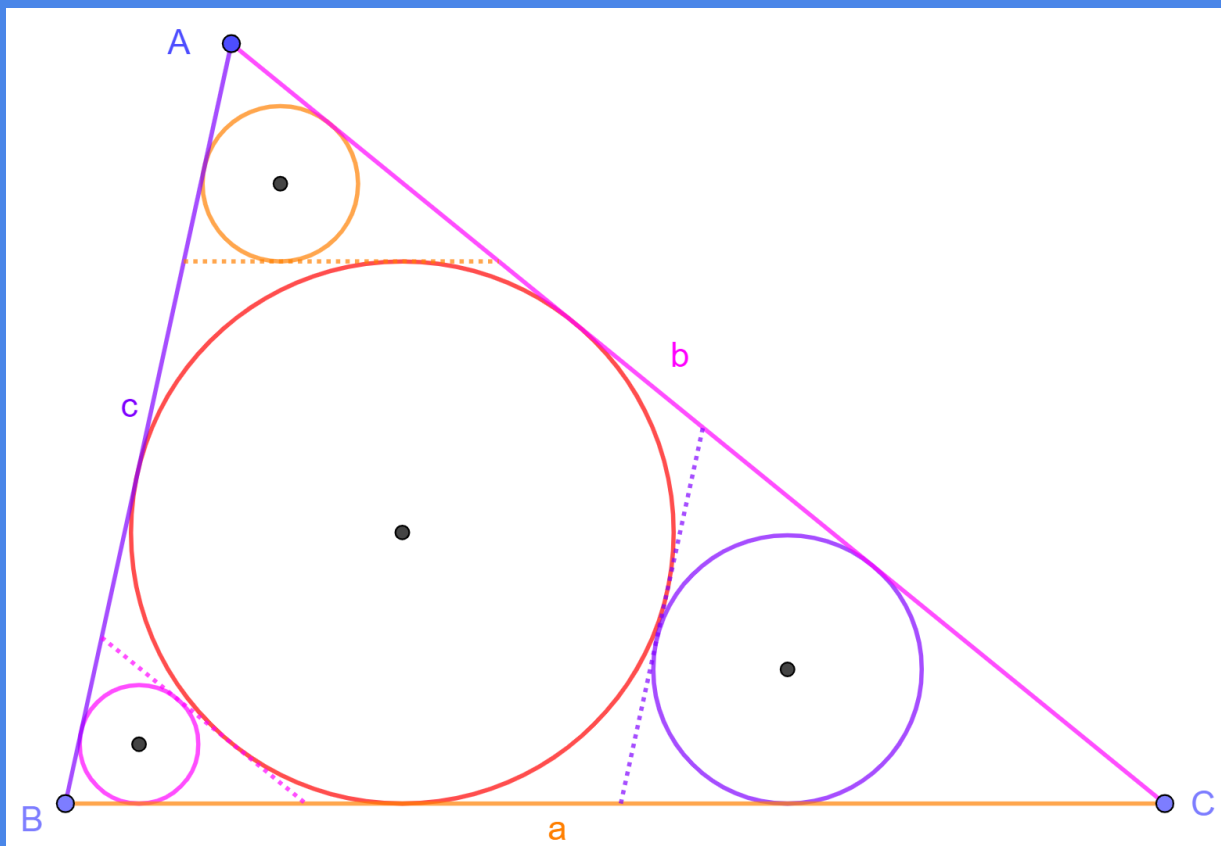


Áreas: teoria, construções e problemas



Juan López Linares

JUAN LÓPEZ LINARES

Áreas: teoria, construções e problemas

DOI: 10.11606/9786587023403

Pirassununga - SP

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)

2024

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-Reitora: Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

Diretor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Vice-Diretor: Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

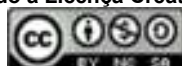
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da
Universidade de São Paulo

L864a	López Linares, Juan Áreas : teoria, construções e problemas / Juan López Linares. -- Pirassununga : Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2024. 93 p. ISBN 978-65-87023-40-3 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023403 1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino médio. 6. Formação de professores. I. Título.
-------	---

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



Dedico este livro a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores e Estudantes do curso de Geometria Olímpica com GeoGebra que motivaram a escrita deste livro eletrônico.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

AUTOR

Prof. Associado JUAN LÓPEZ LINARES: <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Quando adolescente participava como estudante de um grupo de treinamento para olimpíadas de Física. Embora tivesse sucessos nas competições desta disciplina, nas olimpíadas de Matemática não tinha resultados espetaculares. Sempre sentiu falta de um grupo de treinamento em Matemática. Essa experiência extracurricular determinou seu futuro profissional e motivou sua linha de trabalho hoje.

Professor Associado do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores e estudantes de alto rendimento.

Na área de Ensino de Matemática Olímpica, publicou 20 artigos, 18 livros eletrônicos (e-book), um capítulo de livro, uma dissertação de mestrado e uma tese de livre docência. Textos completos e gratuitos podem ser encontrados [aqui](#). Também disponibilizou mais de 750 vídeo aulas. Adicionalmente, no site do [GeoGebra](#) estão disponíveis mais de 1000 construções geométricas interativas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProFMat) pela UFSCar em 2019 e Livre Docente na área de Ensino de Matemática Olímpica na FZEA USP em 2022.

Título

Áreas: teoria, construções e problemas

Prefácio

O cálculo de áreas é fundamental em diversas áreas da matemática, ciência, engenharia, arquitetura, geografia e muitas outras disciplinas. Além da Introdução a discussão é organizada em três capítulos: Fundamentos para cálculos de áreas; Construções, exercícios e desafios; Problemas de olimpíadas internacionais. O texto conta com 54 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mãos na massa. Este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil.

Palavras-chave: Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

Lista de Figuras

2.1	Fórmula tradicional para o cálculo de área de triângulo. Versão interativa aqui .	14
2.2	Triângulos de igual área entre retas paralelas. Versão interativa aqui .	16
2.3	Área de um triângulo com dois lados e o ângulo que eles determinam. Versão interativa aqui .	17
2.4	Área de um triângulo utilizando a fórmula de Heron. Versão interativa aqui .	18
2.5	Área de um triângulo utilizando o incírculo. Demonstração 1. Versão interativa aqui .	20
2.6	Área de um triângulo utilizando o incírculo. Demonstração 2. Versão interativa aqui .	22
2.7	Raio do incírculo no triângulo retângulo. Versão interativa aqui .	23
2.8	Circunferência k_c , ex-inscrita do $\triangle ABC$, relativa ao vértice C . Versão interativa aqui .	24
2.9	Área de um triângulo utilizando o ex-incírculo. Versão interativa aqui .	25
2.10	Área de um triângulo utilizando o circuncirculo. Versão interativa aqui .	26
2.11	Relação entre as áreas de triângulos semelhantes. Versão interativa aqui .	27
2.12	Áreas para calcular razão de segmentos. Versão interativa aqui .	28
2.13	Igualdade de áreas envolvendo o Baricentro. Guia para a demonstração da Proposição 12. Versão interativa aqui .	30
2.14	Área de quadrilátero convexo arbitrário. Versão interativa aqui .	32
2.15	Área de Pipas e Losangos. Versão interativa aqui .	33
2.16	Igualdade de áreas num trapézio. Versão interativa aqui .	34
3.1	Cálculo de π . Sequências de polígonos regulares inscritos e circunscritos. Versão interativa aqui .	35
3.2	Cálculo de π . Gráfico das áreas e os semiperímetros das sequências de polígonos regulares inscritos e circunscritos. Versão interativa aqui .	36
3.3	Áreas e comprimentos numa circunferência. Versão interativa aqui .	37
3.4	Pentágono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência unitária k . Versão interativa aqui .	38

3.5	Estimativa de π utilizando a série de Maclaurin da função arco-tangente. Gráfico de S_k como função de k . Versão interativa aqui	40
3.6	Áreas, semelhança e triângulos equiláteros. Exercício 1. Versão interativa aqui	41
3.7	Jogo para o Problema 1. Versão interativa aqui	42
3.8	Primeira construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui	43
3.9	Segunda construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui	44
3.10	Terceira construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui	45
3.11	Quarta construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui	46
3.12	Quinta construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui	46
3.13	Construção do Arco Capaz no semiplano superior do segmento AB . Versão interativa aqui	48
4.1	Construção geométrica para o Problema 2. Quando $A = A'$ o $\triangle ABC$ é equilátero. Versão interativa aqui	50
4.2	Construção geométrica inicial para o Problema 3. Versão interativa aqui	52
4.3	Construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa aqui	54
4.4	Sequência de circunferências no triângulo equilátero. Versão interativa aqui	55
4.5	Resolução do exercício sobre triângulo equilátero e circunferências tangentes. Versão interativa aqui	57
4.6	Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa aqui	58
4.7	Construção geométrica para o Problema 4. Versão interativa aqui	60
4.8	Construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa aqui	61
4.9	Construção geométrica para a primeira resolução do Problema 5. Versão interativa aqui	62
4.10	Construção geométrica para a segunda resolução do Problema 5. Versão interativa aqui	64
4.11	Construção geométrica para a terceira resolução do Problema 5. Versão interativa aqui	66
4.12	Uma construção geométrica inicial para o Problema 6. Versão interativa aqui	67
4.13	Construção geométrica da resolução do Problema 6. Versão interativa aqui	68
4.14	Construção geométrica para o Problema 7. Versão interativa aqui	69
4.15	Construção geométrica inicial para o Problema 8. Versão interativa aqui	71
4.16	Construção geométrica para o Problema 8. Versão interativa aqui . Pode ser movimentado o ponto B para encontrar o perímetro mínimo.	73
4.17	Construção geométrica inicial para o Problema 9. Versão interativa aqui	74
4.18	Construção geométrica para o Problema 10. Versão interativa aqui . Movimentando o ponto P pode-se verificar o mínimo.	76
4.19	Construção geométrica inicial para o Problema 11. Versão interativa aqui	77

4.20	Construção geométrica para o Problema 11. Versão interativa aqui	78
4.21	Construção geométrica inicial para o Problema 12. Versão interativa aqui	79
4.22	Construção geométrica para o Problema 12. Versão interativa aqui	82
4.23	Construção geométrica da resolução do problema. Versão interativa aqui	83
4.24	Construção geométrica partindo de um paralelogramo. Versão interativa aqui . .	84
4.25	Construção geométrica para auxiliar na interpretação. Versão interativa aqui . . .	85

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	12
1.1	Qual a importância do cálculo de áreas?	12
1.2	Organização e trabalhos anteriores	13
2	Fundamentos para cálculos de áreas	14
2.1	Fórmula tradicional para a área de triângulo	14
2.2	Área com dois lados e o ângulo que eles determinam	16
2.3	Fórmula de Heron	18
2.4	Área de um triângulo utilizando o incírculo	20
2.5	Raio do incírculo partindo das fórmulas de área	22
2.6	Raio do incírculo no triângulo retângulo	23
2.7	Área de um triângulo utilizando o ex-incírculo	24
2.8	Área de um triângulo utilizando o circuncírculo	26
2.9	Relação entre as áreas de triângulos semelhantes	27
2.10	Áreas para calcular razão de segmentos	28
2.11	Áreas determinadas pelo Baricentro	29
2.12	Área de quadrilátero convexo arbitrário	31
2.13	Igualdade de áreas num trapézio	33
3	Construções, exercícios e desafios	35
3.1	Desafio: cálculo de π pelo método da exaustão.	35
3.2	Solução do desafio do cálculo de π .	36
3.3	Áreas, semelhança e triângulos equiláteros	40
3.3.1	Solução do Exercício 1	40
3.4	Áreas, paralelogramo e base média	42
3.4.1	Solução do Problema 1	42
3.5	Construção do arco capaz	47

4	Problemas de olimpíadas internacionais	49
4.1	Áreas. Desigualdades. Lei dos Cossenos. P2 IMO 1961.	49
4.1.1	Resolução do Problema 2.	49
4.2	Diferentes formas de calcular áreas. Incírculos. P3 IMO 1964.	51
4.2.1	Resolução do Problema 3.	52
4.2.2	Sequência de circunferências no triângulo equilátero.	54
4.3	Áreas, bases médias, triângulo medial. P6 IMO 1966.	58
4.3.1	Resolução do Problema 4.	58
4.4	Área máxima, trigonometria, simetria. P13 LL IMO 1967.	60
4.4.1	Resolução do Problema 5.	60
4.5	Quadriláteros cíclicos, triângulo circunscrito e desigualdades. P4 IMO 1967. . .	66
4.5.1	Resolução do Problema 6	66
4.6	Baricentro. Áreas. Desigualdade. P9 SL IMO 1968.	68
4.6.1	Resolução do Problema 7.	69
4.7	Desigualdade Triangular. Desigualdade das Médias. Áreas. P1 IMO 1976. . . .	70
4.7.1	Resolução do Problema 8.	70
4.8	Área máxima, quadrado. P47 LL IMO 1977.	73
4.8.1	Resolução do Problema 9.	73
4.9	Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Incentro. Áreas. P1 IMO 1981.	74
4.9.1	Resolução do Problema 10.	75
4.10	Áreas, quadriláteros inscritíveis. P2 IMO 1987.	76
4.10.1	Resolução do Problema 11.	76
4.11	Incírculos no triângulo retângulo e áreas. P5 IMO 1988.	79
4.11.1	Resolução do Problema 12.	79
4.12	Paralelogramos, áreas e retângulos. P4 NE IGO 2015.	82
4.12.1	Resolução do Problema 13	82
4.12.2	Generalização	84
4.13	Área de triângulos, hexágono, trapézio. P2 NE IGO 2018	85
4.13.1	Resolução do Problema 14	85
5	Referências Bibliográficas	87

Capítulo 1

Introdução

1.1 Qual a importância do cálculo de áreas?

O cálculo de áreas é fundamental em diversas áreas da matemática, ciência, engenharia, arquitetura, geografia e muitas outras disciplinas. Aqui estão algumas razões pelas quais o cálculo de áreas é importante.

Em arquitetura e engenharia civil, o cálculo de áreas é essencial para o projeto de edifícios, estradas e outras estruturas. Ajuda a determinar o espaço necessário e a eficiência do layout. Na agricultura, o cálculo de áreas é usado para planejar plantações, determinar a quantidade de fertilizantes e pesticidas necessários e otimizar a produção.

No mapeamento e na cartografia, calcular áreas é vital para determinar tamanhos de terras, distâncias e para representar áreas geográficas de maneira precisa. Em disciplinas como a ecologia, a biologia e a geologia, o cálculo de áreas é utilizado para estudar habitats, mapear ecossistemas e determinar a distribuição de espécies.

Em finanças imobiliárias, por exemplo, o cálculo de áreas é crucial para avaliar propriedades e determinar o valor do espaço físico. No campo dos estudos ambientais, o cálculo de áreas é usado para avaliar o impacto de atividades humanas no meio ambiente e para planejar a conservação de áreas naturais.

Em computação gráfica e design, o cálculo de áreas é utilizado para criar imagens digitais, modelagem 3D e em várias aplicações relacionadas. Em logística e planejamento urbano, calcular áreas é crucial para otimizar o uso do espaço em cidades, estradas e sistemas de transporte.

Em diversas áreas da pesquisa científica, o cálculo de áreas é utilizado para análise estatística, modelagem e interpretação de dados experimentais. Em resumo, o cálculo de áreas desempenha um papel crucial em várias disciplinas, contribuindo para o planejamento eficiente, a compreensão do ambiente físico e o avanço do conhecimento.

1.2 Organização e trabalhos anteriores

O livro faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O mesmo aconteceu na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma Moodle de cursos de Extensão da USP.

Além da Introdução a discussão é organizada em três capítulos: Fundamentos para cálculos de áreas; Construções, exercícios e desafios; Problemas de olimpíadas internacionais. O texto conta com 54 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, links para os gráficos interativos são disponibilizados em páginas do [GeoGebra](#). Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube.

O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa.

Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contra partida, na versão impressa tradicional o aprendente precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma resolução. O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movimentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes.

Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendizado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar e buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Bruno Holanda [3], do Prof. Rodrigo Pinheiro [43] e do Prof. Cícero Thiago [47]. Também serviram como referência os livros de Geometria [41], Geometria Analítica [1] e Matemática Discreta [40] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Onze livros eletrônicos gratuitos com as notas de aulas do curso Geometria Olímpica com GeoGebra estão disponíveis em [26], [27], [28], [37], [35], [21], [22], [5], [14], [24] e [25]. Também foram publicados quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [34], [17], [18] e [19]. Outros trabalhos da área de Matemática são [23], [8], [9], [10], [39], [30], [31], [4], [32], [15], [16], [12], [29], [44], [33], [45], [36], [38], [20], [46], [6], [24], [11] e [13].

Capítulo 2

Fundamentos para cálculos de áreas

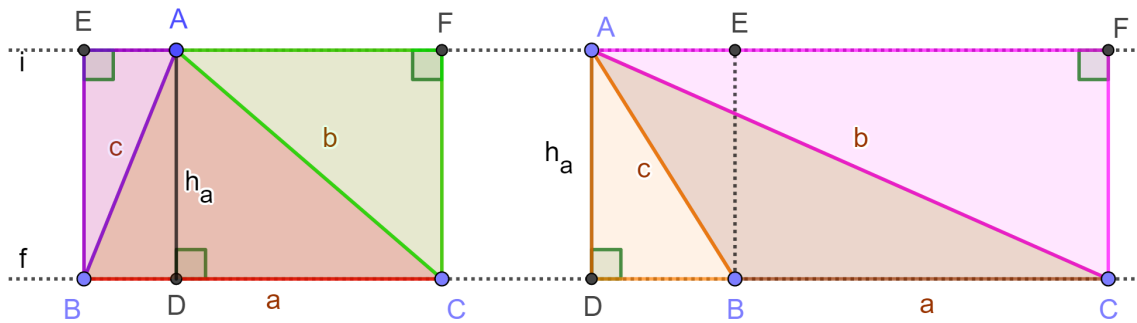
2.1 Fórmula tradicional para a área de triângulo

Utiliza-se a notação $[A_1A_2\cdots A_n]$ para denotar a área de um polígono de n lados.

Proposição 1. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e alturas h_a , h_b e h_c . Então vale:*

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c. \quad (2.1.1)$$

Figura 2.1: Fórmula tradicional para o cálculo de área de triângulo. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja o ponto D pé da altura do vértice A . Serão considerados dois casos: i) O ponto D está no interior do segmento BC (esquerda da Figura 2.1) e ii) O ponto D está no exterior do segmento BC (direita da Figura 2.1).

i) O ponto D está no interior do segmento BC (esquerda da Figura 2.1). Neste caso vale que:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}[BDAE] - \frac{1}{2}[DCFA],$$

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}BD \cdot h_a - \frac{1}{2}(a - BD) \cdot h_a,$$

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot h_a.$$

ii) O ponto D está no exterior do segmento BC (direita da Figura 2.1). Suponha-se, sem perda de generalidade, que D esteja a esquerda do ponto B . Neste caso vale que:

$$[\triangle ABC] = [ADCF] - \frac{1}{2}[ADBE] - \frac{1}{2}[ADCF],$$

$$[\triangle ABC] = (DB + a)h_a - \frac{1}{2}DB \cdot h_a - \frac{1}{2}(a + DB) \cdot h_a,$$

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot h_a.$$

Analogamente demonstra-se a fórmula utilizando outro par de lado e altura correspondente. $\square$

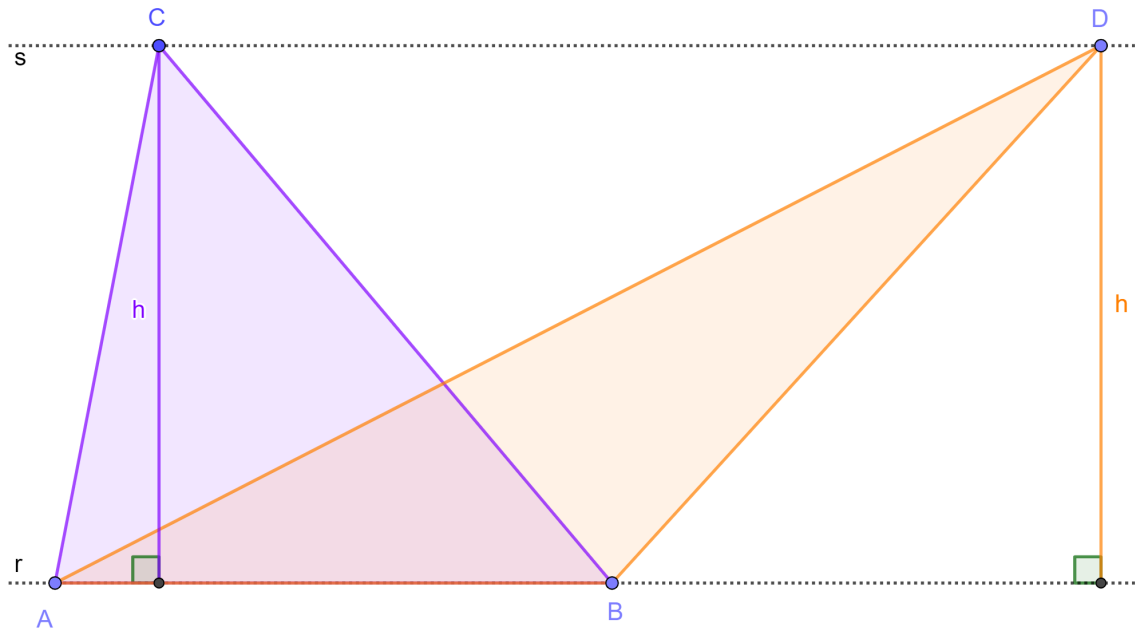
A equação (2.1.1) também implica uma correlação entre lados e alturas de um $\triangle ABC$, pois pode ser escrita como:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c. \quad (2.1.2)$$

