soluções exatas. Todavia, pretende-se, aqui, abordar apenas o procedimento que conduz às soluções aproximadas, e, como já foi mencionado, deixar de lado os aspectos matemáticos mais requintados. No intuito de facilitar o entendimento, a maneira de alcançar soluções aproximadas, com base na condição estacionária da energia total, é apresentada nos diversos exemplos de aplicação arrolados no que segue.

3.3 - PRIMEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Para mostrar a maneira de se obter soluções aproximadas utilizando o conceito expresso em (3.6), considere-se a viga em balanço sujeita a uma força concentrada P na extremidade livre, mostrada na Figura 3.2. Pretende-se, por exemplo, determinar uma elástica aproximada.

Com base na teoria técnica da flexão tem-se apenas o envolvimento de σ_x e ε_x na energia de deformação, pois sabe-se que a parcela referente à energia de deformação da força cortante (trabalho do cisalhamento) pode ser desprezada porquanto tal parcela é, em geral, de pequena magnitude em comparação com a de flexão, tendo-se portanto:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV \quad (3.7)$$

Por outro lado, para a seção transversal na posição genérica x , e nela um ponto distante y do eixo neutro, a teoria técnica da flexão (seção plana permanece plana na deformação por flexão) prescreve:

$$u(x) = -yv'(x) \quad (3.8)$$

resultando:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -yv''(x) \quad (3.9)$$

e ainda em decorrência da lei de Hooke:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -Eyv''(x) \quad (3.10)$$

e portanto:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\int_S \sigma_x \varepsilon_x dS \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell E \left(\int_S y^2 dS \right) (v'')^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell EI (v'')^2 dx \end{aligned} \quad (3.11)$$

e assim, a energia de deformação fica expressa em termos da elástica, cuja solução aproximada é procurada. Em (3.11) S é a área da seção transversal da viga e I o seu momento de inércia; lembrando-se, igualmente, que o sistema de referência Oxy indicado na Figura 3.2 tem origem no centro de gravidade da seção do engaste, sendo que o eixo Ox alinha-se com o eixo da barra e Oy alinha-se com um dos eixos principais de inércia da seção transversal, suposto contido no plano do carregamento.

A energia potencial da força externa é, no presente exemplo, dada por:

$$\Omega = -Pv(x = \ell) \quad (3.12)$$

e, assim, com base em (3.11) e (3.12) tem-se:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI (v'')^2 dx - Pv(x = \ell) \quad (3.13)$$

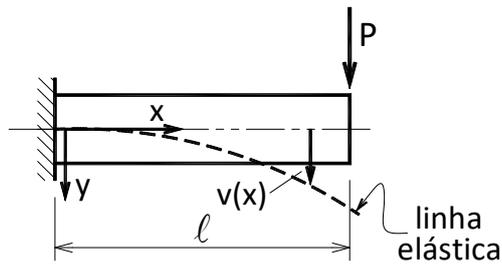


FIGURA 3.2 – Viga em balanço

Pois bem, considere-se como primeira solução aproximada um polinômio do segundo grau, ou seja:

$$v_a = A_0 + A_1x + A_2x^2 \quad (3.14)$$

com as condições de vinculação:

$$\begin{aligned} v(x=0) &= 0 \\ v'(x=0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Implicando-se em A_0 e A_1 nulos, ficando pois:

$$v = A_2x^2 \quad (3.16)$$

Levando-se, agora, a solução aproximada expressa em (3.16) na energia total expressa em (3.13) tem-se:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(2A_2)^2 dx - P(A_2\ell^2) = EI \frac{4A_2^2}{2} \ell - PA_2\ell^2 \quad (3.17)$$

no caso com o produto EI constante ao longo da barra, ficando-se, pois, a energia total em função apenas do parâmetro A_2 , uma vez fixada a geometria da viga e o carregamento. Nesse caso, a condição de energia total estacionária implica em:

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \frac{\partial\pi}{\partial A_2} \delta A_2 = 0 \\ \frac{\partial\pi}{\partial A_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

uma vez que δA_2 é arbitrário, e não necessariamente nulo (acréscimo da variável independente). Assim, no caso em apreço, tem-se:

$$\frac{\partial \pi}{\partial A_2} = 4EI A_2 \ell - P \ell^2 = 0 \quad (3.19)$$

$$A_2 = \frac{P \ell}{4EI}$$

e com isso, a solução aproximada passa a ser expressa por:

$$v_a = \frac{P \ell}{4EI} x^2 \quad (3.20)$$

e os esforços internos correspondentes por:

a) momento fletor:

$$M = -EI v'' = -\frac{P \ell}{2} \quad (3.21)$$

b) força cortante:

$$V = -EI v''' = 0 \quad (3.22)$$

e o valor da energia total fica:

$$\pi = -\frac{P^2 \ell^2}{8EI} \quad (3.23)$$

encerrando-se assim essa solução aproximada.

Tomando, agora, como solução aproximada um polinômio do terceiro grau, que obedece às condições de vinculação dadas em (3.15), tem-se:

$$v_a = A_2 x^2 + A_3 x^3 \quad (3.24)$$

resultando-se na energia total:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI (2A_2 + 6A_3 x)^2 dx - P(A_2 \ell^2 + A_3 \ell^3) = \quad (3.25)$$

$$\frac{EI}{2} (4A_2^2 \ell + 12A_2 A_3 \ell^2 + 12A_3^2 \ell^3) - P(A_2 \ell^2 + A_3 \ell^3)$$

ficando-se, pois, a energia total função, agora, dos parâmetros A_2 e A_3 ; e, como a condição de energia total estacionária deve ser atendida para qualquer variação, então tem-se:

$$\delta\pi = \delta\pi = \frac{\partial\pi}{\partial A_2} \delta A_2 + \frac{\partial\pi}{\partial A_3} \delta A_3 = 0 \quad (3.26)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\pi}{\partial A_2} &= \frac{EI}{2} (8A_2\ell + 12A_3\ell^2) - P\ell^2 = 0 \\ \frac{\partial\pi}{\partial A_3} &= \frac{EI}{2} (12A_2\ell^2 + 24A_3\ell^3) - P\ell^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

que, em forma matricial ganha a redação:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3\ell \end{Bmatrix} = \frac{P\ell}{EI} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{P\ell}{2EI} \\ A_3 &= -\frac{P}{6EI} \end{aligned} \quad (3.29)$$

e, assim sendo, a função aproximada fica sendo dada por:

$$v_a = \frac{P\ell}{2EI} x^2 - \frac{P}{6EI} x^3 \quad (3.30)$$

e os esforços internos correspondentes ficam:

$$\begin{aligned} M &= -EIv'' = -P(\ell - x) \\ V &= -EIv''' = P \end{aligned} \quad (3.31)$$

que consiste na solução exata. A energia total se expressa:

$$\pi = -\frac{P^2\ell^2}{6EI} \quad (3.32)$$

ficando claro trata-se da energia total mínima ($-1/6 < -1/8$). Tal fato se explica tendo-se em vista que o problema em questão trata-se do estudo de um equilíbrio estável, ou, em outras palavras, o equilíbrio é atingido em condições de energia total mínima. De fato, a segunda derivada de π em relação à A_2 a primeira de (3.27) e em

relação à A_3 a segunda, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \pi}{\partial A_2^2} &= 4EI\ell \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial A_3^2} &= 4EI\ell^3\end{aligned}\quad (3.33)$$

resultando-se expressões positivas (condição de mínimo).

A título de ilustração exibem-se na Figura 3.3 os resultados alcançados com as duas soluções estudadas. O exame dessa figura mostra que, em termos de deslocamento (elástica), o polinômio do segundo grau já se mostra razoável; contudo, em termos de esforços internos, deixa muito a desejar.

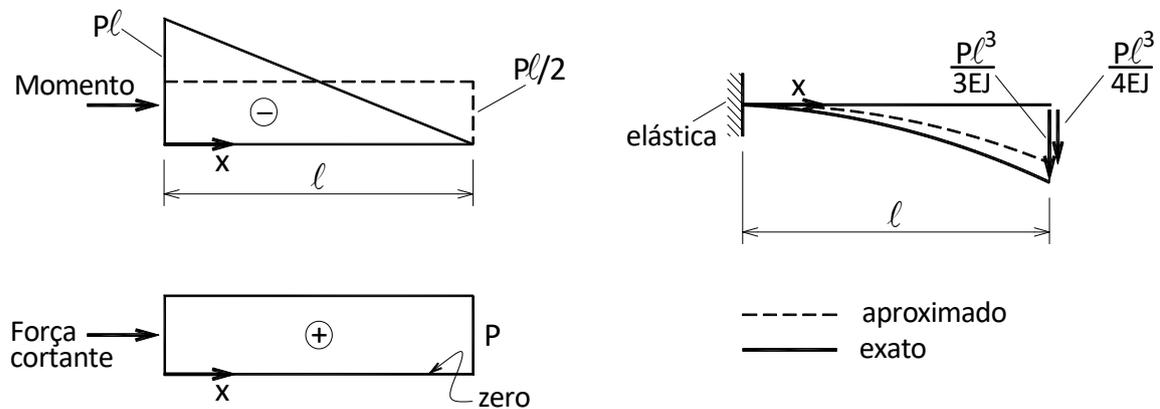


FIGURA 3.3 – Linhas Elásticas e diagramas de esforços solicitantes

Adotando-se, a título de curiosidade, como solução aproximada o polinômio do terceiro grau acrescido de um termo de grau genérico n tem-se:

$$v_a = A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_n x^n \quad (3.34)$$

que conduz a:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(2A_2 + 6A_3 x + n(n-1)A_n x^{n-1})^2 dx - P(A_2 \ell^2 + A_3 \ell^3 + A_n \ell^n) \quad (3.35)$$

e a condição de energia total estacionária fica, então, expressa por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial A_2} &= \frac{1}{2} \int_0^\ell 2EI(2A_2 + 6A_3x + n(n-1)A_n x^{n-2})2dx - P(\ell^2) = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial A_2} &= \frac{1}{2} \int_0^\ell 2EI(2A_2 + 6A_3x + n(n-1)A_n x^{n-2})6xdx - P(\ell^3) = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial A_2} &= \frac{1}{2} \int_0^\ell 2EI(2A_2 + 6A_3x + n(n-1)A_n x^{n-2})n(n-1)x^{n-2}dx - P(\ell^n) = 0\end{aligned}\quad (3.36)$$

Resultando-se, pois, no seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2n \\ 6 & 12 & 6(n-1) \\ 2n & 6(n-1) & \frac{n^2(n-1)^2}{2n-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \ell \\ A_n \ell^{(n-2)} \end{Bmatrix} = \frac{P\ell}{EI} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\quad (3.37)$$

cujas soluções se expressa:

$$\begin{aligned}A_2 &= \frac{P\ell}{2EI} \\ A_3 &= -\frac{P}{6EI} \\ A_n &= 0\end{aligned}\quad (3.38)$$

em outras palavras, o acréscimo de um termo na solução exata em nada a modifica. Aproveitando-se ainda o estudo em apreço, é oportuno salientar que um exame das expressões (3.35) e (3.38) permite concluir que a energia total é igual à metade da energia potencial das forças, ou seja:

$$\pi = -\frac{P}{2}(A_2 \ell^2 + A_3 \ell^3 + A_n \ell^n)\quad (3.39)$$

e essa propriedade torna mais fácil a obtenção, como se pode perceber, do valor da energia total.

3.4 - SEGUNDO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Exibe-se na Figura 3.4 uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma força uniformemente distribuída q . Para tal viga procura-se, no que segue, estudar algumas elásticas aproximadas.

Em primeiro lugar, a expressão da energia total, em termos da elástica, é agora dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI(v'')^2 dx - \int_0^{\ell} qv dx \quad (3.40)$$

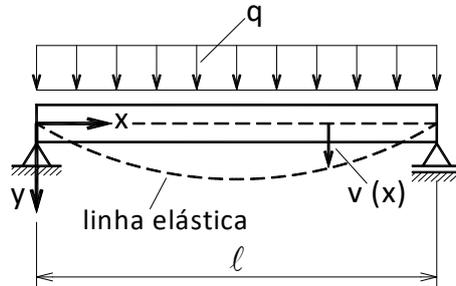


FIGURA 3.4 – Viga sobre dois apoios sob força uniforme

sendo que, no tocante à parcela da energia de deformação, tendo-se em vista a não consideração da contribuição da energia de deformação por força cortante, não ocorre mudança. Todavia, a parcela do trabalho das forças externas é facilmente compreendida, pois o produto qdx fornece a resultante da força distribuída ao longo do trecho elementar dx e assim, o produto dessa resultante pelo deslocamento v ocorrido nesse ponto fornece o trabalho aí produzido; a soma, ou integração, de todos eles fornece o trabalho total das forças externas.

Tomando, de início, como solução aproximada um desenvolvimento do tipo:

$$v_a = A_0 + A_1x + A_2x^2 \quad (4.41)$$

e impondo-se as condições de vinculação:

$$\begin{aligned} v_a(x=0) &= 0 \\ v_a(x=\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

que correspondem a deslocamentos nulos nas extremidades, tem-se:

$$v_a = A_2(x^2 - \ell x) \quad (3.43)$$

e a condição de energia total estacionária conduz, nesse caso, a:

$$\frac{\partial \pi}{\partial A_2} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} 2EI(2A_2)2dx - \int_0^{\ell} q(x^2 - \ell x)dx \quad (3.44)$$

ou seja:

$$4EIA_2\ell + \frac{q\ell^3}{6} = 0 \quad (3.45)$$

resultando-se:

$$A_2 = -\frac{q\ell^2}{24EI} \quad (3.46)$$

e com isso, a solução aproximada (4.41) passa a escrever-se

$$v_a = \frac{q\ell^2}{24EI}(\ell x - x^2) \quad (3.47)$$

e os esforços internos correspondentes dados por:

$$\begin{aligned} M &= -EIv'' = \frac{q\ell^2}{12} \\ V &= -EIv''' = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

e finalmente, a energia total fica sendo dada, a exemplo do expresso em (3.39), por:

$$\pi = -\frac{1}{2} \int_0^\ell qA_2(x^2 - \ell x)dx = -\frac{q^2\ell^5}{288EI} \quad (3.49)$$

Tornando-se agora como nova solução aproximada um desenvolvimento do terceiro grau satisfazendo as condições de contorno (4.42), ou seja:

$$v = A_2(x^2 - \ell x) + A_3(x^3 - \ell^2 x) \quad (3.50)$$

a condição de energia total estacionária passa a ser dada, agora, por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial A_2} &= \int_0^\ell EI(2A_2 + 6A_3 x)2dx - \int_0^\ell q(x^2 - \ell x)dx = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial A_3} &= \int_0^\ell EI(2A_2 + 6A_3 x)6xdx - \int_0^\ell q(x^3 - \ell^2 x)dx = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \ell \end{Bmatrix} = -\frac{q\ell^2}{EI} \begin{Bmatrix} 1/6 \\ 1/4 \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

cuja solução resulta:

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{q\ell}{24EI} \\ A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$A_3 = 0$$

ou seja, essa solução aproximada é a mesma já encontrada anteriormente.

Continuando, considere-se como solução aproximada um desenvolvimento do quarto grau:

$$v_a = A_2(x^2 - \ell x) + A_3(x^3 - \ell^2 x) + A_4(x^4 - \ell^3 x) \quad (3.54)$$

na qual as condições de contorno (4.42) já estão atendidas, e assim, a condição de energia estacionária implica em:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 18 \\ 8 & 18 & 28.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \ell \\ A_4 \ell^2 \end{Bmatrix} = -\frac{q\ell^2}{EI} \begin{Bmatrix} 1/5 \\ 1/4 \\ 3/10 \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned} A_2 &= 0 \\ A_3 &= -\frac{q\ell}{12EI} \\ A_4 &= \frac{q}{24EI} \end{aligned} \quad (3.56)$$

resultando-se pois:

$$v_a = \frac{q\ell^2}{24EI} \left[\frac{2}{\ell} (\ell^2 x - x^3) + \frac{1}{\ell^2} (x^4 - \ell^3 x) \right] \quad (3.57)$$

que constitui a solução exata encontrada na teoria técnica da flexão. Os esforços internos ficam então dados por:

$$\begin{aligned} M &= -EIv'' = \frac{q\ell^2}{2} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right) \\ V &= -EIv''' = \frac{q\ell}{2} \left(1 - 2\frac{x}{\ell} \right) \end{aligned} \quad (3.58)$$

e a solicitação dada por:

$$q = Elv^{IV} = q \tag{3.59}$$

e finalmente, a energia total passa a ser dada pelo produto vetorial:

$$\pi = -\frac{1}{2}\Omega = -\frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} ql^3 & ql^4 & 3ql^5 \\ 6 & 4 & 10 \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ ql \\ \frac{q}{24EI} \end{pmatrix} = -\frac{q^2 l^5}{240EI} \tag{3.60}$$

cabendo-se notar que menor que o expresso em (3.49), como era de se esperar.

Para finalizar o presente exemplo de aplicação confrontam-se na Figura 3.5 os resultados encontrados com as soluções estudadas. Basicamente, as observações de carácter prático que se pode tirar de um exame dos resultados lançados nessa figura são as mesmas já levantadas no exemplo anterior. Cabe, ainda, acrescentar que a pesquisa de polinômios de grau acima de quatro conduz à mesma solução já encontrada com o polinômio do quarto grau, a exemplo do que já se constatou no exemplo anterior.

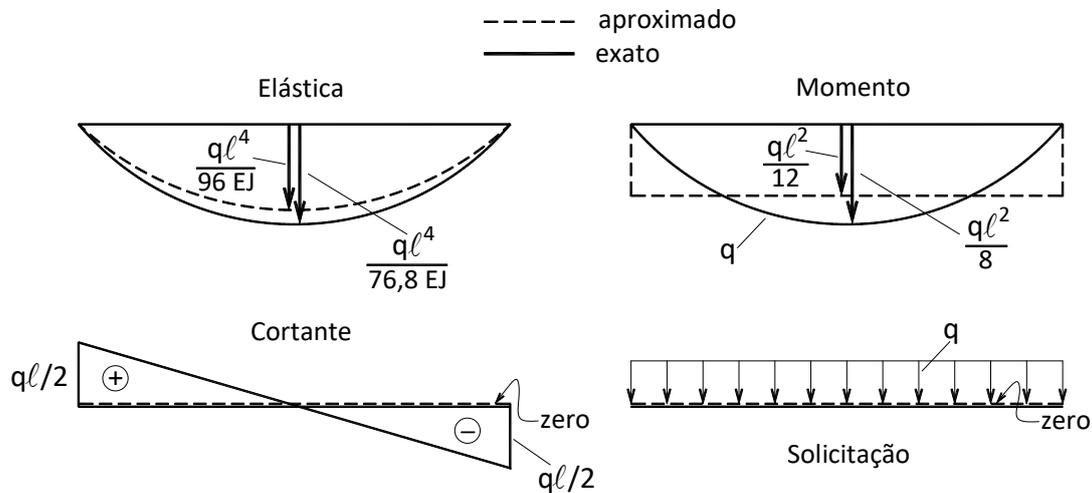


FIGURA 3.5 – Linhas Elásticas, esforços solicitantes e força externa

3.5 - TERCEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como terceiro exemplo de aplicação considere-se uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma força concentrada P no meio do vão, conforme mostra a Figura 3.6. Pretende-se, aqui, a exemplo dos casos anteriores, estudar elásticas

aproximadas. Cabe adiantar que as soluções já adotadas no exemplo anterior são aqui aproveitadas, visto que as condições de vinculação são as mesmas.

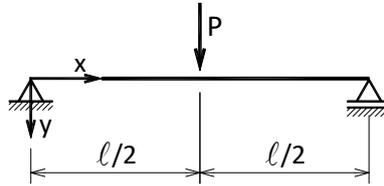


FIGURA 3.6 – Viga bi apoiada sob força concentrada

Toma-se como primeira solução novamente a função:

$$v_a = A_2(x^2 - lx) \quad (3.61)$$

e, com isso, a energia total fica:

$$\pi = -\frac{1}{2} \int_0^l EI(2A_2)^2 dx - PA_2\left(\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2}\right) \quad (3.62)$$

e condição de energia total estacionária implica em:

$$A_2 = -\frac{Pl}{16EI} \quad (3.63)$$

e, finalmente:

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{Pl}{16EI}(lx - x^2) \\ M &= \frac{pl}{8} \\ V &= 0 \\ q &= 0 \\ \pi &= -\frac{1}{2}PA_2\left(\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2}\right) = -\frac{p^2l^3}{12EI} \end{aligned} \quad (3.64)$$

claramente uma aproximação grosseira.

Com a solução aproximada:

$$v = A_2(x^2 - lx) + A_3(x^3 - l^2x) \quad (3.65)$$

tem-se:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI [A_2(2) + A_3(6x)]^2 dx - P \left[-\frac{A_2 \ell^2}{4} - \frac{3A_3 \ell^3}{8} \right] \quad (3.66)$$

e a condição de energia total estacionária implica em:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \ell \end{Bmatrix} = -\frac{P\ell}{EI} \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 3/8 \end{Bmatrix} \quad (3.67)$$

ou seja, o resultado encontrado conduz à mesma solução aproximada anterior.

Tomando agora, o desenvolvimento do quarto grau:

$$v_a = A_2(x^2 - \ell x) + A_3(x^3 - \ell^2 x) + A_4(x^3 - \ell^3 x) \quad (3.68)$$

tem-se:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI [A_2(2) + A_3(6x) + A_4(12x^2)]^2 dx - P \left[-\frac{A_2}{4} - \frac{3A_3}{8} - \frac{7A_4}{16} \right] \quad (3.69)$$

e a condição de energia total estacionária conduz a:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 18 \\ 8 & 18 & 28.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \ell \\ A_4 \ell^2 \end{Bmatrix} = -\frac{P\ell}{EI} \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 3/8 \\ 7/16 \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1.5P\ell}{96EI} \\ A_3 \ell &= -\frac{15P\ell}{96EI} \\ A_4 \ell^2 &= \frac{7.5P\ell}{96EI} \end{aligned} \quad (3.71)$$

e assim, a solução aproximada em questão fica sendo dada por:

$$v_a = \frac{P\ell^3}{96EI} \left[1.5 \left(\left(\frac{x}{\ell} \right)^2 - \frac{x}{\ell} \right) - 15 \left(\left(\frac{x}{\ell} \right)^3 - \frac{x}{\ell} \right) + 7.5 \left(\left(\frac{x}{\ell} \right)^4 - \frac{x}{\ell} \right) \right] \quad (3.72)$$

e os resultados de interesse ficam:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{P\ell}{96} \left[-3 + 90 \frac{x}{\ell} - 90 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right] \\
 V &= \frac{P}{96} \left[90 - 180 \left(\frac{x}{\ell} \right) \right] \\
 q &= 1.875 \frac{P}{\ell} \\
 \pi &= -\frac{1}{2} \left[-\frac{A_2}{4} - \frac{3A_3}{8} - \frac{7A_4}{16} \right] = -\frac{P^2\ell^3}{97.52EI}
 \end{aligned}
 \tag{3.73}$$

ainda uma solução grosseira.

A Figura 3.7 exhibe os resultados encontrados para os esforços internos (M e Q) e solicitação (q), em confronto com os corretos dados pela teoria técnica de flexão, acrescidos de resultados mais precisos encontrados com soluções de grau mais elevado. É digno de nota que, apesar da extraordinária convergência observada nos valores da energia total, o mesmo não se pode dizer com relação aos esforços solicitantes; em particular da força cortante e solicitação. Tal fato se explica, de certa forma, tendo em vista a descontinuidade existente nesses esforços em contradição com a continuidade das funções aproximadas adotadas. Todavia convém ressaltar que, no limite, tais descontinuidades serão alcançadas; dentro, naturalmente, do conceito de funções limite (algo similar ao que ocorre com as aproximações dadas por séries de FOURIER).