Corolário 2. *Sejam r e s retas paralelas e A e B pontos distintos sobre a reta r e C e D pontos distintos sobre a reta s . Então,*

$$[\triangle ABC] = [\triangle ABD].$$

Figura 2.2: Triângulos de igual área entre retas paralelas. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Como os dois triângulos têm a mesma medida da base e altura, pela Proposição 1, as áreas são iguais:

$$\frac{AB \cdot h}{2}.$$

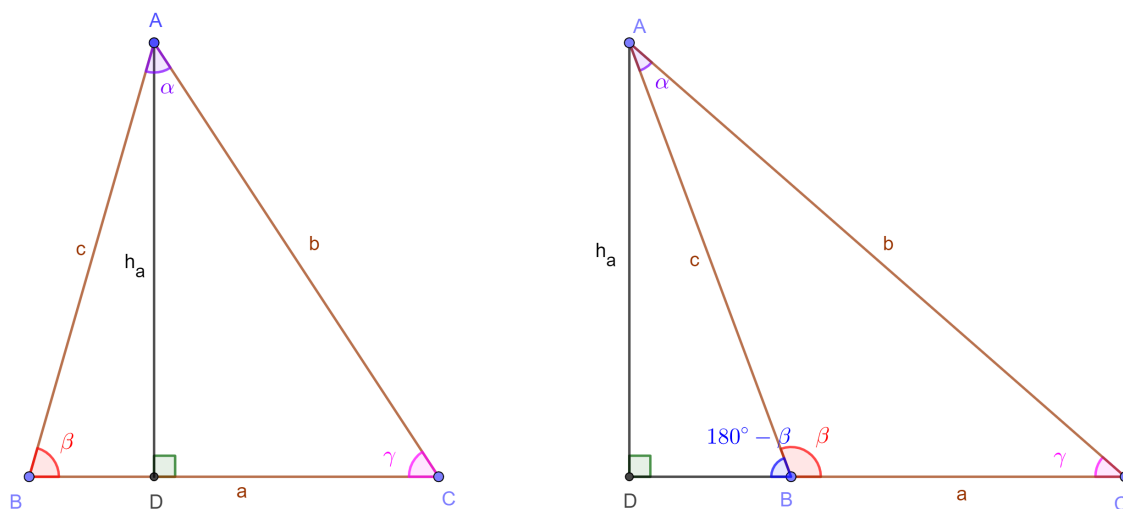
□

2.2 Área com dois lados e o ângulo que eles determinam

Proposição 3. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ e $\angle C = \gamma$. Então vale:*

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}c \cdot a \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin(\alpha). \quad (2.2.1)$$

Figura 2.3: Área de um triângulo com dois lados e o ângulo que eles determinam. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja o ponto D pé da altura do vértice A . Serão considerados dois casos: i) O ponto D está no interior do segmento BC (esquerda da Figura 2.3) e ii) O ponto D está no exterior do segmento BC (direita da Figura 2.3).

i) O ponto D está no interior do segmento BC (esquerda da Figura 2.3). No $\triangle ADB$ vale que:

$$h_a = c \cdot \text{sen}(\beta).$$

Pela Proposição 1 tem-se:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot h_a.$$

Segue que:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \text{sen}(\beta).$$

ii) O ponto D está no exterior do segmento BC (direita da Figura 2.3). Suponha-se, sem perda de generalidade, que D esteja a esquerda do ponto B . No $\triangle ADB$ vale que:

$$h_a = c \cdot \text{sen}(180^\circ - \beta) = c \cdot \text{sen}(\beta).$$

Pela Proposição 1 tem-se:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot h_a$$

Segue que:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \text{sen}(\beta).$$

Analogamente demonstra-se a fórmula utilizando os outros pares de lados e ângulos correspondentes. $\square$

A equação (2.2.1) também pode ser vista como um invariante, quando escrita como:

$$c \cdot a \cdot \sin(\beta) = a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = b \cdot c \cdot \sin(\alpha). \quad (2.2.2)$$

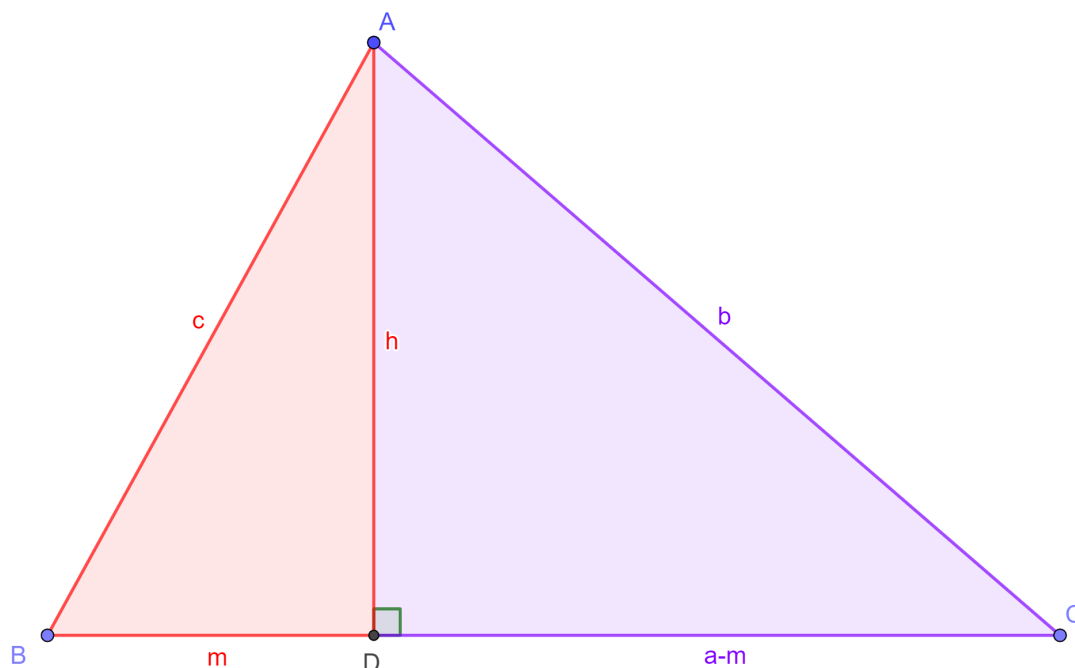
2.3 Fórmula de Heron

Heron de Alexandria foi um importante geômetra e pesquisador em mecânica que inventou muitas máquinas, incluindo uma turbina a vapor. Seu trabalho matemático mais conhecido é a fórmula para a área de um triângulo em termos dos comprimentos de seus lados. Nasceu aproximadamente no ano 10 d.C. e morreu no ano 75 d.C. [42].

Proposição 4. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e p o semiperímetro. Então vale que:*

$$[\triangle ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Figura 2.4: Área de um triângulo utilizando a fórmula de Heron. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Sejam o ponto D e o segmento $BD = m$ as projeções ortogonais do ponto A e do lado AB sobre BC , respectivamente (Figura 2.4). Aplicando o Teorema de Pitágoras nos $\triangle ADB$ e $\triangle ADC$ encontra-se:

$$h^2 = c^2 - m^2, \quad (2.3.1)$$

$$h^2 = b^2 - (a - m)^2. \quad (2.3.2)$$

Igualando as equações (2.3.1) e (2.3.2) pode ser colocado m em evidência:

$$\begin{aligned} c^2 - m^2 &= b^2 - (a - m)^2, \\ c^2 - m^2 &= b^2 - a^2 + 2am - m^2, \\ m &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

A equação (2.3.3) é substituída em (2.3.1) e a expressão simplificada:

$$\begin{aligned} h^2 &= c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2, \\ 4a^2 h^2 &= 4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2. \end{aligned}$$

Utilizando as propriedades da diferença de quadrados e do binômio quadrado perfeito encontra-se:

$$\begin{aligned} 4a^2 h^2 &= (2ac + a^2 + c^2 - b^2) (2ac - a^2 - c^2 + b^2), \\ 4a^2 h^2 &= ((a + c)^2 - b^2) (b^2 - (a - c)^2), \\ 4a^2 h^2 &= (a + c + b) (a + c - b) (b - a + c) (b + a - c). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Cada um dos parêntesis no lado direito de (2.3.4) pode ser escrito em função do semiperímetro p :

$$\begin{aligned} 4a^2 h^2 &= 2p \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - c), \\ \frac{a^2 h^2}{4} &= p(p - b)(p - a)(p - c), \\ [\triangle ABC] &= \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \end{aligned}$$

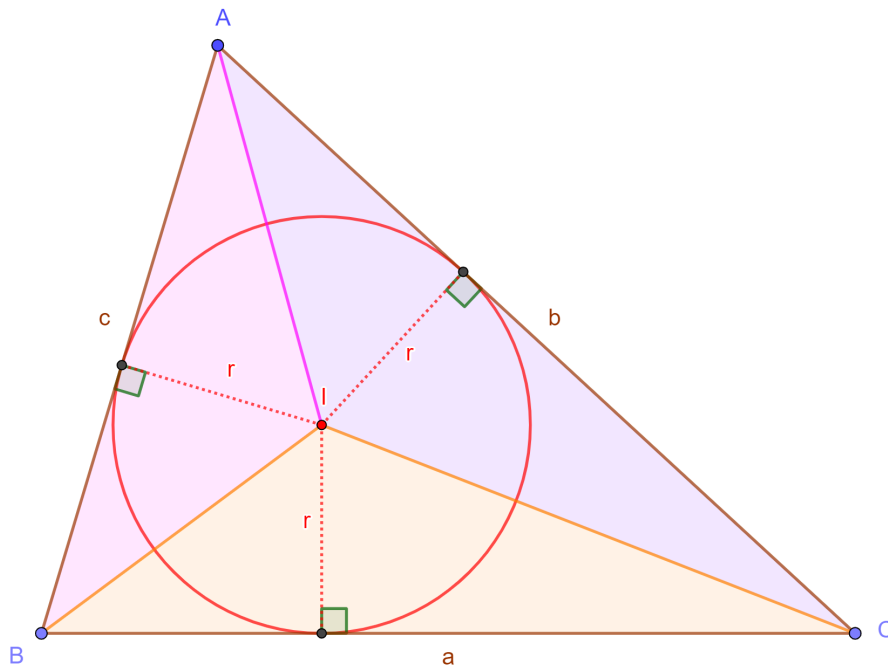
□

2.4 Área de um triângulo utilizando o incírculo

Proposição 5. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e r o raio da circunferência inscrita neste (Figura 2.5). Então vale que:*

$$[\triangle ABC] = p \cdot r.$$

Figura 2.5: Área de um triângulo utilizando o incírculo. Demonstração 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seguem duas demonstrações da Proposição 5.

Demonstração 1. Nota-se na Figura 2.5 que a área do $\triangle ABC$ pode ser calculada como a soma das áreas de outros três triângulos que utilizam, como um dos seus vértices, o incentro I :

$$[\triangle ABC] = [\triangle BCI] + [\triangle CAI] + [\triangle ABI],$$

$$[\triangle ABC] = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2},$$

$$[\triangle ABC] = \left(\frac{a + b + c}{2} \right) \cdot r,$$

$$[\triangle ABC] = p \cdot r.$$

□

Demonstração 2. Na Figura 2.6 sejam D , E e F as projeções ortogonais do incentro I nos lados AB , BC e CA , respectivamente. Como AI , BI e CI são bissetrizes, pelo critério de congruência ALA, obtêm-se:

$$\triangle ADI \equiv \triangle AFI,$$

$$\triangle BDI \equiv \triangle BEI,$$

$$\triangle CEI \equiv \triangle CFI.$$

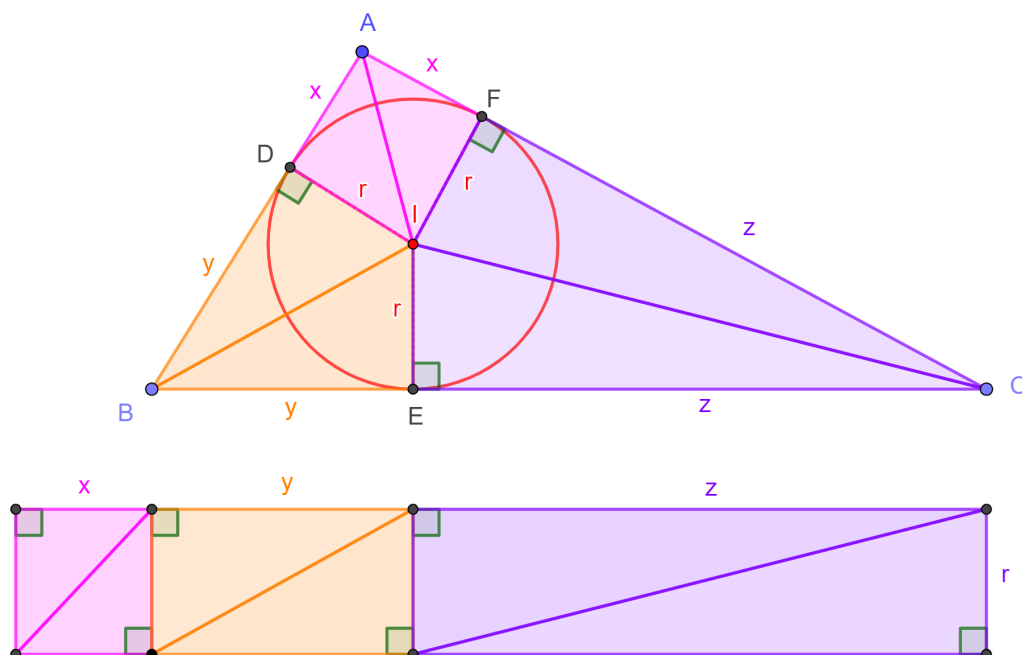
Isto permite definir $AD = AF = x$, $BD = BE = y$ e $CE = CF = z$. Nota-se que $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ e $p = x + y + z$. A área do $\triangle ABC$ pode ser calculada como a soma das áreas de outros três retângulos de altura r e comprimentos x , y e z :

$$[\triangle ABC] = x \cdot r + y \cdot r + z \cdot r = (x + y + z)r,$$

$$[\triangle ABC] = p \cdot r.$$

□

Figura 2.6: Área de um triângulo utilizando o incírculo. Demonstração 2. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

2.5 Raio do incírculo partindo das fórmulas de área

Proposição 6. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e r o raio da circunferência inscrita neste. Então vale que:*

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{a+b+c}}.$$

Demonstração. Pela Proposição (5) e Proposição (4) vale que:

$$[\triangle ABC] = p \cdot r,$$

$$[\triangle ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Igualando as duas equações anteriores encontra-se:

$$p \cdot r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{a+b+c}}.$$

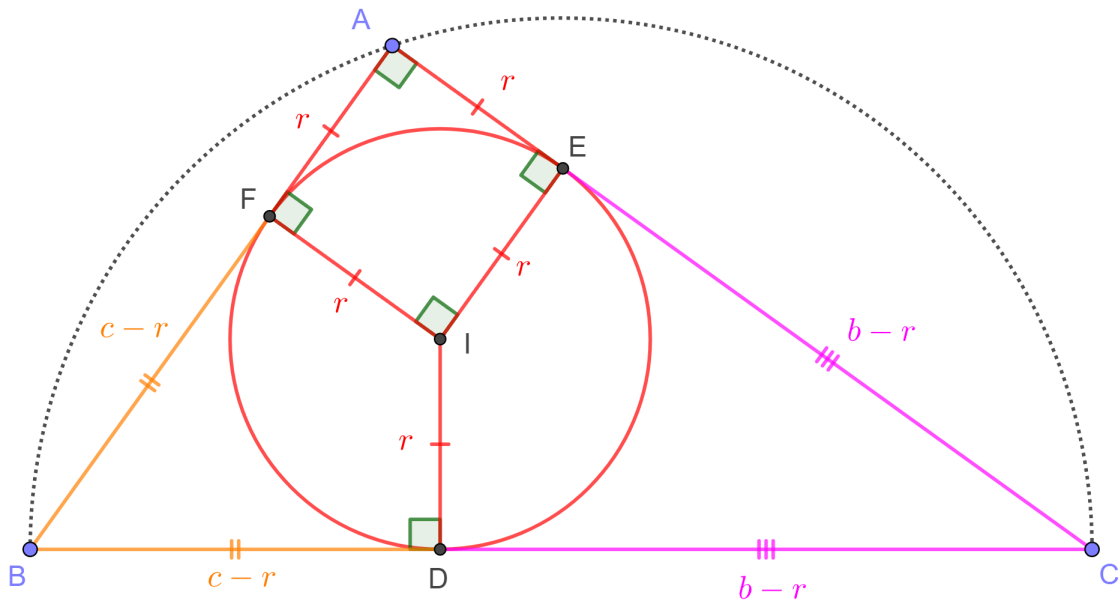
□

2.6 Raio do incírculo no triângulo retângulo

Proposição 7. *Seja o $\triangle ABC$, retângulo em A , de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e r o raio da circunferência inscrita neste (Figura 2.7). Então vale que:*

$$r = \frac{b+c-a}{2}.$$

Figura 2.7: Raio do incírculo no triângulo retângulo. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Sejam D , E e F os pontos de tangência do incírculo, de centro I , com os lados BC , CA e AB , respectivamente (Figura 2.7). Pode ser escrito que:

$$AF = AE = IF = IE = ID = r,$$

$$BD = BF = c - r,$$

$$DC = CE = b - r.$$

Como $a = BD + DC$, então segue:

$$a = c - r + b - r = b + c - 2r,$$

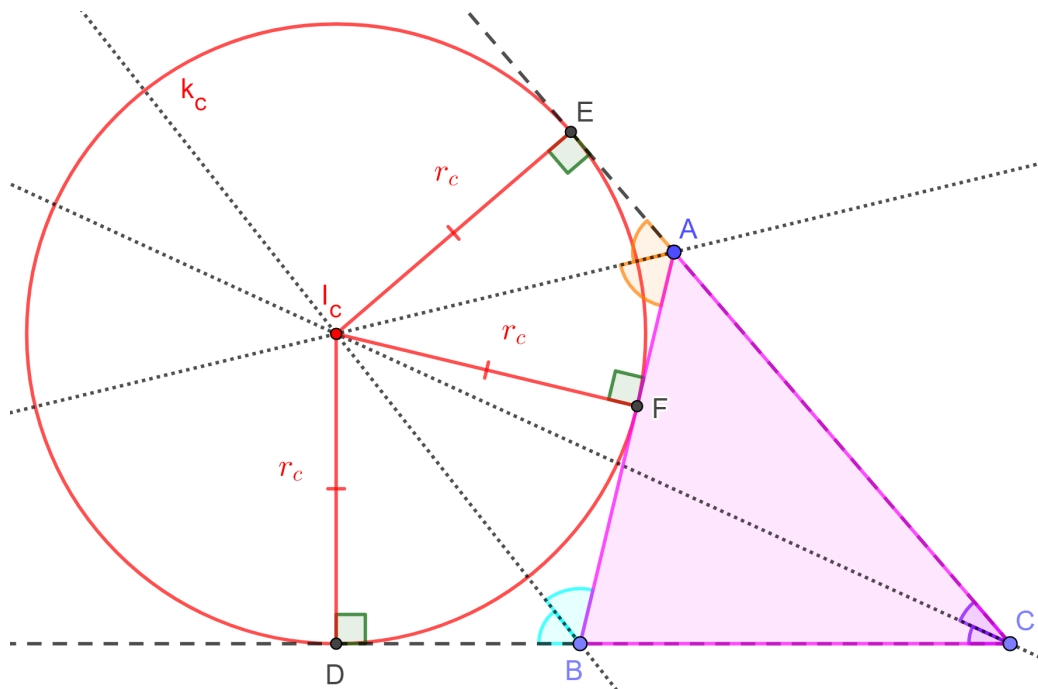
$$r = \frac{b + c - a}{2}.$$

□

2.7 Área de um triângulo utilizando o ex-incírculo

A Figura 2.8 mostra um $\triangle ABC$ e a circunferência k_c , ex-inscrita relativa ao vértice C . I_c é chamado ex-incentro. O raio r_c de k_c , com centro em I_c , é tangente aos lados do $\triangle ABC$ e chamado ex-inraio. Analogamente são definidos I_a , k_a e r_a e I_b , k_b e r_b .

Figura 2.8: Circunferência k_c , ex-inscrita do $\triangle ABC$, relativa ao vértice C . Versão interativa [aqui](#).



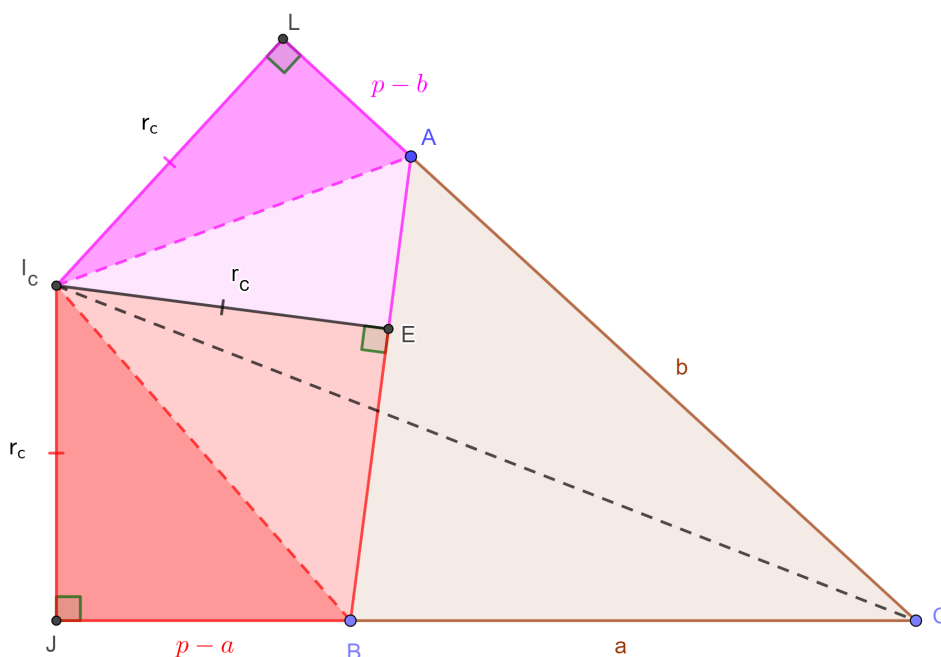
Fonte: O autor.

Proposição 8. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e r_c o raio da circunferência*

ex-inscrita relativa ao vértice C (Figura 2.9). Então vale:

$$[\Delta ABC] = r_c(p - c).$$

Figura 2.9: Área de um triângulo utilizando o ex-incírculo. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Primeiro, nota-se que $[\Delta I_c AL] = [\Delta I_c AE]$ e $[\Delta I_c BE] = [\Delta I_c BJ]$. Segue que:

$$[ALI_cJB] = 2[\Delta AI_cB] = r_c \cdot c.$$

Segundo, a área do $\triangle ABC$ pode ser escrita como:

$$[\Delta ABC] = [\Delta I_c C J] + [\Delta I_c C L] - [A L I_c J B],$$

$$[\triangle ABC] = 2 \frac{r_c \cdot p}{2} - r_c \cdot c,$$

$$[\Delta ABC] = r_c(p - c).$$

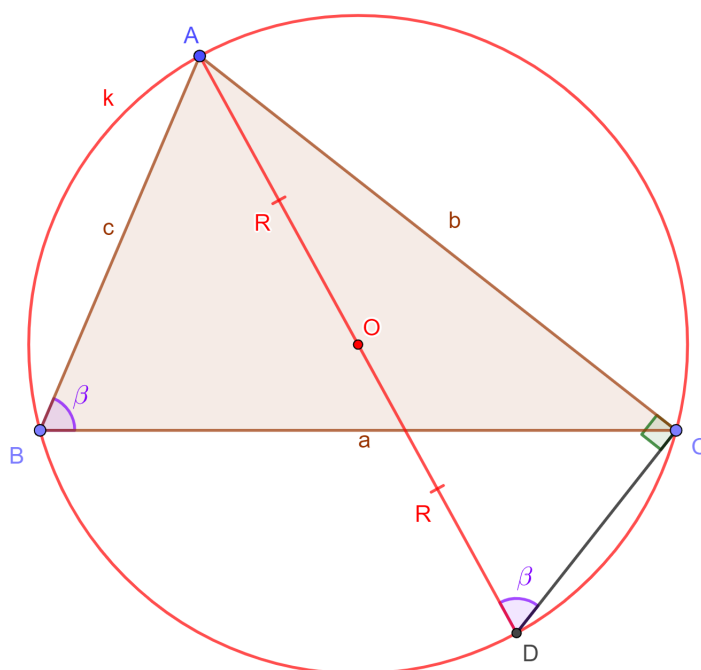
9

2.8 Área de um triângulo utilizando o circuncírculo

Proposição 9. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e R o raio da circunferência circunscrita k (Figura 2.10). Então vale que:*

$$[\triangle ABC] = \frac{abc}{4R}.$$

Figura 2.10: Área de um triângulo utilizando o circuncírculo. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja $\angle B = \beta$. Sabe-se pela Proposição 3 que:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta). \quad (2.8.1)$$

Estende-se a semirreta AO e marca-se o ponto D na interseção desta com k . Por enxergar o mesmo arco de circunferência vale que:

$$\angle ABC = \angle ADC = \beta.$$

Como o segmento AD é diâmetro de k o $\triangle ADC$ é retângulo no vértice C . Segue que:

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{b}{2R}. \quad (2.8.2)$$

Substituindo (2.8.2) em (2.8.1) encontra-se:

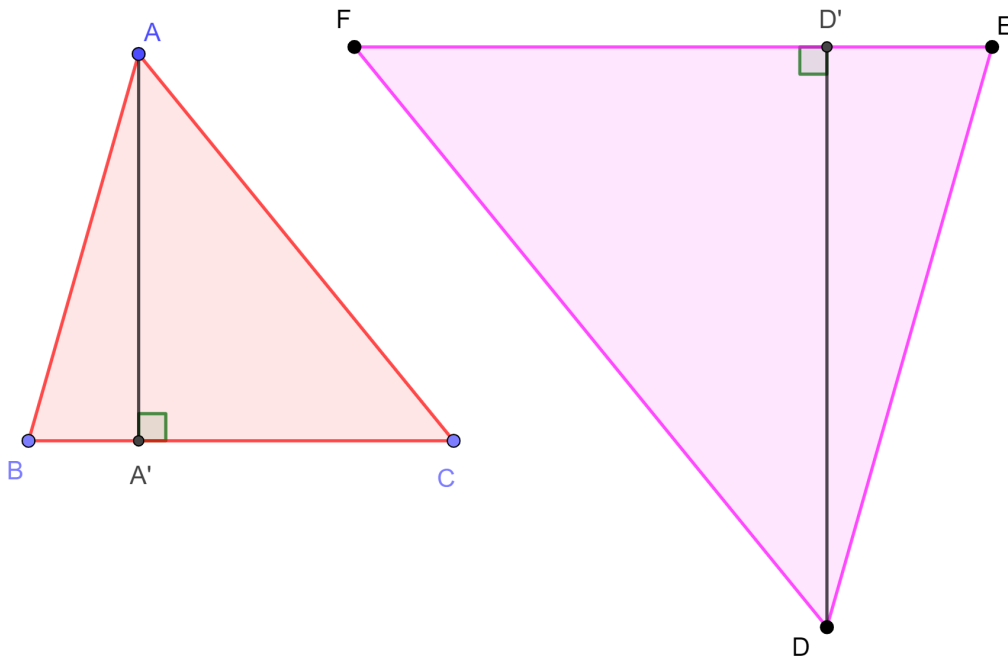
$$[\triangle ABC] = \frac{abc}{4R}.$$

□

2.9 Relação entre as áreas de triângulos semelhantes

Proposição 10. *Se dois triângulos são semelhantes com razão de semelhança k , então a razão das áreas é k^2 .*

Figura 2.11: Relação entre as áreas de triângulos semelhantes. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Por hipótese $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (Figura 2.11). Sejam os pontos A' e D' as projeções ortogonais dos pontos A e D sobre os lados BC e EF , respectivamente. Suponha-se, sem perda de generalidade, que:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AA'}{DD'} = k.$$

Segue que:

$$\frac{[\triangle ABC]}{[\triangle DEF]} = \frac{\frac{BC \cdot AA'}{2}}{\frac{EF \cdot DD'}{2}} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AA'}{DD'} = k^2.$$

□

O resultado anterior vale para figuras (não somente triângulos) semelhantes em geral.

2.10 Áreas para calcular razão de segmentos

Proposição 11. *Seja ABC um triângulo, P um ponto no interior deste e D , E e F os pontos de interseção das semirretas AP , BP e CP com os lados BC , CA e AB , respectivamente. Define-se $K_A = [PBC]$, $K_B = [PCA]$ e $K_C = [PAB]$. Então*

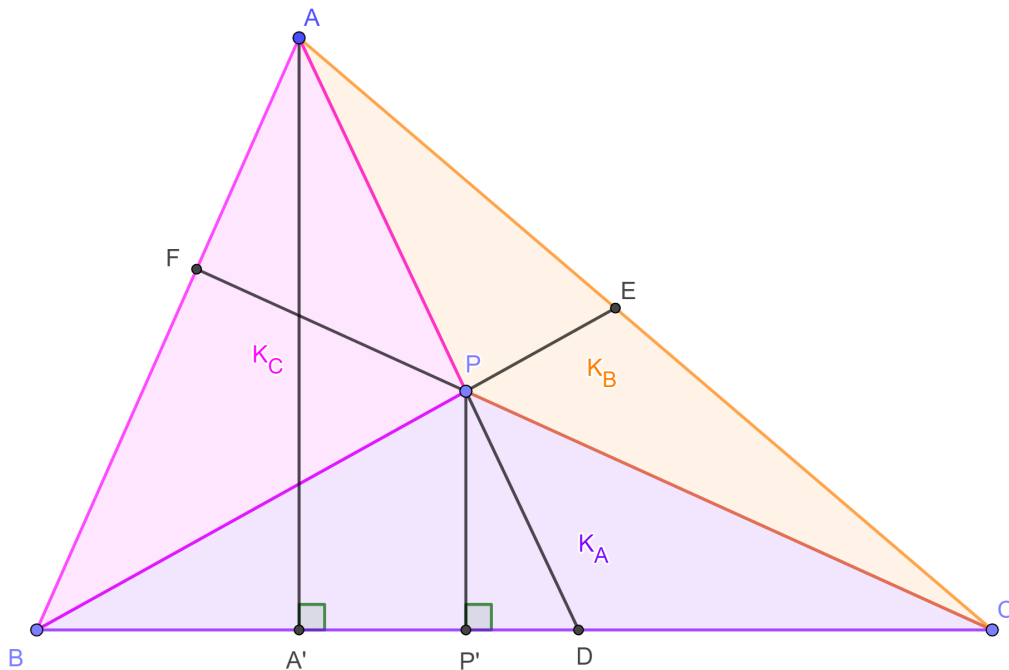
1.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{K_C}{K_B}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{K_A}{K_C}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{K_B}{K_A}.$$

2.

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}, \quad \frac{BP}{PE} = \frac{K_A + K_C}{K_B}, \quad \frac{CP}{PF} = \frac{K_A + K_B}{K_C}.$$

Figura 2.12: Áreas para calcular razão de segmentos. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Sejam A' e P' as projeções ortogonais dos pontos A e P sobre a reta BC (Figura 2.12).

1. Como os triângulos ABD e ACD têm a mesma altura AA' pode ser escrito:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[ABD]}{[ACD]}. \quad (2.10.1)$$

Analogamente, como os triângulos PBD e PCD têm a mesma altura PP' tem-se:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[PBD]}{[PCD]}. \quad (2.10.2)$$

Combinando as razões em (2.10.1) e (2.10.2) encontra-se:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[ABD] - [PBD]}{[ACD] - [PCD]} = \frac{K_C}{K_B}.$$

Similarmente demonstram-se as outras duas frações.

2. Pelo critério de semelhança AA vale que $\triangle ADA' \sim \triangle PDP'$. Segue que:

$$\frac{AP}{PD} + 1 = \frac{AP + PD}{PD} = \frac{AD}{PD} = \frac{AA'}{PP'}. \quad (2.10.3)$$

Por definição vale que $[ABC] = K_A + K_B + K_C$. Como os triângulos ABC e PBC têm a mesma base pode ser escrito:

$$\frac{AA'}{PP'} = \frac{[ABC]}{[PBC]} = \frac{K_A + K_B + K_C}{K_A} = 1 + \frac{K_B + K_C}{K_A}. \quad (2.10.4)$$

Substituindo (2.10.4) em (2.10.3) e simplificando encontra-se:

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}.$$

Da mesma maneira demonstram-se as outras duas frações.

□

2.11 Áreas determinadas pelo Baricentro

Utiliza-se a notação $S(P)$ para referir-se a área do polígono P . A Figura 2.13 permite acompanhar os detalhes da Proposição 12.

Proposição 12. *O Baricentro G do $\triangle ABC$ determina com os vértices e pontos médios M_{AB} , M_{BC} e M_{CA} dos lados AB , BC e CA , respectivamente, seis triângulos de igual área. Isto é,*

$$\begin{aligned} S(AGM_{AB}) &= S(BGM_{AB}) = S(BGM_{BC}) = S(CGM_{BC}) \\ &= S(CGM_{CA}) = S(AGM_{CA}) = \frac{S(ABC)}{6}. \end{aligned} \quad (2.11.1)$$

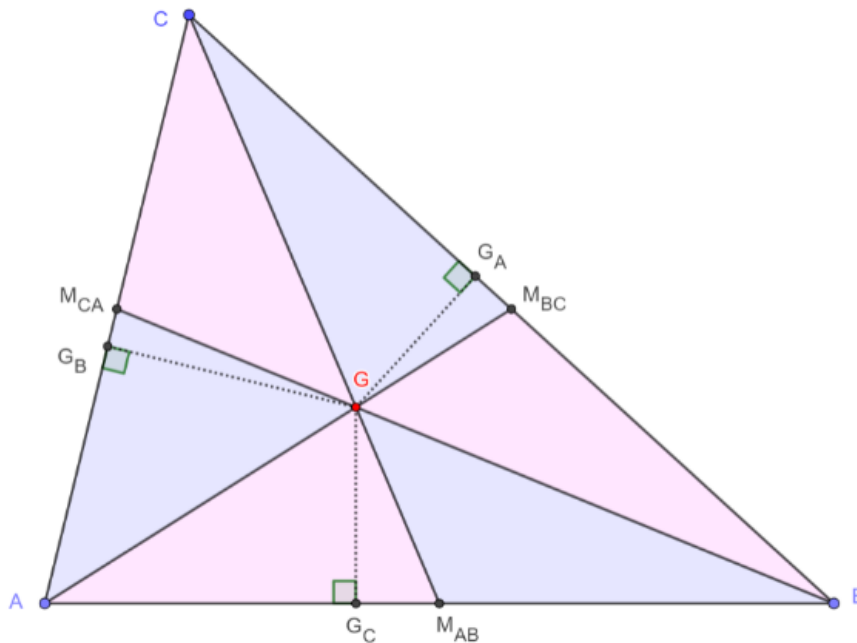
Os triângulos AGB , BGC e CGA têm a mesma área. Ou seja,

$$S(AGB) = S(BGC) = S(CGA) = \frac{S(ABC)}{3}.$$

Os triângulos ACM_{AB} , BCM_{AB} , BAM_{BC} , CAM_{BC} , CBM_{CA} e ABM_{CA} têm a mesma área. Isto é,

$$\begin{aligned} S(ACM_{AB}) &= S(BCM_{AB}) = S(BAM_{BC}) = S(CAM_{BC}) \\ &= S(CBM_{CA}) = S(ABM_{CA}) = \frac{S(ABC)}{2}. \end{aligned} \quad (2.11.2)$$

Figura 2.13: Igualdade de áreas envolvendo o Baricentro. Guia para a demonstração da Proposição 12. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Sejam G_C , G_A e G_B os pés das alturas do ponto G sobre os lados AB , BC e CA , respectivamente. Como GG_C é altura comum aos triângulos AGM_{AB} e BGM_{AB} e

$AM_{AB} = M_{AB}B$ tem-se:

$$S(AGM_{AB}) = S(BGM_{AB}).$$

Adicionalmente, os triângulos ACM_{AB} e BCM_{AB} têm a mesma altura e base de igual medida. Logo,

$$S(ACM_{AB}) = S(BCM_{AB}).$$

Os dois resultados anteriores permitem afirmar que:

$$S(ACG) = S(BCG).$$

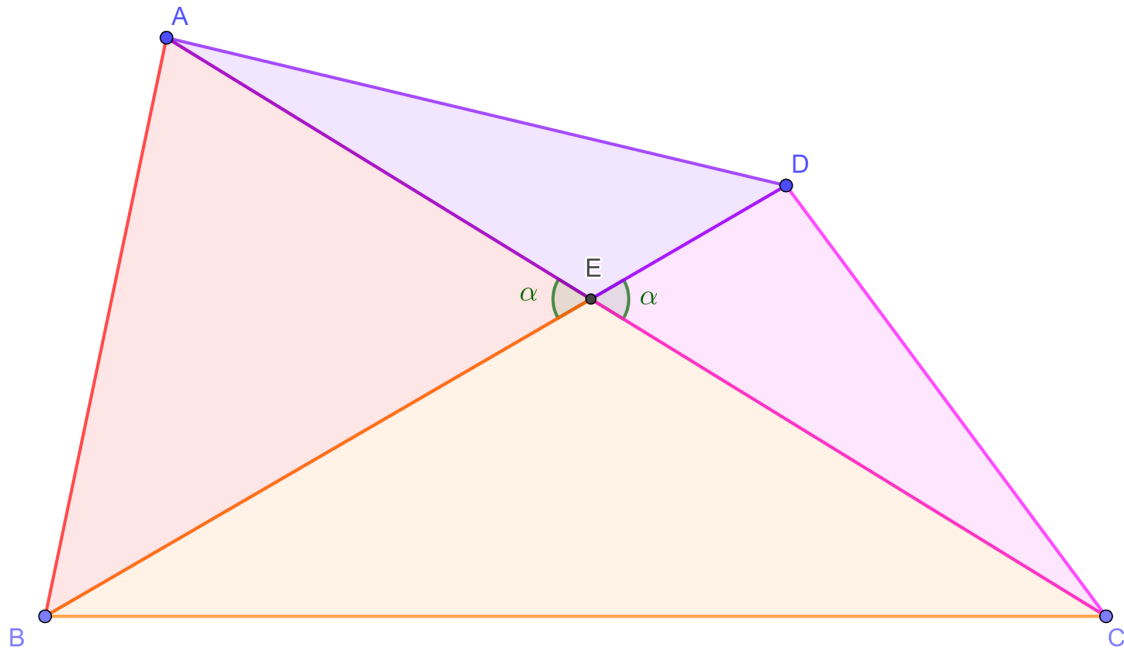
O resto das igualdades é provada do mesmo modo. □

2.12 Área de quadrilátero convexo arbitrário

Proposição 13. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo arbitrário e α o ângulo entre as diagonais AC e BD (Figura 2.14). Então,*

$$[ABCD] = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin(\alpha)}{2}.$$

Figura 2.14: Área de quadrilátero convexo arbitrário. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja o ponto E a interseção entre as diagonais AC e BD (Figura 2.14). A área do quadrilátero pode ser calculada como a soma das áreas de quatro triângulos:

$$[ABCD] = [AEB] + [BEC] + [CED] + [DEA],$$

$$[ABCD] = \frac{AE \cdot EB \sin(\alpha)}{2} + \frac{BE \cdot EC \sin(180^\circ - \alpha)}{2} + \frac{CE \cdot ED \sin(\alpha)}{2} + \frac{DE \cdot EA \sin(180^\circ - \alpha)}{2}.$$

Como $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$ a equação anterior simplifica-se:

$$[ABCD] = (AE \cdot EB + BE \cdot EC + CE \cdot ED + DE \cdot EA) \frac{\sin(\alpha)}{2}.$$

Lembrando-se que $AE = EA$, $BE = EB$, $CE = EC$ e $DE = ED$ segue:

$$[ABCD] = (AE(EB + DE) + EC(BE + ED)) \frac{\sin(\alpha)}{2},$$

$$[ABCD] = (AE + EC)(BE + ED) \frac{\sin(\alpha)}{2},$$

$$[ABCD] = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin(\alpha)}{2}.$$

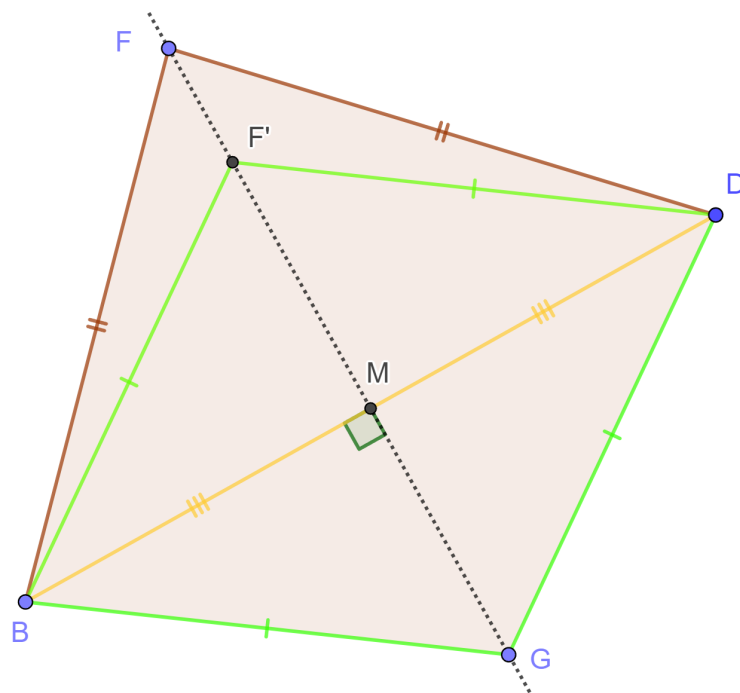
□

Em particular, para Pipas e Losangos (Figura 2.15) vale $\alpha = 90^\circ$ e:

$$[BGDF] = \frac{FG \cdot BD}{2},$$

$$[BGDF'] = \frac{F'G \cdot BD}{2}.$$

Figura 2.15: Área de Pipas e Losangos. Versão interativa [aqui](#).



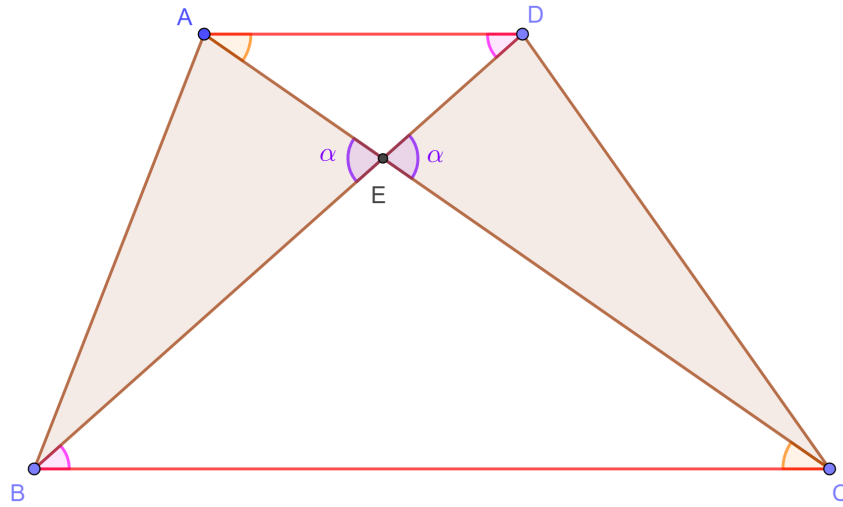
Fonte: O autor.