No intuito de contornar as perturbações inerentes às descontinuidades é conveniente tomar como solução aproximada o concurso de duas funções nesse caso, ou seja, no primeiro trecho, que vai de 0 a $\ell / 2$ (primeira metade) adota-se, por exemplo, uma função do tipo:

$$v_1 = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \tag{3.74}$$

e no segundo, que vai de $\ell / 2$ a ℓ (segunda metade), uma função, por exemplo, também do terceiro grau, ou seja:

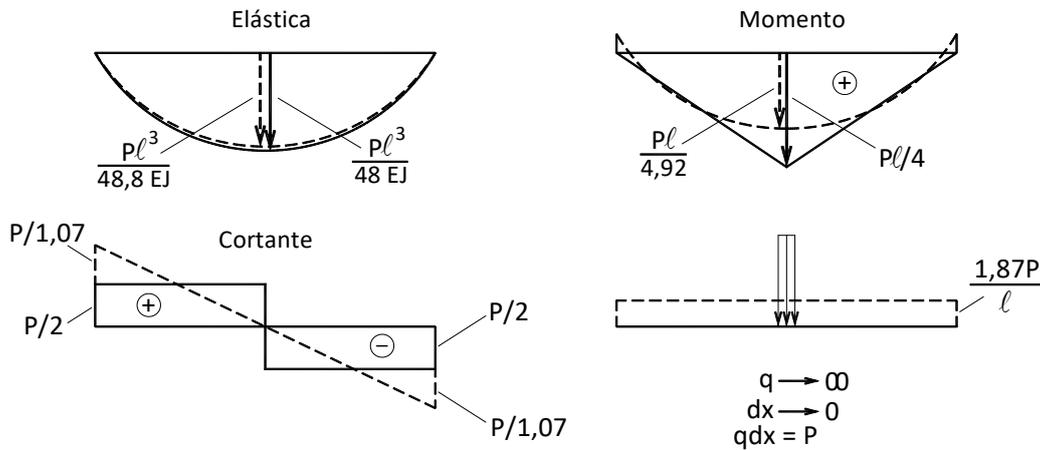


FIGURA 3.7 – Linhas Elásticas, esforços solicitantes e sollicitação

$$v_1 = A_0^I + A_1^I x + A_2^I x^2 + A_3^I x^3 \quad (3.75)$$

e de modo a aliviar o trabalho algébrico e eliminar a maioria dos parâmetros incógnitos, em número de oito, impõe-se, de início, às duas funções as condições de vinculação acrescidas de condições de continuidade no meio do vão, ou seja:

$$\begin{aligned} v_1(x=0) &= v_2(x=\ell) = 0 \\ v_1(x=\ell/2) &= v_2(x=\ell/2) = 0 \\ v_1'(x=\ell/2) &= v_2'(x=\ell/2) = 0 \\ v_1''(x=\ell/2) &= v_2''(x=\ell/2) = 0 \\ v_1''(x=0) &= v_2''(x=\ell) = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

sendo que a segunda, terceira e quarta de (3.76) exprimem a continuidade da elástica, da inclinação e do momento fletor no meio do vão; já a quinta indica momento fletor nulo nas extremidades da viga. Em forma matricial, o expresso em (3.76) ganha a redação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 8 & 4\ell & 2\ell^2 & -8 & -4\ell & 2\ell^2 & -\ell^3 \\ 0 & 4 & 4\ell & 0 & -4 & -4\ell & -3\ell^2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6\ell \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & -3\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_0^I \\ A_1^I \\ A_2^I \\ A_3^I \end{Bmatrix} = A_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ell^3 \\ -3\ell^2 \\ 0 \\ 0 \\ -3\ell \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

cuja solução levada em (3.74) e (3.75) conduz a:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_3(x^3 - 6\ell^2x / 8) \\ v_2 &= A_3(2\ell^3 / 8 - 18\ell^2x / 8 + 3\ell x^2 - x^3) \end{aligned} \quad (3.78)$$

ficando, pois, a energia total dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\ell/2} EI(6A_3x)^2 dx + \int_{\ell/2}^{\ell} EI(A_3(6\ell - 6x))^2 dx \right] - P \left[A_3 \left(\frac{\ell^3}{8} - \frac{6\ell^3}{16} \right) \right] \quad (3.79)$$

cuja condição de energia total estacionária implica em:

$$A_3 = -P / 12EI \quad (3.80)$$

resultando, pois, a seguinte solução para a elástica:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{P}{12EI} \left(\frac{6}{8} \ell^2 x - x^3 \right) \\ v_2 &= \frac{P}{12EI} \left(\frac{18}{8} \ell^2 x - \frac{2\ell^3}{8} - 3\ell x^2 + x^3 \right) \end{aligned} \quad (3.81)$$

e, em correspondência, aos seguintes resultados de interesse:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{P}{2} x \\ V_1 &= \frac{P}{2} \\ M_2 &= \frac{P}{2} (\ell - x) \\ V_2 &= -\frac{P}{2} \\ \pi &= -\frac{P^2 \ell^3}{96EI} \end{aligned} \quad (3.82)$$

verificando-se, assim, que a solução em apreço é aquela da teoria técnica da flexão. Esse exemplo, de uma viga simplesmente apoiada solicitada por uma força concentrada no meio do vão, evidencia, por meio das várias soluções estudadas, um fato interessante, ou seja, a existência de descontinuidades deve ser tratada com soluções também descontínuas, a exemplo dessa última, porquanto as soluções contínuas, conforme pode ser constatado, apesar da boa convergência na

energia total, o mesmo não se verifica nos esforços internos, que apresentam descontinuidade (a solução exata apresenta continuidade ao nível da elástica, primeira e segunda derivadas; nos demais níveis apresenta descontinuidades).

3.6 - QUARTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Estuda-se, no que segue, o problema da flambagem de uma coluna comprimida por uma força P conforme ilustra-se na Figura 3.8a). Trata-se, também, de um problema de procurar elásticas aproximadas.

De início, cabe esclarecer que, desprezadas as parcelas da energia de deformação referentes à força cortante e força normal, de pequenas magnitudes, tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI (v'')^2 dx \quad (3.83)$$

e, por outro lado, com relação à energia potencial do carregamento, torna-se necessário introduzir algumas explicações adicionais.

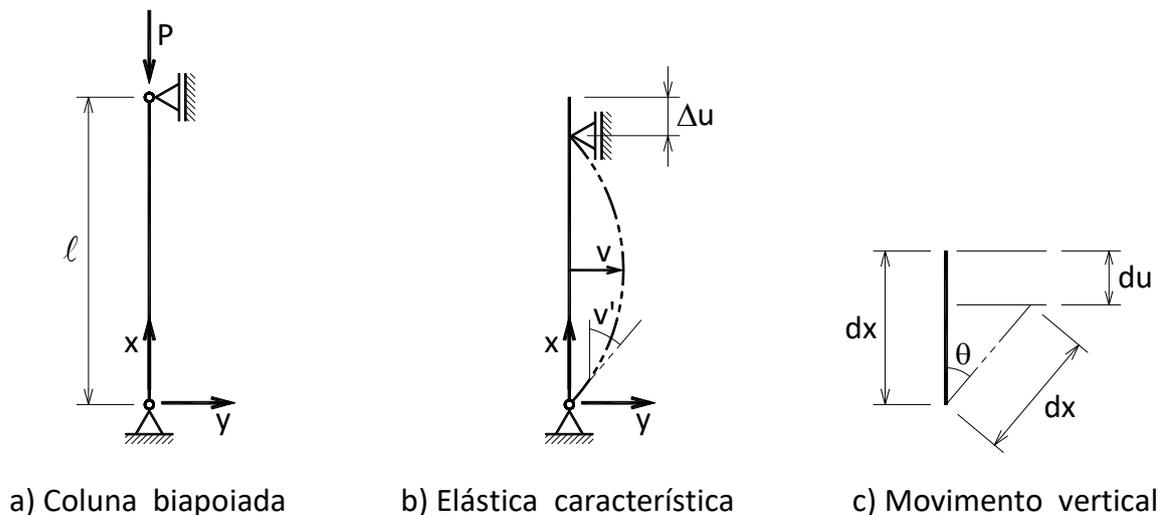


FIGURA 3.8 – Caso simples de flambagem

Em primeiro lugar, dado que o problema de flambagem enquadra-se em teoria de segunda ordem, a consideração da configuração deformada da coluna constitui o ponto de partida.

Assim, na figura 3.8b) indica-se o movimento Δu , do ponto de aplicação da força, decorrente da deformação da coluna por flexão. É oportuno assinalar que a deformação da coluna por força normal em nada influi no estudo em andamento, visto que não existe uma dependência entre o movimento apontado e o provocado

pela força normal; dentro, naturalmente, da consideração de pequenos deslocamentos (em outras palavras, considera-se que ℓ já seja o comprimento final da coluna depois de processada a deformação por força normal).

Exibe-se na figura 3.8c) um elemento dx da coluna na posição inicial (vertical) e o seu correspondente na posição deformada. O ângulo contido entre eles é, com base na consideração de pequenos deslocamentos, a própria derivada da deformada, pois:

$$v' = \operatorname{tg}\theta \cong \operatorname{sen}\theta \cong \theta \quad (3.84)$$

para θ pequeno, ou seja, grosso modo $\theta \leq 0.0873\text{rd}$. Por outro lado, a configuração geométrica permite escrever:

$$\begin{aligned} du &= dx(1 - \cos\theta) = dx(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - (\cos^2\theta/2 - \operatorname{sen}^2\theta/2)) = \\ dx(2\operatorname{sen}^2\theta/2) &= 2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{(v')^2}{2} dx \end{aligned} \quad (3.85)$$

e, assim sendo, a energia potencial da força passa a ser expressa por:

$$\Omega = -P\Delta u = -\frac{P}{2} \int_0^\ell (v')^2 dx \quad (3.86)$$

que consiste numa expressão de integração do quadrado na deformada.

Tomando-se, de início, como solução aproximada uma função do tipo:

$$v_a = A_2(x^2 - \ell x) \quad (3.87)$$

em obediência às condições de vinculação, a energia fica expressa por:

$$\pi = \frac{1}{2} \left[\int_0^\ell EI(2A_2)^2 dx - P \int_0^\ell (A_2(2x - \ell))^2 dx \right] \quad (3.88)$$

e, assim, a condição de energia total estacionária implica no problema de autovalor:

$$4EIA_2\ell - PA_2\frac{\ell^3}{3} = 0 \quad (3.89)$$

cujo autovalor se expressa ($A_2 \neq 0$):

$$P = \frac{12EI}{\ell^2} \quad (3.90)$$

ou seja, a carga crítica aproximada correspondente apresenta um erro de aproximadamente 24%; porém, deve-se ressaltar, contra a segurança. Em verdade,

as soluções aproximadas correspondem, no fundo, a uma introdução de vínculos, uma vez que se leva em consideração apenas alguns graus de liberdade. Assim sendo, não deve causar estranheza o fato de que, no método da energia, as soluções aproximadas conduzem a forças críticas superiores ao valor correto. Outro fato interessante diz respeito à variação da energia total com a variação de P . Vale notar, por exemplo, que o valor de π anula-se quando P atinge o valor de P crítico; dado, no caso por (3.90), porquanto:

$$\begin{aligned}\pi &= A_2^2 \left[2EI\ell - \frac{P\ell^3}{6} \right] \\ \delta\pi &= 2A_2 \left[2EI\ell - \frac{P\ell^3}{6} \right] = 0\end{aligned}\quad (2.91)$$

e π tem sempre valores positivos para P menor que P crítico e valores sempre negativos para P maior. De fato, no caso de P menor que P crítico a energia de deformação deve ser maior que o potencial da força, pois trata-se de um problema estável, ou seja, a estrutura não aceita, por assim dizer, uma situação deformada, ao contrário do caso instável que ocorre com P maior que P crítico, onde a estrutura entra em movimento, pois parte da energia potencial da força se transforma em energia cinética.

Tomando como solução aproximada uma função do tipo:

$$v = A_2(x^2 - \ell x) + A_3(x^3 - \ell^2 x) \quad (3.92)$$

tem-se:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(2A_2 + 6A_3 x)^2 - \frac{1}{2} P \int_0^\ell [A_2(2x - \ell) + A_3(3x^2 - \ell^2)]^2 dx \quad (3.93)$$

e a condição de energia total estacionária implica em:

$$\begin{bmatrix} \frac{P\ell^3}{3} - 4EI\ell & \frac{P\ell^4}{2} - 6EI\ell^2 \\ \frac{P\ell^4}{2} - 6EI\ell^2 & \frac{8P\ell^5}{10} - 12EI\ell^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.104)$$

cujos autovalores se expressam:

$$P_1 = \frac{12EI}{\ell^2} \quad (3.95)$$

$$P_2 = \frac{60EI}{\ell^2}$$

valendo-se notar que a primeira raiz, ou valor de P crítico, não sofreu alteração em relação à solução anterior; todavia dessa nova solução decorre um segundo valor de P crítico.

A título de curiosidade, tomando como solução aproximada um desenvolvimento do quarto grau, que obedece, além das condições de vinculação, também condições mecânicas mais imediatas (momento nulo nas extremidades), do tipo:

$$v_a = A_4(x^4 - 2\ell x^3 + \ell^3 x) \quad (3.96)$$

tem-se:

$$P = \frac{9.88EI}{\ell^2} \quad (3.97)$$

cujo erro é de tão somente 0,13%.

Na Figura 3.9 confronta-se o modo de flambagem da solução em apreço com o da solução exata.

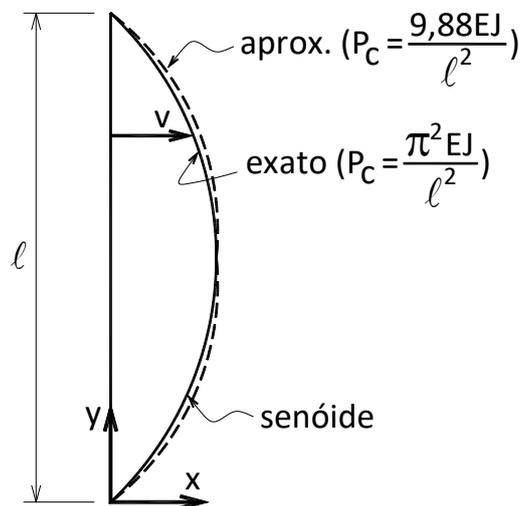


FIGURA 3.9 – Modos de flambagem (Elástica)

3.7 - QUINTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Considere-se o problema de flambagem da coluna indicada na Figura 3.10, onde o produto de inércia EI no terço inferior da altura é 16 vezes o produto de inércia do restante.

Em atenção à descontinuidade de seção, de maneira similar ao que foi feito no terceiro exemplo de aplicação, toma-se como solução no terço inferior uma função do tipo:

$$v_1 = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \quad (3.98)$$

e no restante:

$$v_2 = A'_0 + A'_1x + A'_2x^2 + A'_3x^3 \quad (3.99)$$

e eliminam-se, de início, sete dos parâmetros incógnitos mediante a imposição de condições de continuidade, vinculação e mecânicas mais imediatas, ou seja:

$$\begin{aligned} v_1(x=0) &= v_2(x=l) \\ v_1(x=l/3) &= v_2(x=l/3) \\ v'_1(x=l/3) &= v'_2(x=l/3) \\ v''_1(x=0) &= v''_2(x=l) = 0 \\ 16v''_1(x=l/3) &= v''_2(x=l/3) \end{aligned} \quad (3.100)$$

resultando-se:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_3(x^3 - 5\ell^2x) \\ v_2 &= A_3(-8x^3 + 24\ell x^2 - 18\ell^2x + 2\ell^3) \end{aligned} \quad (3.101)$$

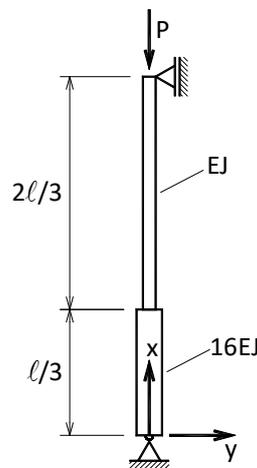


FIG. 3.10 – Coluna de seção variável

ficando-se, pois, a energia total dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} \left\{ 16 \int_0^{\ell/3} EI (6A_3x)^2 dx + \int_{\ell/3}^{\ell} EI (-48A_3x + 48A_3\ell) dx \right\} +$$

$$-P \left\{ 16 \int_0^{\ell/3} (3A_3x^2 - 5A_3\ell^2)^2 dx + \int_{\ell/3}^{\ell} (-24A_3x^2 + 48A_3\ell x - 18A_3\ell^2)^2 dx \right\} \quad (3.102)$$

ou seja:

$$\pi = 117.33A_3^2\ell^3EI - 9.35A_3^2\ell^5P \quad (3.103)$$

cuja variação nula implica em:

$$P = \frac{12.5EI}{\ell^2} \quad (3.104)$$

cujo erro em relação ao valor exato ($11.1EI / \ell^2$) é da ordem de 13%. Será, então, necessário prosseguir para uma solução mais apurada usando-se polinômios de grau mais elevado.

3.8 - SEXTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

O presente exemplo de aplicação é dedicado ao estudo da flambagem da coluna mostrada na Figura 3.11, cujo carregamento é dado por uma carga axial p uniformemente distribuída ao longo da altura.

A energia total é, nesse caso, dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\ell} EI (v'')^2 dx - \int_0^{\ell} p \left(\int_0^x (v')^2 dx \right) dx \right] \quad (3.105)$$

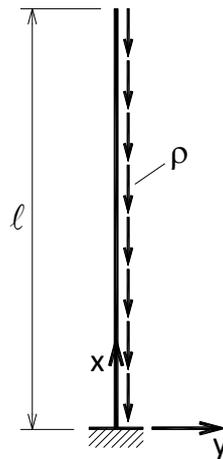


FIGURA 3.11 – Coluna sob força axial distribuída

que obedece às condições de vinculação $v(x=0) = 0$, $v'(x=0) = 0$ e à condição mecânica $v''(x=l) = 0$, tem-se:

$$\pi = 6EI A_3^2 \ell^3 - 0.75 \rho A_3^2 \ell^6 \quad (3.106)$$

cuja variação nula implica em:

$$\rho = 8 \frac{EI}{\ell^3} \quad (3.107)$$

e cujo erro em relação ao valor exato ($7.83EI / \ell^3$) é da ordem de apenas 2%.

3.9 - SÉTIMO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Considere-se a chapa de espessura unitária, altura $2c$ e vão ℓ , mostrada na Figura 3.12 cujo carregamento é dado por uma força q horizontal uniformemente distribuída ao longo da altura.

Trata-se, por conseguinte, de um problema de elasticidade plana que se enquadra no estado plano de tensão. Assim sendo a energia total é dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV - q \int_S u(x=-c, y) dS \quad (3.108)$$

onde:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= K_1 \varepsilon_x + K_2 \varepsilon_y \\ \sigma_y &= K_2 \varepsilon_x + K_1 \varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= K_3 \gamma_{xy}\end{aligned}\quad (3.109)$$

com:

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} \\ K_2 &= \frac{\nu E}{1-\nu^2} \\ K_3 &= \frac{E}{2(1+\nu)}\end{aligned}\quad (3.110)$$

sendo E o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

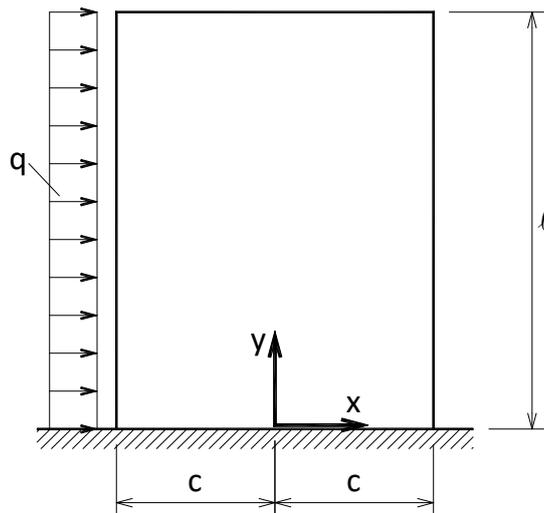


FIGURA 3.12 – Chapa sob força horizontal uniforme

Assim, a expressão (3.108) escreve-se:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V (K_1 \varepsilon_x^2 + 2K_2 \varepsilon_x \varepsilon_y + K_1 \varepsilon_y^2 + K_3 \gamma_{xy}^2) dV - q \int_S u(x = -c, y) dS \quad (3.111)$$

e, lembrando-se que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad (3.112)$$

adotando-se como solução aproximada:

$$\begin{aligned}u &= Ax^2y + By^2x \\ v &= Ay^3 + Bx^2y\end{aligned}\quad (3.113)$$

que satisfazem as condições de vinculação, ou seja, $u = v = 0$ para $y = 0$, bem como $\partial u / \partial y = 0$ para $x = y = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 2Axy + By^2 \\ \varepsilon_y &= 3Ay^2 + Bx^2 \\ \gamma_{xy} &= Ax^2 + 4Bxy\end{aligned}\quad (3.114)$$

e com isso, a expressão (3.111) ganha a redação:

$$\pi = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &K_1 \left(\frac{8}{9} A^2 c^3 \ell^3 + \frac{2}{5} B^2 c \ell^5 \right) + 2K_2 \left(\frac{6}{5} ABC \ell^5 + \frac{2}{9} B^2 c^3 \ell^3 \right) + \\ &K_1 \left(\frac{18}{5} A^2 c \ell^5 + \frac{2}{5} B^2 c^5 \ell + \frac{12}{9} ABC^3 \ell^3 \right) + K_3 \left(\frac{2}{5} A^2 c^5 \ell + \frac{32}{9} B^2 c^3 \ell^3 \right) \\ &-q \left(\frac{1}{2} Ac^2 \ell^2 - \frac{1}{3} Bc \ell^3 \right) \end{aligned} \right] \quad (3.115)$$

e a condição de energia total estacionária conduz a:

$$\left[\begin{aligned} &\left(\frac{16K_1}{9} \alpha^3 + \frac{36K_1}{5} \alpha \right) && \left(\frac{12K_2}{5} \alpha - \frac{12K_1}{9} \alpha^3 \right) \\ &\left(+ \frac{4K_3}{5} \alpha^5 \right) && \end{aligned} \right] \left\{ \begin{aligned} &A \\ &B \end{aligned} \right\} = \frac{q}{\ell^2} \left\{ \begin{aligned} &\alpha^2 \\ &\frac{2\alpha}{3} \end{aligned} \right\} \quad (3116)$$

onde $\alpha = c / \ell$.

A título de ilustração, tomando-se $\ell = c = 100\text{cm}$, $E = 21000\text{kN} / \text{cm}^2$ e $\nu = 1 / 3$, o sistema de equações (3.116) tem a seguinte solução:

$$\begin{aligned} A &= 3.45q10^{-8} \\ B &= 4.89q10^{-8} \end{aligned} \quad (3.117)$$

e, assim, os resultados de interesse são dados por:

$$\begin{aligned} u &= 10^{-8}q(3.45x^2y + 4.89y^2x) \\ v &= 10^{-8}q(3.45y^3 + 4.89x^2y) \\ \epsilon_x &= 10^{-8}q(6.9xy + 4.89y^2) \\ \epsilon_y &= 10^{-8}q(10.35y^2 + 4.89x^2) \\ \gamma_{xy} &= 10^{-8}q(3.45x^2 + 19.56yx) \end{aligned} \quad (3.118)$$

e ainda:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 10^{-5}q(3.85x^2 + 16.3xy + 19,7y^2) \\ \sigma_y &= 10^{-5}q(11.55x^2 + 5.43xy + 28.3y^2) \\ \tau_{xy} &= 10^{-5}q(2.72x^2 + 15.4y^2) \end{aligned} \quad (3.119)$$

cujo erro é de grande magnitude. Para se ter uma ideia da precisão dos resultados em unidades do sistema técnico, onde se adota $E = 2100\text{tf} / \text{cm}^2$, exibe-se na Figura 3.13 o carregamento encontrado em confronto com o dado, onde se nota uma grande disparidade, especialmente nas regiões onde as tensões são nulas. Vale assinalar que a busca por solução melhor não consiste, na prática, na adoção de polinômios de ordem elevada, mas de separação da região de integração em subdomínios (elementos finitos), e neles adotando-se polinômios de ordem menor e adequados.

3.10 - OITAVO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como último exemplo de aplicação do Método da Energia seja considerado o problema de torção livre de uma barra de seção retangular de lados $2a$ e $2b$, conforme ilustra-se na Figura 3.14.

A expressão da energia total é, nesse caso, dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V (\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV - M_t \theta \ell \quad (3.120)$$

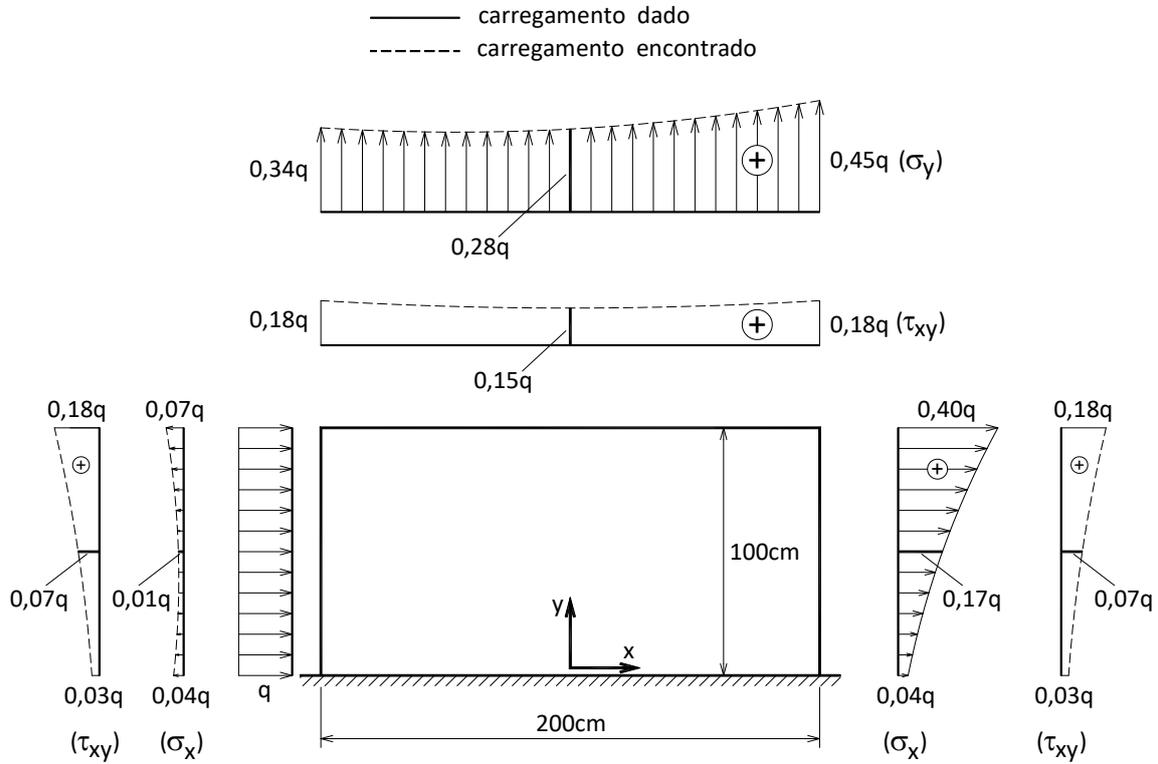


FIGURA 3.13 – Confronto do carregamento dado com o encontrado

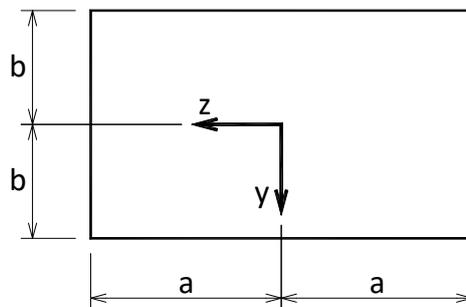


FIGURA 3.14 – Seção retangular

onde θ é a rotação por unidade de comprimento da barra e ℓ o comprimento.