2.13 Igualdade de áreas num trapézio

Proposição 14. *Seja $ABCD$ um trapézio com $BC \parallel DA$ e o ponto $E = AC \cap BD$ (Figura 2.16). Então vale a igualdade das áreas:*

$$[\triangle AEB] = [\triangle CED].$$

Figura 2.16: Igualdade de áreas num trapézio. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Tem-se $BC \parallel DA$. Por serem ângulos alternos entre paralelas vale:

$$\angle EAD = \angle ECB,$$

$$\angle ADE = \angle CBE.$$

Pelo critério de semelhança AA encontra-se:

$$\triangle EAD \sim \triangle ECB.$$

Portanto, os lados respectivos são proporcionais e:

$$\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB},$$

$$EA \cdot EB = EC \cdot ED.$$

Por opostos pelo vértice $\angle AEB = \angle CED = \alpha$. Juntando os dois resultados anteriores segue:

$$\frac{EA \cdot EB}{2} \text{sen}(\alpha) = \frac{EC \cdot ED}{2} \text{sen}(\alpha),$$

$$[\triangle AEB] = [\triangle CED].$$

□

Capítulo 3

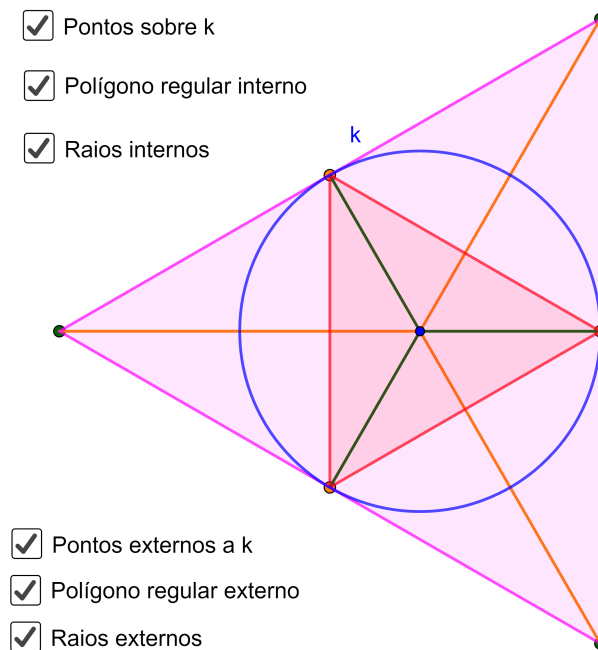
Construções, exercícios e desafios

3.1 Desafio: cálculo de π pelo método da exaustão.

O número π sempre inspirou uma certa estranheza. Resulta difícil para o professor explicar com detalhes como se calcula e para o estudante entender como aparece.

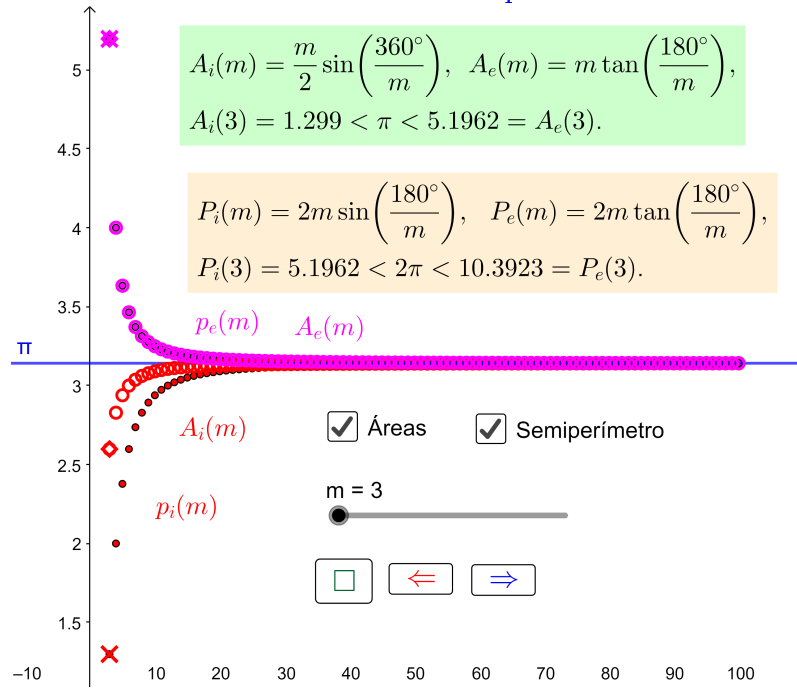
O desafio é fazer uma construção análoga a Figura 3.1 e a Figura 3.2. Isto é, partindo de uma circunferência k de raio um (unitário ou trigonométrica) construir sequências de polígonos regulares inscritos (dentro) e circunscritos (fora). Encontrar as sequências das áreas e dos perímetros dos polígonos. Mostrar com um gráfico que estas convergem para o número π .

Figura 3.1: Cálculo de π . Sequências de polígonos regulares inscritos e circunscritos. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Figura 3.2: Cálculo de π . Gráfico das áreas e os semiperímetros das sequências de polígonos regulares inscritos e circunscritos. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Parte do conteúdo desta seção está disponível em vídeo-aula do autor de [2021](#) e [2022](#).

3.2 Solução do desafio do cálculo de π .

A Figura 3.3 mostra uma circunferência k de centro O e raio r . A área de um setor circular OAB com $\angle AOB = \theta$ é:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\theta r^2.$$

O comprimento do arco $\widehat{AB}$ é:

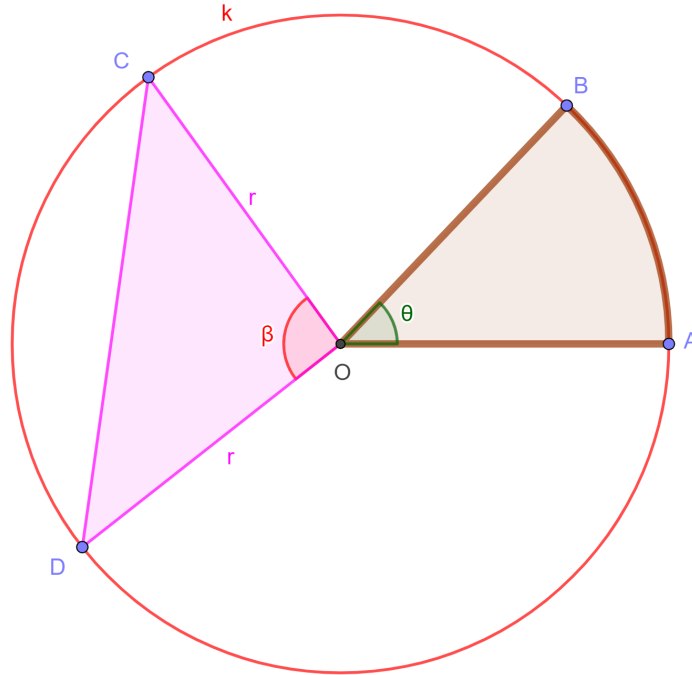
$$l_{\widehat{AB}} = \theta r.$$

No caso particular em que $\theta = 2\pi$ (uma volta completa) recuperam-se as fórmulas conhecidas:

$$S_k = \pi r^2,$$

$$l_k = P_k = 2\pi r.$$

Figura 3.3: Áreas e comprimentos numa circunferência. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam os pontos $C, D \in k$ tais que $\angle COD = \beta$. A área do $\triangle CDO$ calcula-se como:

$$S_{\triangle CDO} = \frac{1}{2}r^2 \sin(\beta). \quad (3.2.1)$$

Para o cálculo do comprimento da corda CD utiliza-se inicialmente a Lei dos Cossenos no $\triangle CDO$:

$$\begin{aligned} l_{CD}^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(\beta), \\ l_{CD}^2 &= 2r^2(1 - \cos(\beta)). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Pela identidade trigonométrica do cosseno do ângulo duplo e fundamental vale:

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right), \\ \cos(\beta) &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right), \\ 1 - \cos(\beta) &= 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Substituindo (3.2.3) em (3.2.2) e simplificando encontra-se:

$$l_{CD} = 2r \sin\left(\frac{\beta}{2}\right). \quad (3.2.4)$$

Para os polígonos regulares m -ésimos, inscrito e circunscrito, o ângulo central (definido pelos raios a dois vértices consecutivos) pode ser escrito como:

$$\beta = \frac{360^\circ}{m}. \quad (3.2.5)$$

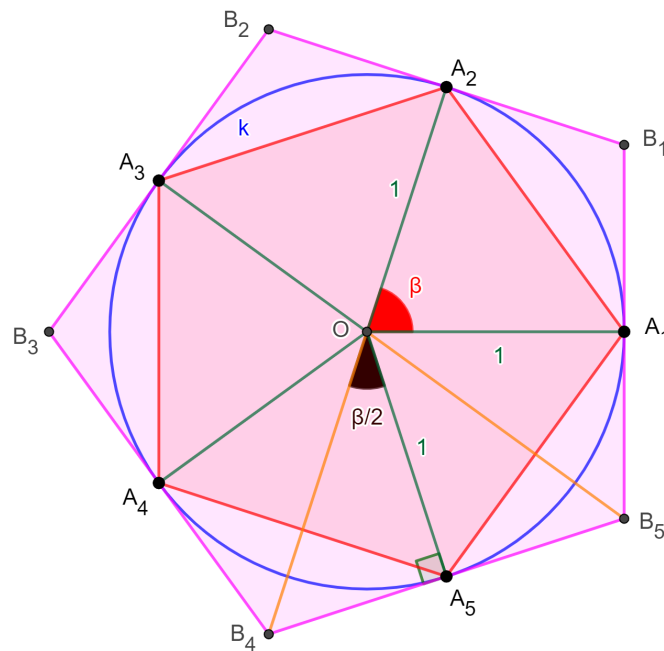
No caso do polígono regular inscrito (interno) o raio é $r_i = 1$. Substituindo (3.2.5) em (3.2.1) e (3.2.4) e multiplicando por m encontram-se a área e o perímetro:

$$A_i(m) = \frac{m}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{360^\circ}{m} \right). \quad (3.2.6)$$

$$P_i(m) = 2m \operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{m} \right). \quad (3.2.7)$$

A Figura 3.4 mostra o pentágono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência unitária k . Neste caso $m = 5$ e $\beta = 72^\circ = \angle A_1OA_2$.

Figura 3.4: Pentágono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência unitária k . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Como o polígono circunscrito é tangente a k vale $OA_5 \perp B_4B_5$ e $\angle B_4OA_5 = \frac{\beta}{2}$. De $OA_5 = r_i = 1$ segue que

$$B_4A_5 = A_5B_5 = \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right).$$

A área do pentágono $B_1B_2B_3B_4B_5$ é:

$$A_e(5) = 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}(36^\circ).$$

Conjetura-se que a área do polígono circunscrito (externo) m -ésimo é:

$$A_e(m) = m \operatorname{tg} \left(\frac{180^\circ}{m} \right). \quad (3.2.8)$$

Como

$$B_4B_5 = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right),$$

conjetura-se que o perímetro do polígono circunscrito m -ésimo será:

$$P_e(m) = 2m \operatorname{tg} \left(\frac{180^\circ}{m} \right). \quad (3.2.9)$$

Portanto, a área e o perímetro de uma circunferência de raio um podem ser delimitadas inferiormente e superiormente pelo uso das equações (3.2.6), (3.2.7), (3.2.8) e (3.2.9):

$$A_i(m) = \frac{m}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{360^\circ}{m} \right) < \pi < m \operatorname{tg} \left(\frac{180^\circ}{m} \right) = A_e(m),$$

$$P_i(m) = 2m \operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{m} \right) < 2\pi < 2m \operatorname{tg} \left(\frac{180^\circ}{m} \right) = P_e(m).$$

Nas desigualdades anteriores foi definida a área da circunferência unitária como π e o perímetro como 2π . Este procedimento, conhecido como método da exaustão, pode ser usado para estimar π . Quanto maior o valor de m mais precisa a estimativa.

Existem outras sequências que também permitem calcular o valor de π . Uma delas é pela utilização da [série de Maclaurin da função arco-tangente](#):

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right], \quad x \in (-1, 1].$$

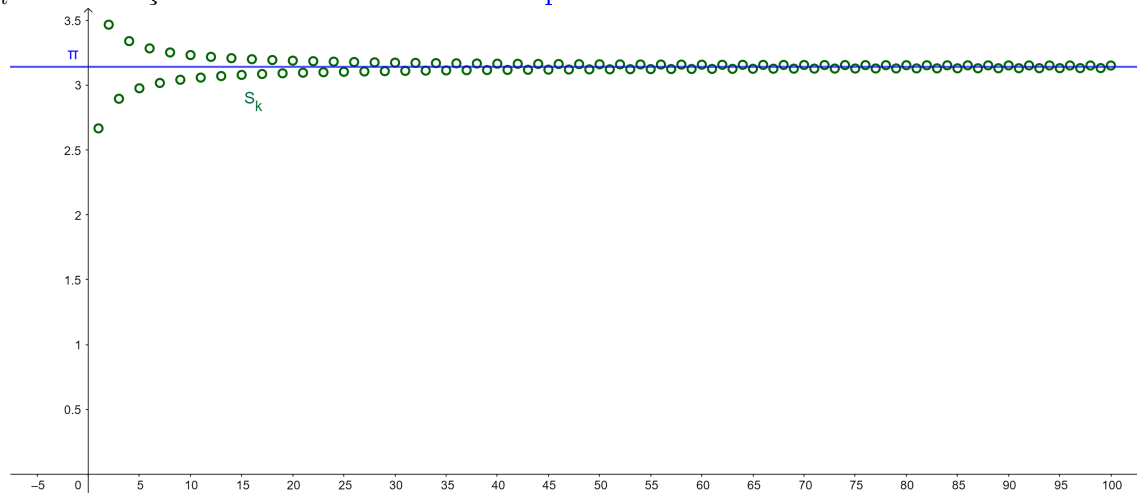
Como $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ estima-se:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2n+1} \right] = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

$$S_k = 4 \sum_{n=0}^k \left[\frac{(-1)^n}{2n+1} \right] \approx \pi.$$

A Figura 3.5 mostra um gráfico de S_k como função de k .

Figura 3.5: Estimativa de π utilizando a série de Maclaurin da função arco-tangente. Gráfico de S_k como função de k . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

3.3 Áreas, semelhança e triângulos equiláteros

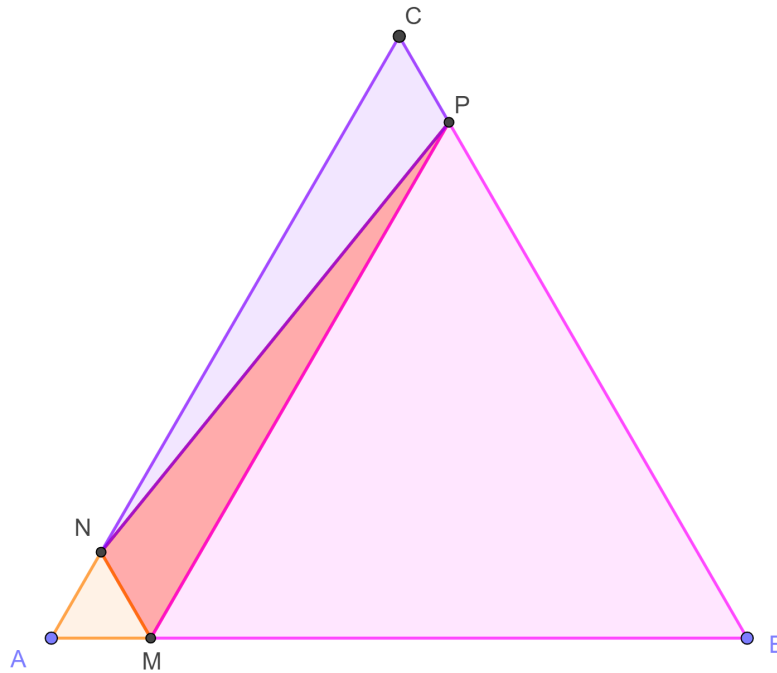
Exercício 1. *Sejam ABC um triângulo equilátero, N o ponto do lado AC tal que $AC = 7AN$, M o ponto do lado AB tal que MN é paralelo a BC e P o ponto do lado BC tal que MP é paralelo a AC . Determinar a razão das áreas:*

$$\frac{[MNP]}{[ABC]}.$$

3.3.1 Solução do Exercício 1

A Figura 3.6 mostra uma construção geométrica.

Figura 3.6: Áreas, semelhança e triângulos equiláteros. Exercício 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

O quadrilátero $CPMN$ é um paralelogramo, pois $MP \parallel AC$ e $MN \parallel BC$. Logo,

$$[MNP] = \frac{1}{2}[CPMN].$$

Como o $\triangle ABC$ é equilátero e $MN \parallel BC$, então $AN = AM = MN$. Segue que $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ e:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{1}{7}.$$

Pela Proposição 10 tem-se:

$$\frac{[AMN]}{[ABC]} = \left(\frac{1}{7}\right)^2.$$

Analogamente, como o $\triangle ABC$ é equilátero e $MP \parallel AC$, então $MB = BP = PM$. Segue que $\triangle MBP \sim \triangle ABC$ e:

$$\frac{MB}{AB} = \frac{6}{7}.$$

Pela Proposição 10 tem-se:

$$\frac{[MBP]}{[ABC]} = \left(\frac{6}{7}\right)^2.$$

Mas $2[MNP] = [ABC] - [AMN] - [MBP]$. Logo,

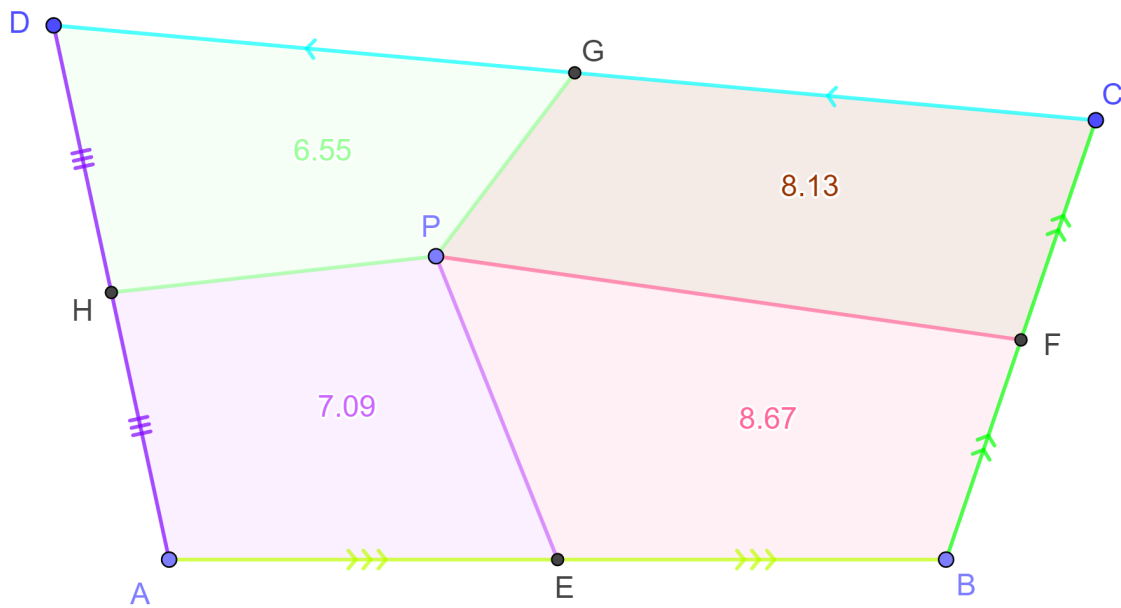
$$\frac{[MNP]}{[ABC]} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{49} - \frac{36}{49} \right) = \frac{6}{49}.$$

3.4 Áreas, paralelogramo e base média

Problema 1. *É dado um quadrilátero convexo $ABCD$. Sejam E, F, G e H os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA , respectivamente. Determine a posição de um ponto P de forma que os quadriláteros $PHAE, PEBF, PFCG$ e $PGDH$ tenham a mesma área.*

A Figura 3.7 mostra uma proposta de jogo online. É possível movimentar o ponto P para tentar encontrar a solução.

Figura 3.7: Jogo para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

3.4.1 Solução do Problema 1

Procura-se um ponto P no interior do quadrilátero convexo $ABCD$ tal que:

$$[PHAE] = [PEBF] = [PFCG] = [PGDH] = \frac{[ABCD]}{4}.$$

Como HE e FG são bases médias dos triângulos DAB e BCD , respectivamente, então

$$HE = FG = \frac{DB}{2}.$$
$$[AEH] = \frac{[ABD]}{4},$$

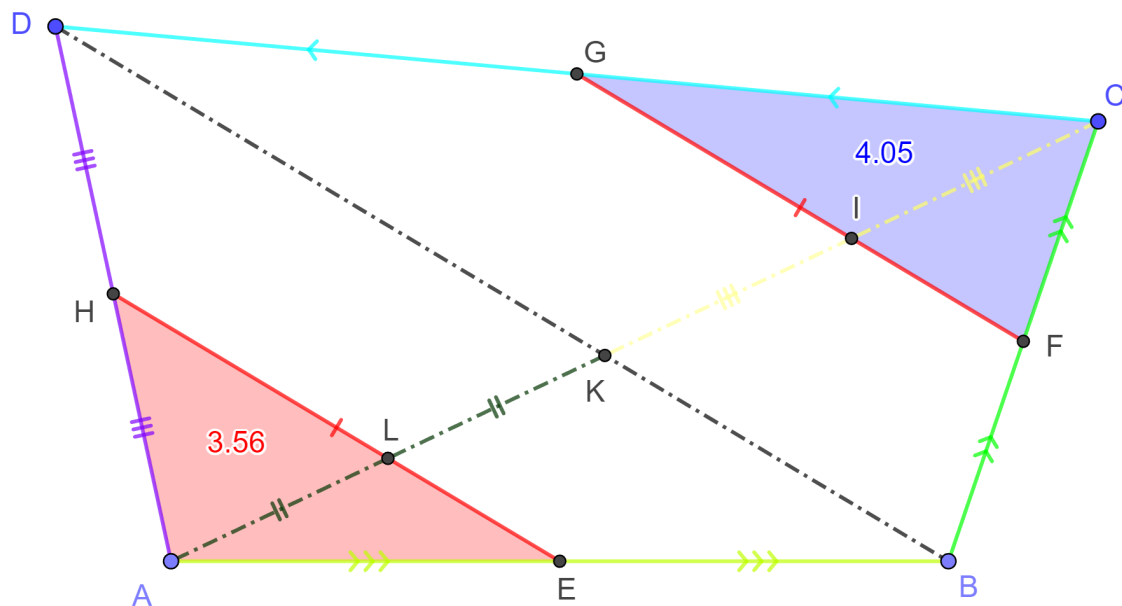
$$[FCG] = \frac{[BCD]}{4}.$$

$$[AEH] + [FCG] = \frac{[ABCD]}{4}.$$
$$[PFG] = [AEH],$$

$$[EPH] = [FCG].$$

Sejam os pontos I , K e L as interseções do segmento CA com FG , BD e EH , respectivamente. Pela semelhanças dos triângulos FCG com BCD e AEH com ABD vale que $CI = IK$ e $KL = LA$ (Figura 3.9).

Figura 3.9: Segunda construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



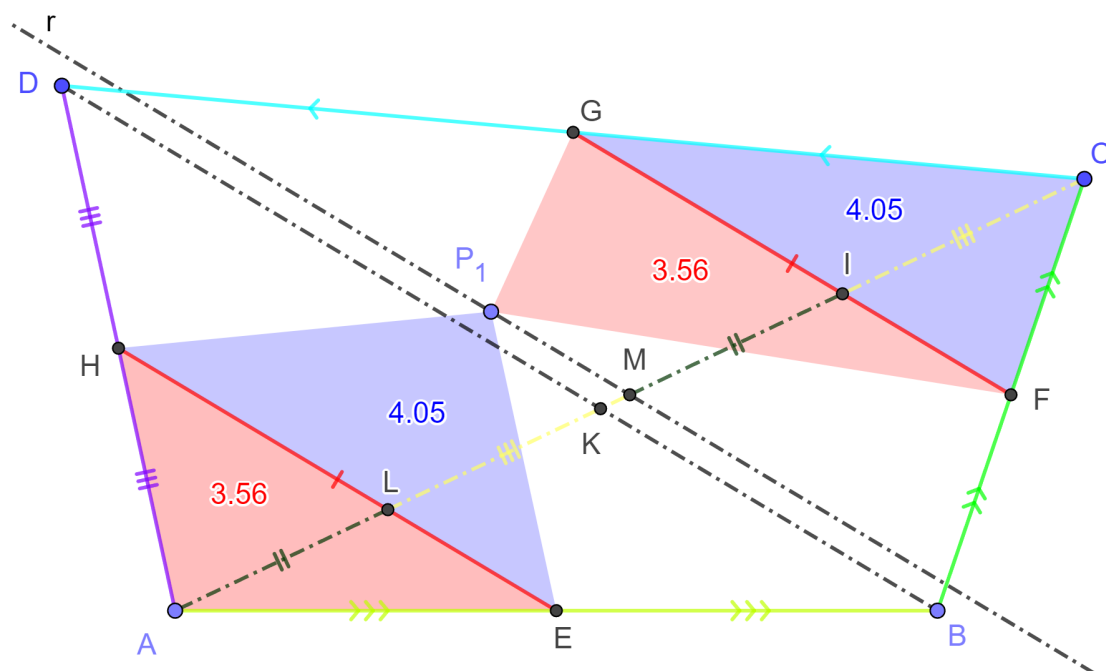
Fonte: O autor.

Considera-se o ponto $M \in AC$ tal que $LM = IC$ (Figura 3.10). Logo, $IM = LA$. Por M traça-se a reta $r \parallel BD$. Sendo bases e alturas iguais qualquer ponto $P_1 \in r$ satisfaz que:

$$[P_1FG] = [AEH],$$

$$[EP_1H] = [FCG].$$

Figura 3.10: Terceira construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Analogamente, sejam os pontos O , R e Q as interseções do segmento BD com HG , AC e EF , respectivamente. Pela semelhanças dos triângulos HDG com ADC e EBF com ABC vale que $DO = OR$ e $RQ = QB$.

Considera-se o ponto $S \in BD$ tal que $OS = QB$ (Figura 3.11). Logo, $DO = SQ$. Por S traça-se a reta $t \parallel AC$. Sendo bases e alturas iguais qualquer ponto $P_2 \in t$ satisfaz que:

$$[P_2GH] = [BFE],$$

$$[EP_2F] = [HDG].$$

3.5 Construção do arco capaz

Exercício 2. *Construir o Arco Capaz dado um segmento AB e um $\angle CDE = \alpha$. Isto é, encontrar os pontos do plano que são visto sob o mesmo ângulo α desde AB .*

Será construído a parte do Arco Capaz que fica acima da reta AB (Figura 3.13). A parte que fica abaixo é encontrada de maneira análoga.

1. Transportar para o vértice A e o semiplano inferior determinado pela reta AB o ângulo α . Um dos lados do mesmo é denotado pela semirreta i .
2. Construir a mediatriz m dos pontos A e B . Denotar por M o ponto médio entre A e B . Marcar $L = m \cap i$.
3. Passando por A construir uma perpendicular à semirreta AL . Marcar a o ponto O , interseção desta com m . Como $\angle LAO = \angle AML = \angle OMA = 90^\circ$, segue que:

$$\angle LAM = \angle AOM = \alpha.$$

4. Construir o arco c , maior de AB , com centro em O e raio OA . Como O está na mediatriz de AB tem-se que $OA = OB$, o $\triangle AOB$ é isósceles e $\angle AOM = \angle BOM = \alpha$. De LA ser tangente a c em A o ângulo LAB é chamado de segmento e $\angle LAB = \frac{1}{2}\angle AOB$. O $\angle AOB$ define-se como central. Em palavras, o ângulo de segmento mede a metade do central correspondente.
5. Qualquer ponto X ou Y no arco c , maior da corda AB (Arco Capaz), é visto com o mesmo ângulo. Vale que $\angle AXB = \angle AYB = \alpha$ e estes são chamados de ângulos inscritos. Em palavras, os ângulos inscritos medem a metade do central correspondente (Figura 3.13).

rativa aqui.



Capítulo 4

Problemas de olimpíadas internacionais

4.1 Áreas. Desigualdades. Lei dos Cossenos. P2 IMO 1961.

Problema 2. *Sejam a , b e c os comprimentos dos lados de um triângulo ABC cuja área é S . Provar que:*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}. \quad (4.1.1)$$

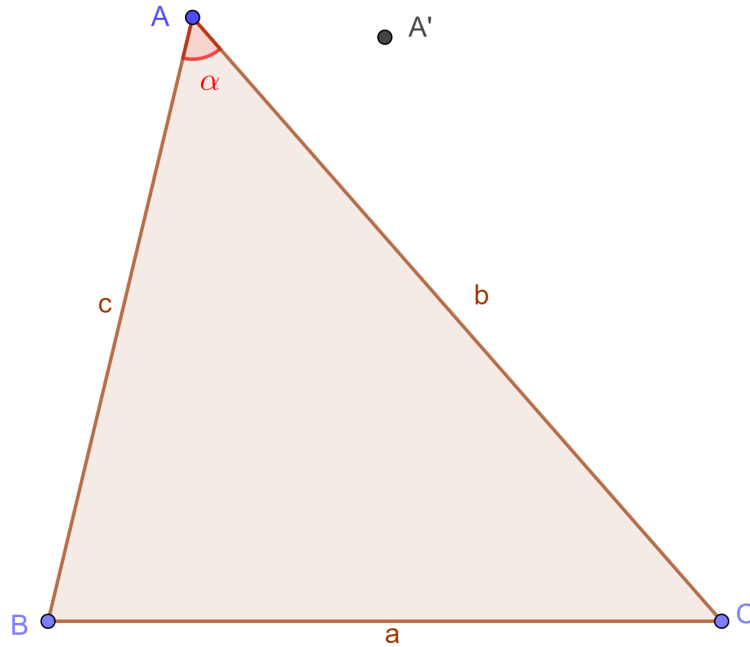
Em que caso a igualdade é válida?

A IMO 1961 foi realizada na cidade de Budapeste, Capital da Hungria. Esse é o Problema 3 do primeiro dia da competição e foi proposto pela delegação da Polônia [2].

4.1.1 Resolução do Problema 2.

A Figura 4.1 mostra uma construção geométrica.

Figura 4.1: Construção geométrica para o Problema 2. Quando $A = A'$ o $\triangle ABC$ é equilátero. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam $BC = a > 0$, $CA = b > 0$ e $AB = c > 0$ os comprimentos dos lados do $\triangle ABC$ e $\angle CAB = \alpha$. A área pode ser calculada como:

$$S = \frac{bc \operatorname{sen}(\alpha)}{2}. \quad (4.1.2)$$

Substituindo (4.1.2) em (4.1.1) encontra-se:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq 4 \frac{bc \operatorname{sen}(\alpha)}{2} \sqrt{3}, \\ a^2 + b^2 + c^2 &\geq 2\sqrt{3}bc \operatorname{sen}(\alpha). \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Pela Lei dos Cossenos pode ser escrito:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha). \quad (4.1.4)$$

Substituindo (4.1.4) em (4.1.3) encontra-se:

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3}bc \operatorname{sen}(\alpha),$$

$$b^2 + c^2 \geq bc[\cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)]. \quad (4.1.5)$$

Adicionalmente, nota-se que:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha) &= 2 \left[\frac{1}{2}\cos(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha) \right], \\ \cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha) &= 2 [\cos(60^\circ)\cos(\alpha) + \sin(60^\circ)\sin(\alpha)], \\ \cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha) &= 2 \cos(60^\circ - \alpha). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Substituindo (4.1.6) em (4.1.5) encontra-se:

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &\geq 2bc \cos(60^\circ - \alpha), \\ b^2 + c^2 - 2bc \cos(60^\circ - \alpha) &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Para completar um quadrado perfeito soma-se $0 = -2bc + 2bc$:

$$\begin{aligned} b^2 - 2bc + c^2 + 2bc - 2bc \cos(60^\circ - \alpha) &\geq 0, \\ (b - c)^2 + 2bc[1 - \cos(60^\circ - \alpha)] &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Verifica-se que:

$$\begin{aligned} (b - c)^2 &\geq 0, \\ \cos(60^\circ - \alpha) &\leq 1. \end{aligned}$$

Isto é, os dois somandos na esquerda de (4.1.8) são, de fato, não negativos para quaisquer valores de $b > 0$, $c > 0$ e α . A igualdade acontece quando $b = c$ e $\alpha = 60^\circ$. Ou seja, no caso do $\triangle ABC$ ser equilátero. Todas as transições anteriores foram do tipo se, e somente se. Isto completa a demonstração.

4.2 Diferentes formas de calcular áreas. Incírculos. P3 IMO 1964.

Problema 3. *Uma circunferência está inscrita num triângulo ABC de lados a , b e c . Três tangentes ao incírculo são desenhadas, cada uma delas paralela a um lado do $\triangle ABC$. Essas tangentes formam três triângulos menores (internos ao $\triangle ABC$). Em cada um desses triângulos está inscrito um círculo. Determinar a soma das áreas de todos os quatro círculos internos.*

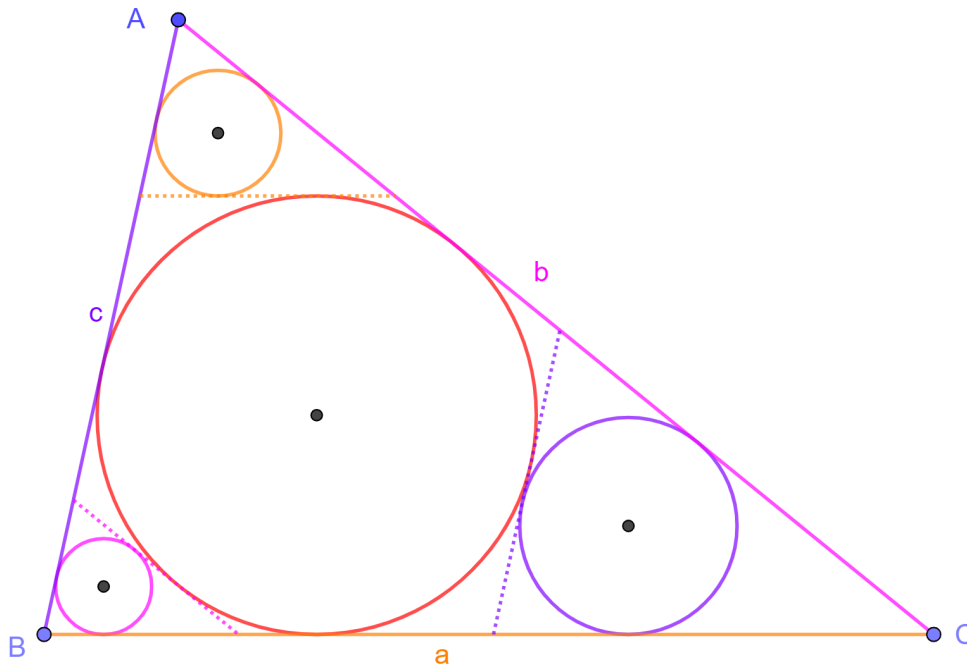
A IMO 1964 foi realizada na cidade de Moscou, capital da Rússia. Esse é o Problema 3

do primeiro dia da competição e foi proposto pela delegação da antiga Iugoslávia [2].

4.2.1 Resolução do Problema 3.

A Figura 4.2 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.2: Construção geométrica inicial para o Problema 3. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ os comprimentos dos lados do $\triangle ABC$ e o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$. Seja r o raio do círculo interno do $\triangle ABC$, r_a , r_b e r_c os raios dos incírculos menores correspondentes a A , B e C . Sejam ainda os pontos B' e C' a interseção da reta tangente ao incírculo maior (e paralela a BC) com os lados AB e AC , respectivamente. Adicionalmente, defina-se h_a como a altura relativa ao vértice A no $\triangle ABC$ (Figura 4.3). A soma das áreas dos quatro incírculos S_{in} pode ser calculada como:

$$S_{in} = \pi (r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2). \quad (4.2.1)$$

Seja s a área do $\triangle ABC$. Pela fórmula de Heron escreve-se:

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Utilizando o incírculo de raio r encontra-se uma segunda expressão para a área do $\triangle ABC$:

$$s = p \cdot r.$$

Das duas últimas equações chega-se em:

$$\begin{aligned} p \cdot r &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \\ r &= \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}, \\ r^2 &= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Por outro lado, vale que $\angle AB'C' = \angle ABC$ e $\angle AC'B' = \angle ACB$ (correspondentes entre paralelas). Pelo critério de semelhança AA tem-se:

$$\triangle AB'C' \sim \triangle ABC.$$

Consequentemente, a razão de semelhança pode ser escrita como:

$$\frac{r_a}{r} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = 1 - \frac{2r}{h_a}. \quad (4.2.3)$$

A área do $\triangle ABC$ também calcula-se como:

$$s = \frac{a \cdot h_a}{2}.$$

Segue que:

$$h_a = \frac{2s}{a}. \quad (4.2.4)$$

Substituindo (4.2.4) em (4.2.3) encontra-se:

$$\frac{r_a}{r} = 1 - \frac{r \cdot a}{s}.$$

Utilizando, mais uma vez, que $s = p \cdot r$ segue:

$$r_a = \left(1 - \frac{a}{p}\right) r. \quad (4.2.5)$$

Analogamente, demonstra-se que:

$$r_b = \left(1 - \frac{b}{p}\right) r, \quad (4.2.6)$$

$$r_c = \left(1 - \frac{c}{p}\right) r. \quad (4.2.7)$$

Substituindo (4.2.5), (4.2.6) e (4.2.7), em (4.2.1) encontra-se:

$$S_{in} = \pi r^2 \left[1 + \left(1 - \frac{a}{p}\right)^2 + \left(1 - \frac{b}{p}\right)^2 + \left(1 - \frac{c}{p}\right)^2 \right]. \quad (4.2.8)$$

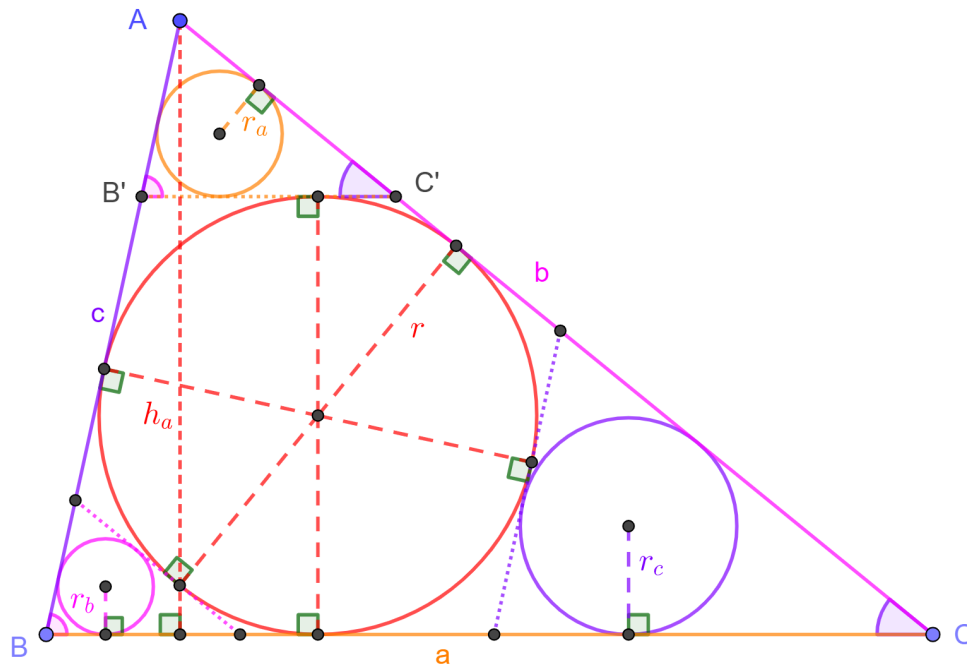
A seguir é substituído (4.2.2) em (4.2.8) para chegar em:

$$S_{in} = \pi \left(\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \right) \left[1 + \left(1 - \frac{a}{p}\right)^2 + \left(1 - \frac{b}{p}\right)^2 + \left(1 - \frac{c}{p}\right)^2 \right].$$

Resta trocar a definição de semiperímetro e simplificar:

$$S_{in} = \pi \left(\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^3} \right).$$

Figura 4.3: Construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

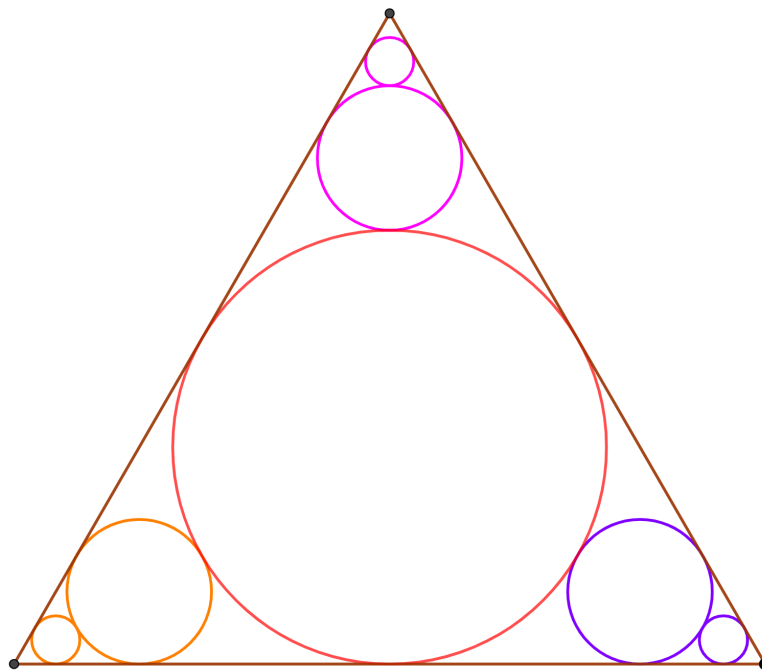
4.2.2 Sequência de circunferências no triângulo equilátero.

A construção a seguir é inspirada no problema anterior.

Exercício 3. *Considera-se um triângulo equilátero de lado 1 (Figura 4.4). São desenhadas circunferências tangentes com os lados e entre si. a) Calcular o raio r_0 do incírculo (circunferência vermelha, maior raio). b) Considerando os círculos com centro sobre a mediatriz da base (na horizontal), determinar o raio r_n da circunferência n ésima. c) Calcular a soma de todas as áreas de todos os círculos:*

$$S_{in} = \pi r_0^2 + 3\pi \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2.$$

Figura 4.4: Sequência de circunferências no triângulo equilátero. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja o $\triangle ABC$ equilátero de lado 1 e M o ponto médio do lado BC (Figura 4.5). Sejam ainda os pontos B' e C' a interseção da reta tangente ao incírculo maior (e paralela a BC) com os lados AB e AC , respetivamente. Pela ida do Teorema de Pitágoras aplicado no $\triangle AMC$ a altura $AM = h$ é:

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A área s do $\triangle ABC$ é:

$$s = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

No triângulo equilátero o incentro (encontro das bissetrizes dos ângulos e centro da circunferência maior) coincide com o baricentro G e ortocentro. Portanto, o raio do incírculo pode ser calculado como:

$$r_0 = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Por outro lado, vale que $\angle AB'C' = \angle ABC = 60^\circ$ e $\angle AC'B' = \angle ACB = 60^\circ$ (correspondentes entre paralelas). Pelo critério de semelhança AA tem-se:

$$\triangle AB'C' \sim \triangle ABC.$$

Consequentemente, a razão de semelhança pode ser escrita como:

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{h - 2r_0}{h} = 1 - \frac{2r_0}{h}.$$

Substituindo os valores encontrados anteriormente para r_0 e h segue-se:

$$\frac{r_1}{r_0} = 1 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Pela aplicação repetida do procedimento anterior conjectura-se que:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0 \frac{1}{3}, \\ r_2 &= r_1 \frac{1}{3} = r_0 \left(\frac{1}{3}\right)^2, \\ &\vdots \\ r_n &= r_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

Consequentemente, a soma das áreas de todos os círculos é:

$$\begin{aligned} S_{in} &= \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 3\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2, \\ S_{in} &= \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n. \end{aligned}$$

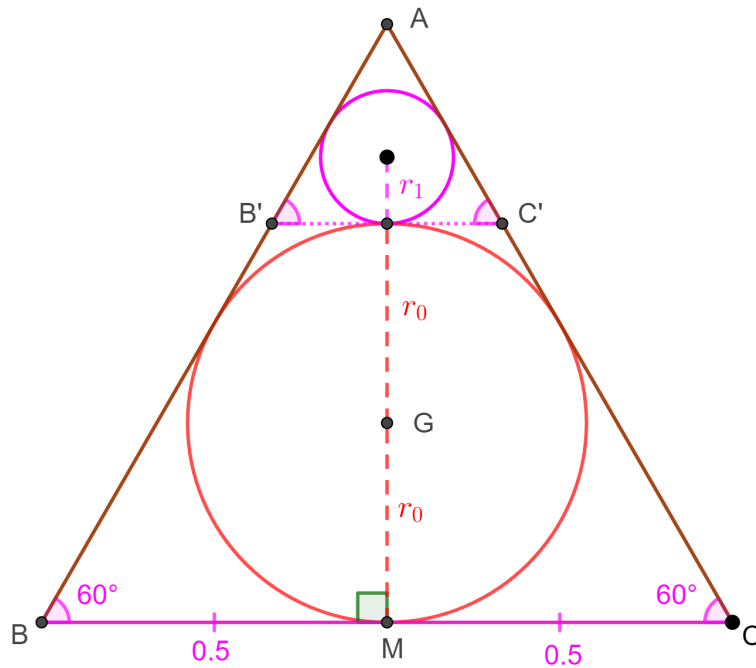
No último somando aparece uma série geométrica convergente, que pode ser calculada exatamente:

$$S_{in} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \left(\frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{32},$$

$$S_{in} = \frac{11\pi}{96} < \frac{\sqrt{3}}{4} = s.$$

Como esperado, a soma das áreas de todas as circunferências é menor que a área do triângulo equilátero.