Sabe-se, por outro lado, que o estado de deslocamento é, nesse caso, dado por:

$$\begin{aligned}
 u &= \theta\psi(y, z) \\
 v &= -\theta xz \\
 w &= \theta xz
 \end{aligned}
 \tag{3.121}$$

bem como:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy} &= \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \\
 \gamma_{xz} &= \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \\
 \tau_{xy} &= G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \\
 \gamma_{xz} &= G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.122}$$

e, dessa forma, a energia total passa a ser dada por:

$$\pi = \frac{G\theta^2 \ell}{2} \int_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)^2 \right] dS - M_t \theta \ell
 \tag{3.123}$$

cuja expressão envolve a função empenamento, bem como o giro por unidade de comprimento, o comprimento da barra e o módulo de elasticidade da torção.

Tomando-se, por exemplo, como solução aproximada uma função do tipo:

$$\psi = Ayz
 \tag{2.124}$$

tem-se:

$$\pi = \frac{G\theta^2 \ell}{2} \left[(A+1)^2 \int_S y^2 dS + (A-1)^2 \int_S z^2 dS \right] - M_t \theta \ell
 \tag{3.125}$$

e, assim, a condição de energia total estacionária resulta:

$$2(A+1) \frac{16ab^2}{12} + 2(A-1) \frac{16a^2b}{12} = 0
 \tag{2.126}$$

ou seja:

$$A = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}
 \tag{3.127}$$

e assim, o momento de inércia à torção (vide expressão (2.66)) correspondente é

então dado por:

$$I_t = \int_s \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} y - \frac{\partial \Psi}{\partial y} z + y^2 + z^2 \right) dS = \int_s [(A + 1)y^2 + (A - 1)z^2] dS \quad (3.128)$$

$$= \frac{64a^2b^2}{12(a^2 - b^2)}$$

cujo erro para o caso de $b = 2a$ é da ordem de 16%, porquanto se tem $I_t = 8.53a^4$, enquanto a solução exata é $I_t = 7.33a^4$.

3.11 - COMENTÁRIOS FINAIS

O Método da Energia da maneira como apresentado não se mostra muito interessante do ponto de vista computacional, pois não se vislumbra aí um procedimento sistemático e absolutamente geral. Cabe lembrar, a propósito, que nos casos de descontinuidade, há a necessidade de se adotar mais de uma função dentro do domínio de integração, e, com isso, as condições de continuidade na ligação dessas funções introduzem equações de natureza um tanto diferente daquelas decorrentes da condição estacionária para a energia total. Para contornar tais inconvenientes, e outros que não cabe aqui adiantar, foi desenvolvido nas décadas de 60 e 70 do século passado o conhecido Método dos Elementos Finitos que, no fundo, em uma de suas versões trata-se de uma sistematização bastante engenhosa do Método da Energia.

Finalizando, convém assinalar, a bem da verdade, que as soluções bastante simples aqui abordadas chamam a atenção para dois aspectos interessantes, quais sejam: as descontinuidades do problema a ser tratado devem ser obedecidas pela função aproximada; e o controle da convergência deve ser levado a efeito examinando-se cada grandeza (momento fletor e força cortante) em particular. No caso da maioria dos exemplos tratados, as condições de equilíbrio constituem bons indicadores. Valendo-se assinalar que, de acordo com o que se pode constatar, a medida da convergência da energia total nada indica à respeito da convergência das outras grandezas.

4 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

4.1 – INTRODUÇÃO

O Método das Diferenças Finitas, dentre os métodos de integração numérica usuais, é sem dúvida o de conceituação mais simples, e, por essa razão, um dos primeiros a ser formulado. Segundo alguns autores, o seu desenvolvimento sistemático deve-se ao grande pensador LAGRANGE.

Em linhas gerais, o Método das Diferenças Finitas baseia-se na definição geométrica de derivada, negligenciando-se a passagem ao limite do argumento. Dessa forma, podem-se obter operadores de derivadas, que, aplicados a valores da função incógnita, segundo a formulação lagrangeana, permitem exprimir, de maneira aproximada, as derivadas dessa função. A título de ilustração, considere-se a função genérica $f(x)$ mostrada na Figura 4.1a).

De acordo com a definição geométrica de derivada tem-se:

$$y'(x = x_i) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_i = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \quad (4.1)$$

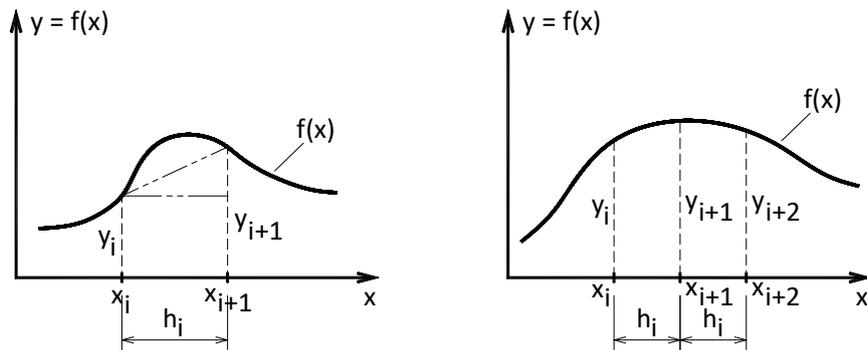


FIGURA 4.1 – Conceito geométrico de derivada primeira e malha para derivada segunda

Por outro lado, a consideração de h_i finito, ou seja, sem a passagem no limite, no quociente indicado exprime com certo grau de precisão, cuja magnitude é objeto de menções dadas mais adiante, o valor da derivada dessa função. Cabe ressaltar que o grau de precisão aumenta na razão inversa do espaçamento h_i , como é fácil de perceber da definição de derivada. Assim sendo é lícito escrever:

$$y'(x = x_i) \cong y'_a = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \quad (4.2)$$

Pois bem, de posse da relação (4.2) as derivadas de ordem superior podem ser expressas, por via de consequência, de forma similar, como, por exemplo, o caso da derivada segunda:

$$y''(x = x_i) \cong y''_a = \frac{y'_{i+1} - y'_i}{h_i} \quad (4.3)$$

onde no numerador figura, agora, a diferença de valores da derivada primeira. É oportuno assinalar que, certamente, o nome Diferenças Finitas tem sua origem no fato de que, a menos do fator $1/h_i$, a derivada constitui uma diferença entre valores discretos da função; com isso a diferença tem um valor finito, e não um infinitésimo como seria na conceituação de derivada.

É fácil perceber-se que as derivadas de ordem superior podem ser colocadas em termos dos valores da função. De fato, considere-se a função genérica mostrada na Figura 4.1b), da qual se conhece, por exemplo, três valores distintos espaçados igualmente por h_i . Com base na expressão (4.2) é lícito que se escreva:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \quad (4.4)$$

$$y_{i+1}' = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_i}$$

E, assim sendo, tem-se:

$$y_i''(x = x_i) \cong \frac{y_{i+1}' - y_i'}{h_i} \cong \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h_i^2} \quad (4.5)$$

Convém notar que, para exprimir a derivada segunda em função dos valores da função, introduz-se uma aproximação adicional, ou seja, as derivadas primeiras foram substituídas por expressões já aproximadas (vide (4.4)).

O procedimento até aqui seguido caracteriza-se pelo fato de se estimar a derivada num dado ponto a partir do conhecimento do valor da função nesse ponto e em seus vizinhos situados no sentido crescente da variável x ; disso decorre a formulação de operadores ditos ascendentes. Todavia é possível formular outros operadores a partir da ideia básica de se colocar a derivada em termos de diferença em outras configurações de vizinhança, gerando-se assim operadores descendentes, onde os vizinhos situam-se no sentido decrescente da variável x , e os centrais, onde os vizinhos rodeiam o ponto de consideração.

Conforme já mencionado, os operadores de diferença exprimem com certo grau de precisão as derivadas; e, assim sendo, é de grande interesse prático quantificar esse grau de precisão. Para tanto, o desenvolvimento de funções em série de Taylor, assunto de fácil exposição, é a seguir apresentado

4.2 – SÉRIE DE TAYLOR E ORDEM DO ERRO

A teoria das séries de Taylor foi sem dúvida uma revolução na chamada matemática operacional, afinal ela permitiu pela primeira vez na história da matemática explicitar de maneira exata, além das funções trigonométricas, muitas outras funções.

Em verdade a série de Taylor é uma expansão polinomial tendo por base o valor da função e de suas derivadas em um determinado valor da variável, em especial para o valor nulo da variável, da mesma forma como ocorre com qualquer polinômio.

Por exemplo, considere-se um polinômio genérico do tipo:

$$p(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \dots \quad (4.6)$$

onde C_i são as constantes do polinômio. Suas derivadas sucessivas são expressas por:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}p(x) &= p'(x) = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \dots \\
\frac{d}{dx^2}p(x) &= p''(x) = 2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2 + \dots \\
\frac{d}{dx^3}p(x) &= p'''(x) = 6C_3 + 24C_4x + \dots \\
\frac{d}{dx^4}p(x) &= p^{IV}(x) = 24C_4 + \dots
\end{aligned}
\tag{4.7}$$

onde o numeral romano como expoente indica o nível de derivação. Assim sendo, para valor nulo da variável x tem-se de imediato:

$$\begin{aligned}
p(x=0) &= C_0 = 0!C_0 = p_0 \\
p'(x=0) &= C_1 = 1!C_1 = p_0' \\
p''(x=0) &= 2C_2 = 2!C_2 = p_0'' \\
p'''(x=0) &= 6C_3 = 3!C_3 = p_0''' \\
p^{IV}(x=0) &= 24C_4 = 4!C_4 = p_0^{IV} \\
\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{4.8}$$

e com isso o polinômio (4.6) ganha a seguinte escrita:

$$p(x) = p_0 + p_0' \frac{x^1}{1!} + p_0'' \frac{x^2}{2!} + p_0''' \frac{x^3}{3!} + p_0^{IV} \frac{x^4}{4!} + \dots
\tag{4.9}$$

Em outras palavras, conhecendo-se a função polinomial e suas derivadas para o valor nulo da variável x , por exemplo, o polinômio acha-se determinado, pois existe uma relação direta desses valores com as constantes do polinômio, e essa propriedade vale para qualquer que seja o grau do polinômio.

A expressão (4.9) permite, por exemplo, escrever:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + y_i'h + y_i'' \frac{h^2}{2!} + y_i''' \frac{h^3}{3!} + y_i^{IV} \frac{h^4}{4!} + \dots \\
y_{i-1} &= y_i - y_i'h + y_i'' \frac{h^2}{2!} - y_i''' \frac{h^3}{3!} + y_i^{IV} \frac{h^4}{4!} - \dots
\end{aligned}
\tag{4.10}$$

o que permite redigir as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'_i + \frac{y''_i}{2!}h + \frac{y'''_i}{3!}h^2 + \dots \\
y'(x) &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h} = 2y'_i + \frac{2y'''_i}{3!}h^2 + \dots \\
y''(x) &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = y''_i + \frac{2y^{IV}_i}{4!}h^2 = \dots
\end{aligned} \tag{4.11}$$

permitindo-se, pois, formular os seguintes operadores de diferenças finitas explicitando-se a ordem do erro:

$$\begin{aligned}
y'_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y''_i}{2!}h + \dots \rightarrow o(h) \\
y'_i &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{y'''_i}{3!}h^2 + \dots \rightarrow o(h^2) \\
y''_i &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{2y^{IV}_i}{4!}h^2 + \dots \rightarrow o(h^2)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

evidenciando-se que o operador central de primeira derivada:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \tag{4.13}$$

e o operador central de segunda derivada:

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \tag{4.14}$$

apresentam erro de segunda ordem, e, conseqüentemente, ao serem aplicados em relações diferenciais resultam, coerentemente em conjunto, igualmente erros de segunda ordem.

Os operadores de diferenças finitas (4.13) e (4.14) que expressam derivadas em termos de valores da função na vizinhança são denominados lagrangeanos centrais de passo duplo. Todavia existem também operadores de diferenças finitas mais gerais denominados operadores de diferenças finitas hermitianos, como mostrado a seguir, apenas a título de exemplificação.

Considere-se para tanto os seguintes desenvolvimentos:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + y'_i h + y''_i \frac{h^2}{2!} + y'''_i \frac{h^3}{3!} + y^{IV}_i \frac{h^4}{4!} + \dots \\
y'_{i+1} &= y'_i + y''_i h + y'''_i \frac{h^2}{2!} - y^{IV}_i \frac{h^3}{3!} + y^{V}_i \frac{h^4}{4!} - \dots
\end{aligned} \tag{4.15}$$

os quais permitem obter um operador de diferenças finitas hermitianas de terceira ordem como segue:

$$y_i + ay_{i+1} + by_i' + cy_{i+1}' = 0 + \frac{y'''}{12}(h^3) \quad (4.16)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} 1 + a &= 0 \\ 1 + ch + bh &= 0 \\ \frac{1}{2} + ch &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

resultando $a = -1$, $b = -1/2h$, $c = -1/2h$, sendo pois o operador em questão expresso por:

$$y_{i+1} - y_i - (y_i' + y_{i+1}') \frac{h}{2} = 0 \quad (4.18)$$

que consiste no clássico operador trapezoidal empregado na integração de equações diferenciais da dinâmica das estruturas, por exemplo. Cumpre assinalar que os operadores são obtidos anulando-se os termos da combinação até a ordem desejada como explicitado em (4.17).

No que se segue são apresentados vários exemplos de aplicação empregando-se apenas operadores de diferenças finitas centrais lagrangeanos (4.13) e (4.14), por serem de mais fácil manipulação e envolver apenas o entorno próximo com erro de aproximação de segunda ordem, exigindo-se a consideração de apenas dois pontos fora do domínio de integração como ilustrado nos próprios exemplos.

4.3 - PRIMEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como primeiro exemplo de aplicação do Método das Diferenças Finitas, via operadores de passo duplo centrais lagrangeanos considere-se o problema de determinação da elástica de uma viga em balanço sujeita a uma força concentrada P na extremidade livre, conforme se ilustra na Figura 4.2a).

Da teoria técnica da flexão sabe-se que a relação momento-curvatura assim se expressa:

$$v'' = -\frac{M}{EI} \quad (4.16)$$

sendo M o momento fletor, E o módulo de elasticidade e I o momento de inércia da viga em apreço.

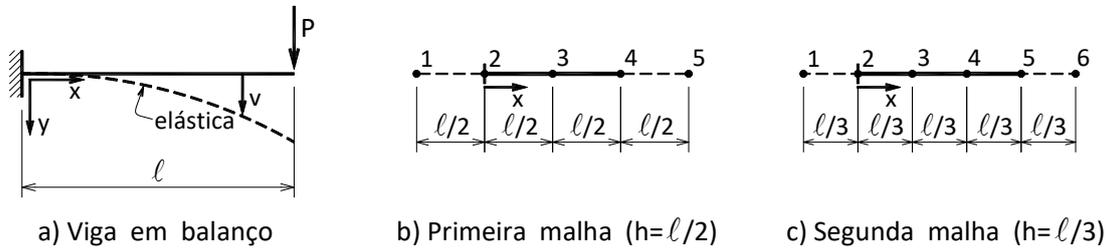


FIGURA 4.2 – Viga em balanço e malhas adotadas

Para a vinculação indicada tem-se:

$$\begin{aligned} v(x=0) &= 0 \\ v'(x=0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Como primeira solução toma-se para o espaçamento h o valor $l/2$, e, por via de consequência, considera-se a malha regular indicada na Figura 4.2b). Assim, as condições dadas em (4.15) implicam em:

$$\begin{aligned} v_2 &= 0 \\ \frac{v_3 - v_1}{l} &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde na segunda de (4.18) emprega-se o operador de diferença central (4.13).

Por outro lado, a condição (4.16) levada nos pontos 2, 3 e 4 implica em:

$$\begin{aligned} \frac{v_1 - 2v_2 - v_3}{(l/2)^2} &= \frac{Pl}{EI} \\ \frac{v_2 - 2v_3 - v_4}{(l/2)^2} &= \frac{Pl}{2EI} \\ \frac{v_3 - 2v_4 - v_5}{(l/2)^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Desta feita, o sistema de equações formado por (4.18) e (4.19) resolvido, no que interessa, resulta:

$$\begin{aligned}
 v_2 &= 0 \\
 v_3 &= P\ell^3/8EI \\
 v_4 &= P\ell^3/2.67EI
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

A título de curiosidade, v_4 apresenta um erro de 12% em relação ao valor exato $P\ell^3/3EI$.

Com a malha indicada na Figura 4.2c), onde o espaçamento é $h = \ell/3$ tem-se:

$$\begin{aligned}
 v_2 &= 0 \\
 (v_3 - v_1) / (2\ell / 3) &= 0 \\
 (v_1 - 2v_2 + v_3) / (\ell / 3)^2 &= P\ell / EI \\
 (v_2 - 2v_3 + v_4) / (\ell / 3)^2 &= 2P\ell / EI \\
 (v_3 - 2v_4 + v_5) / (\ell / 3)^2 &= P\ell / 3EI \\
 (v_4 - 2v_5 + v_6) / (\ell / 3)^2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned}
 v_2 &= 0 \\
 v_3 &= P\ell^3 / 18EI \\
 v_4 &= P\ell^3 / 5.4EI \\
 v_5 &= P\ell^3 / 2.84EI
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

Nesse caso o erro contido no deslocamento v_5 da extremidade livre é de apenas 5%. Com base no fato de que o erro contido nos operadores é da ordem do quadrado do espaçamento, é possível, então, achar uma melhor estimativa para o deslocamento da extremidade livre (extrapolação de Richardson), dado que este ponto está contido nas duas malhas estudadas. De fato, com a primeira malha ($h = \ell/2$) tem-se:

$$v_5 = \frac{P\ell^3}{2.67EI} + \frac{o(\ell^2)}{4}
 \tag{4.23}$$

e com a segunda malha ($h = \ell/3$) tem-se:

$$v_5 = \frac{P\ell^3}{2.84EI} + \frac{o(\ell^2)}{9}
 \tag{4.24}$$

Das relações (4.23) e (4.24) conclui-se:

$$\alpha(\ell^2) = -\frac{0.161P\ell^3}{EI} \quad (4.25)$$

e, assim sendo, de (4.23) conclui-se:

$$v_5 = \frac{P\ell^3}{2.67EI} + \frac{(-0.161P\ell^3)}{4EI} = \frac{P\ell^3}{2.99EI} \quad (4.26)$$

que constitui uma aproximação do deslocamento da extremidade livre altamente mais precisa, ou seja, apresenta erro da ordem de 0,3%.

4.4 - SEGUNDO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Considere-se, agora, o problema da determinação da força de flambagem da coluna indicada na Figura 4.3a).

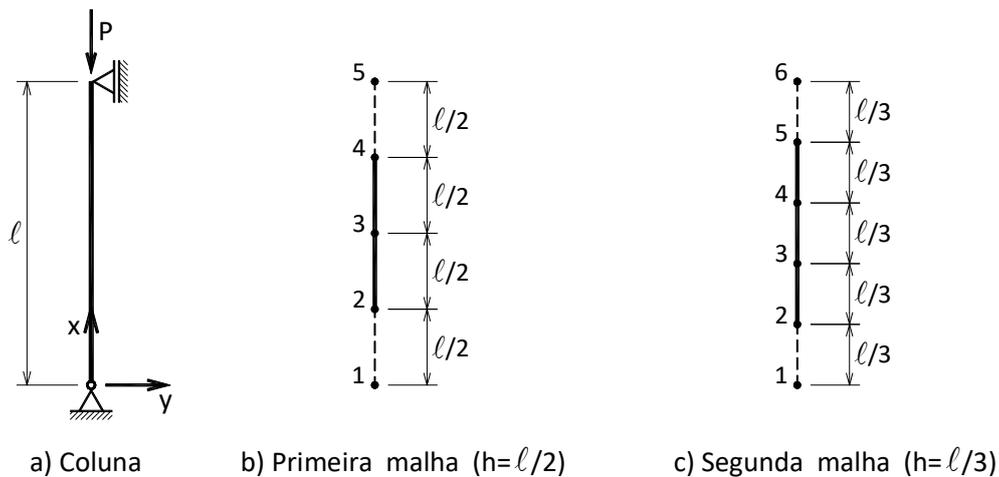


FIGURA 4.3 – Flambagem de coluna e malhas adotadas

A equação diferencial que governa o equilíbrio da coluna em questão é dada por:

$$v'' + (P/EI)v = 0 \quad (4.27)$$

e as condições de vinculação são dadas por:

$$\begin{aligned} v(x=0) &= 0 \\ v(x=\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

A solução com a malha de espaçamento $h = \ell/2$ indicada na Figura 4.3b), implica no problema de autovalor:

$$\begin{aligned}
 v_2 &= 0 \\
 v_4 &= 0 \\
 (v_1 - 2v_2 + v_3) / (\ell / 2)^2 + (P / EI)v_2 &= 0 \\
 (v_2 - 2v_3 + v_4) / (\ell / 2)^2 + (P / EI)v_2 &= 0 \\
 (v_3 - 2v_4 + v_5) / (\ell / 2)^2 + (P / EI)v_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

cujo autovalor decorre de:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{4.30}$$

onde

$$\alpha = \frac{P\ell^2}{4EI} - 2 \tag{4.31}$$

resultando:

$$-\alpha = 0 \tag{4.32}$$

ou seja:

$$P = 8EI/\ell^2 \tag{4.33}$$

cujo erro em relação ao valor exato $\pi^2 EI/\ell^2$ é da ordem de 19%.

A solução correspondente à malha indicada na Figura 4.3c), cujo espaçamento é de $\ell/3$, implica em:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.34)$$

onde

$$\alpha = \frac{P\ell^2}{9EI} - 2 \quad (4.35)$$

resultando-se, pois:

$$\alpha^2 - 1 = 0 \quad (4.36)$$

cujas raízes são ± 1 e, portanto de (4.35):

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{9EI}{\ell^2} \\ P_1 &= \frac{27EI}{\ell^2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

sendo o erro na primeira raiz da ordem de 9%. A segunda raiz, segunda carga de flambagem, não será aqui objeto de exame por se tratar de uma espécie de efeito colateral no aumento da precisão da carga de flambagem. Lançando-se mão do critério de correção já mencionado no exemplo anterior (extrapolação de Richardson), que também se aplica a autovalores, uma vez que o equilíbrio expresso em (4.27) é redigido em diferenças finitas com erro de ordem $o(h^2)$ independente do valor de P , tem-se:

$$\begin{aligned} P &= \frac{8EI}{\ell^2} + \frac{o(\ell^2)}{4} \\ P &= \frac{9EI}{\ell^2} + \frac{o(\ell^2)}{9} \end{aligned} \quad (4.38)$$

cuja solução implica em:

$$P = \frac{9.798EI}{\ell^2} \quad (4.39)$$

com erro, agora, de apenas 0,7%.

Vale assinalar que o modo de flambar obtido numericamente é igual ao modo de flambar exato fornecido pela teoria de Euler nesse caso, pois o equilíbrio numérico de (4.27) se expressa:

$$v_{i-1} - (2 - \alpha)v_i + v_{i+1} = 0 \quad (4.40)$$

sendo $\alpha = Ph^2/EI$, e a equação de diferença (4.40), que relaciona a função v em posições diferentes da variável, tem por solução:

$$v_n = A\lambda^n \quad (4.41)$$

a qual substituída em (4.40) e eliminando-se os termos comuns resulta:

$$\lambda^2 - (2 - \alpha)\lambda + 1 = 0 \quad (4.42)$$

cujas raízes:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2 - \alpha}{2}\right)^2 - 1} \quad (4.43)$$

são complexas para $0 \leq \alpha \leq 4$ que é o domínio naturalmente esperado para malhas refinadas, ou seja:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \alpha}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{2 - \alpha}{2}\right)^2} \quad (4.44)$$

sendo i a unidade imaginária, ou ainda em forma polar:

$$\lambda_{1,2} = \rho e^{\pm\theta i} \quad (4.45)$$

onde

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{2 - \alpha}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{2 - \alpha}{2}\right)^2} = 1 \quad (4.46)$$

$$\text{Tg}\theta = \frac{\sqrt{4\alpha - \alpha^2}}{2 - \alpha}$$

e a solução da equações de diferença (4.40) ganha então a seguinte redação:

$$v_n = Ae^{n\theta i} + Be^{-n\theta i} \tag{4.47}$$

Impondo-se agora à solução (4.47) as condições de contorno, ou seja:

$$\begin{aligned} v_{n=0} &= 0 = A + B \\ v_{n=m} &= 0 = Ae^{m\theta i} + Be^{-m\theta i} \end{aligned} \tag{4.48}$$

resulta, tendo-se em conta fórmula de Euler:

$$v_m = A(e^{m\theta i} - e^{-m\theta i}) = 2A\text{isen}(m\theta) = 0 \tag{4.49}$$

implicando-se $m\theta = 0, \pi, \dots, n\pi$ e modo de flambagem (4.47) com a redação:

$$v_n = A(e^{n\theta i} - e^{-n\theta i}) = 2A\text{isen}(n\theta) = C\text{sen}(n\theta) \tag{4.50}$$

ou seja, o modo de flambagem resultante da aplicação do método da diferenças finitas nesse caso é exato (função senoidal); e isso é uma garantia adicional de que o autovalor (carga crítica) obtido pelo método das diferenças finitas apresenta também segunda ordem de convergência, uma vez que as três últimas de (4.29) apresentam erro de segunda ordem.