Figura 4.5: Resolução do exercício sobre triângulo equilátero e circunferências tangentes. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Para a construção no GeoGebra da sequência de circunferências em roxo (Figura 4.4) foi utilizado o código a seguir:

$$\text{Sequência} \left(\text{Círculo} \left(\left(0.5, \frac{\sqrt{3}}{6} + \text{Soma} \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{1}{3} \right)^{j-1} + \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{1}{3} \right)^j, j, 1, i \right) \right), \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^i \right), i, 1, n \right).$$

Ou seja, foi criada uma lista $L1$ de circunferências. Para obter os outros dois conjuntos de circunferências em amarelo $L2$ e azul $L3$ basta aplicar, pela simetria, rotações de 120° e 240° relativas ao ponto G :

$$L2 = \text{Girar} \left(L1, 120 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right), G \right),$$

$$L3 = \text{Girar} \left(L1, 240 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right), G \right).$$

4.3 Áreas, bases médias, triângulo medial. P6 IMO 1966.

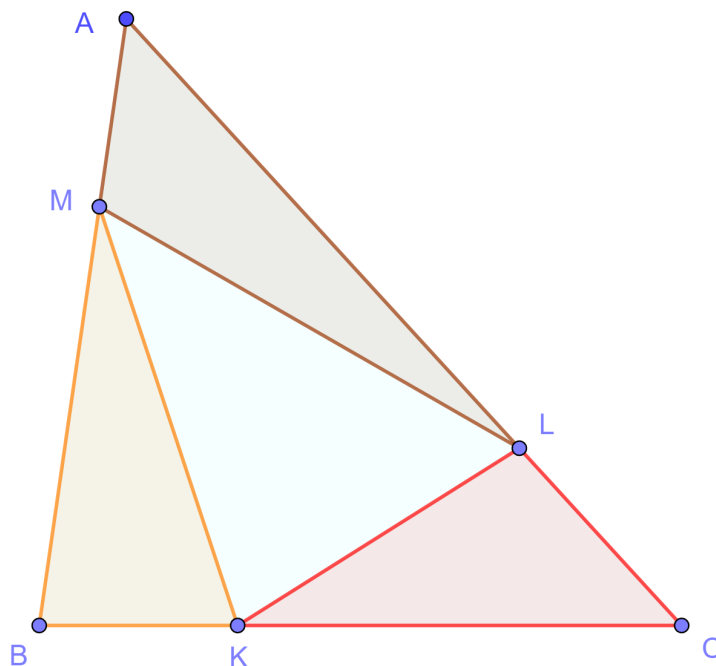
Problema 4. *Considera-se um $\triangle ABC$ arbitrário. Sejam os pontos $M \in AB$, $K \in BC$ e $L \in CA$. Provar que a área de pelo menos um dos três triângulos $\triangle MAL$, $\triangle KBM$ e $\triangle LCK$ é menor ou igual a um quarto da área do $\triangle ABC$.*

A IMO 1966 foi realizada na cidade de Sófia, capital da Bulgária. Esse é o Problema 6, segundo dia da competição, e foi proposto pela delegação da Polônia [2].

4.3.1 Resolução do Problema 4.

A Figura 4.6 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.6: Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam A' , B' e C' os pontos médios dos segmentos BC , CA e AB , respectivamente (Figura 4.7). Como $A'B'$, $B'C'$ e $C'A'$ são bases médias os quadriláteros $A'CB'C'$, $B'AC'A'$ e $C'BA'B'$ são paralelogramos. Pelo critério de congruência LLL tem-se:

$$\triangle AB'C' \equiv \triangle BC'A' \equiv \triangle CA'B' \equiv \triangle A'B'C'.$$

Logo, vale a igualdade das áreas:

$$[\triangle AB'C'] = [\triangle BC'A'] = [\triangle CA'B'] = [\triangle A'B'C'] = \frac{1}{4}[\triangle ABC].$$

Sem perda de generalidade, considera-se $M \in AC'$. Das quatro possibilidades para os pontos K e L a única não trivial é quando $K \in BA'$ e $L \in CB'$. Neste caso consideram-se primeiro os $\triangle KLM$ e $\triangle A'LM$ com o lado comum LM . Nota-se que a reta LM não é paralela com a reta BC , pois LM intercepta $B'C' \parallel BC$. Consequentemente, entre os pontos K e A' o mais próximo da reta LM é o ponto A' . Segue que:

$$[\triangle KLM] \geq [\triangle A'LM].$$

Segundo, estudam-se os $\triangle A'LM$ e $\triangle A'B'M$ com o lado comum $A'M$. Nota-se que a reta $A'M$ não é paralela com a reta CA , pois $A'M$ intercepta $C'A' \parallel CA$. Consequentemente, entre os pontos L e B' o mais próximo da reta $A'M$ é o ponto B' . Portanto:

$$[\triangle KLM] \geq [\triangle A'LM] \geq [\triangle A'B'M].$$

Terceiro, foca-se nos $\triangle A'B'M$ e $\triangle A'B'C'$ com o lado comum $A'B'$. Nota-se que as retas $A'B' \parallel AB$. Logo,

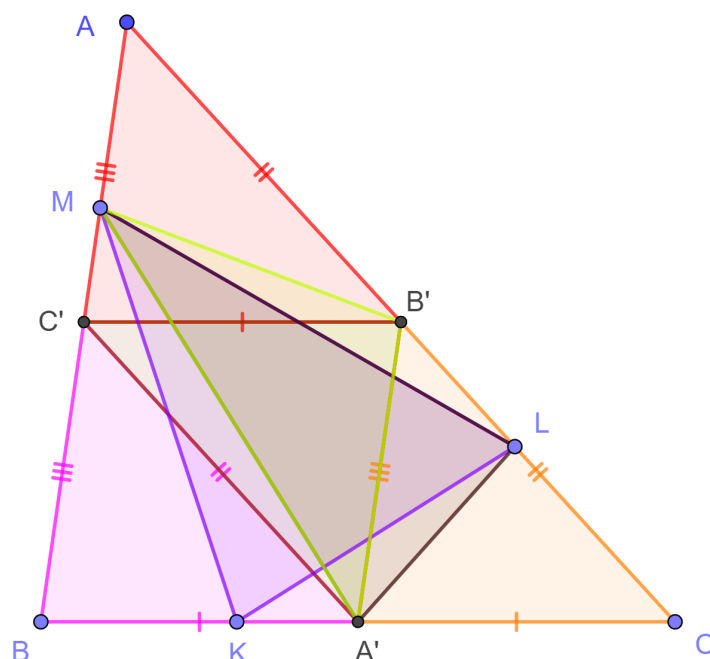
$$[\triangle KLM] \geq [\triangle A'LM] \geq [\triangle A'B'M] = [\triangle A'B'C'] = \frac{1}{4}[\triangle ABC].$$

De $[\triangle KLM] \geq \frac{1}{4}[\triangle ABC]$ e

$$[\triangle KLM] + [\triangle MAL] + [\triangle KBM] + [\triangle LCK] = [\triangle ABC],$$

pelo Princípio da Casa dos Pombos, encontra-se que a área de pelo menos um dos três triângulos $\triangle MAL$, $\triangle KBM$ e $\triangle LCK$ é menor ou igual a um quarto da área do $\triangle ABC$.

Figura 4.7: Construção geométrica para o Problema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.4 Área máxima, trigonometria, simetria. P13 LL IMO 1967.

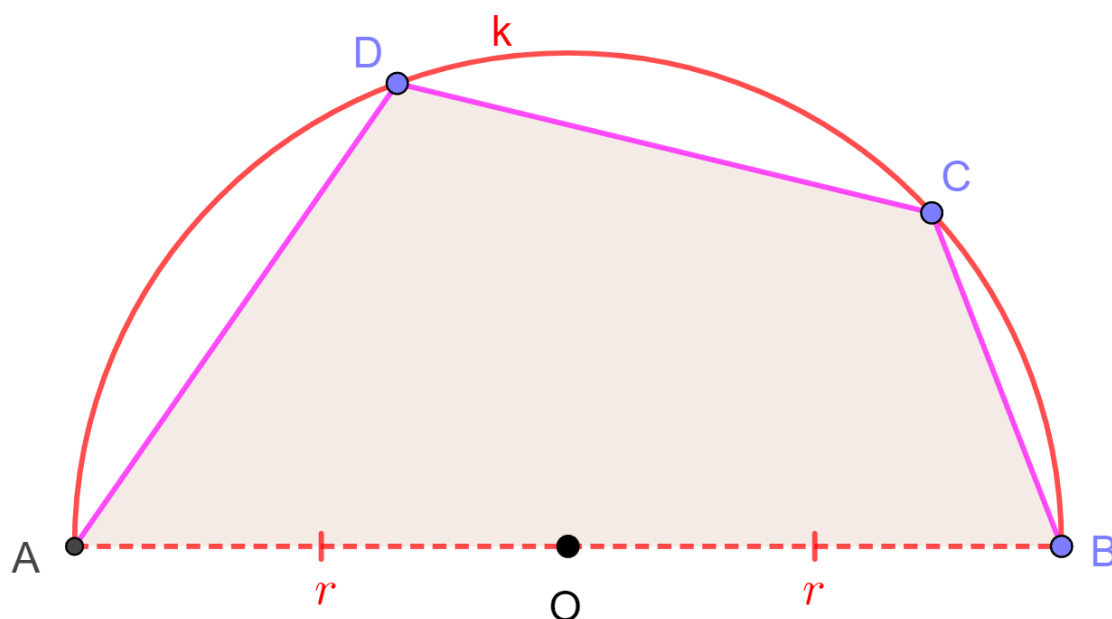
Problema 5. *Entre todos os quadriláteros, cujos interiores estão dentro dum semicírculo de raio r , qual é o de área máxima. Determinar esta.*

A IMO 1967 foi realizada na cidade de Cetinje, República de Montenegro (antiga Iugoslávia). Esse é o Problema 13 da LL e foi proposto pela delegação da Alemanha (na época RDA) [2].

4.4.1 Resolução do Problema 5.

A Figura 4.8 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.8: Construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

O segmento AB representa um diâmetro de uma semicircunferência k de raio r com centro no ponto O . Para construir um quadrilátero de área máxima, é racional assumir que A e B são pontos deste. Restaria localizar os outros dois vértices, $C \in k$ e $D \in k$, do quadrilátero $ABCD$.

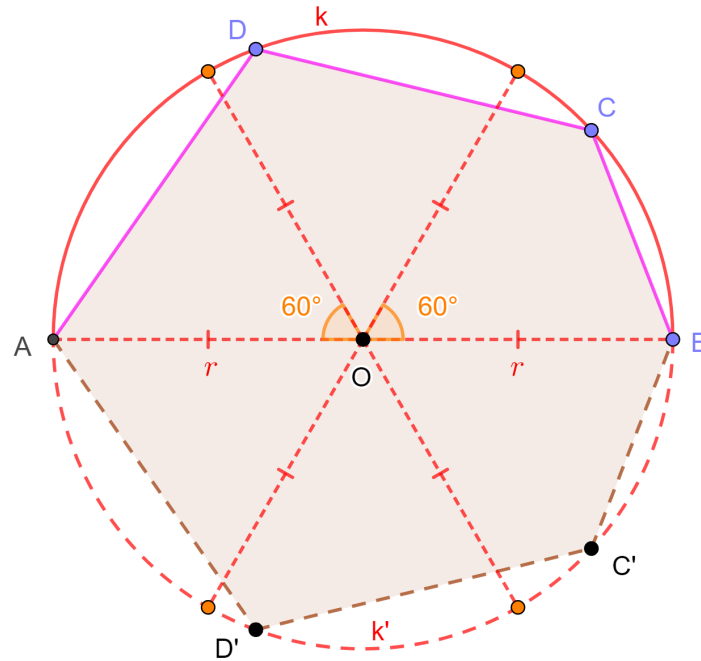
A primeira resolução será pensada de forma qualitativa. Pode ser feita uma reflexão do semicírculo para transformá-lo num círculo (Figura 4.9). O quadrilátero inscrito na semicircunferência transforma-se num hexágono. Sabe-se que entre todos os polígonos do mesmo número de lados inscritos numa circunferência o de área máxima é o regular. Logo,

$$\angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 60^\circ$$

e metade da área do hexágono regular é:

$$[ABCD]_{mx} = \frac{3}{4}\sqrt{3}r^2.$$

Figura 4.9: Construção geométrica para a primeira resolução do Problema 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

A seguir serão discutidas outras duas resoluções. Na segunda, assume-se que a área máxima encontra-se quando a posição dos pontos $C \in k$ e $D \in k$ é simétrica em relação a um eixo perpendicular ao diâmetro AB e passando por O . Isto leva a maximização de uma função duma variável. Na terceira resolução elimina-se a hipótese anterior e deve-se maximizar uma função de duas variáveis (fora do escopo dos conteúdos do ensino médio atualmente, mas interessante para estudantes de Cálculo).

Segunda resolução (Figura 4.10). Sejam $\angle BOC = \angle DOA = \alpha$. Segue que:

$$\angle COD = 180^\circ - 2\alpha.$$

A área do trapézio $ABCD$ pode ser calculada como a soma das áreas de três triângulos:

$$[ABCD] = [\triangle BOC] + [\triangle COD] + [\triangle DOA],$$

$$[ABCD] = \frac{1}{2}r^2 [\sin(\alpha) + \sin(180^\circ - 2\alpha) + \sin(\alpha)].$$

Simplificando,

$$[ABCD] = \frac{1}{2}r^2 [2\sin(\alpha) + \sin(180^\circ - 2\alpha)],$$

$$[ABCD] = \frac{1}{2}r^2 [2\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(-2\alpha)],$$

$$[ABCD] = \frac{1}{2}r^2 [2\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(2\alpha)].$$

Ou seja, para encontrar o máximo da área do trapézio $ABCD$ basta procurar o valor do ângulo α que maximiza a função:

$$f(\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(2\alpha).$$

A primeira derivada calcula-se como:

$$f'(\alpha) = 2\cos(\alpha) + 2\cos(2\alpha).$$

Pela igualdade $f'(\alpha) = 0$ segue:

$$\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) = 0,$$

$$\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 0,$$

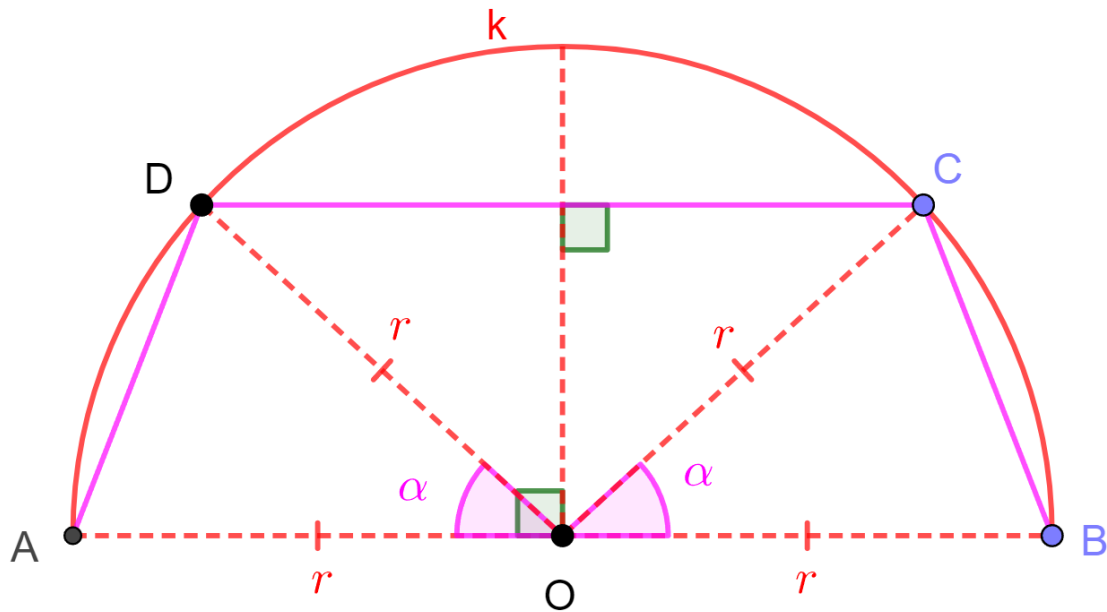
$$\cos(\alpha) + 2\cos^2(\alpha) - 1 = 0.$$

Com a troca de variável $x = \cos(\alpha)$ encontra-se a equação quadrática:

$$2x^2 + x - 1 = 0.$$

As duas soluções são $x = \frac{1}{2}$ e $x = -1$. A primeira leva na área máxima para $\alpha = 60^\circ$ e a segunda na área mínima para $\alpha = 180^\circ$.

Figura 4.10: Construção geométrica para a segunda resolução do Problema 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Terceira resolução (Figura 4.11). Sejam $\angle BOC = \alpha$ e $\angle COD = \beta$. Segue que:

$$\angle DOA = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

A área do quadrilátero $ABCD$ pode ser calculada como a soma das áreas de três triângulos:

$$\begin{aligned} [ABCD] &= [\triangle BOC] + [\triangle COD] + [\triangle DOA], \\ [ABCD] &= \frac{1}{2}r^2 [\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) + \text{sen}(180^\circ - \alpha - \beta)]. \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} [ABCD] &= \frac{1}{2}r^2 [\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) - \text{sen}(-\alpha - \beta)], \\ [ABCD] &= \frac{1}{2}r^2 [\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) + \text{sen}(\alpha + \beta)]. \end{aligned}$$

Ou seja, para encontrar o máximo da área do quadrilátero $ABCD$ basta procurar o valor dos ângulos α e β que maximiza a função:

$$g(\alpha, \beta) = \text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) + \text{sen}(\alpha + \beta).$$

Calculam-se as derivadas parciais:

$$g_{\alpha}(\alpha, \beta) = \cos(\alpha) + \cos(\alpha + \beta),$$

$$g_{\beta}(\alpha, \beta) = \cos(\beta) + \cos(\alpha + \beta).$$

Os pontos críticos encontram-se quando as duas derivadas anteriores anulam-se simultaneamente:

$$\cos(\alpha) + \cos(\alpha + \beta) = 0, \quad (4.4.1)$$

$$\cos(\beta) + \cos(\alpha + \beta) = 0. \quad (4.4.2)$$

Para resolver o sistema de equações anterior são dois passos. Primeiro, da diferença encontra-se:

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta).$$

Como $0 < \alpha < 180^\circ$ e $0 < \beta < 180^\circ$ a única solução é:

$$\alpha = \beta. \quad (4.4.3)$$

Segundo, substituindo (4.4.3) em (4.4.1) segue:

$$\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) = 0,$$

$$\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 0,$$

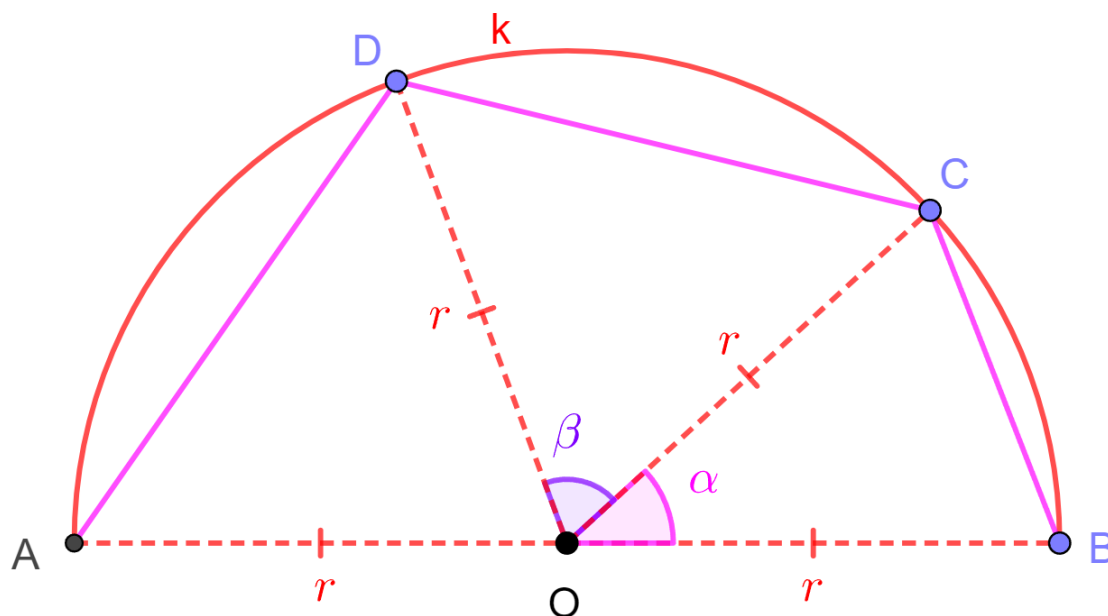
$$\cos(\alpha) + 2\cos^2(\alpha) - 1 = 0.$$

Com a troca de variável $x = \cos(\alpha)$ encontra-se a equação quadrática:

$$2x^2 + x - 1 = 0.$$

As duas soluções são $x = \frac{1}{2}$ e $x = -1$. A primeira leva na área máxima para $\alpha = \beta = 60^\circ$ e a segunda na área mínima para $\alpha = \beta = 180^\circ$.

Figura 4.11: Construção geométrica para a terceira resolução do Problema 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.5 Quadriláteros cíclicos, triângulo circunscrito e desigualdades. P4 IMO 1967.

Problema 6. São dados dois triângulos acutângulos: $\triangle A_0B_0C_0$ e $\triangle A'B'C'$. Descrever como construir um $\triangle ABC$, semelhante ao $\triangle A'B'C'$ e circunscrito ao $\triangle A_0B_0C_0$, de tal forma que A , B e C correspondam a A' , B' e C' e AB passe por C_0 , BC por A_0 e CA por B_0 . Entre os $\triangle ABC$ possíveis, descrever e provar qual é o de área maior.

A IMO 1967 foi realizada na cidade de Cetinje, Montenegro (Antiga Iugoslávia). Problema 29 da lista longa e escolhido como P4 da competição, proposto pela delegação da Itália [2].

4.5.1 Resolução do Problema 6

Construir o Arco Capaz l_a do $\angle A' = \alpha$ no lado de B_0C_0 oposto com A_0 (Exercício 2). Seja S_a o centro da circunferência k_a , do qual o arco l_a faz parte. Isto é, $l_a \subset k_a$ (Figura 4.12). Analogamente, construir os arcos capazes l_b e l_c dos $\angle B' = \beta$ e $\angle C' = \gamma$ no lado de C_0A_0 oposto com B_0 e no lado de A_0B_0 oposto com C_0 . Sejam S_b e S_c os centros das circunferências k_b e k_c , dos quais os arcos l_b e l_c fazem parte. Ou seja, $l_b \subset k_b$ e $l_c \subset k_c$.

Posicionar $A \in l_a$, construir as semirretas AC_0 e AB_0 e marcar os pontos $B = AC_0 \cap l_b$ e $C = AB_0 \cap l_c$. Pelo critério de semelhança ângulo-ângulo $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ e $C_0 \in AB$, $A_0 \in BC$ e $B_0 \in CA$. Seja o ponto $S = k_a \cap k_b \neq C_0$. Tem-se:

$$\angle B_0AC_0 = \alpha, \angle C_0BA_0 = \beta, \angle A_0CB_0 = \gamma.$$

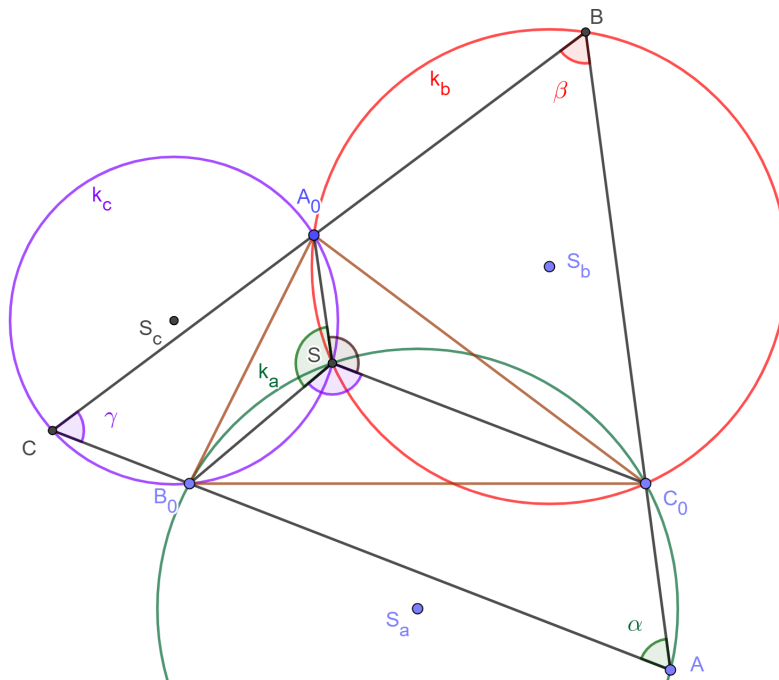
Dos quadriláteros B_0AC_0S e C_0BA_0S serem inscritíveis encontra-se:

$$\angle B_0SC_0 = 180^\circ - \alpha,$$

$$\angle C_0SA_0 = 180^\circ - \beta.$$

Logo, $\angle A_0SB_0 = \alpha + \beta$. Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ segue que o quadrilátero A_0CB_0S é cíclico e $S \in k_c$. A Figura 4.12 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.12: Uma construção geométrica inicial para o Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Construir os pontos simétricos de S com respeito a S_a , S_b e S_c e chama-los de A_1 , B_1 e C_1 , respectivamente. Como SB_1 e SC_1 são diâmetros de k_b e k_c segue:

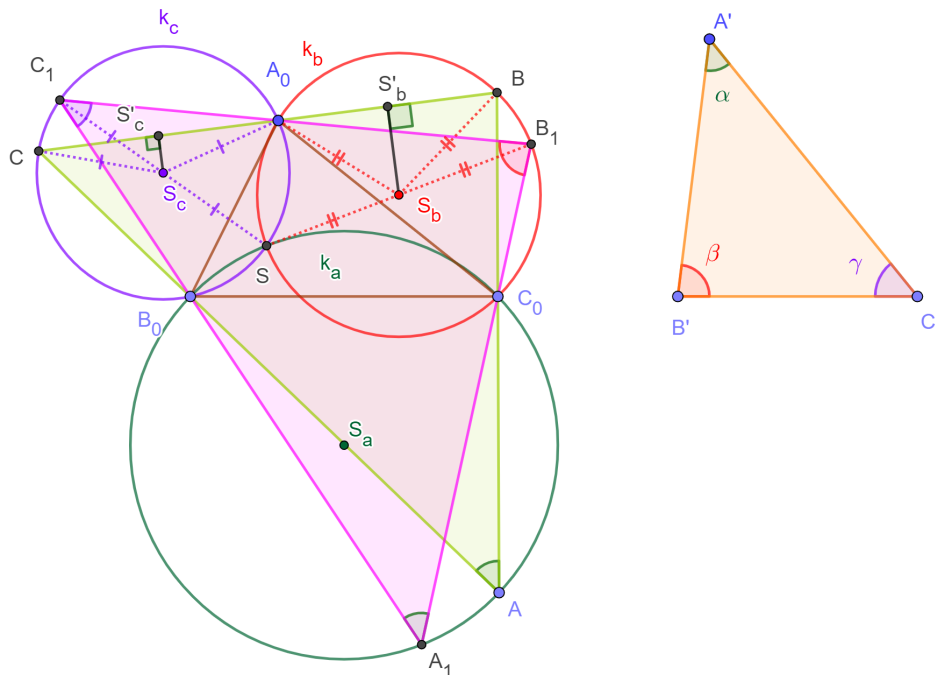
$$\angle SA_0B_1 = \angle SA_0C_1 = 90^\circ$$

e $A_0 \in B_1C_1$. Analogamente, $B_0 \in C_1A_1$ e $C_0 \in A_1B_1$. Ou seja, o $\triangle A_1B_1C_1$ satisfaz as

condições do problema. Provar-se-á que entre os triângulos $\triangle ABC$ o triângulo $\triangle A_1B_1C_1$ é o de maior área.

Mostra-se primeiro que $BC \leq B_1C_1$. Sejam S'_b e S'_c as projeções de S_b e S_c sobre BC . Os triângulos S_bBA_0 , S_cCA_0 , $S_bB_1A_0$ e $S_cC_1A_0$ são isósceles. Logo, $BC = 2S'_bS'_c$ e $B_1C_1 = 2S_bS_c$. No trapézio retângulo $S_bS'_bS'_cS_c$ tem-se $S'_bS'_c \leq S_bS_c$ e consequentemente $BC \leq B_1C_1$. De forma semelhante mostra-se que $CA \leq C_1A_1$ e $AB \leq A_1B_1$. Isso demonstra que o $\triangle A_1B_1C_1$ é o de maior área. A Figura 4.13 ilustra uma construção geométrica com o problema resolvido.

Figura 4.13: Construção geométrica da resolução do Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.6 Baricentro. Áreas. Desigualdade. P9 SL IMO 1968.

Problema 7. *Seja ABC um triângulo arbitrário e M um ponto no interior deste. Sejam d_a , d_b , e d_c as distâncias de M aos lados BC , CA , e AB ; e a , b , c a medida dos lados, respectivamente. Seja S a área do $\triangle ABC$. Provar que:*

$$abd_ad_b + bcd_bd_c + cad_cd_a \leq \frac{4S^2}{3}. \quad (4.6.1)$$

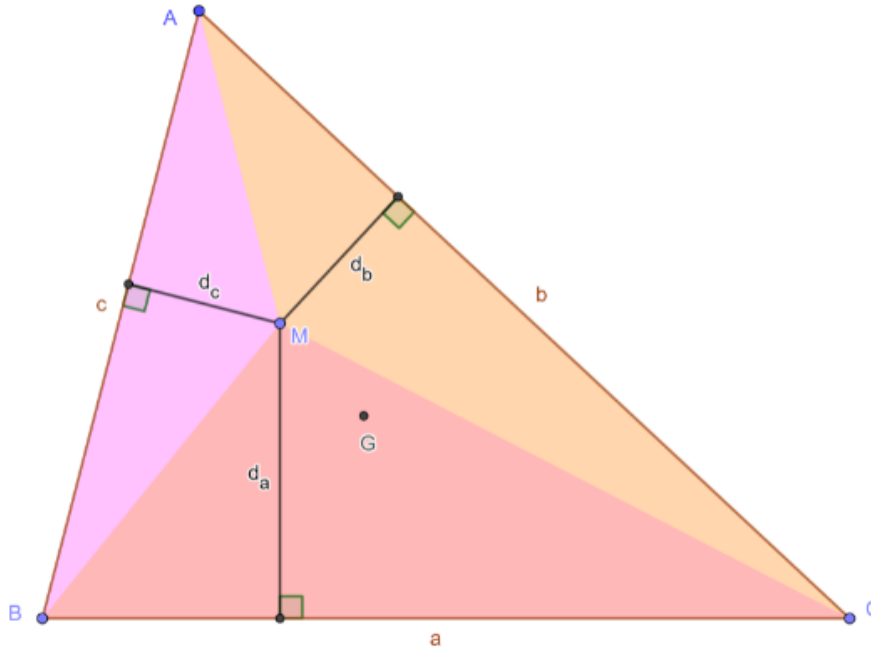
Provar que a igualdade acontece quando M é o Baricentro.

A IMO 1968 foi realizada na cidade de Moscou, Rússia. Esse é o Problema 9 da SL e foi proposto pela delegação da Romênia [2].

4.6.1 Resolução do Problema 7.

A Figura 4.14 mostra uma construção geométrica.

Figura 4.14: Construção geométrica para o Problema 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Inicia-se notando que a desigualdade (4.6.1) é equivalente a:

$$\frac{ad_a}{2} \cdot \frac{bd_b}{2} + \frac{bd_b}{2} \cdot \frac{cd_c}{2} + \frac{cd_c}{2} \cdot \frac{ad_a}{2} \leq \frac{S^2}{3}.$$

Sejam $S_a = S(BCM) = \frac{ad_a}{2}$, $S_b = S(CAM) = \frac{bd_b}{2}$ e $S_c = S(ABM) = \frac{cd_c}{2}$. Segue que:

$$S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a \leq \frac{S^2}{3}.$$

Como $S = S_a + S_b + S_c$, a desigualdade anterior equivale a:

$$3(S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a) \leq (S_a + S_b + S_c)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando encontra-se:

$$S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a \leq S_a^2 + S_b^2 + S_c^2.$$

Multiplica-se toda a desigualdade por 2 e colocam-se os termos do lado esquerdo no direito:

$$0 \leq 2(S_a^2 + S_b^2 + S_c^2) - 2(S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a).$$

A linha anterior pode ser reescrita como:

$$0 \leq (S_a - S_b)^2 + (S_b - S_c)^2 + (S_c - S_a)^2.$$

Como o quadrado de um número é sempre maior o igual a zero a última desigualdade é verdadeira. Todas as transformações utilizadas foram de equivalência, logo fica provado (4.6.1). A igualdade acontece quando $S_a = S_b = S_c$. Pela Proposição 12, o anterior significa que $M = G$.

4.7 Desigualdade Triangular. Desigualdade das Médias. Áreas. P1 IMO 1976.

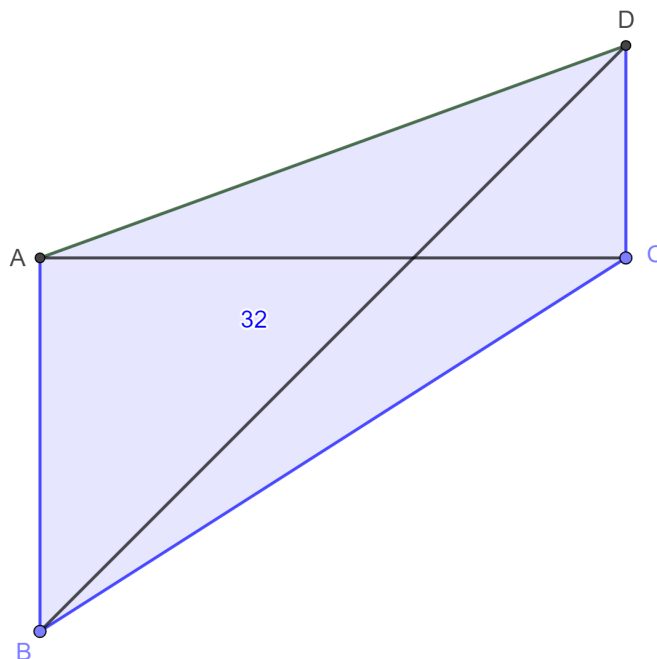
Problema 8. *Num quadrângulo convexo com área 32 cm^2 , a soma dos comprimentos de dois lados não adjacentes e uma diagonal é igual a 16 cm . a) Qual é o comprimento da outra diagonal? b) Quais são os comprimentos dos lados do quadrângulo se o perímetro é um mínimo? c) Será possível escolher os lados para que o perímetro seja um máximo?*

A IMO 1976 foi realizada na cidade de Lienz, Áustria. Problema 3 da SL, proposto pela delegação da antiga Checoslováquia e escolhido como P1 da competição [2].

4.7.1 Resolução do Problema 8.

A Figura 4.15 mostra uma construção geométrica inicial do Problema 8.

Figura 4.15: Construção geométrica inicial para o Problema 8. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Um quadrângulo é uma figura plana que consiste em quatro pontos, cada um unido a outros dois por segmentos (que se intersectam ou não). Quando o quadrângulo é convexo, equivale a um quadrilátero convexo.

Todas as unidades de comprimento são dadas em cm e as de área em cm^2 . As mesmas serão omitidas no que segue. Seja $S = 32$ e

$$d = 16 = AB + CD + AC. \quad (4.7.1)$$

a) A área do quadrângulo $ABCD$ pode ser calculada pela soma das áreas dos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$, onde AC é o lado comum. Adicionalmente, para medidas fixas de dois lados, o ângulo, determinado por estes, que maximiza a área de um triângulo é 90° . Ou seja, acontece o máximo quando os dois triângulos são retângulos:

$$S \leq \frac{1}{2}AC(AB + CD).$$

Utilizando (4.7.1) reescreve-se a desigualdade anterior como:

$$S \leq \frac{1}{2}AC(d - AC). \quad (4.7.2)$$

Por outro lado, considerando AC como variável e utilizando a Desigualdade das Médias

Geométrica e Aritmética no conjunto de números positivos $\{AC, d - AC\}$ tem-se:

$$\sqrt{AC(d - AC)} \leq \frac{AC + (d - AC)}{2},$$

$$AC(d - AC) \leq \frac{d^2}{4}. \quad (4.7.3)$$

A igualdade acontece quando $AC = d - AC$ ou $AC = \frac{d}{2}$. Considerando (4.7.2) e (4.7.3) encontra-se:

$$S \leq \frac{d^2}{8}.$$

Utilizando os números dados para d e S conclui-se que somente é possível a igualdade. Isto é, $AC = AB + CD = 8$, $AB \perp AC$ e $CD \perp AC$. Seja $CD = x$ e $AB = 8 - x$.

Constrói-se a reta AB e traça-se por D uma reta l paralela com AC (Figura 4.16). Marca-se o ponto $E = AB \cap l$. O triângulo BED , retângulo em E , é isósceles de base BD . Logo, o comprimento é:

$$BD = 8\sqrt{2}.$$

b) Para encontrar o valor mínimo do perímetro do quadrilátero $ABCD$ basta minimizar a soma $BC + AD$, pois $AB + CD = 8$. Para isso, posiciona-se um ponto F de tal forma que o quadrilátero $ACFD$ seja um paralelogramo. Isto é, $DF = 8$ e $AD = CF$. Constrói-se também o segmento BF . Aplicando a Desigualdade Triangular no $\triangle BCF$ tem-se:

$$BC + CF = BC + AD \geq BF.$$

Isto é, o valor mínimo de $BC + AD$ é BF e, nesse caso, $C \in BF$. Utilizando o Teorema de Pitágoras no $\triangle BEF$ encontra-se $BF = 8\sqrt{5}$. Por outro lado, quando $C \in BF$, pelo critério de semelhança AA, tem-se:

$$\triangle FDC \sim \triangle FEB.$$

Da proporcionalidade dos lados segue que:

$$CF = AD = \frac{BF}{2}, \quad DC = \frac{EB}{2} = 4.$$

Logo, $AD = BC = 4\sqrt{5}$ e $AB = CD = 4$.

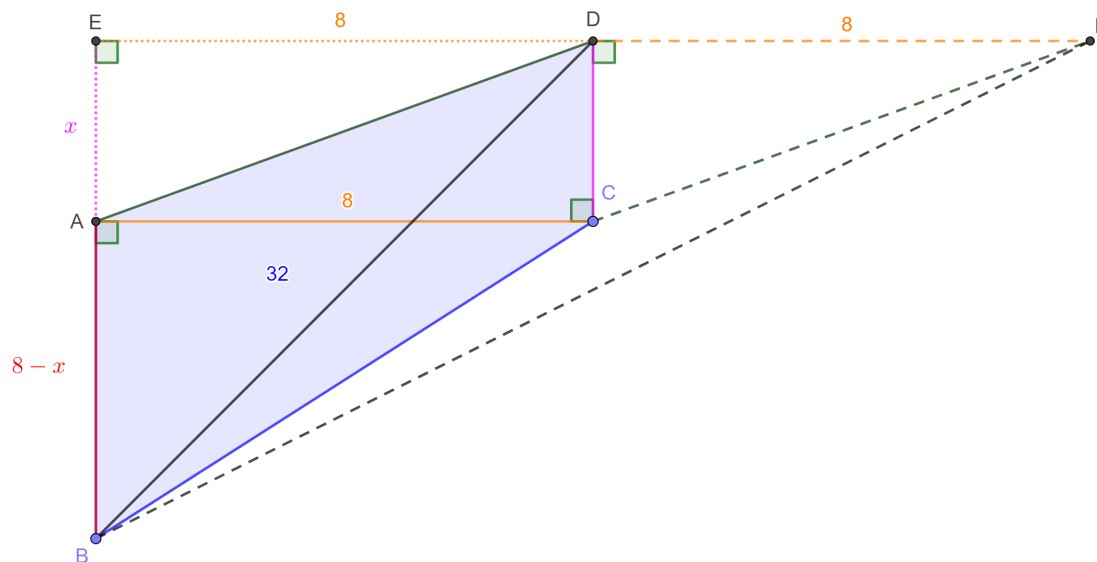
c) Assuma-se, sem perda de generalidade, que $CD < AB$. Neste caso, o ponto C está no interior do $\triangle BDF$ e vale que:

$$BC + AD = BC + CF \leq BD + DF.$$

Isto é, o valor máximo da soma $BC + AD$ é atingido quando os pontos C e D coincidem

e o quadrângulo $ABCD$ é degenerado. A Figura 4.16 mostra os detalhes das construções geométricas dos itens a), b) e c).

Figura 4.16: Construção geométrica para o Problema 8. Versão interativa [aqui](#). Pode ser movimentado o ponto B para encontrar o perímetro mínimo.



Fonte: O autor.

4.8 Área máxima, quadrado. P47 LL IMO 1977.

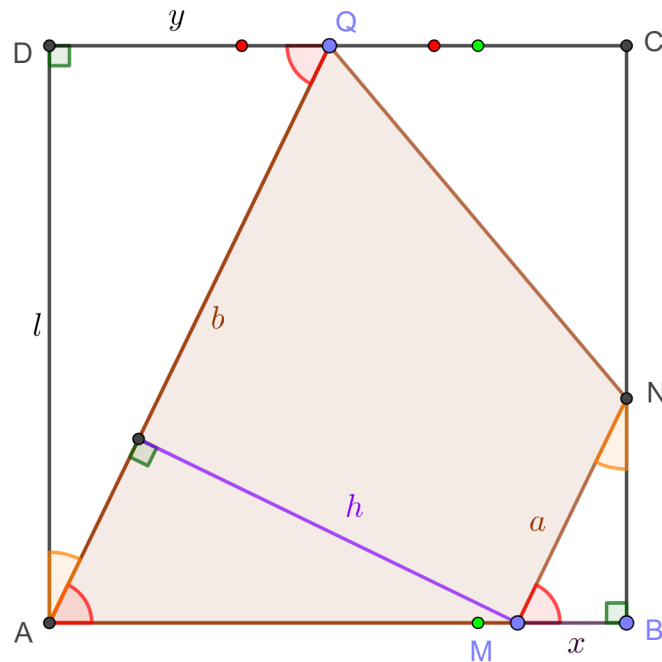
Problema 9. Um quadrado $ABCD$ é dado. Uma reta que passa por A intercepta CD em Q . Desenhar uma linha paralela a AQ que cruza o limite do quadrado nos pontos M e N tal que a área do quadrilátero $AMNQ$ seja máxima.

A IMO 1977 foi realizada na cidade de Belgrado, capital da Sérvia (antiga Iugoslávia). Esse é o Problema 47 da LL e foi proposto pela delegação da antiga União Soviética [2].