4.5 - TERCEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Considere-se o problema da flambagem de coluna sujeita a um carregamento axial uniformemente distribuído ao longo da altura, conforme se ilustra na Figura 4.4a).

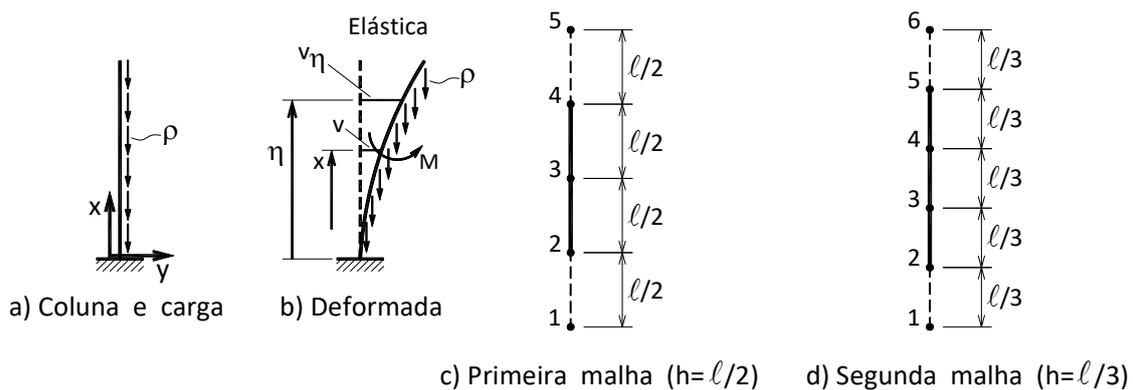


FIGURA 4.4 – Flambagem por força axial uniforme e malhas adotadas.

De início cabe deduzir a equação diferencial que governa o fenômeno de flambagem em questão, o que é bastante simples. De fato, na Figura 4.4b) exhibe-

se a configuração deformada da coluna juntamente com um trecho isolado, cujo equilíbrio permite escrever:

$$M = -\int_x^{\ell} \rho(v_{\eta} - v) d\eta \quad (4.51)$$

onde, no integrando, ρ que é a carga vertical distribuída e v não variam com a variável η . Assim, de (4.51) deduz-se:

$$M = \rho v(\ell - x) - \rho \int_x^{\ell} v_{\eta} d\eta \quad (4.52)$$

ou, ainda, por derivação:

$$M' = \rho v'(\ell - x) + \rho v(-1) + \rho v = \rho v'(\ell - x) \quad (4.53)$$

Por outro, a relação momento curvatura permite também escrever-se:

$$M' = -EIv''' \quad (4.54)$$

respeitada, naturalmente, a convenção de sinal da teoria técnica da flexão. O equilíbrio entre o momento externo, dado em (4.53), e o momento interno, dado em (4.54) implica em:

$$v''' + \frac{\rho}{EI}(\ell - x)v' = 0 \quad (4.55)$$

que constitui a equação procurada. As condições de contorno, no caso, são:

$$\begin{aligned} v(x=0) &= 0 \\ v'(x=0) &= 0 \\ v''(x=\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

sendo que a última provém do fato de ser nulo o momento fletor no topo, e as primeiras são imposições da vinculação.

Todavia, é mais conveniente tratar o problema mediante a equação diferencial:

$$\varphi'' + \frac{\rho}{EI}(\ell - x)\varphi = 0 \quad (4.57)$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned}\varphi(x=0) &= 0 \\ \varphi'(x=0) &= 0\end{aligned}\tag{4.58}$$

onde se toma $\varphi = v^l$.

Adotando-se a malha indicada na Figura 4.4c), as equações de diferenças finitas ficam:

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= 0 \\ \frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3}{(\ell/2)^2} + \frac{\rho}{EI}(\ell - 0)\varphi_2 &= 0 \\ \frac{\varphi_2 - 2\varphi_3 + \varphi_4}{(\ell/2)^2} + \frac{\rho}{EI}(\ell - \ell/2)\varphi_3 &= 0 \\ \frac{\varphi_3 - 2\varphi_4 + \varphi_5}{(\ell/2)^2} + \frac{\rho}{EI}(\ell - \ell)\varphi_4 &= 0 \\ \frac{\varphi_5 - \varphi_3}{\ell} &= 0\end{aligned}\tag{4.59}$$

Constituindo-se em um problema de autovalor cuja solução implica em:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha - 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha - 4)/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0\tag{4.60}$$

onde

$$\alpha = \rho\ell^3/4EI\tag{4.61}$$

resultando-se $\alpha = 2$, ou seja:

$$\rho = \frac{8EI}{\ell^3}\tag{4.62}$$

cujo erro em relação ao valor exato $7.837EI/\ell^3$ é da ordem de 2%. Por outro lado, com a malha indicada na Figura 4.4d), tem-se que o determinante, da matriz do sistema, a ser anulado, será agora:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \beta - 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\beta/3 - 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta/3 - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.63)$$

onde $\beta = \rho \ell^3 / 9EI$, resultando:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 7.91EI / \ell^3 \\ \rho_2 &= 46.09EI / \ell^3 \end{aligned} \quad (4.64)$$

cujo erro da primeira raiz em relação à solução exata é de tão somente 0,93%, não tendo significado físico a segunda raiz. Todavia, refinando o resultado (extrapolação de Richardson), de modo similar aos exemplos anteriores, com base nas relações:

$$\begin{aligned} \rho &= 8EI / \ell^3 + o(\ell^2) / 4 \\ \rho &= 7.91EI / \ell^3 + o(\ell^2) / 9 \end{aligned} \quad (4.65)$$

tem-se:

$$\rho = \frac{7.838EI}{\ell^3} \quad (4.66)$$

cujo erro já é da insignificância de 0,013%.

4.6 - QUARTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Estuda-se, agora, o problema da flexão de segunda ordem da coluna mostrada na Figura 4.5a), onde se leva em consideração a flexão adicional introduzida pela força normal.

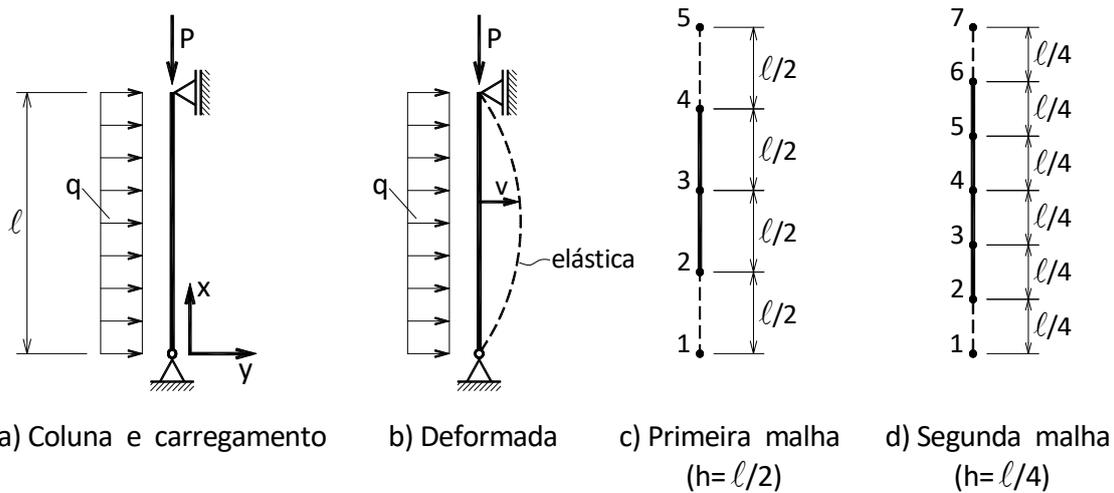


FIGURA 4.5 – Flexão em segunda ordem e malhas adotadas

Nesse caso o momento externo é agora dado, conforme se ilustra na Figura 4.5b), por:

$$M = Pv + \frac{q}{2}(\ell x - x^2) \quad (4.67)$$

e o momento interno dado pela relação momento curvatura.

$$M = -\frac{EI}{v''} \quad (4.68)$$

e combinando-se as equações (4.67) e (4.68) tem-se, finalmente a equação diferencial que governa o comportamento da coluna, ou seja:

$$v'' + \frac{Pv}{EI} = \frac{q(x^2 - \ell x)}{2EI} \quad (4.69)$$

om as condições de vinculação são dadas por:

$$\begin{aligned} v(x=0) &= 0 \\ v(x=\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (4.70)$$

Adotando-se inicialmente a malha indicada na Figura 4.5 c), com espaçamento $\ell/2$, tem-se:

$$\frac{-2v_3}{(\ell/2)^2} + \frac{Pv_3}{EI} = \frac{q}{2EI} [(\ell/2)^2 - \ell(\ell/2)] \quad (4.71)$$

resultando-se, pois:

$$v_3 = \frac{q\ell^4}{32EI} \left(2 - \frac{P\ell^2}{4EI} \right)^{-1} \quad (4.72)$$

e, assim sendo, o momento fletor no ponto 3 passa a ser dado por:

$$M_3 = -EI \left(\frac{-2v_3}{(\ell/2)^2} \right) = \frac{q\ell^2}{4} \left(2 - \frac{P\ell^2}{4EI} \right)^{-1} \quad (4.73)$$

A título de comparação, considere-se o caso onde a força normal é a metade da carga crítica aproximada com essa malha, ou seja:

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{8EI}{\ell^2} \right) \quad (4.74)$$

o expresso em (4.73) resulta:

$$M = \frac{q\ell^2}{4} \quad (4.75)$$

enquanto o valor correto é:

$$M = 1.015 \frac{q\ell^2}{4} \quad (4.76)$$

o que implica num erro de tão somente 1,5%. Considerando-se agora uma força normal de 3/4 da força crítica a solução aproximada conduz a:

$$M = 2 \left(\frac{q\ell^2}{4} \right) \quad (4.77)$$

enquanto a exata é:

$$M = 2.046 \left(\frac{q\ell^2}{4} \right) \quad (4.78)$$

constatando-se, pois, um erro da ordem de 2%.

Tomando-se a malha indicada na Figura 4.5 d), de espaçamento $\ell/4$, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = -\frac{q\ell^4}{4EI} \begin{Bmatrix} 3/128 \\ 4/128 \\ 3/128 \end{Bmatrix} \quad (4.79)$$

onde:

$$\alpha = \frac{P\ell^2}{16EI} - 2 \quad (4.80)$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{q\ell^4}{4EI} \left(\frac{4}{128} - \frac{3\alpha}{128} \right) / (\alpha^2 - 2) \\ v_4 &= \frac{q\ell^4}{4EI} \left(\frac{6}{128} - \frac{4\alpha}{128} \right) / (\alpha^2 - 2) \\ v_5 &= \frac{q\ell^4}{4EI} \left(\frac{4}{128} - \frac{3\alpha}{128} \right) / (\alpha^2 - 2) \end{aligned} \quad (4.81)$$

A título de comparação, a exemplo do que foi feito na primeira solução, com uma força normal igual à metade da força crítica tem-se:

$$M = 1.013 \frac{q\ell^2}{4} \quad (4.82)$$

enquanto o valor exato é de $1.015q\ell^2 / 4$, ou seja, o erro é da ordem de 0,2%. No outro caso, força normal igual à 3/4 da força crítica, tem-se:

$$M = 2.041 \frac{q\ell^2}{4} \quad (4.83)$$

cujo erro em relação ao valor exato ($2.046q\ell^2 / 4$) é de apenas 0,25%.

É oportuno assinalar que a ordem do erro na estimativa do momento fletor não é aquela verificada na elástica e na força crítica, que no caso é da ordem de h^2 , e daí carece de sentido um refinamento do momento com procedimento já levado a efeito nos exemplos anteriores. Todavia os resultados encontrados já são mais que precisos em termos práticos.

4.7 - QUINTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Resolve-se, no que segue, o problema da flexão de uma barra sobre base elástica (modelo Winkler), cujo esquema é mostrado na Figura 4.6 a). Cabe esclarecer que a barra é solidária à base elástica, sendo a elasticidade da base caracterizada por uma constante elástica definida por:

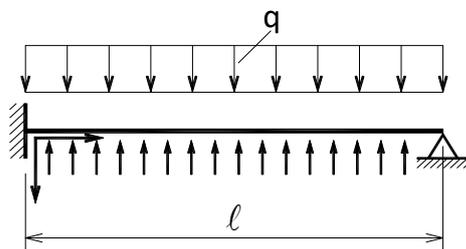
$$k = \frac{q}{v} \quad (4.84)$$

suposta constante ao longo do comprimento, sendo q o carregamento distribuído.

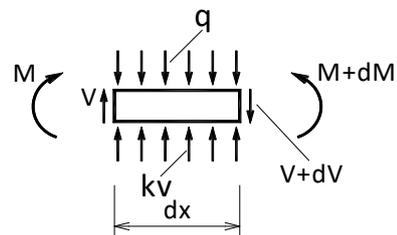
Na Figura 4.6 b) exhibe-se um elemento diferencial da viga sujeito às ações externas e internas. Assim, as condições de equilíbrio implicam em:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dx} &= V \\ \frac{dV}{dx} &= -q + kv \end{aligned} \quad (4.85)$$

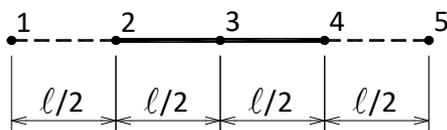
onde V é o esforço cortante na viga.



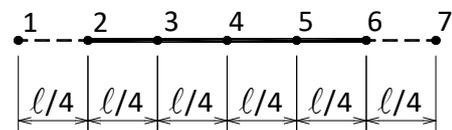
a) Viga sobre base elástica



b) Configuração de equilíbrio



c) Primeira malha ($h = l/2$)



d) Segunda malha ($h = l/4$)

FIGURA 4.6 – Viga sobre base elástica e malhas adotadas

Por outro lado, tendo em vista a relação momento curvatura e as relações (4.85) tem-se então a equação diferencial:

$$v^{IV} + \frac{k}{EI}v = \frac{q}{EI} \quad (4.86)$$

cuja integração deve apresentar solução obediente às condições de contorno:

$$\begin{aligned} v(x=0) &= 0 \\ v'(x=0) &= 0 \\ v(x=\ell) &= 0 \\ v''(x=\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (4.87)$$

Tomando-se, de início, a primeira malha indicada na figura 4.8c) ($h = \ell/2$) e adotando-se o operador de diferenças finitas centrais de derivada quarta com erro de segunda ordem, ou seja:

$$v_i^{IV} = \frac{v_1 - 4v_2 + 6v_3 - 4v_4 + v_5}{\ell^2/4} \quad (4.88)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} v_2 &= 0 \\ v_3 - v_1 &= 0 \\ v_1 - 4v_2 + 6v_3 - 4v_4 + v_5 + \frac{k\ell^4}{16EI}v_3 &= \frac{q\ell^4}{16EI} \\ v_3 - 2v_4 + v_5 &= 0 \\ v_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4.89)$$

cuja solução, no que interessa, é:

$$v_3 = \frac{q\ell^4}{16EI} \left(\frac{1}{6 + k\ell^4 / 16EI} \right) \quad (4.90)$$

A título de ilustração numérica, tome-se, por exemplo, o caso onde $\ell = 120\text{cm}$, $q = 43400\text{N/cm}$, $E = 3.10^7\text{N/cm}^2$, $I = 3.10^3\text{cm}^4$ e $k = 2604\text{N}$. Com esses dados tem-se de (4.90):

$$v_3 = 0.98\text{cm} \quad (4.91)$$

cujo erro em relação ao valor exato $0,5086\text{cm}$ é da ordem de 80% (um senhor erro!). Todavia, com a segunda malha ($h = \ell/4$) indicada na figura 4.8d) tem-se:

$$\begin{aligned}
 v_3 &= 0.34\text{cm} \\
 v_4 &= 0.64\text{cm} \\
 v_5 &= 0.51\text{cm}
 \end{aligned}
 \tag{4.92}$$

sendo que nesse caso v_4 apresenta um erro já da ordem de 20% em relação ao valor exato. Por outro lado é possível se obter uma estimativa mais acurada da flecha no meio do vão, a exemplo dos casos anteriores, ou seja:

$$\begin{aligned}
 v_4 &= 0.98 + o(\ell^2)/4 \\
 v_4 &= 0.64 + o(\ell^2)/16
 \end{aligned}
 \tag{4.93}$$

obtendo-se

$$v_4 = 0.53\text{cm} \tag{4.94}$$

cujo erro já é da ordem de apenas 4%.

Com relação à curvatura, também no meio do vão, tem-se:

$$v_3'' = \frac{0.34 - 2 \times 0.64 + 0.51}{(\ell / 4)^2} = -6.88\ell^{-2} \tag{4.95}$$

com erro de 13,06%. Igualmente, corrigindo em (4.92) os valores de v_3 e v_5 com o mesmo percentual relativo à flecha no meio do vão ($100 \times (0,64 - 0,53) / 0,53$), tem-se:

$$v_3'' = \frac{0.28 - 2 \times 0.53 + 0.42}{(\ell / 4)^2} = -5.71\ell^{-2} \tag{4.96}$$

cujo erro cai para 5% em relação ao valor exato $-6.08\ell^{-2}$. Tendo em vista a relação momento curvatura, deduz-se ser este também a ordem do erro relativo ao momento fletor no meio do vão.

4.8 - OPERADORES DE ORDEM h^2 PARA DERIVADAS PARCIAIS

Os operadores de derivadas ordinárias apresentados no item 4.2 permitem, de maneira bastante imediata, obter operadores para derivadas parciais. De fato, considere-se, por exemplo, uma função $\varphi(x, y)$, cujo valor é conhecido em 5 pontos pertencentes à malha regular de espaçamento h , conforme ilustra-se na Figura 4.7 a).

Usando-se os operadores já apresentados tem-se no ponto i :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &\cong \frac{\varphi_j - \varphi_l}{2h} \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial y} &\cong \frac{\varphi_k - \varphi_m}{2h} \\
 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &\cong \frac{\varphi_l - 2\varphi_i + \varphi_j}{h^2} \\
 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &\cong \frac{\varphi_m - 2\varphi_i + \varphi_k}{h^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.97}$$

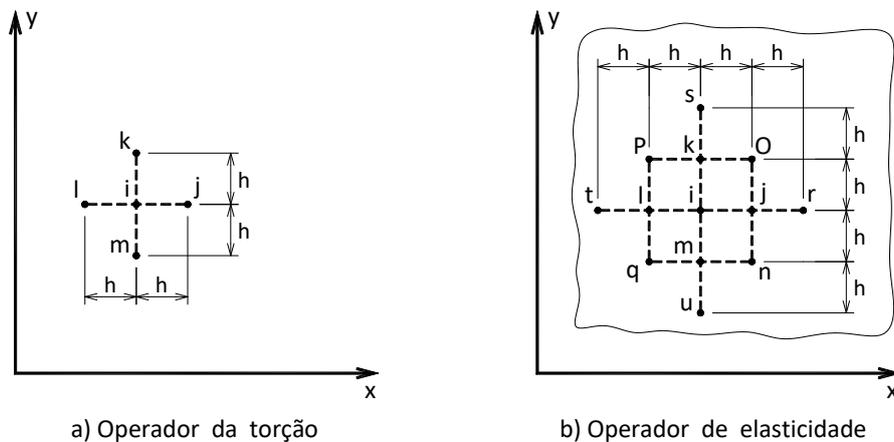


FIGURA 4.7 – Malhas para operadores de derivadas parciais

Assim sendo, o operador Laplaciano, ou harmônico, aplicado à função φ passa a ser dado por:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cong \frac{\varphi_l - 2\varphi_i + \varphi_j}{h^2} + \frac{\varphi_m - 2\varphi_i + \varphi_k}{h^2} = \\
 &\frac{1}{h^2} (\varphi_l + \varphi_j + \varphi_k + \varphi_m - 4\varphi_i)
 \end{aligned}
 \tag{4.98}$$

De modo análogo, com a malha indicada na Figura 4.7 b), tem-se ainda os seguintes operadores relativos às derivadas no ponto i:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cong \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_j - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_i}{2h} = \frac{\varphi_o - \varphi_n - \varphi_p + \varphi_q}{4h^2}$$

$$\nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \cong \quad (4.99)$$

$$\frac{1}{h^4} \left[20\varphi_i - 8(\varphi_j + \varphi_k + \varphi_l + \varphi_m) + 2(\varphi_n + \varphi_o + \varphi_p + \varphi_q) \right. \\ \left. + (\varphi_r + \varphi_s + \varphi_t + \varphi_u) \right]$$

Para maior clareza na representação dos operadores apresentados utilizam-se, usualmente, as chamadas moléculas matemáticas, ou seja:

$$\nabla^2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

$$\nabla^2 (\nabla^2) = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 0 \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Com base nos mesmos conceitos de aproximação utilizados na dedução dos operadores de derivadas, pode-se também deduzir operadores para integração. Deixando-se de lado as deduções pertinentes, que são similares às apresentadas para avaliação de derivadas, o operador de integração com erro de ordem h^2 é dado, em notação molecular, por:

$$\int_a^c \int_c^d \varphi ds dy = \frac{h^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

ou seja, a integração apontada é equivalente, a menos do termo $h^2/4$, a 4 vezes a soma dos valores no domínio acrescida da soma dos valores nas quinas e mais ainda 2 vezes a soma dos demais valores do contorno.

4.9 - SEXTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como exemplo de aplicação da utilização de operadores de diferença para derivadas parciais considere-se, de início, o problema da torção livre de uma barra de seção quadrada de lado 'a', sujeita a um momento torçor M_t . Trata-se, em verdade, de determinar os parâmetros I_t e W_t , necessários, como se sabe, para obtenção da rotação por unidade de comprimento e tensão de cisalhamento máxima, respectivamente. As relações entre as grandezas em jogo são as seguintes:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} \quad (4.104)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal e θ é a rotação por unidade de comprimento. Por outro lado, da teoria da torção livre têm-se as seguintes relações:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2G\theta$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (4.105)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$M_t = -2 \int_S \varphi dS$$

sendo a primeira das (4.105) a equação diferencial da torção, cuja condição de contorno consiste na nulidade de φ no contorno do domínio de integração; as demais relações, uma vez conhecida a função, permitem determinar os parâmetros

procurados.

Considere-se inicialmente a malha indicada na figura 4.8 a). Nesse caso tem-se apenas uma incógnita, que é a função φ no centro da seção. Assim, em termos de diferença, a equação da torção se expressa:

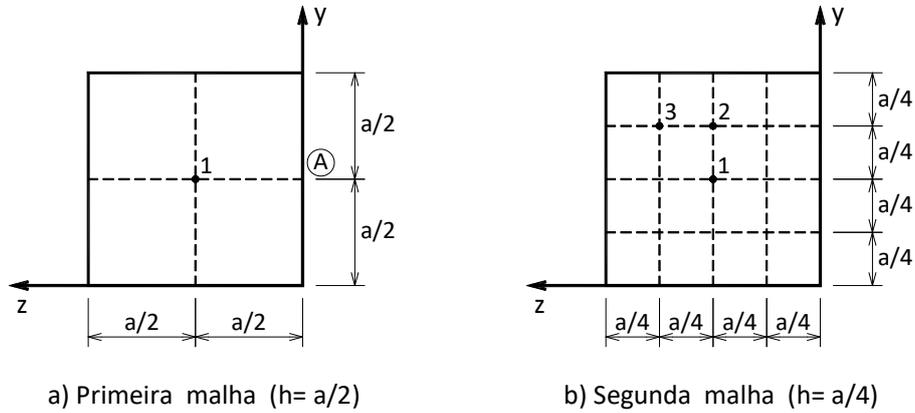


FIGURA 4.8 – Torção livre e malhas adotadas

$$-4\varphi_1 / (a / 2)^2 = 2G\theta \tag{4.106}$$

ou seja:

$$\varphi_1 = -0.125G\theta a^2 \tag{4.107}$$

e, com isso, a tensão de cisalhamento no ponto A fica:

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial\varphi}{dz} = -\frac{4\varphi_1}{2(a / 2)} = G\theta a / 2 \tag{4.108}$$

cujo erro em relação ao valor exato é da ordem de 50%. Cabe esclarecer que, na estimativa da derivada indicada na expressão, utilizou-se o operador de diferenças ascendentes de ordem h^2 , dado por:

$$y_i' = \frac{1}{2h} (-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}) \tag{4.109}$$

Da quarta das relações (4.105), tendo em vista o operador de integração expresso em (4.103), tem-se:

$$M_t = -2 \frac{(a / 2)^2}{4} (4\varphi) = -0.0625\theta a^4 \tag{4.110}$$

cujo erro em relação ao valor exato ($0.141G\theta a^4$) é bastante elevado (mais de 100%).

Com a malha indicada na figura 4.10b e tendo em vista a simetria existente tem-se:

$$\begin{aligned}(-4\varphi_3 + 2\varphi_2) / (a / 4)^2 &= 2G\theta \\(2\varphi_3 - 4\varphi_2 + \varphi_1) / (a / 4)^2 &= 2G\theta \\(4\varphi_2 - 4\varphi_1) / (a / 4)^2 &= 2G\theta\end{aligned}\quad (4.111)$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -0.141G\theta a^2 \\ \varphi_2 &= -0.109G\theta a^2 \\ \varphi_3 &= -0.0859G\theta a^2\end{aligned}\quad (4.112)$$

e assim, no ponto A tem-se:

$$\tau_{xy} = \frac{-1}{2(a / 4)}(4\varphi_2 - \varphi_1) = 0.59G\theta a \quad (4.113)$$

cujo erro em relação ao valor correto $0.678G\theta a$ já é da ordem de 13%. Da quarta das relações (4.105) juntamente com o operador de integração (4.103) resulta:

$$M_t = -2 \left[\frac{(a / 4)^2}{4} (16\varphi_3 + 16\varphi_2 + \varphi_1) \right] = 0.115G\theta a^4 \quad (4.114)$$

cujo erro em relação ao valor exato, já mencionado, é da ordem de 18%.

Procedendo, agora, um refinamento no valor de φ_1 (extrapolação de Richardson)) tem-se:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -0.125G\theta a^2 + o(h^2) / 4 \\ \varphi_1 &= -0.141G\theta a^2 + o(h^2) / 16\end{aligned}\quad (4.115)$$

e com isso, o valor mais exato da função $\varphi(x, y)$ no centro da seção fica:

$$\varphi_1 = -0.146G\theta a^2 \quad (1.116)$$

e, assim, aplicando o mesmo percentual de correção nos demais valores da malha de espaçamento $a / 4$ tem-se:

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= -0.113G\theta a^2 \\ \varphi_3 &= -0.0889G\theta a^2\end{aligned}\quad (4.117)$$

Como tais valores da função φ o valor mais correto dos parâmetros de interesse fica:

$$\tau_{xy} = -0.61G\theta a \quad (4.118)$$

cujo erro em relação ao valor correto já cai para 9% e

$$M_t = 0.119G\theta a^4 \quad (4.119)$$

com erro agora de 15%. Para finalizar, é oportuno assinalar que, adotando-se uma malha com espaçamento $a/6$, e os resultados refinados, a ordem do erro cai para menos de 1%. Todavia, com os resultados apontados em (4.118) e (4.119) tem-se, tendo em vista (4.104), os seguintes valores para I_t e W_t :

$$\begin{aligned}I_t &= 0.119a^4 \\ W_t &= 0.19a^3\end{aligned}\quad (4.120)$$

sendo que no valor de W_t o erro é da ordem de 7% ao contrário de τ_{\max} dado em (4.118) com 9% de erro (W_t exato é $0.208a^3$). Convém notar que a solução encontrada com o método das Diferenças Finitas já evidencia claramente que a posição de cisalhamento máximo ocorre na posição média dos lados (nesses pontos a inclinação de φ já se mostra ser maior que nos outros pontos).

4.10 - SETIMO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Outro interessante emprego dos operadores de diferença para derivadas parciais consiste na resolução de problemas da elasticidade plana formulados com emprego da função de AIRY. Cabe, igualmente, adiantar que se estudam aqui apenas os casos isostáticos, ou seja, aqueles onde as ações no contorno são conhecidas; os casos hiperestáticos com hiperestaticidades em número finito podem ser resolvidos mediante a técnica da superposição de efeitos, usual do cálculo hiperestático.

Antes, porém, de se abordar a formulação das equações da elasticidade plana em termos de diferenças, é necessário colocar de um modo adequado as condições de contorno. Considere-se, por exemplo, um trecho genérico do contorno, conforme se ilustra na Figura 4.9 a), que está sujeito a uma sollicitação com componentes \bar{X} e \bar{Y} (força por unidade de área).

Na Figura 4.9 b) exibe-se um trecho elementar do contorno e as tensões atuantes, cujas condições de equilíbrio se expressam (vide Fig. 4.9 b)):

$$\begin{aligned}(\sigma_x ds) \operatorname{sen} \alpha + (\tau_{xy} ds) \cos \alpha &= \bar{X} ds \\ (\sigma_y ds) \cos \alpha + (\tau_{xy} ds) \operatorname{sen} \alpha &= \bar{Y} ds\end{aligned}\quad (4.121)$$

onde s é uma coordenada curvilínea dirigida segundo o contorno. Por considerações de ordem geométrica tem-se (vide Figuras 4.9 a) e b)):

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{dy}{ds} \\ \cos \alpha &= \frac{-dx}{ds}\end{aligned}\quad (4.122)$$

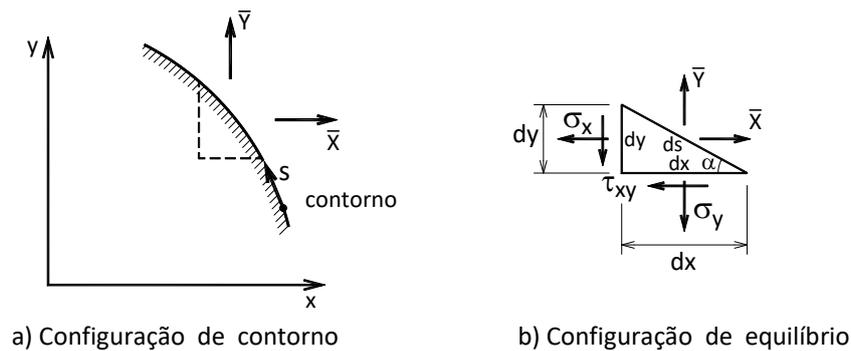


FIGURA 4.9 – Condição de contorno

onde o sinal negativo na segunda das (4.112) indica que, no caso, x decresce com o aumento de s . As equações (4.121), em face da (4.122), e eliminação do fator comum ds , passam a escrever-se:

$$\begin{aligned}\sigma_x \frac{dy}{ds} - \tau_{xy} \frac{dx}{ds} &= \bar{X} \\ -\sigma_y \frac{dx}{ds} + \tau_{xy} \frac{dy}{ds} &= \bar{Y}\end{aligned}\quad (4.123)$$

ou, ainda, tendo em vista a definição da função de AIRY:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} &= \bar{X} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} &= -\bar{Y}\end{aligned}\tag{4.124}$$

ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \bar{X} \\ \frac{d}{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\bar{Y}\end{aligned}\tag{4.125}$$

Por outro lado, a integração das equações (4.125) segundo a variável s permite escrever-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \int_s \bar{X} ds \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\int_s \bar{Y} ds\end{aligned}\tag{4.126}$$

Convém, neste ponto, assinalar que, mediante as expressões (4.126), é possível determinar o valor de $\partial \varphi / \partial x$ e $\partial \varphi / \partial y$ ao longo do contorno, uma vez estabelecido, por exemplo, um valor arbitrário dessas grandezas num dado ponto do contorno. De fato, ao se completar a integração ao longo do contorno o valor final daquelas derivadas parciais coincide com o valor arbitrário de partida, visto que a soma das ações externas segundo O_x e O_y é nula por condições de equilíbrio do conjunto.

A exemplo das derivadas parciais de φ em relação às variáveis x e y , o valor da função φ ao longo do contorno também pode ser determinado. De fato, da definição de derivada pode-se escrever:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}\tag{4.127}$$

cuja integração por partes conduz a:

$$\varphi = x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \int_s \left[x \frac{d}{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{d}{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] ds\tag{4.128}$$

ou ainda, tendo em vista (4.125):

$$\varphi = -x \int_s \bar{Y} ds + y \int_s \bar{X} ds + \int_s x \bar{Y} ds - \int_s y \bar{X} ds \quad (4.129)$$

É fácil perceber que, para se determinar o valor da função φ ao longo do contorno conforme expressão (4.129), o procedimento é análogo ao já mencionado no caso da determinação das derivadas parciais. Cabe lembrar, por outro lado, que os valores arbitrários adotados não alteram em nada os resultados de interesse, visto que as tensões e, por via de consequência as deformações, dependem de derivadas de ordem superior da função φ .

Como exemplo de aplicação do Método das Diferenças Finitas na Elasticidade Plana, considere-se a estrutura mostrada na Figura 4.10, que consiste numa viga parede, cuja altura é igual ao comprimento.

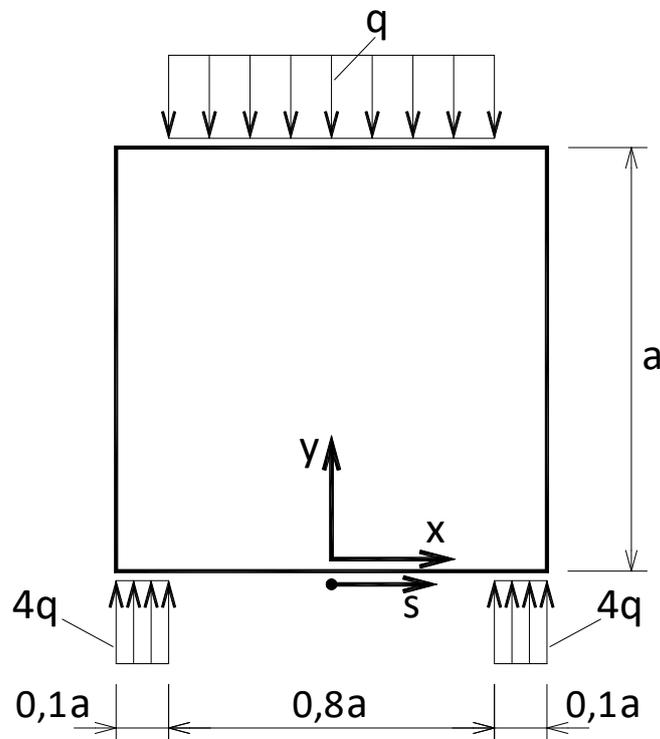


FIGURA 4.10 – Chapa e solicitação externa encontrada

O carregamento considerado encontra-se também indicado na Figura 4.10, bem como o posicionamento do sistema de referência Oxy , cuja origem coincide com a da coordenada s . Para simplificação dos cálculos toma-se $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$ e φ como sendo nulos na origem da coordenada s .

Considerando-se, de início, uma malha regular com espaçamento de $a/2$, conforme indica-se na Figura 4.11 a), as condições de contorno ficam:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_2 &= -\int_0^{0.5a} \bar{Y} ds = -\int_{0.4a}^{0.5a} 4q ds = -0.4qa \\
 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_3 &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_4 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_2 = -0.4qa \\
 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_5 &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_4 + \left(-\int_{1.6a}^{2a} (-q) ds\right) = 0.0qa \\
 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_6 &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_5 + \left(-\int_{2a}^{2.4a} (-q) ds\right) = 0.4qa \\
 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_7 &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_8 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_6 = 0.4qa
 \end{aligned}
 \tag{4.130}$$

Por outro lado, o valor de $\partial\varphi/\partial y$ ao longo do contorno é nulo, visto que a componente \bar{X} do carregamento ao longo do contorno inexistente. Os resultados até agora encontrados estão indicados nos "diagramas" mostrados nas Figuras 4.11 a) e b).

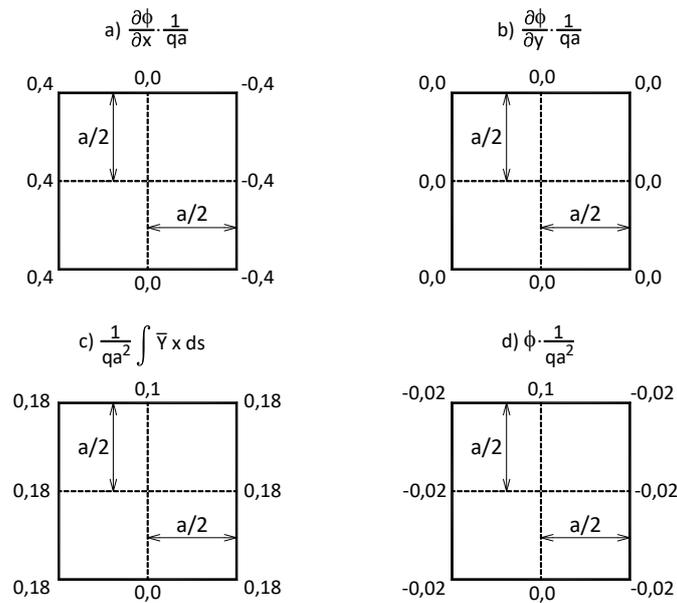


FIGURA 4.11 – Valores de contorno

O valor da função φ no contorno é obtido, em cada ponto, multiplicando cada valor do "diagrama" de $\partial\varphi/\partial x$ por x , adicionando-se os correspondentes valores do diagrama $\partial\varphi/\partial y$ multiplicados por y , mais os resultados correspondentes aos dois últimos integrandos da expressão (4.129), conforme indicado na expressão (4.118). Por outro lado, o diagrama correspondente a tais integrandos apresenta,

nos pontos em consideração, os seguintes valores (lembrando em tempo que a componente \bar{X} é nula):

$$\begin{aligned}
 \text{Ponto : 2} &\rightarrow \int_{0.4a}^{0.5a} s(4q)ds = 0.18qa^2 \\
 \text{Pontos : 3 = 4 = 2} &= 0.18qa \\
 \text{Ponto : 5} &\rightarrow 0.18qa^2 + \int_{1.6a}^{2a} s(2a-s)(-q)ds = 0.1qa^2 \\
 \text{Ponto : 6} &\rightarrow 0.1qa^2 + \int_{2a}^{2.4a} s(2a-s)(-q)ds = 0.18qa^2 \\
 \text{Pontos : 7 = 8 = 6} &= 0.18qa^2
 \end{aligned} \tag{4.131}$$

Com esses valores monta-se o “diagrama” indicado na Figura 4.11c). Efetuando-se, então, as operações já mencionadas obtém-se o “diagrama” de ϕ ilustrado na Figura 4.11d).

Pois bem, na Figura 4.12a) indica-se a malha em consideração e a numeração dos nós, tendo-se, por conseguinte, um total de 13 incógnitas. Todavia, das condições de contorno indicadas na Figura 4.12 têm-se 12 relações independentes, ou seja, nos oito pontos de contorno são conhecidos os valores de φ ; do conhecimento das derivadas parciais de φ no contorno tem-se as seguinte relação como, por exemplo, no caso do ponto 3 (vide Figura. 4.12 a)).

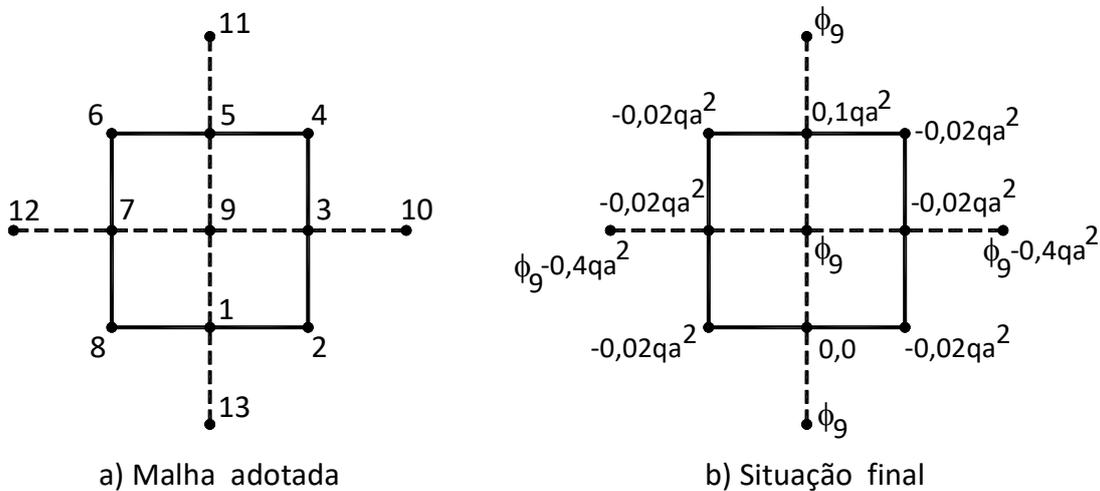


FIGURA 4.12 – Configuração de pontos e situação final de valores

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_3 = -0.4qa = \frac{\varphi_{10} - \varphi_9}{2(a/2)} \tag{4.132}$$

Assim, no que interessa, têm-se os resultados indicados na Figura 4.12b). Utilizando-se, agora, o operador expresso em (4.102), que representa a equação

diferencial em termos de diferenças, tem-se:

$$20\varphi_9 - 8qa^2(0.1 - 2 \times 0.2 + 0.0) + 2qa^2(-4 \times 0.02) + 4\varphi_9 - qa^2 \times 2 \times 0.4 = 0 \quad (4.133)$$

ou seja:

$$\varphi_9 = 0.06qa^2 \quad (4.134)$$

cujo erro em relação a um valor mais correto, $0.064qa^2$, obtido com uma malha de espaçamento $a / 6$, é de apenas 6%. Todavia, com relação às tensões nos pontos 1 e 5, por exemplo:

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_5 &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_5 = \frac{2\varphi_9 - 2 \times 0.1qa^2}{(a/2)^2} = -0.32q \\ (\sigma_x)_1 &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_1 = \frac{2\varphi_9 - 0.0qa^2}{(a/2)^2} = 0.48q \end{aligned} \quad (4.135)$$

Já se verificam erros bastante elevados em relação a uma solução mais correta, respectivamente $-0.488q$ e $1.268q$.

A título de ilustração, na Figura 4.13 encontram-se lançados os valores de interesse correspondentes à malha de espaçamento $a / 3$, onde já se considera a simetria existente no problema em apreço. Nesse caso, em que aparecem apenas duas incógnitas, as equações correspondentes aos pontos 2 e 1 ficam:

$$\begin{aligned} 14\varphi_2 - 6\varphi_1 &= 0.724qa^2 \\ -6\varphi_2 + 14\varphi_1 &= 0.117qa^2 \end{aligned} \quad (4.136)$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0.0383qa^2 \\ \varphi_2 &= 0.0698qa^2 \end{aligned} \quad (4.137)$$

cujo erro em relação a valores mais exatos já é da ordem de 30%. Mais ainda, as tensões nos pontos 1 e 2 ficam:

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_1 &= -0.0612q \\ (\sigma_x)_2 &= -0.1017q \end{aligned} \quad (4.138)$$

sendo que, nesse caso, o erro ainda é bastante grande em relação a valores mais exatos.

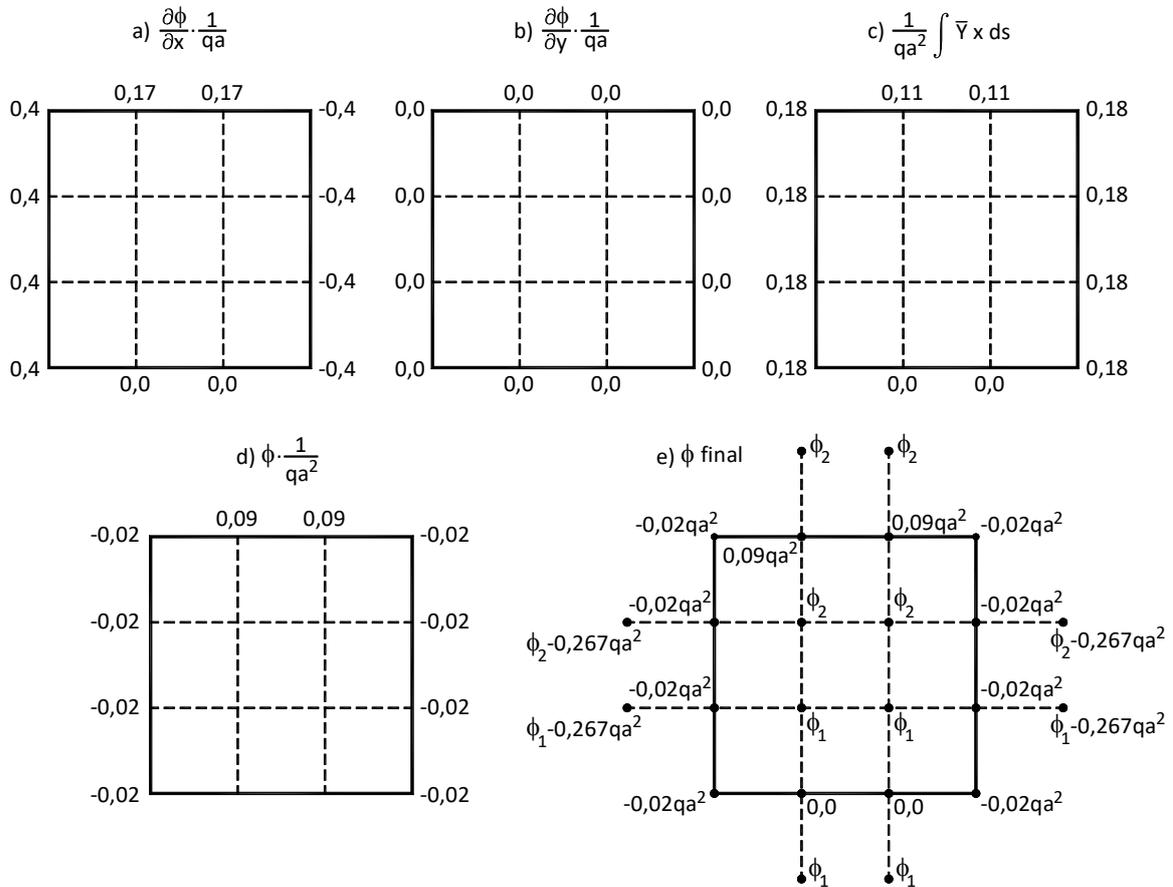


FIGURA 4.13 – Valores para malha com $h = a / 3$

Finalmente, é bastante importante esclarecer que, neste exemplo, com as duas malhas não refinadas em consideração, não se pode proceder a um refinamento dos resultados; mais ainda, como a ordem dos erros é muito elevada em ambos os casos, o refinamento carece, obviamente, de sentido.

4.11 - COMENTÁRIOS FINAIS

Um exame global dos resultados encontrados nos diversos exemplos de aplicação do Método das Diferenças Finitas apresentados evidencia ser tal método de grande interesse prático, principalmente por permitir ter sob controle de forma explícita a ordem do erro. Todavia tal virtude deixa de existir no trato com malhas irregulares, as quais são indispensáveis na abordagem de domínios de contorno irregular, que se encontram, a bem da verdade, em grande número na prática.

O desempenho do método em questão no trato com problemas bidimensionais (os dois últimos exemplos de aplicação e com as malhas

empregadas) mostrou-se decepcionante, em face do bom desempenho nos casos unidimensionais. Esse fato não deve causar estranheza, porquanto o erro nas soluções mais simples é, nesses casos, de grande monta, e isso também pode ocorrer em casos unidimensionais. Todavia, com o refinamento da malha os erros caem rapidamente, mesmo com a utilização de operadores de segunda ordem, conforme se constata facilmente nos exemplos arrolados.

Finalizando, é oportuno ressaltar que procedimentos computacionais simples podem ser desenvolvidos com base no Método das Diferenças Finitas; podendo-se, assim, estudar vários problemas práticos mediante malhas bastante refinadas, com um mínimo de esforço operacional.

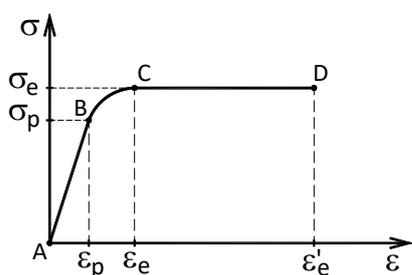
5 - MÉTODO PLÁSTICO

5.1 - INTRODUÇÃO

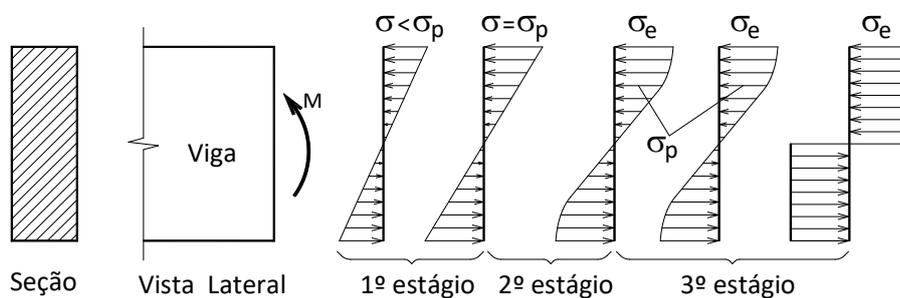
A desafiante pergunta: "Dada uma estrutura sujeita a uma configuração de carregamento, qual o valor que produz o colapso?", constitui, sem dúvida, a grande indagação na arte de construir. No estágio atual do conhecimento já se sabe com segurança que o método elástico não fornece resposta adequada a essa pergunta, visto que a reserva de capacidade dos materiais além do regime elástico varia muito de um material para outro, sem contar, naturalmente, que o comportamento nessa situação também é diferente de um material para outro. Todavia tem sido constatado que a grande maioria das estruturas usuais entra em colapso ainda em regime de pequenos deslocamentos. Pois bem, nessas condições a análise da estrutura na iminência do colapso é tarefa bastante facilitada em virtude das enormes simplificações decorrentes, no trato com as grandezas geométricas e estáticas em jogo. Decorre desse fato também a utilidade prática dessa análise, visto que se o colapso ocorresse em situações de grandes deslocamentos aquela análise deixaria de ter sentido, uma vez que a ruína da estrutura, nesse caso, estaria associada às condições de deslocamentos na iminência do intolerável, mesmo que a estrutura ainda apresentasse maior capacidade de carregamento. Posto isso, cabe ressaltar que a resposta àquela pergunta é dada, de maneira satisfatória, pelo Método Plástico, que permite a análise da estrutura na iminência do colapso e, mais ainda, de modo

bastante simples.

Na Figura 5.1a) exibe-se o diagrama tensão-deformação do aço doce para tensão crescente. Pode-se notar, por exemplo, que no trecho BD, após o trecho correspondente ao regime elástico, ocorrem grandes deformações sob tensão praticamente constante. Pois bem, considerando-se, agora, uma barra sujeita a flexão pura, na medida em que se vai aumentando o momento solicitante, o diagrama de tensão numa seção genérica passa pelos três estágios indicados na Figura 5.1b), onde σ_p e ε_p são, respectivamente a tensão e a deformação correspondente no final do trecho elástico (proporcionalidade entre tensão e deformação), σ_e e ε_e os correspondentes ao início do escoamento e ε_e' uma deformação genérica no trecho plástico.



a) Diagrama Tensão - deformação



b) Processo de Plastificação da seção

FIGURA 5.1 – Diagrama tensão-deformação e estágios de plastificação

De fato, num primeiro estágio as tensões na seção são menores que a tensão limite de proporcionalidade, ou seja, estão no trecho AB indicados na Figura 5.1a). Aumentando-se o momento solicitante as tensões na região das bordas mais afastadas superam a tensão limite de proporcionalidade, percorrendo o trecho BC indicado na Figura 5.1b) e, finalmente, não mais se alteram, permanecendo constantes até que, praticamente, em toda a seção a tensão seja uniforme de compressão e de tração, conforme se mostra na última das ilustrações da Figura 5.1b). Assim, nessa última situação o momento solicitante, dito de plastificação, corresponde ao momento de colapso, visto que a barra esgotou sua capacidade de resistência. A plastificação total da seção constitui, em verdade, uma idealização somente viável se o patamar correspondente à tensão de escoamento σ_e (vide Figura 5.1a)) for realmente bastante, por assim dizer, longo. Para se ter uma ordem de grandeza, a dimensão do patamar, trecho CD da Figura 5.1a) é da ordem de vinte vezes a deformação limite de proporcionalidade, ou seja, (vide Figura 5.1a)):

$$\varepsilon'_e \cong 20\varepsilon_p \quad (5.1)$$

Dessa constatação decorre que as "fibras" mais afastadas dispõem de grande capacidade de deformação sob tensão constante (σ_e) para esperar que as "fibras" internas entrem também no regime plástico.

Sob um ângulo mais, por assim dizer, sintético, o fenômeno descrito pode ser melhor apresentado com a análise do diagrama momento-curvatura, conforme ilustra-se na Figura 5.2. No trecho AB, regime elástico, a relação momento-curvatura é dada, de acordo com a teoria técnica da flexão, a menos de sinal por:

$$M = EIk \quad (5.2)$$

onde EI é o produto de rigidez à flexão da viga e k é a curvatura, que, no regime de pequenos deslocamentos e deformações (teoria linear), é aproximadamente igual à derivada segunda da deformada v'' .

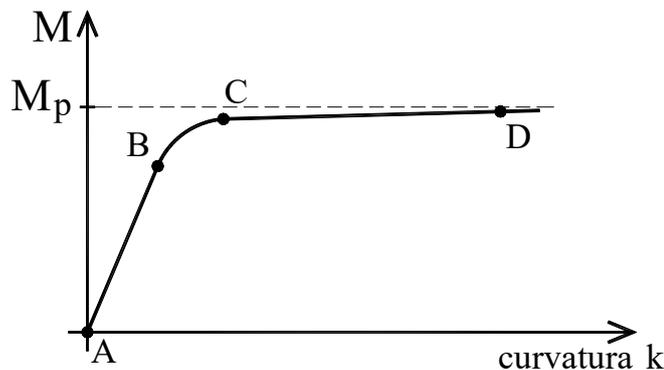


FIGURA 5.2 – Diagrama momento-curvatura

Para momentos superiores àquele que corresponde ao limite do regime elástico, trecho BC, a relação momento curvatura deixa de ser linear e o momento tende assintoticamente para um valor constante (que depende da forma da seção) quando a plastificação da seção se completa, conforme a última ilustração da Figura 5.1b). Em verdade tudo se passa como se, a medida em que a plastificação vai se estendendo para dentro da seção, o momento de inércia I diminuísse, tendendo para zero; acrescido ainda do fato de que também o módulo de elasticidade segue caminho idêntico.

É oportuno, nessa altura, assinalar que barras feitas com uma grande variedade de materiais apresentam diagramas momento-curvatura muito parecidos com o mostrado na Figura 5.2, e mesmo o concreto armado pertence a esse grupo, com algumas ressalvas é bem verdade.

5.2 - MOMENTO DE PLASTIFICAÇÃO

O momento de plastificação M_p é o parâmetro básico do Método Plástico, porquanto constitui o valor extremo da resistência à flexão de uma barra. Assim sendo,

é conveniente, antes de tudo, buscar relações práticas para estimativa de tal parâmetro a partir do conhecimento da geometria da seção da barra e da tensão de plastificação, ou escoamento, do material utilizado.

Considere-se, de início, o caso de uma seção retangular e material com tensão de plastificação σ_e , conforme indica-se na Figura 5.3. Das condições de equilíbrio tem-se:

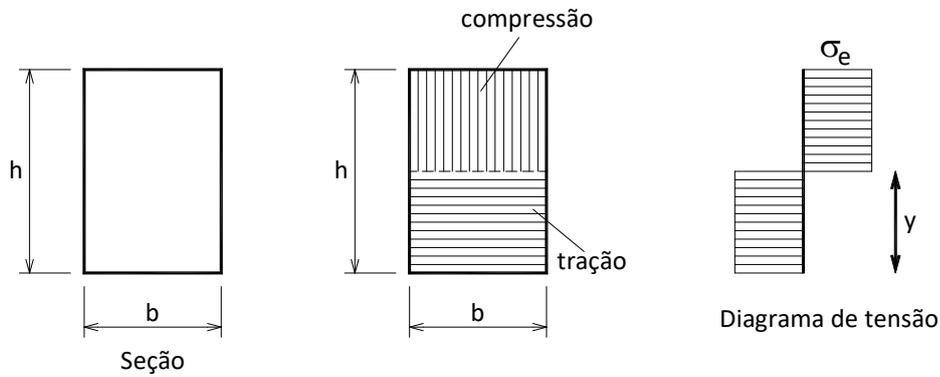


FIGURA 5.3 – Plastificação de seção retangular

$$\begin{aligned} \sigma_e(by) - \sigma_e [b(h-y)] &= 0 \\ \sigma_e(by) \frac{y}{2} - \sigma_e [b(h-y)] \frac{h-y}{2} &= M_p \end{aligned} \quad (5.3)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} y &= \frac{h}{2} \\ M_p &= \sigma_e \frac{bh^2}{4} \end{aligned} \quad (5.4)$$

É usual, na literatura, estender a notação da teoria técnica da flexão para o regime plástico, ou seja:

$$M_p = W_p \sigma_e \quad (5.5)$$

sendo que no caso da seção retangular, por exemplo:

$$W_p = \frac{bh^2}{4} \quad (5.6)$$

e, dessa forma, o momento de plastificação passa a ser dado pelo produto de um termo que depende das características geométricas da seção pela tensão de plastificação, que depende do material.

Para se ter uma ideia da reserva de resistência da seção em apreço basta comparar, por exemplo, o momento dado na segunda das (5.4) com aquele dado no regime elástico, ou seja:

$$M_e = \sigma_e \frac{bh^2}{6} \quad (5.7)$$

tendo-se, pois:

$$M_p = 1.5M_e \quad (5.8)$$

onde M_e corresponde ao momento que inicia o escoamento na seção (final do trecho elástico linear)

Em outras palavras, a reserva de resistência da seção retangular é da ordem de 50% em relação ao momento que inicia a plastificação da seção. Constata-se assim que a segurança medida em termos da tensão máxima, usual no método elástico, carece, pois, de sentido.

Outro caso interessante é o da seção duplo T indicada na Figura 5.4, cujo equilíbrio expressa-se:

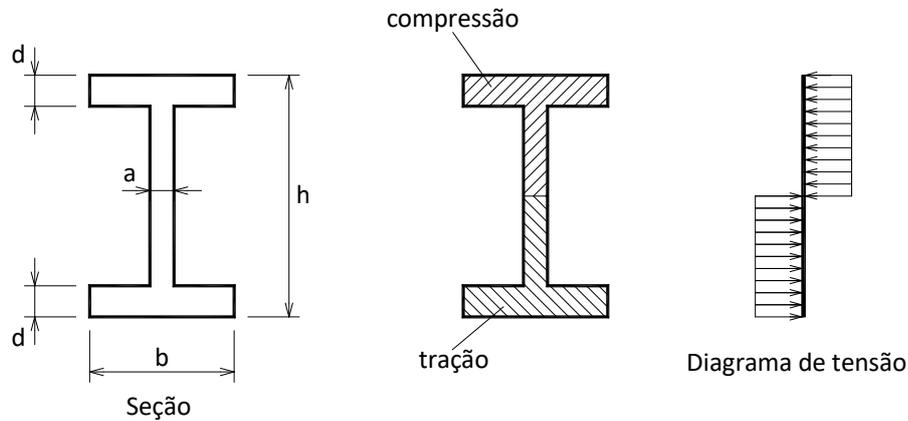


FIGURA 5.4 – Plastificação de seção duplo T

$$\begin{aligned} \sigma_e [bd + a(y - d)] - \sigma_e [bd + a(h - y - d)] &= 0 \\ \sigma_e bd(y - \frac{d}{2}) + \sigma_e a \frac{(y - d)^2}{2} + \sigma_e bd(h - y - \frac{d}{2}) + \sigma_e a \frac{(h - y - d)^2}{2} &= M_p \end{aligned} \quad (5.9)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} y &= \frac{h}{2} \\ M_p &= \sigma_e \left[bd(h - d) + a \left(\frac{h - 2d}{2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Como no caso anterior, considerando-se, por exemplo, $h=2b$ e $a=d=h/10$ tem-se:

$$M_p = 0.061(h^3\sigma_e) \quad (5.11)$$

e no caso elástico:

$$M_e = 0.0492(h^3\sigma_e) \quad (5.12)$$

ou seja, a reserva de resistência da seção é, agora, de somente 24%. Todavia no caso de $h=b$ a reserva seria de apenas 18%. Esses resultados numéricos mostram que a reserva de resistência do perfil duplo T pode ser até bem menor, dependendo da geometria da seção. Em outras palavras, a distância que separa o início da plastificação da plastificação total pode ser, nesses casos, muito curta.

Cabe, agora, alertar que a presença de força normal na barra altera o momento de plastificação. Nesse caso, indique-se com M_{pN} o momento de plastificação tendo-se em conta o efeito da força normal N . Esse fato pode ser facilmente constatado, por exemplo, no caso da seção retangular anteriormente estudada.

Para uma seção retangular submetida simultaneamente a momento fletor M e N , ambos positivos, considere-se, conforme indicado na Figura 5.5, a decomposição do diagrama final de tensões referente ao efeito conjunto $M_{pN} + N$ como uma parte devida a N , e outra devida ao momento M_{pN} .

Para facilitar a exposição são definidos os seguintes valores relativos a força axial (5.13) e ao momento fletor (5.14), respectivamente, também apresentados na Figura 5.5:

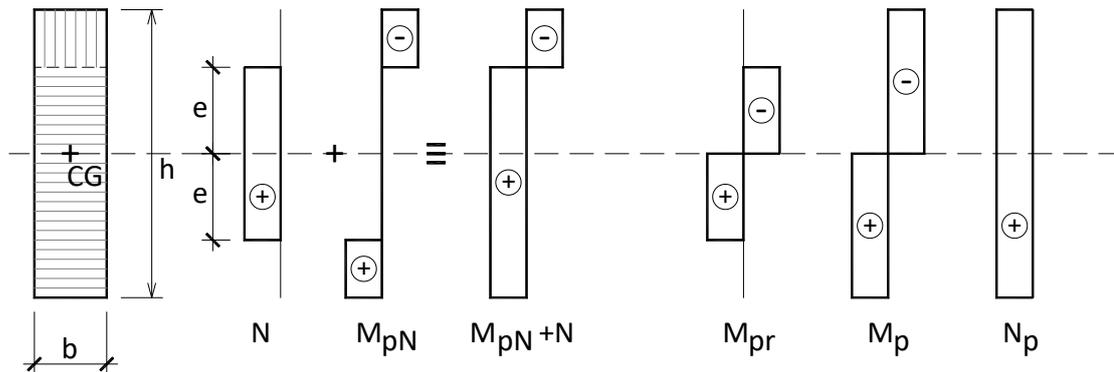


FIGURA 5.5 – Ação simultânea de momento fletor e força axial

$$N = \sigma_e b(2e) = \sigma_e A_N$$

$$N_p = \sigma_e bh = \sigma_e A \quad (5.13)$$

$$\frac{A_N}{A} = \frac{2e}{h}$$

e

$$M_p = \sigma_e \frac{bh^2}{4}$$

$$M_{pr} = \sigma_e \frac{b(2e)^2}{4} = \sigma_e be^2 \quad (5.14)$$

$$M_{pN} = M_p - M_{pr}$$

podendo-se escrever:

$$\frac{M_{pN}}{M_p} = 1 - \frac{M_{pr}}{M_p} = 1 - \frac{be^2}{bh^2/4} = 1 - \left(\frac{A_N}{A}\right)^2 \quad (5.15)$$

Por outro lado, como (vide (5.13)):

$$\frac{N}{N_p} = \frac{A_N}{A} \quad (5.16)$$

tem-se pois:

$$M_{pN} = M_p \left[1 - \left(\frac{N}{N_p}\right)^2 \right] \quad (5.17)$$

sendo que a expressão (5.17), em face da segunda das (5.4), confirma o fato mencionado e, mais que isso, mostra que o momento de plastificação, como esperado, sofre uma redução tanto para força normal de compressão como de tração. Sendo oportuno também notar que carece de sentido físico a existência de força normal superior ao valor dado na segunda das (5.13), e, assim, da (5.17) também deixa de ter sentido momento de plastificação negativo.

Expressões similares à (5.17) podem ser encontradas para outros tipos de seção, porém esse assunto não será, aqui, objeto de maior atenção. Além da força normal, a força cortante também altera o momento de plastificação; todavia, em atenção ao espírito introdutório que norteia o presente texto, esse assunto também será negligenciado. Vale alertar, a propósito, que tais influências no momento de plastificação são, na maioria dos casos práticos, muito pequenas.

5.3 - ANÁLISE PLÁSTICA DE UM CASO SIMPLES

Considere-se uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma força concentrada no meio do vão, conforme se ilustra na Figura 5.6a). De imediato cabe ressaltar que o diagrama de momento fletor, mostrado na figura 5.6b, guarda uma proporcionalidade com a força até para valores na iminência do colapso, visto que se trata, conforme já mencionado, de problema dentro do regime de pequenos deslocamentos. Assim, o momento máximo é dado, em qualquer circunstância antes do colapso por:

$$M = \frac{P\ell}{4} \quad (5.18)$$

Imaginando-se, agora, que a força P aumente lentamente até o colapso ser atingido, o que se pode perceber, de imediato, é que a seção da viga que plastifica primeiro, pelo menos em termos teóricos, é aquela situada logo abaixo da força. Assim, tem-se então:

$$M = \frac{P\ell}{4} = M_p \quad (5.19)$$

ou seja:

$$P = \frac{4M_p}{\ell} \quad (5.20)$$

que consiste, pois, na carga de colapso da viga simplesmente apoiada.

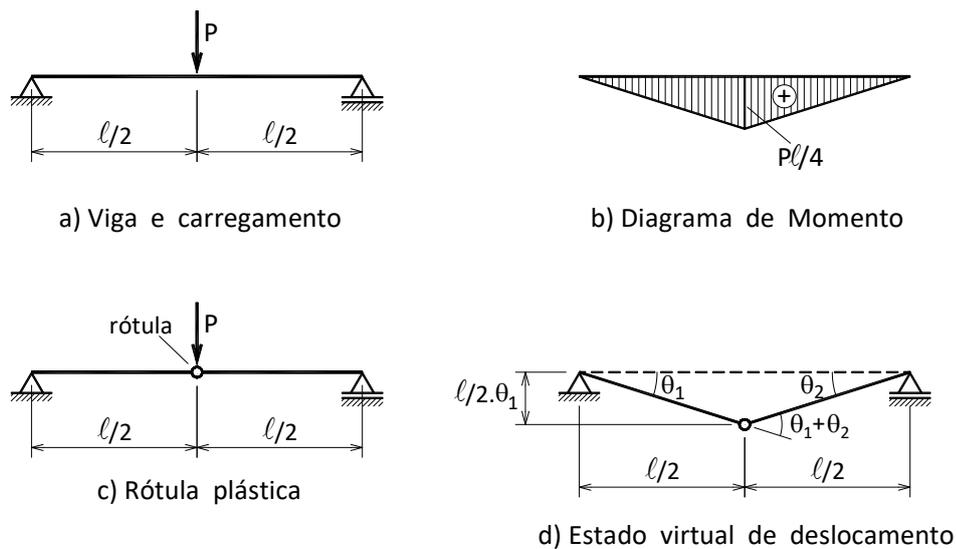


FIGURA 5.6 – Viga, carregamento e rótula plástica

Pois bem, da maneira como foi o problema colocado, o que se fez, no fundo, foi admitir-se a existência de uma rótula plástica na seção que primeiro plastifica, ou seja, nessa seção sabe-se, de antemão, o valor do momento máximo que se pode conseguir, que é o momento de plastificação M_p . Na Figura 5.6c) mostra-se, então, a configuração de equilíbrio na iminência do colapso, onde já se configura uma rótula plástica logo abaixo da força aplicada.

Por outro lado, o resultado obtido, expresso em (5.20), pode ser alcançado de uma maneira mais cômoda e, ao mesmo tempo, mais geral mediante o Princípio dos Trabalhos Virtuais, que consiste num poderoso instrumento para a análise das condições de equilíbrio (sob uma roupagem diferente tal princípio já foi utilizado em todo o desenvolvimento do Capítulo 3, pois energia estacionária implica em trabalho virtual nulo). Na Figura 5.6d) exibe-se um estado de deslocamento virtual, onde as rotações indicadas são pequenas, de tal sorte a não introduzirem alteração na geometria original. Assim sendo tem-se:

$$M_p(2\theta_1) = P \frac{\ell}{2} \theta \quad (5.21)$$

resultando:

$$P = \frac{4M_p}{\ell} \quad (5.22)$$

como era de se esperar.

Cabe assinalar que o estado de deslocamento virtual considerado não inclui os deslocamentos de regime elástico, ou seja, os dois trechos da barra permanecem indeformáveis.

Uma discussão bastante interessante diz respeito à localização da rótula plástica. Por exemplo, a localização da rótula plástica no problema estudado pode ser determinada a partir do conhecimento do diagrama de momento fletor, porquanto se trata de uma estrutura isostática e, dessa forma, a formação da rótula não altera a configuração de esforços internos. Todavia, a posição da rótula plástica pode ser determinada com a condição de força mínima, ou seja, dentro de todas as possíveis configurações de colapso a correta é aquela correspondente à menor força de colapso. De fato, considere-se novamente o problema da viga simplesmente apoiada sujeita a uma força no centro do vão, conforme reproduz-se na Figura 5.7a). Admitindo-se que a rótula plástica aconteça numa seção de ordenada x genérica, conforme se ilustra na Figura 5.7b), o Princípio dos Trabalhos Virtuais permite exprimir-se:

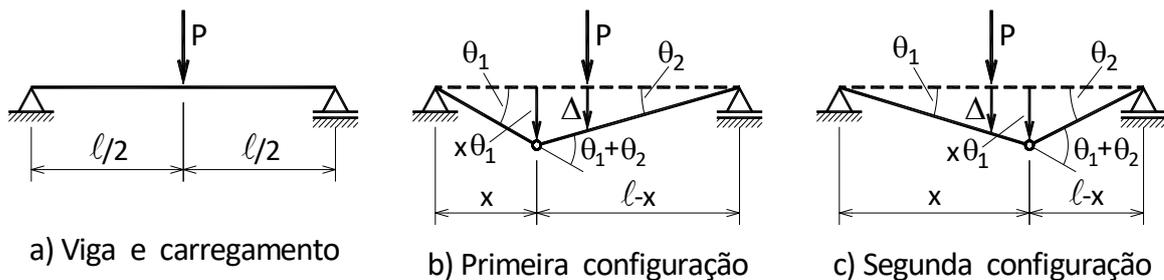


FIGURA 5.7 – Possíveis configurações de rótulas plásticas

$$M_p(\theta_1 + \theta_2) = P\Delta \quad (5.23)$$

onde, por considerações geométricas (vide Figura 5.7b) tem-se:

$$\theta_2 = \frac{x\theta_1}{\ell - x} \quad (5.24)$$

$$\Delta = \frac{\ell}{2} \frac{x\theta_1}{\ell - x}$$

e, assim sendo, tendo-se em conta as relações (5.24) e (5.23), resulta:

$$P = \frac{2M_p}{x} \quad (5.25)$$

ou seja, a carga P diminui com o aumento da variável x . Considerando-se, agora, a

rótula plástica situada numa ordenada superior a $\ell/2$, conforme se ilustra na Figura 5.7c), a força correspondente é dada por:

$$P = \frac{2M_p}{\ell - x} \quad (5.26)$$

ou seja, nesse caso, para $\ell/2 < x < \ell$ o valor de P cresce no sentido decrescente da variável x ; e um exame da expressão (5.25) juntamente com a (5.26) deixa evidente que o menor valor da carga de colapso corresponde, como de fato deveria ser, à rótula plástica no meio do vão (é natural, e por isso óbvio, que a estrutura entra em colapso com a menor das "cargas de colapso").

Uma estimativa da flecha no meio vão pode ser feita supondo-se que a região parcialmente plastificada seja reduzida e, assim, praticamente toda a barra encontra-se, na iminência do colapso, em regime elástico; como de fato um grande número de experimentações realizadas comprova ser tal idealização bastante razoável. Assim sendo tem-se:

$$f_p = \frac{P_p \ell^3}{48EI} = \left(\frac{4M_p}{\ell} \right) \frac{\ell^3}{48EI} = \frac{M_p \ell^2}{12EI} \quad (5.27)$$

enquanto no regime elástico, encontra-se:

$$f_e = \frac{P_e \ell^3}{48EI} = \frac{P_e \ell}{4} \frac{\ell^2}{12EI} = M_e \frac{\ell^2}{12EI} \quad (5.28)$$

resultando-se:

$$f_p = 1.5f_e \quad (5.29)$$

ou seja, se a flecha no regime elástico f_e se configura no regime de pequenos deslocamentos, o mesmo ocorre com a flecha f_p na iminência do colapso, que são da mesma ordem de grandeza. Tal fato indica, então, ser realmente plausível a suposição de que, na iminência do colapso, a estrutura encontra-se ainda no regime de pequenos deslocamentos (ou, pelo menos, no mesmo regime de deslocamentos do regime elástico).

5.4 - PRIMEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Considere-se, agora, o problema da determinação do valor de colapso da carregamento uniforme q , sobre uma viga, ainda simplesmente apoiada, conforme se ilustra na Figura 5.8a). De início, sabe-se que a rótula plástica deve ocorrer no meio do vão por condições estáticas; todavia, procura-se, aqui, um caminho mais longo, porém mais geral, que consiste, em primeiro lugar, em se determinar a posição da rótula pela condição de carga mínima e depois exprimir o valor da carga correspondente.

Assim, exhibe-se na figura 5.8b) o estado de deslocamentos virtuais correspondentes à rótula plástica numa posição genérica de ordenada x . O Princípio

dos Trabalhos Virtuais nessas circunstâncias assim se expressa:

$$\int_0^{\ell} qv dx = M_p(\theta_1 + \theta_2) \quad (5.30)$$

ou ainda, tendo-se em vista condições de ordem geométrica:

$$q \frac{\ell(x\theta_1)}{2} = M_p \theta_1 \left(1 + \frac{x}{\ell - x} \right) \quad (5.31)$$

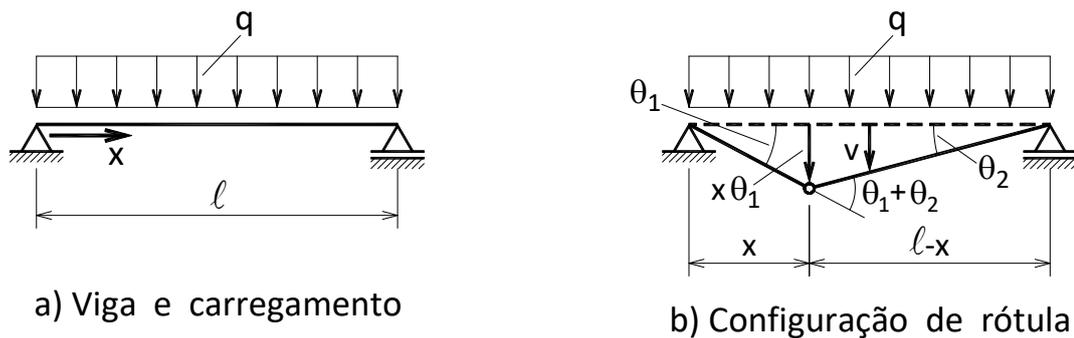


FIGURA 5.8- Viga sob força uniforme e configuração de rótula

ou seja:

$$q = \frac{2M_p}{x(\ell - x)} \quad (5.32)$$

tendo-se em conta, naturalmente, a primeira de (5.24).

A condição de extremo valor para q implica em:

$$\frac{dq}{dx} = 2M_p \frac{-[(\ell - x) + x(-1)]}{[x(\ell - x)]^2} = 0 \quad (5.33)$$

ou seja

$$x = \frac{\ell}{2} \quad (5.34)$$

como já era de se prever. Desse modo, finalmente, encontra-se:

$$q = \frac{8M_p}{\ell^2} \quad (5.35)$$

que consiste no carregamento distribuído de colapso.

Finalizando-se, convém assinalar que a pesquisa da posição da rótula plástica

é, em casos isostáticos, como o em apreço, perfeitamente dispensável, uma vez que a posição do maior momento é bastante imediata, e deve coincidir com a posição da rótula, obviamente. Cabe assinalar, também, que a condição de extremo da expressão (5.32) dada em (5.34) corresponde a uma condição de mínimo, conforme pode-se facilmente verificar pelo sinal positivo da segunda derivada, ou mesmo por alguns testes numéricos (mais cômodos).

5.5 - SEGUNDO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como segundo exemplo de aplicação considere-se o caso de uma viga hiperestática, conforme se ilustra na Figura 5.9a), com um grau de hiperestaticidade. Nesse caso o colapso ocorre com o aparecimento de duas rótulas plásticas, porquanto com o aparecimento da primeira rótula configura-se uma estrutura isostática, visto que o momento fletor na posição de tal rótula é conhecido e igual a M_p . Exibem-se nas Figuras 5.9b) e 5.9c) as possíveis configurações de rótulas plásticas.

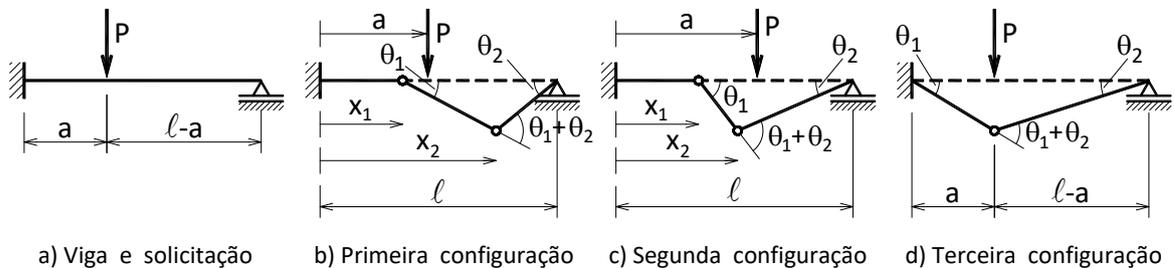


FIGURA 5.9 – Viga hiperestática e configurações de rótulas

Na primeira configuração, mostrada na Figura 5.9b), tem-se, já levando em conta relações de ordem geométrica:

$$P(a - x_1)\theta_1 = M_p\theta_1 \left(\frac{2\ell - x_1 - x_2}{\ell - x_2} \right) \quad (5.36)$$

ou seja:

$$P = M_p \frac{2\ell - x_1 - x_2}{(a - x_1)(\ell - x_2)} \quad (5.37)$$

e, por outro lado, a condição de carga mínima pode ser analisada a partir do comportamento das derivadas:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{(2\ell - x_1 - x_2)(\ell - x_2) - (a - x_1)(\ell - x_2)}{[(a - x_1)(\ell - x_2)]^2} M_p$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{(2\ell - x_1 - x_2)(a - x_1) - (a - x_1)(\ell - x_2)}{[(a - x_1)(\ell - x_2)]^2} M_p \quad (5.38)$$

ou seja, o sinal da derivada em relação à variável x_1 é sempre positivo para valores de x_1 e x_2 no intervalo de zero a ℓ , porquanto o numerador da primeira das expressões (5.38) dado por:

$$(\ell - x_2)(2\ell - a - x_2) \quad (5.39)$$

que é positivo nas condições mencionadas; o denominador é, obviamente, sempre positivo. Com isso a condição de força mínima em relação à variável x_1 se dá para x_1 nulo, uma vez que o sinal positivo dessa derivada indica carga P crescente com x_1 crescente. O numerador correspondente à derivada em relação à variável x_2 pode ser colocado na forma (segunda das expressões (5.38)):

$$(a - x_1)(\ell - x_1) \quad (5.40)$$

ou seja, tal derivada é também positiva no intervalo considerado, indicando P crescente para valores crescentes da variável x_2 . Assim, o valor mínimo de P ocorre na situação de menor valor de x_2 , ou seja, $x_2 = a$. Em resumo, o mínimo valor da carga de colapso é dado pela configuração de rótulas indicada na figura 5.9d), sendo dado por:

$$P = M_p \frac{2\ell - a}{a(\ell - a)} \quad (5.41)$$

como se verifica em (5.37).

Com a outra configuração de rótulas ilustrada na Figura 5.9c), as derivadas de interesse ficam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_1} &= \frac{2(\ell - x_1)(\ell - x_2)}{[(\ell - a)(x_2 - x_1)]^2} M_p \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} &= \frac{-2(\ell - a)(\ell - x_1)}{[(\ell - a)(x_2 - x_1)]^2} M_p \end{aligned} \quad (5.42)$$

ou seja, a carga P é, no intervalo considerado para x_1 e x_2 , crescente com x_1 (derivada positiva) e decrescente com x_2 (derivada negativa). Assim, a configuração de rótulas correspondente ao menor valor da força é a dada por $x_1 = 0$ e $x_2 = a$ que é a anteriormente encontrada e ilustrada na Figura 5.9d).

Aproveitando-se ainda o exemplo em questão, é oportuno levantar algumas considerações com relação ao diagrama de momento fletor na iminência do colapso. Na Figura 5.10a) exhibe-se o diagrama de momento fletor correspondente ao caso isostático bi apoiado, sendo o momento máximo dado por:

$$M = \frac{Pa(\ell - a)}{\ell} \quad (5.43)$$

Na Figura 5.10b) exibe-se o diagrama na iminência do colapso, encontrado no exemplo em tela. Ora, as condições de equilíbrio na iminência do colapso implicam em:

$$M_p \left(1 + \frac{l-a}{l} \right) = Pa \frac{l-a}{l} \quad (5.44)$$

e, com efeito, essa relação é satisfeita com a força de colapso encontrada, ou seja:

$$P = M_p \frac{2l-a}{a(l-a)} \quad (5.45)$$

Todavia, essa conclusão trivial chama a atenção para outro aspecto muito interessante, ou seja, no caso de se ter:

$$Pa \frac{l-a}{l} < M_p \left(1 + \frac{l-a}{l} \right) \quad (5.46)$$

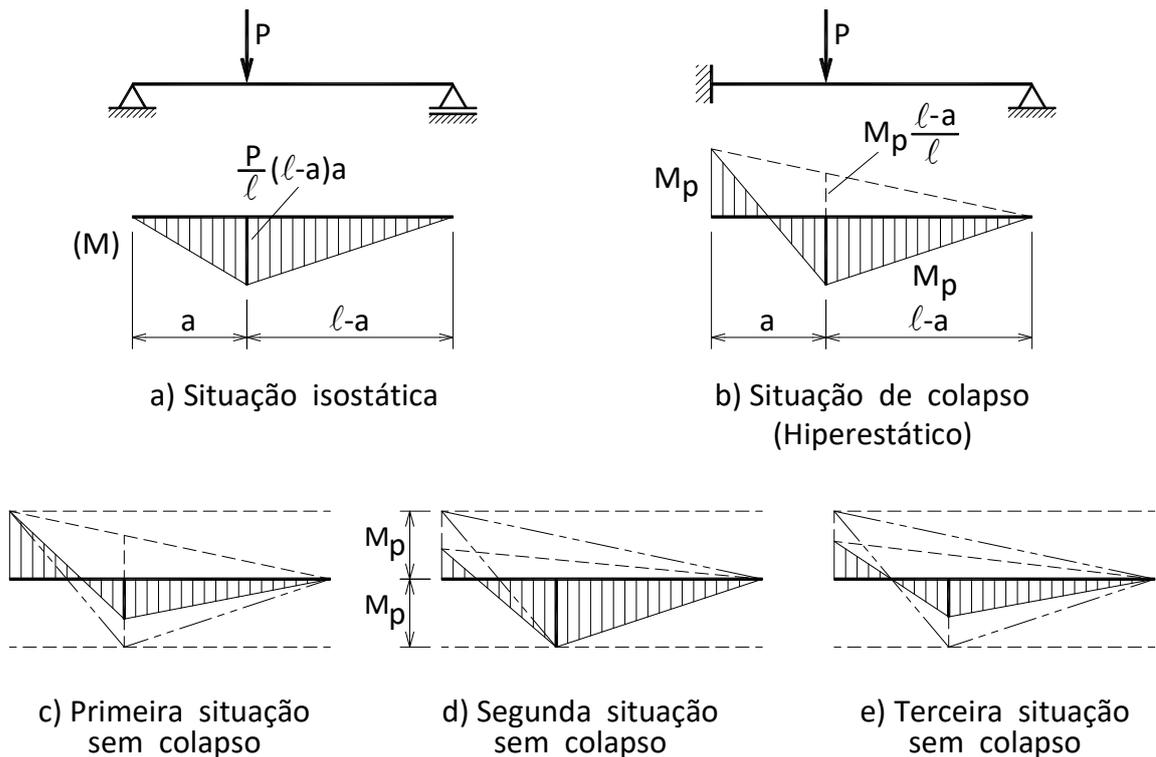


FIGURA 5.10 – Diagramas de momento estaticamente admissíveis

os possíveis diagramas de momento fletor estaticamente admissíveis encontram-se indicados nas Figuras 5.10c), d), e) (estaticamente admissível é um termo usado para indicar que as condições de equilíbrio da estática são obedecidas; no caso significa que o diagrama é compatível com a força aplicada). Ora, nesses casos tem-se de (5.46):

$$P < M_p \frac{2\ell - a}{a(\ell - a)} \quad (5.47)$$

e com isso percebe-se que, qualquer diagrama de momento estaticamente admissível e seguro, ou seja, que em nenhum ponto o diagrama ultrapassa o valor máximo M_p ($+M_p$ ou $-M_p$; vide Figuras 5.10c), d), e), está associado a um valor de carga P , no caso, inferior ao valor da força de colapso. Assim, dado um diagrama estaticamente admissível e seguro, sabe-se que o valor da força correspondente consiste num limite inferior da força de colapso. Essa propriedade juntamente com o fato de que a qualquer configuração de rótulas possível corresponde a uma força superior à da configuração exata (porquanto a exata corresponde à força mínima) fornece um critério para encontrar um intervalo, no qual seguramente o valor da força de colapso se encontra. Todavia, tal critério não será explorado no presente texto, apesar de interessante, mas trabalhoso.

5.6 - TERCEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como terceiro exemplo de aplicação seja considerado o problema da determinação da força de colapso da viga engastada numa extremidade e apoiada na outra, sujeita a uma carga uniforme q , conforme se ilustra na Figura 5.11a).

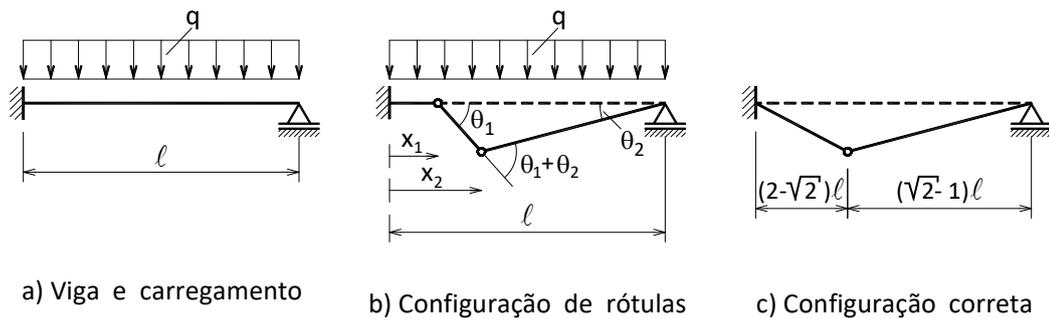


FIGURA 5.11- Colapso de viga hiperestática sob força uniforme

Pois bem, considerando-se uma configuração genérica de rótulas, conforme exibe-se na Figura 5.11b) encontra-se:

$$q = 2M_p \frac{2\ell - x_1 - x_2}{(\ell - x_1)(\ell - x_2)(x_2 - x_1)} \quad (5.48)$$

cujas derivadas em relação às variáveis x_1 e x_2 são dadas por:

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = 2M_p \frac{(\ell - x_2) \left[(\ell - x_1)^2 + (\ell - x_2)(x_2 - x_1) + (\ell - x_2)(\ell - x_1) \right]}{\left[(\ell - x_1)(\ell - x_2)(x_2 - x_1) \right]^2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_2} = 2M_p \frac{(\ell - x_1) \left[(\ell - x_1)(x_2 - x_1) - (\ell - x_1)(\ell - x_2) - (\ell - x_2)^2 \right]}{\left[(\ell - x_1)(\ell - x_2)(x_2 - x_1) \right]^2} \quad (5.49)$$

sendo que um exame da primeira das (5.49) mostra que a derivada de q na variável x_1 é positiva para qualquer valor de x_1 e x_2 no intervalo de zero a ℓ ; sendo ainda naturalmente $x_2 > x_1$. Assim, em relação à variável x_1 o menor valor de q é dado para x_1 nulo. Com isso, o valor extremo de q , segundo a variável x_2 , está relacionado com o valor nulo da segunda das (5.49), ou seja:

$$\ell x_2 - \ell(\ell - x_2) - (\ell - x_2)^2 = 0 \quad (5.50)$$

resultando:

$$x_2 = \ell(2 \pm \sqrt{2}) \quad (5.51)$$

sendo que dessa solução interessa apenas a raiz:

$$x_2 = \ell(2 - \sqrt{2}) \quad (5.52)$$

que corresponde à configuração de rótulas indicada na Figura 5.11c). O valor da carga de colapso é, então, dada por:

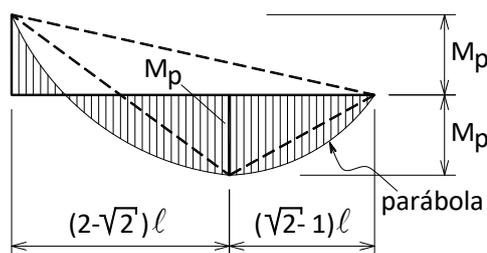
$$q = \frac{2M_p}{\ell^2} \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 4} \quad (5.53)$$

Cabendo-se agora apenas verificar, por curiosidade, o diagrama de momento fletor na iminência do colapso. Antes, porém, é útil definir a posição de momento máximo no caso de diagrama parabólico como, por exemplo, o caso genérico mostrado na Figura 5.12a). Uma análise elementar permite exprimir-se:

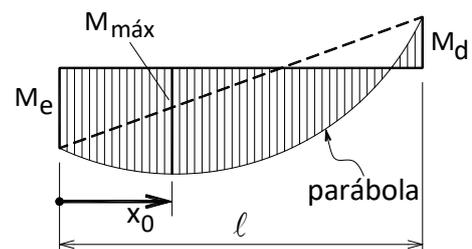
$$x_0 = \frac{\ell}{2} - \frac{M_e + M_d}{q\ell} \quad (5.54)$$

onde, nesta expressão da posição do momento máximo, M_e e M_d são supostos momentos de sentido dextrorso (vide Figura 5.12b)). Por outro lado, o momento fletor nessa posição é dado por:

$$M = M_e + \left(\frac{q\ell^2}{2} - M_e - M_d \right) \frac{x_0}{\ell} - \frac{qx_0^2}{2} \quad (5.55)$$



a) Diagrama do momento no colapso



b) Posição do momento máximo

FIGURA 5.12 – Diagrama de momento e posição de momento máximo

e, assim sendo, no caso em questão (Figura 5.12a) tem-se:

$$x_0 = \frac{\ell}{2} + \frac{M_p}{q\ell} \quad (5.56)$$

ou, tendo em vista (5.53):

$$x_0 = (2 - \sqrt{2})\ell \quad (5.57)$$

e, levando agora (5.57) em (5.55) tem-se a confirmação de que realmente o momento máximo coincide com o valor de M_p , como era de se esperar

5.7 - QUARTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Considere-se o caso da viga contínua sujeita a forças concentradas, conforme se mostra na Figura 5.13a). Sabe-se, de início, que o diagrama de momento fletor é, nesse caso, linear por trechos, e, assim, apresenta de maneira genérica a configuração ilustrada na Figura 5.13b). Pois bem, as duas rótulas, necessárias para se obter o mecanismo de colapso, podem ocorrer segundo as configurações mostradas nas Figuras 5.13c) e d), porquanto tais configurações são plausíveis em face do diagrama genérico mostrado na figura 5.13b).

A primeira configuração de rótulas (Figura. 5.13c)) implica em:

$$P_1 \ell \theta_1 \left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{6} \right) = M_p \theta_1 \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (5.58)$$

onde:

$$\alpha = P_2/P_1 \quad (5.59)$$

ou seja:

$$P_1 = \frac{15M_p}{\ell(2 + \alpha)} \quad (5.60)$$

cuja magnitude depende da relação α .

Por outro lado, com a segunda configuração de rótulas (Figura 5.13d)) encontra-se:

$$P_1 = \frac{12M_p}{\ell(1 + 2\alpha)} \quad (5.61)$$

cuja magnitude depende agora do dobro daquela relação.

Um exame das expressões (5.60) e (5.61) evidencia que, para $\alpha > 0.5$, o

menor valor da carga de colapso é dado pela expressão (5.61), e a configuração de colapso é a mostrada na Figura 5.13d); caso contrário, $\alpha < 0.5$, o menor valor é encontrado com a expressão (5.60), e com a configuração de rótulas mostrada na Figura 5.13c). O caso particular $\alpha = 0.5$ implica numa indeterminação da posição da rótula do vão, que tanto pode situar-se conforme configuração da Figura 5.13c) como da Figura 5.13d). É fácil verificar que qualquer posição dessa rótula entre as duas cargas leva ao mesmo resultado, porquanto, nesse caso, o momento fletor é constante entre as duas cargas; indicando-se, pois, que todas as seções situadas nesse intervalo plastificam ao mesmo tempo

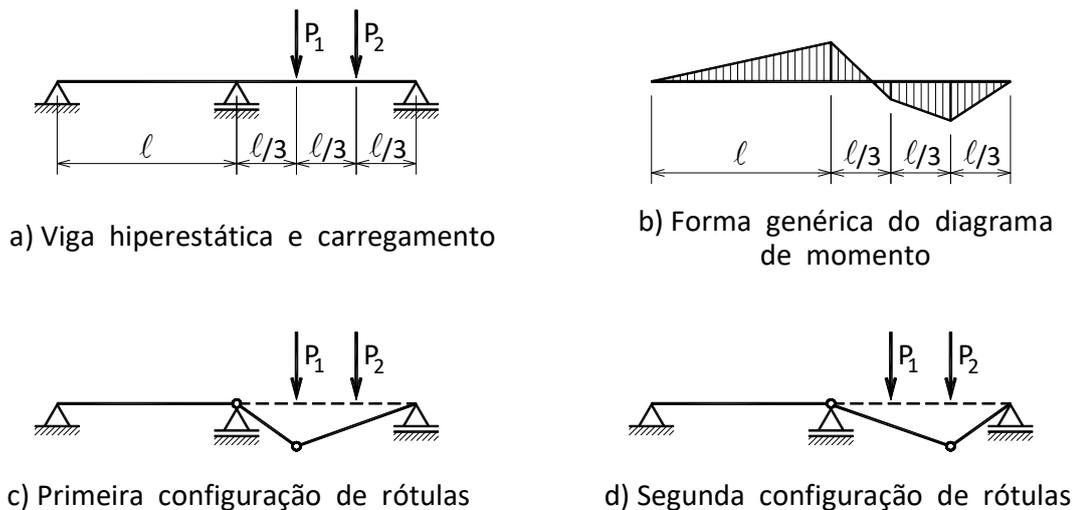


FIGURA 5.13 – Viga contínua e configurações de rótulas

5.8 - QUINTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como quinto exemplo de aplicação toma-se o caso de uma viga bi engastada sujeita a uma carga uniforme na metade do vão, de acordo com o mostrado na Figura 5.14a). A configuração de rótulas plásticas, em número de três, apresenta indeterminação apenas no tocante a posição da rótula do vão, porquanto a forma genérica do diagrama de momento fletor indica momentos grandes nas extremidades, e a posição de maior valor ao longo do vão deve ocorrer na região carregada.

Assim sendo, com a configuração de rótulas apontada na Figura 5.14b), tem-se:

$$q \left[\left(x - \frac{\ell}{2} \right) \frac{x + \ell/2}{2} + \frac{x}{2} (\ell - x) \right] = M_p \left(2 + \frac{2x}{\ell - x} \right) \quad (5.62)$$

ou seja:

$$q = 4M_p \frac{\ell}{(\ell - x)(\ell x - \ell^2/4)} \quad (5.63)$$

cuja condição de mínimo implica em:

$$x = x = \frac{5\ell}{8} \quad (5.64)$$

e, por conseguinte, a carga distribuída de colapso é dada por:

$$q = \frac{28.44M_p}{\ell^2} \quad (5.65)$$

com precisão de quatro algarismos.

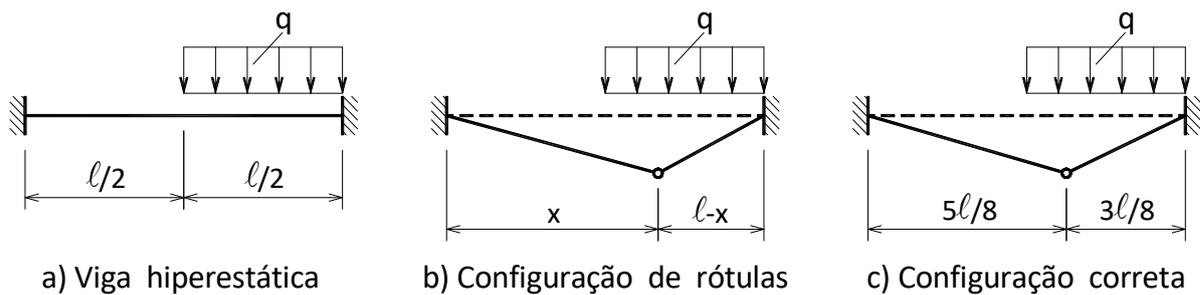


FIGURA 5.14 – Viga hiperestática e configurações de rótulas

Conferindo-se, a título de curiosidade, a posição de momento máximo, segundo a expressão (5.54) (trecho carregado entre rótulas):

$$x_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{3\ell}{9} \right) - \frac{2M_p}{\left(\frac{28.44M_p}{\ell^2} \right) \left(\frac{3\ell}{8} \right)} = 0 \quad (5.66)$$

confirmando-se, pois, o resultado encontrado em (5.64) pela via estática. Ou seja, a rótula encontra-se exatamente na posição de momento máximo.

5.9 - SEXTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Considere-se o pórtico tri-articulado mostrado na Figura 5.15a), cujo carregamento consiste numa carga horizontal P atuando no topo. Um exame da forma genérica do diagrama de momento fletor indica apenas, nesse caso isostático, duas possibilidades para a posição da rótula plástica, conforme as Figuras 5.15b) e c).

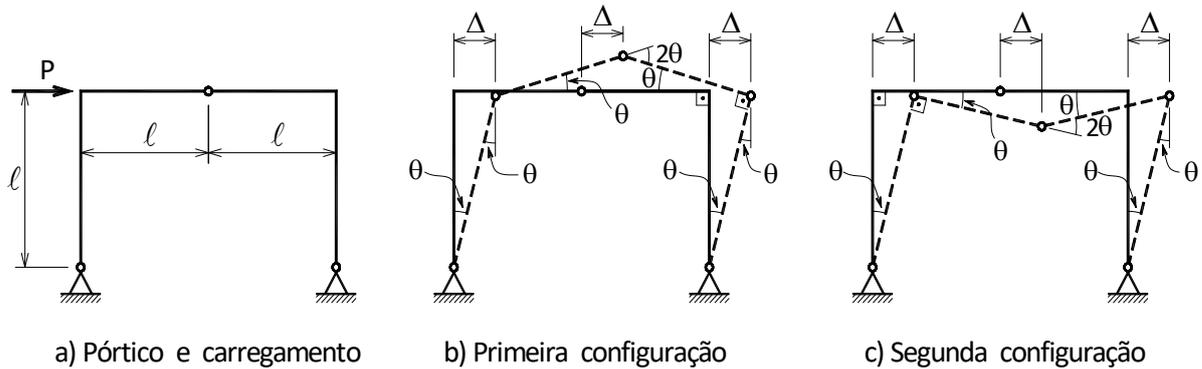


FIGURA 5.15 – Pórtico tri-articulado e configuração de rótulas

Pois bem, no primeiro caso o mecanismo de colapso, indicado em tracejado, permite que se escreva:

$$P\ell\theta = M_p(2\theta) \quad (5.67)$$

ou seja

$$P = \frac{2M_p}{\ell} \quad (5.68)$$

e, no segundo caso, tem-se também:

$$P\ell\theta = M_p(2\theta) \quad (5.69)$$

resultando pois o mesmo valor expresso em (5.68). Cabe, todavia, esclarecer que a cadeia cinemática (ou mecanismo) indicada em tracejado pode ser facilmente entendida. Com efeito, imprimindo-se uma rotação θ na coluna da esquerda (vide Figura 5.15b), a extremidade superior translada de $\Delta = \ell\theta$ (regime de pequenos deslocamentos), e essa translação é conferida, igualmente, para a articulação e para a extremidade da coluna da direita. Assim, por considerações de ordem geométrica encontram-se as demais grandezas em jogo.

5.10 - SÉTIMO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como exemplo de aplicação toma-se, agora, o caso do pórtico biarticulado indicado na Figura 5.16a), onde se indica também o carregamento considerado. Trata-se de um caso uma vez hiperestático, e, por via de consequência, o mecanismo de colapso deve apresentar a formação de duas rótulas plásticas.

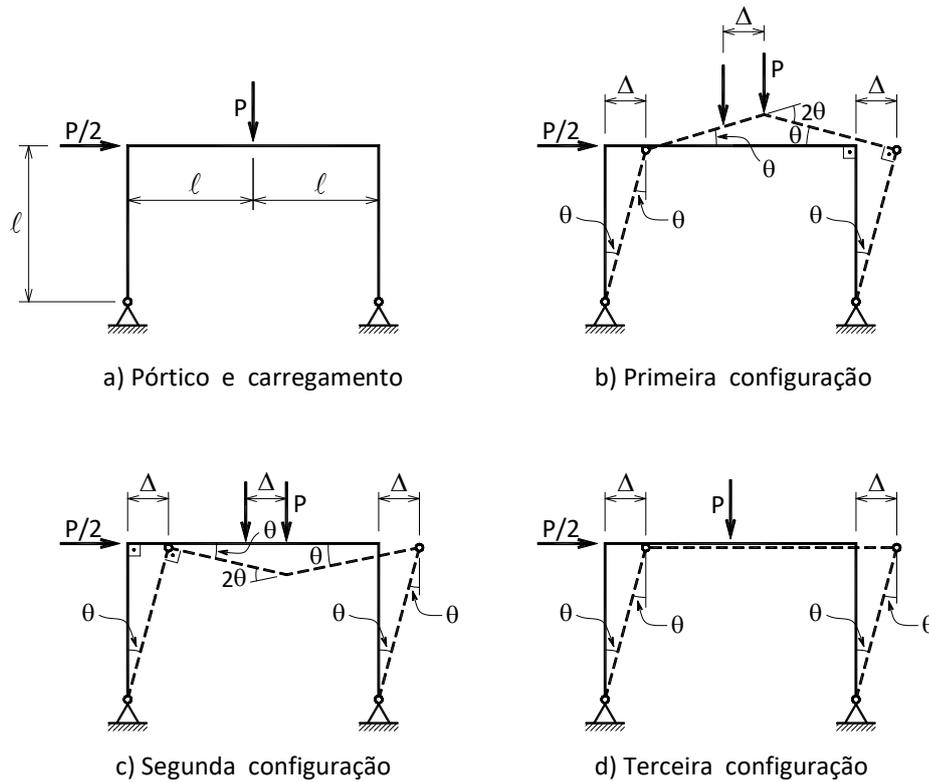


FIGURA. 5.16 – Pórtico biarticulado e configuração de rótulas

Um exame da forma genérica do diagrama de momento fletor aponta três possíveis configurações de rótulas, conforme ilustram-se nas Figuras 5.16b), c) e d). Pois bem, com a primeira configuração tem-se (vide Figura 5.16b)):

$$\frac{P}{2} \ell \theta - P \ell \theta = M_p (4\theta) \quad (5.70)$$

ou seja:

$$P = -\frac{8M_p}{\ell} \quad (5.71)$$

que constitui um resultado sem significado, pois o trabalho das forças externas é, nesse caso, negativo (de onde sairia a energia necessária para o trabalho positivo realizado nas rótulas?). Por outro lado, com a configuração indicada na Figura 5.16c) tem-se:

$$\frac{P}{2} \ell \theta + P \ell \theta = M_p (4\theta) \quad (5.72)$$

ou seja:

$$P = \frac{8M_p}{3\ell} \quad (5.73)$$

e, finalmente com a última configuração (vide Figura 5.16d)) tem-se:

$$\frac{P\ell\theta}{2} = M_p(2\theta) \quad (5.74)$$

ou seja:

$$P = \frac{4M_p}{\ell} \quad (5.75)$$

decorrendo-se de um exame dos resultados expressos em (5.69) e (5.71) ser o expresso em (5.73) o valor correto da carga de colapso da estrutura em apreço. Convém alertar-se para o fato de que se considera, no colapso, a proporção apontada para o carregamento (P vertical e $P/2$ horizontal).

Com relação aos mecanismos de colapso estudados, uma observação muito interessante consiste no seguinte. Os dois mecanismos ilustrados nas Figuras 5.16b) e c) podem ser obtidos pela superposição de apenas dois mecanismos. Tais mecanismos, ilustrados nas Figuras 5.17a) e b), são denominados, respectivamente, mecanismo de andar ilustrado na Figura 5.17a) e mecanismo de viga na Figura 5.17b). Com efeito, com o primeiro mecanismo tem-se:

$$\frac{P}{2} \ell\theta = M_p(2\theta) \quad (5.76)$$

e com o segundo tem-se:

$$P\ell\theta = M_p(4\theta) \quad (5.77)$$

em outras palavras, adicionando-se ao mecanismo de andar o mecanismo de viga tem-se o mecanismo mostrado na Figura 5.17c). Igualmente, convém ser notado que, nessa superposição, a rótula da extremidade superior da coluna da esquerda, existente nos dois mecanismos elementares, desaparece. Com efeito, as rotações das barras concorrentes nesse ponto possuem o mesmo sentido em ambos os mecanismos elementares. O contrário ocorre na extremidade superior da coluna da direita. Assim, o Princípio dos Trabalhos Virtuais exprime somando-se membro a membro as equações (5.76) e (5.77), subtraindo-se do segundo membro (trabalho interno) o correspondente à soma das rotações de mesmo sentido, ou seja:

$$\frac{P}{2} \ell\theta + P\ell\theta = M_p(2\theta) + M_p(4\theta) - M_p(2\theta) \quad (5.78)$$

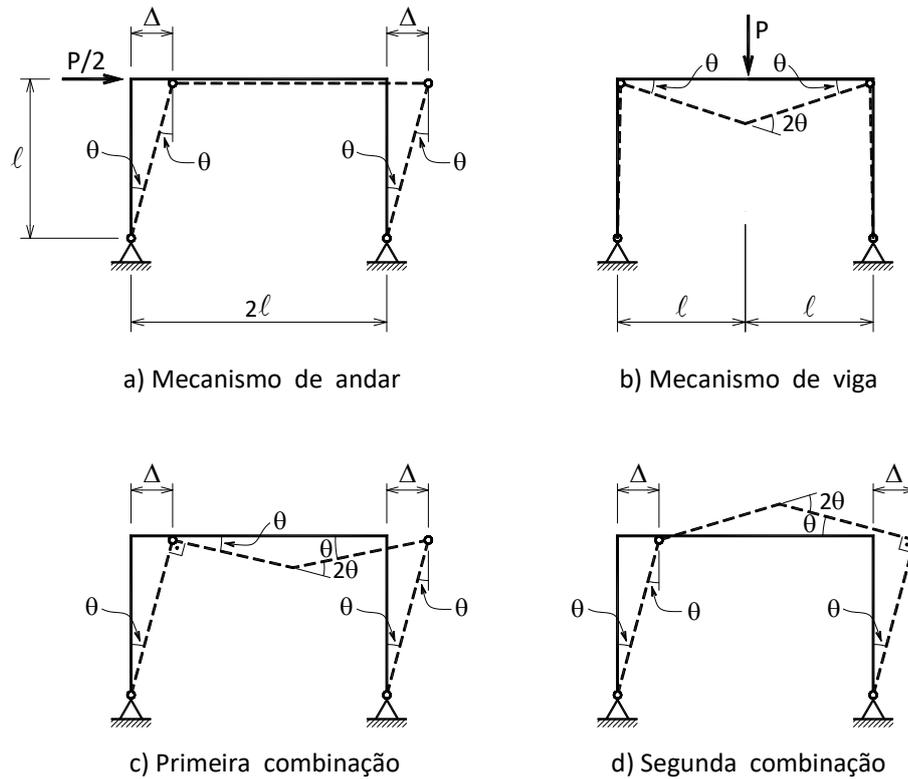


FIGURA 5.17 – Mecanismos elementares e combinações

resultando-se, pois, no valor expresso em (5.73). Por outro lado, subtraindo-se do mecanismo de andar o mecanismo de viga encontra-se o mecanismo mostrado na Figura 5.17d). Nesse caso as rotações de mesmo sentido acontecem na extremidade superior da barra da direita. Assim sendo tem-se:

$$\frac{P}{2} \ell \theta - P \ell \theta = M_p (2\theta) + M_p (4\theta) - M_p (2\theta) \quad (5.79)$$

encontrando-se, pois, o resultado carente de sentido físico da expressão (5.71).

5.11 - OITAVO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Considere-se o pórtico do exemplo anterior sujeito, agora, ao carregamento indicado na Figura 5.18a). O mecanismo de colapso, a exemplo do caso anterior, constitui uma combinação do mecanismo de andar com um de viga, sendo que desta feita a posição da rótula situada no vão não está definida.

Tomando-se, então, o mecanismo indicado na Figura 5.18b), tem-se:

$$P \ell \theta_1 + \frac{\alpha P}{\ell} 2\ell \frac{x \theta_1}{2} = M_p \left(2\theta_1 + \frac{2x}{2\ell - x} \theta_1 \right) \quad (5.80)$$

onde α é o fator de relação entre as cargas em jogo (vide Figura 5.18a)). A expressão (5.80) permite escrever-se:

$$P = M_p \frac{4\ell}{(\ell - \alpha x)(2\ell - x)} \quad (5.81)$$

cuja condição de carga mínima implica em:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = M_p \frac{-4l [\alpha(2l - x) + (l - \alpha x)(-1)]}{[(l - \alpha x)(2l - x)]^2} = 0 \quad (5.82)$$

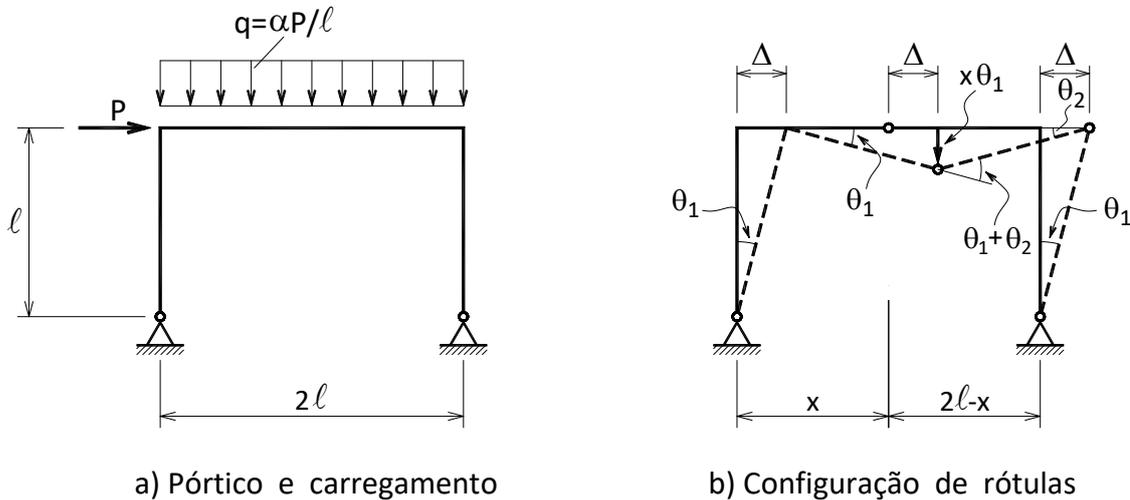


FIGURA 5.18 – Pórtico biarticulado, carregamento e mecanismo

ou seja:

$$x = \frac{\ell(2\alpha - 1)}{2\alpha} \quad (5.83)$$

e, com isso, a força de colapso (vide (5.77)) fica:

$$P = \frac{16\alpha M_p}{\ell(4\alpha^2 + 4\alpha + 1)} \quad (5.84)$$

merecendo os resultados expressos em (5.83) e (5.84) alguns comentários.

Em primeiro lugar a posição da rótula situada no vão implica, em face do mecanismo em consideração, na restrição:

$$0 \leq x = \frac{\ell(2\alpha - 1)}{2\alpha} \leq 2\ell \quad (5.85)$$

e, mais ainda, no caso:

$$\alpha \geq 0 \quad (5.86)$$

ou seja, carga distribuída dirigida para baixo. Assim sendo, no caso de $x \geq 0$ tem-se:

$$\frac{\ell(2\alpha - 1)}{2\alpha} \quad (5.87)$$

ou seja:

$$\alpha \geq 0.5 \quad (5.88)$$

e no caso de $x \leq 2\ell$ tem-se:

$$\frac{\ell(2\alpha - 1)}{2\alpha} \leq 2\ell \quad (5.89)$$

ou seja:

$$\alpha \geq -0.5 \quad (5.90)$$

e examinando-se as expressões (5.86), (5.88) e (5.90) verifica-se que a solução expressa em (5.84) é somente válida para $\alpha \geq 0.5$. Igualmente, com $\alpha = 0.5$ a expressão (5.84) fica:

$$P = \frac{2M_p}{\ell} \quad (5.91)$$

que coincide com o resultado encontrado com mecanismo de andar. Ora, esse fato permite concluir-se que, para $0 \leq \alpha \leq 0.5$, o mecanismo de colapso da estrutura é o de andar, e o valor da carga é, então, o expresso em (5.85), considerando-se o caso limite com α tendendo para infinito tem-se de (5.89):

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x = \ell - \frac{\ell}{2\alpha} = \ell \quad (5.92)$$

ou seja, a rótula, nesse caso, tende a ocupar a posição central. O valor da carga correspondente passa a ser dado por (vide (5.80)):

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} P = \frac{4M_p}{\alpha \ell} \frac{4\alpha^2}{(4\alpha^2 + 4\alpha + 1)} = \frac{4M_p}{\alpha \ell} \quad (5.93)$$

ou seja, o valor da carga de colapso tende para o valor encontrado com o mecanismo de viga. Esse resultado era de se esperar, porquanto o caso de α tendendo para infinito corresponde, em termos físicos, ao caso de se solicitar a estrutura somente por carga uniforme, ou, na razão inversa, carga horizontal tendendo para zero.

5.12 – CARREGAMENTO REPETIDO E ALTERNADO

O modelo de plastificação assumido logo de início (vide Figuras 5.1a) e 5.2) é o chamado modelo plástico perfeito, cujo comportamento acha-se agora ilustrado com mais detalhes na Figura 5.19. Para carregamento crescente a curvatura cresce inicialmente proporcionalmente até atingir o momento de plastificação (trecho OA). A

partir da plastificação não há mais aumento do momento (saturação), mas a curvatura pode aumentar indefinidamente (trecho AB). Havendo descarregamento segue-se apenas a recuperação da deformação proporcional (trecho BC), sobrando-se uma curvatura residual plástica (trecho CO). O comportamento descrito para momento positivo é também retratado para momento negativo, com plastificação ao contrário. Todavia, como bem sabido, havendo reversão da plastificação a ruptura nominal é atingida, pois com poucas reversões (algo como uma centena de vezes, ou até milhares) o material deixa de resistir vindo a se desintegrar.

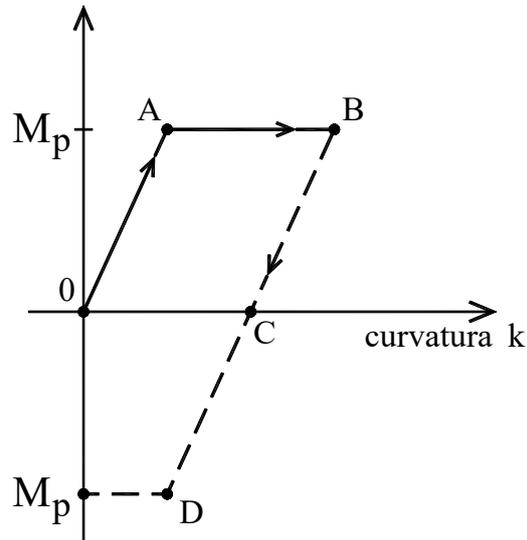


FIGURA 5.19 – Modelo plástico perfeito

Para examinar esse tema, considere-se a viga hiperestática mostrada na Figura 5.20), engastada numa extremidade e simplesmente apoiada na outra, sob carregamento concentrado no meio do vão. O mecanismo de plastificação envolve a formação de duas rótulas como ilustrado na Figura 5.20b) resultando:

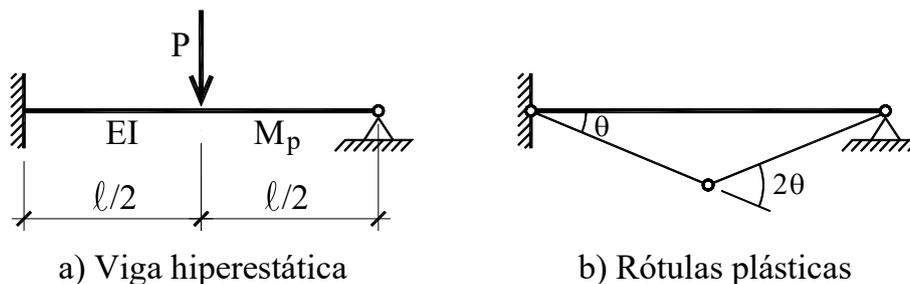


FIGURA 5.20 – Viga hiperestática

$$P \frac{l}{2} \theta = M_p (3\theta) \quad (5.94)$$

$$P = \frac{6M_p}{l}$$

sendo que esse resultado é alcançado com o carregamento crescente até atingir esse valor. Todavia, o comportamento durante esse carregamento é no começo em regime elástico linear até atingir a formação da primeira rótula, e a partir d'aí continua em regime elástico linear, mas com momento plástico no local da primeira rótula formada,

encerrando-se com a formação da segunda e última rótula ao atingir o carregamento expresso na segunda de (5.94).

A Figura 5.21a) exibe a configuração de momento fletor no regime elástico linear, ficando claro que a primeira plastificação ocorre no engaste resultando:

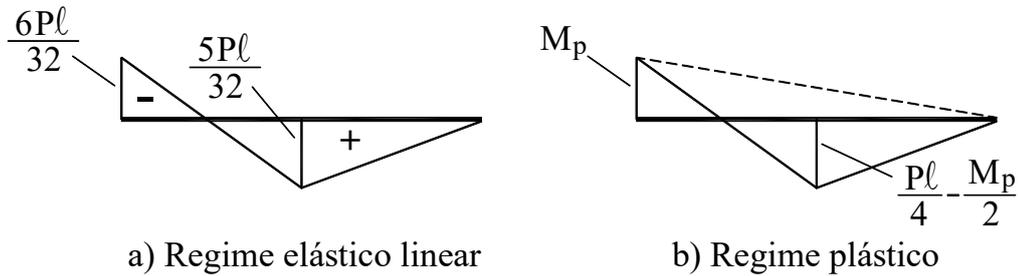


FIGURA 5.21 – Evolução da plastificação

$$M_p = \frac{6Pl}{32} \quad (5.95)$$

$$P = \frac{32M_p}{6\ell}$$

e a Figura 5.21b) exibe a configuração de momento fletor para carregamento crescente acima do valor expresso na segunda de (5.95), até atingir a formação da segunda rótula, agora no meio do vão, ou seja:

$$M_p = \frac{Pl}{4} - \frac{M_p}{2} \quad (5.96)$$

$$P = \frac{6M_p}{\ell}$$

sendo que, durante esse aumento de carregamento, a rótula do engaste permite a rotação plástica:

$$\varphi_p = -M_p \frac{\ell}{3EI} + \frac{P\ell^2}{16EI} = \frac{M_p \ell}{24EI} \quad (5.97)$$

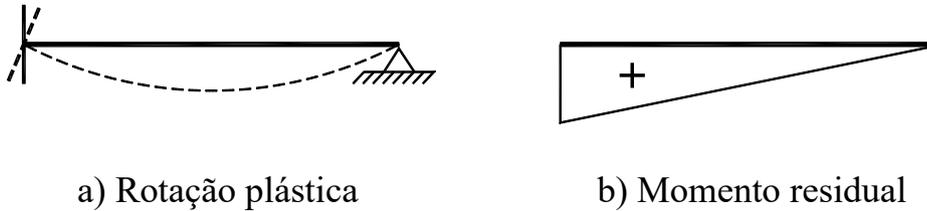
visto que o carregamento final é o dado pela segunda de (5.96), e mais, a viga para essa fase do carregamento agora torna-se isostática com carregamento no centro e momento de plastificação no engaste. A primeira parcela de (5.97) é a rotação decorrente da aplicação de M_p negativo no engaste, e a segunda a rotação decorrente do carregamento central no apoio onde antes havia engaste.

Pois bem, ao descarregar sucede que o momento fletor não será zerado em razão de a rotação plástica (5.97) ser residual (não é restituída). Assim sendo, o momento residual deve provocar rotação igual à rotação plástica (5.97), ou seja:

$$\varphi_r = \frac{M_r \ell}{3EI} = \varphi_p = \frac{M_p \ell}{24EI} \quad (5.98)$$

$$M_r = \frac{M_p}{8}$$

como ilustrado na Figura 5.22a) e momento fletor residual na Figura 5.22b).



a) Rotação plástica

b) Momento residual

FIGURA 5.22 - Descarregamento

O recarregamento \bar{P} na fase elástica linear provoca o momento fletor que deve se superpor ao residual como ilustrado na Figura 5.23, e então a plastificação no apoio resulta:

$$-\frac{6\bar{P}\ell}{32} + \frac{M_p}{8} = -M_p$$

$$\bar{P} = \frac{6M_p}{\ell} \quad (5.99)$$

e a plastificação no centro resulta:

$$\frac{5\bar{P}\ell}{32} + \frac{M_p}{8} = M_p$$

$$\bar{P} = \frac{6M_p}{\ell} \quad (5.100)$$

ou seja, a recarga pode ser realizada com carga expressa na segunda de (5.94) que é a carga de colapso para carga crescente, e com isso, o carregamento repetido tem a mesma magnitude da carga de colapso original. Todavia, em outras configurações estruturais e de carregamento a repetição pode levar a uma acomodação (shakedown) plástica para valores de carregamento maior que o definido no regime elástico linear, ou então para colapso incremental para carregamento superior ao da acomodação plástica (a rotação plástica ocorrendo com acréscimos fracionários com a série geométrica correspondente resultando um valor finito, ou, caso contrário, com razão superior à unidade resultando rotação crescente indefinidamente). De qualquer modo o estudo de carregamento repetido envolve sempre análise do comportamento elástico linear em todas as fases do descarregamento e recarregamento; exigindo-se estudo particular de cada caso de estrutura e de carregamento. De qualquer modo, os casos de acomodação (shakedown) plástica e de colapso incremental não será aqui objeto de estudo, embora em combinação de carregamento permanente (peso próprio) e acidental (carga de ocupação e vento por exemplo) esses fenômenos podem ocorrer.

Para estudo do caso de carregamento alternado, como já mencionado, tem-se que examinar a reversão da plastificação, que leva ao colapso da seção, ou seja, no caso da viga em questão, a primeira plastificação ocorre com:

$$P = \frac{32M_p}{6\ell} \quad (5.101)$$

enquanto que no restante da viga o regime ainda é elástico linear, ocorrendo na inversão do carregamento recuperação total (sem momento residual). Todavia haverá reversão de deformação plástica na seção do apoio ao inverter o carregamento. Assim sendo, o máximo valor para o carregamento alternado é dado por (5.101) de modo a não colapsar a seção de apoio. Em resumo, para carga repetida a magnitude está limitada a $6M_p/\ell$ e para carregamento alternado limitada a $5M_p / 32\ell$.

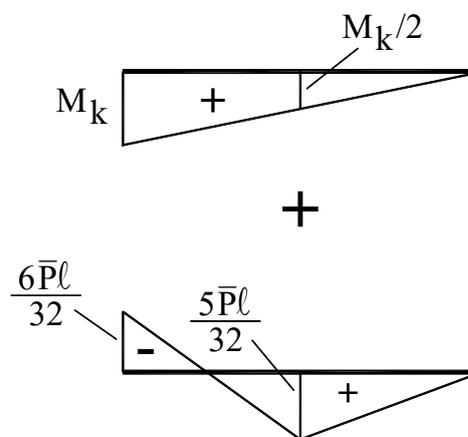


FIGURA 5.23 Recarregamento

Para finalizar, cabe assinalar que, em todos os exemplos de aplicação abordados, o momento de plastificação foi suposto constante em todas as barras e em todas as seções. Todavia esse fato não constitui, obviamente, uma restrição ao Método Plástico, mas apenas coerência com o espírito redobradamente introdutório com o qual foi abordado o assunto.

O Método Plástico vem sendo bastante estudado e largamente empregado no projeto estrutural, em especial como parte importante da teoria da confiabilidade estrutural.

6 – BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

ANDERMANN, F. – *Plaques rectangulaires chargées dans leur plan*. Paris: Dunod, 1969.

NEAL, B.G. – *The plastic methods of structural analysis*. Londres: Chapman and Hall Ltd., 1977.

TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.E. – *Mecânica dos materiais*. Vol. I e II. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1983.

TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N. – *Teoria da elasticidade*. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1980.