4.8.1 Resolução do Problema 9.

A Figura 4.17 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.17: Construção geométrica inicial para o Problema 9. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Por simples inspeção $M \in AB$ e $N \in BC$. Tem-se dois casos. Se $CQ \leq \frac{2CD}{3}$, então área do quadrilátero $AMNQ$ será máxima quando $BM = \frac{CQ}{2}$. Se $QC > \frac{2CD}{3}$, então o máximo acontece quando N coincide com C .

4.9 Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Incentro. Áreas. P1 IMO 1981.

Problema 10. *Encontrar o ponto P no interior de um $\triangle ABC$ para o qual a soma:*

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \quad (4.9.1)$$

é mínima, em que PD , PE e PF são as perpendiculares de P a BC , CA e AB , respectivamente.

A IMO 1981 foi realizada na cidade de Washington, EUA. Problema 15 da SL, proposto pela delegação do Reino Unido e escolhido como P1 da competição [2].

4.9.1 Resolução do Problema 10.

Nota-se que para qualquer ponto P no interior do $\triangle ABC$ a soma:

$$BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF \quad (4.9.2)$$

é duas vezes a área do mesmo. Isto é, o resultado é constante (não depende de P). Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz escreve-se:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2.$$

Identificando em (4.9.2) que $a_1^2 = BC \cdot PD$, $a_2^2 = CA \cdot PE$, $a_3^2 = AB \cdot PF$ e em (4.9.1) que $b_1^2 = \frac{BC}{PD}$, $b_2^2 = \frac{CA}{PE}$ e $b_3^2 = \frac{AB}{PF}$ tem-se:

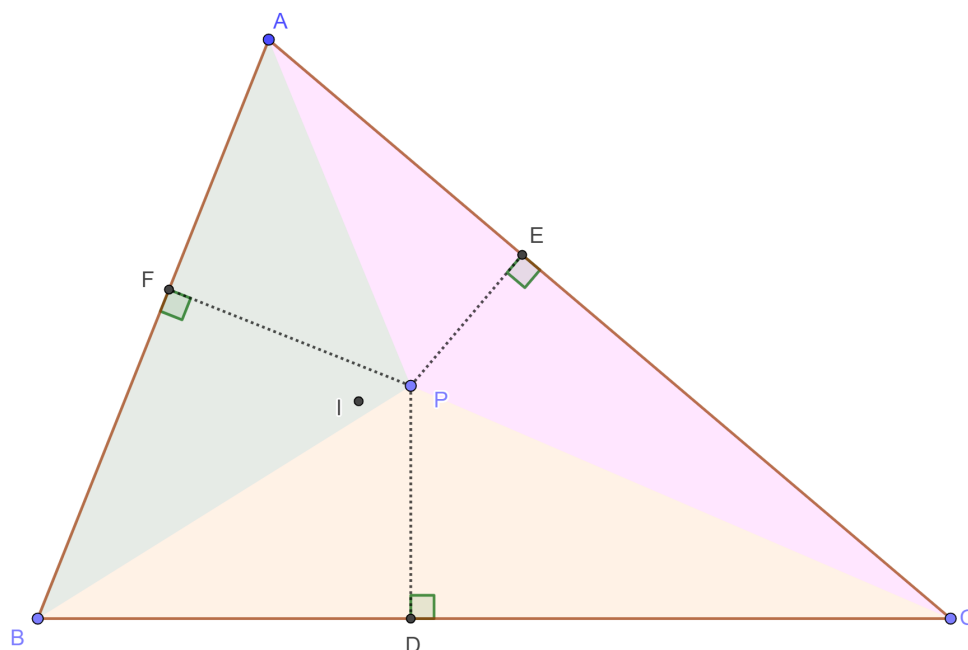
$$(BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF) \left(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \right) \geq (BC + CA + AB)^2.$$

A igualdade, que representa o valor mínimo de (4.9.1), acontece quando as sequências (a_n) e (b_n) são proporcionais. Isto é, quando existe um número λ tal que:

$$(a_1, a_2, a_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3).$$

Logo, $\lambda = PD = PE = PF$. Portanto, o ponto P que minimiza (4.9.1) é o Incentro do $\triangle ABC$. A Figura 4.18 mostra uma construção geométrica.

Figura 4.18: Construção geométrica para o Problema 10. Versão interativa [aqui](#). Movimentando o ponto P pode-se verificar o mínimo.



Fonte: O autor.

4.10 Áreas, quadriláteros inscritíveis. P2 IMO 1987.

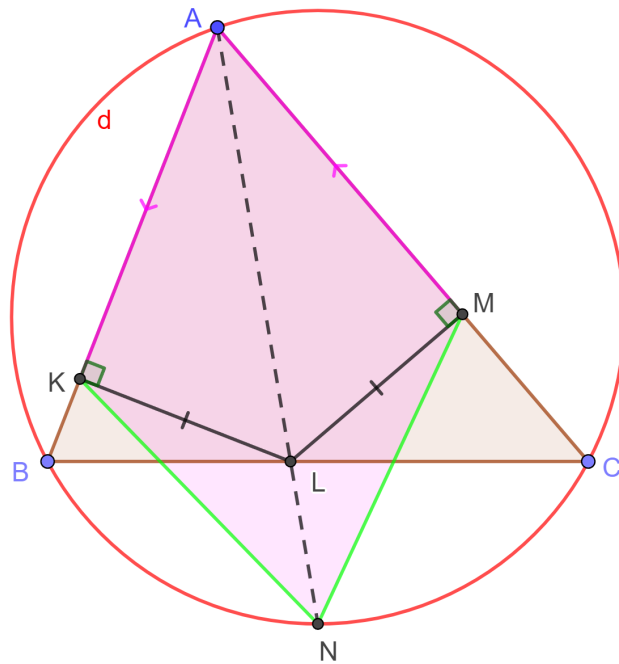
Problema 11. *O prolongamento da bissetriz AL , com $L \in BC$, no triângulo de ângulos agudos ABC , cruza o círculo circunscrito d no ponto N . Do ponto L aos lados AB e AC são traçadas as perpendiculares LK e LM , respectivamente. Provar que a área do triângulo ABC é igual à área do quadrilátero $AKNM$.*

A IMO 1987 foi realizada na cidade de Havana, capital de Cuba. Esse é o Problema 21 da SL e escolhido como P2 da competição. Foi proposto pela delegação da antiga União Soviética [2].

4.10.1 Resolução do Problema 11.

A Figura 4.19 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.19: Construção geométrica inicial para o Problema 11. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Pela bissetriz AN vale que:

$$\angle BAN = \angle NAC = \alpha.$$

O quadrilátero $AKLM$ é inscritível pela circunferência f pois:

$$\angle LKA + \angle AML = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Seja $P \neq L$ o segundo ponto de intersecção do segmento BC e f . Denotar os pontos $E = KN \cap BC$ e $F = MN \cap BC$ (Figura 4.20). Parte da área do triângulo ABC e do quadrilátero $AKNM$ é comum. Portanto, bastará provar a igualdade das áreas não comuns. Ou seja,

$$[\triangle BEK] + [\triangle CFM] = [\triangle NEF],$$

$$[\triangle BEK] + [\triangle CFM] = [\triangle NEP] + [\triangle NPF].$$

Isto é, quer-se mostrar que:

$$[\triangle BEK] = [\triangle NEP],$$

$$[\triangle CFM] = [\triangle NPF].$$

Como os quadriláteros $ABNC$ e $LMAP$ são inscritos em d e f , respectivamente, então:

$$\angle BCN = \angle BAN = \alpha,$$

$$\angle LAM = \angle LPM = \alpha.$$

Logo, $\angle CPM = \angle PCN$. Da recíproca de “ângulos alternos entre paralelas” segue que $PM \parallel NC$. Por outro lado, o quadrilátero $ABNC$ é inscrito em d , então $\angle NBC = \angle NAC = \alpha$. Adicionalmente, pelo quadrilátero inscritível $AMPK$ tem-se:

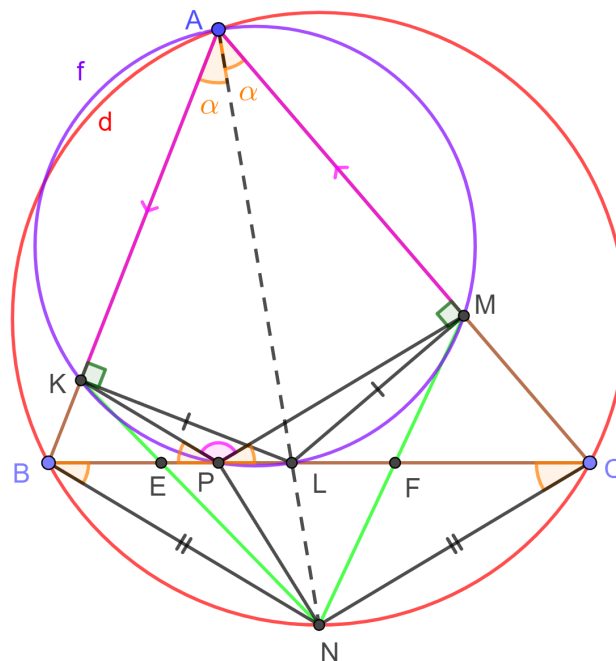
$$\angle MPK = 180^\circ - 2\alpha.$$

Logo, $\angle KPB = \angle NBP = \alpha$. Da recíproca de “ângulos alternos entre paralelas” vale $KP \parallel BN$. Como os quadriláteros $KBNP$ e $PMCN$ são trapézios, pela Proposição 14 vale que:

$$[\triangle BEK] = [\triangle NEP],$$

$$[\triangle CFM] = [\triangle NPF].$$

Figura 4.20: Construção geométrica para o Problema 11. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.11 Incírculos no triângulo retângulo e áreas. P5 IMO 1988.

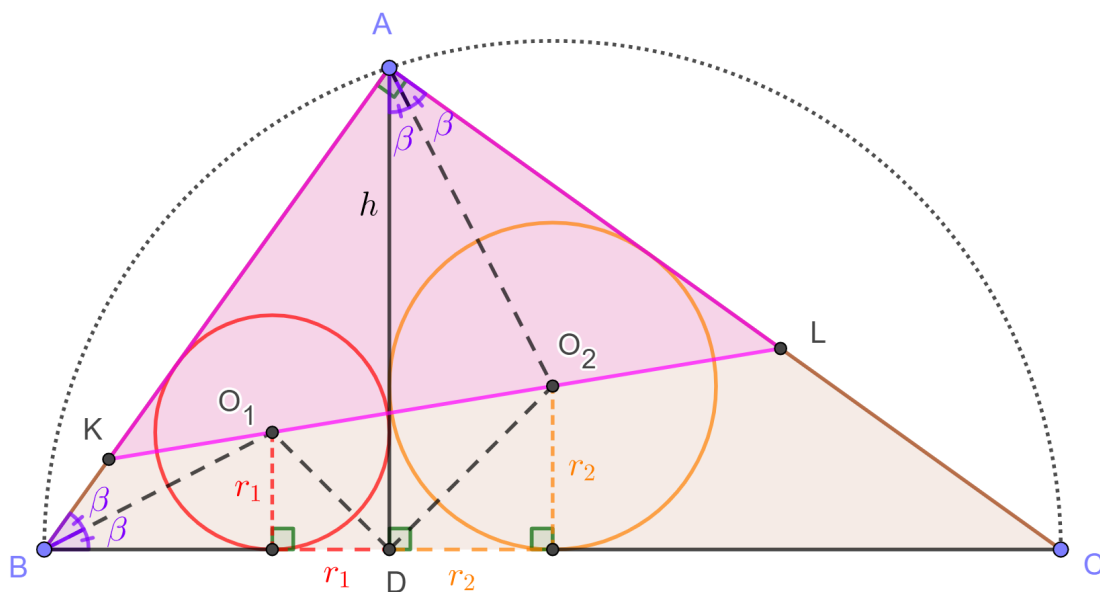
Problema 12. No triângulo retângulo ABC , seja AD a altura desenhada para a hipotenusa. A reta que une os incentros dos triângulos ABD e ACD intercepta os lados AB e AC nos pontos K e L , respectivamente. Se E e E_1 denotam as áreas dos triângulos ABC e AKL , respectivamente, mostrar que $\frac{E}{E_1} \geq 2$.

A IMO 1988 foi realizada na cidade de Camberra, capital da Austrália. Esse é o Problema 13 da SL e escolhido como P5 da competição. Foi proposto pela delegação da Grécia [2].

4.11.1 Resolução do Problema 12.

A Figura 4.21 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.21: Construção geométrica inicial para o Problema 12. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam $AB = c$, $AC = b$, $\angle CBA = 2\beta$, $BC = a$ e $AD = h$. Sejam ainda r_1 e r_2 e O_1 e O_2 os raios e centros dos incírculos do $\triangle ABD$ e $\triangle ADC$, respectivamente. Segue que $\angle DAC = \angle CBA = 2\beta$. O objetivo inicial será provar que $AL = AK = AD = h$. Posteriormente, retorna-se ao cálculo das áreas. Pelo critério de semelhança AA obtêm-se:

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \sim \triangle ABC.$$

Da semelhança entre os $\triangle DBA$ e $\triangle DAC$ vale a proporcionalidade:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{c}{b} = \frac{DO_1}{DO_2}.$$

Como DO_1 e DO_2 são bissetrizes de ângulos retos encontra-se:

$$\angle O_2DO_1 = \angle O_2DA + \angle ADO_1 = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ.$$

Pelo critério de semelhança LAL obtêm-se:

$$\triangle DBA \sim \triangle DO_1O_2.$$

Segue que $\angle DO_1O_2 = \angle DBA = 2\beta$ (Figura 4.22). Isto é, pode ser feita uma roto-homotetia, com centro em D , para transformar o $\triangle DBA$ no $\triangle DO_1O_2$. Seja o ponto P a interseção da circunferência circunscrita ao $\triangle DO_1O_2$ com o segmento h . Como DO_1PO_2 é um quadrilátero inscritível vale:

$$\angle DPO_2 = \angle DO_1O_2 = 2\beta,$$

$$\angle O_1PO_2 = 180^\circ - \angle O_2DO_1 = 90^\circ,$$

$$\angle O_2O_1P = \angle O_2DP = 45^\circ,$$

$$\angle PO_2O_1 = \angle PDO_1 = 45^\circ.$$

Com isto, o $\triangle O_2O_1P$ é retângulo e isósceles de base O_1O_2 . Adicionalmente,

$$\angle DPO_2 = \angle DAC,$$

$$\angle O_1PD = \angle BAD.$$

Pela recíproca de alternos entre paralelas encontra-se que $PO_2 \parallel AL$ e $PO_1 \parallel AK$. Portanto,

$$\angle ALK = \angle LKA = 45^\circ.$$

Ou seja, o $\triangle ALK$ é retângulo e isósceles de base LK . Consequentemente, $AL = AK$. Por outro lado, tem-se: $\angle O_2DA = \angle ALO_2 = 45^\circ$, AO_2 (lado comum) e $\angle DAO_2 = \angle O_2AL = \beta$ (bissetriz AO_2). Pelo critério de congruência LAAo segue:

$$\triangle DAO_2 \equiv \triangle LAO_2.$$

Portanto, $AL = AK = AD = h$. Neste ponto volta-se ao cálculo de áreas:

$$\frac{E}{E_1} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{a}{h}.$$

Multiplicando e dividindo por a , utilizando a ida do Teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$ e a relação métrica $ah = bc$ segue:

$$\frac{E}{E_1} = \frac{a^2}{ah} = \frac{b^2 + c^2}{bc}.$$

Sendo $b > 0$ e $c > 0$ a última fração pode ser escrita como desigualdade:

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} \geq 0,$$

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{(b + c)^2 - 2bc}{bc} \geq 0$$

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{(b + c)^2}{bc} - 2 \geq 0,$$

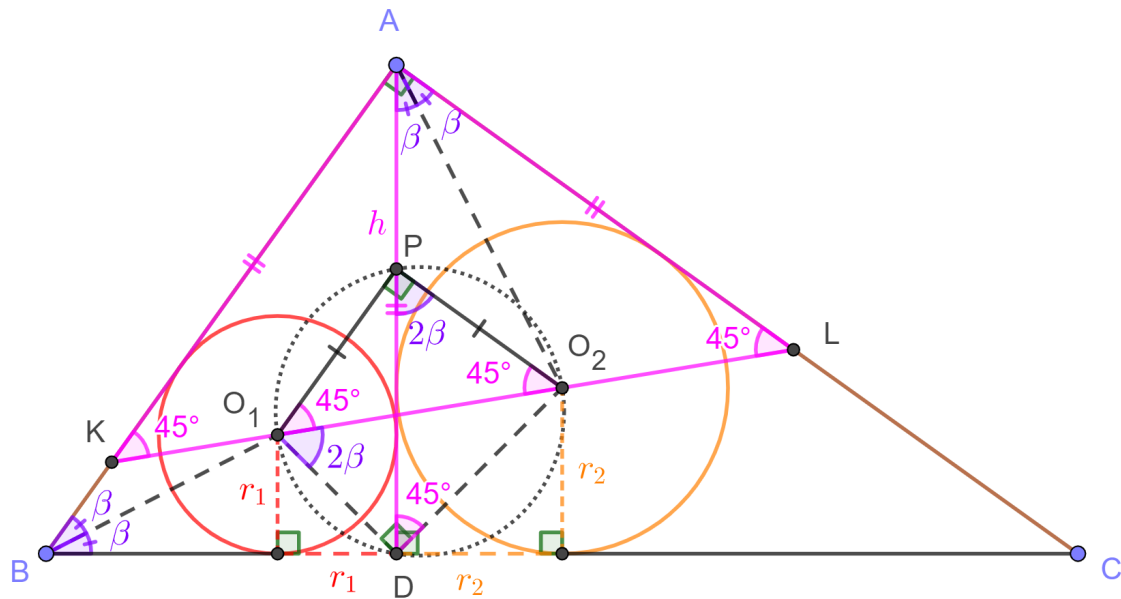
$$\frac{b^2 + c^2}{bc} \geq 2.$$

Portanto,

$$\frac{E}{E_1} = \frac{b^2 + c^2}{bc} \geq 2.$$

A igualdade acontece quando $b = c$.

Figura 4.22: Construção geométrica para o Problema 12. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.12 Paralelogramos, áreas e retângulos. P4 NE IGO 2015.

Problema 13. No retângulo $ABCD$ os pontos M , N , P e Q estão no lados AB , BC , CD e DA , respectivamente, de modo que as áreas dos triângulos AQM , BMN , CNP e DPQ são iguais. Provar que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

Problema 4 (Nível Elemental) da 2 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2015, proposto por Mahdi Etesami Fard.

4.12.1 Resolução do Problema 13

Sejam $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $AM = x$, $AQ = z$, $PC = y$ e $NC = t$. Queremos provar que devemos ter $x = y$. Suponhamos, por absurdo, e sem perda de generalidade, que $x > y$. Logo devemos ter que

$$a - x < a - y. \quad (4.12.1)$$

Da igualdade das áreas do triângulos AQM e CNP segue que

$$zx = yt \Rightarrow z < t \Rightarrow b - t < b - z. \quad (4.12.2)$$

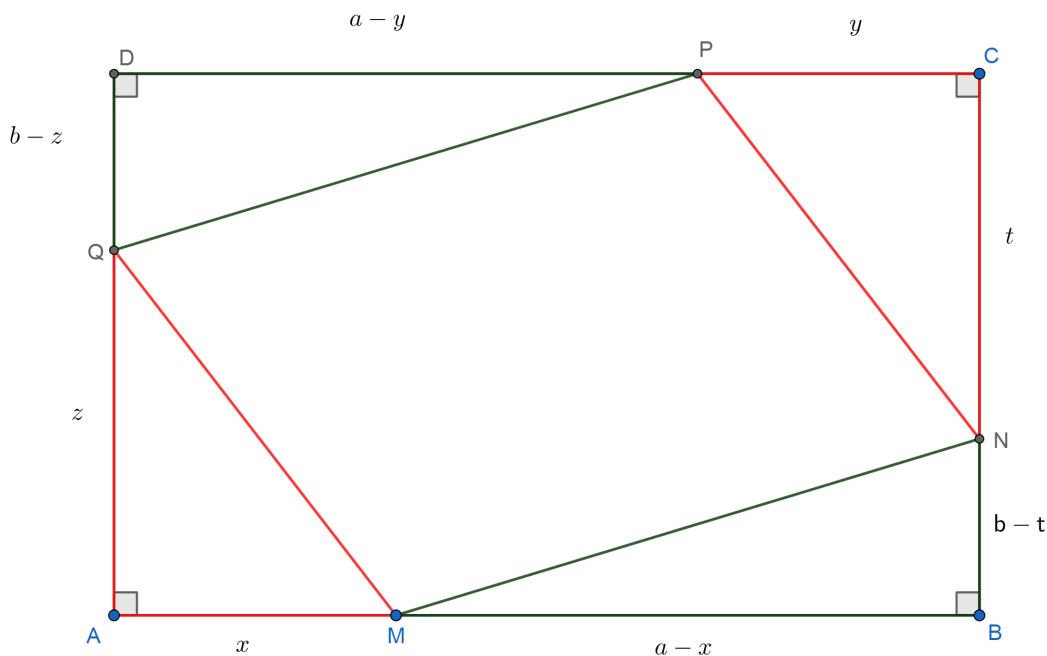
Pelas desigualdades (4.12.1) e (4.12.2) tem-se:

$$(a - x)(b - t) < (a - y)(b - z).$$

Mas a desigualdade anterior significa que a área do triângulo BMN é menor que a área do DPQ . Contradição. conclui-se que $x = y$. Analogamente se demonstra que $z = t$.

Por LAL tem-se que $\triangle AMQ \equiv \triangle CPN$ e $\triangle BMN \equiv \triangle DPQ$. Consequentemente $MQ = NP$ e $MN = PQ$. Como tem-se dois pares de lados congruentes o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo. A Figura 4.23 mostra a construção geométrica correspondente a resolução do problema.

Figura 4.23: Construção geométrica da resolução do problema. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Na construção geométrica foi usado que somente um dos quatro pontos M , N , P e Q é independente. Do cálculo da área dos triângulos AMQ e DPQ tem-se:

$$xz = (a - y)(b - z) = (a - x)(b - z),$$

$$z = b \left(1 - \frac{x}{a} \right).$$

Isto é, a área de cada triângulo pode ser escrita como:

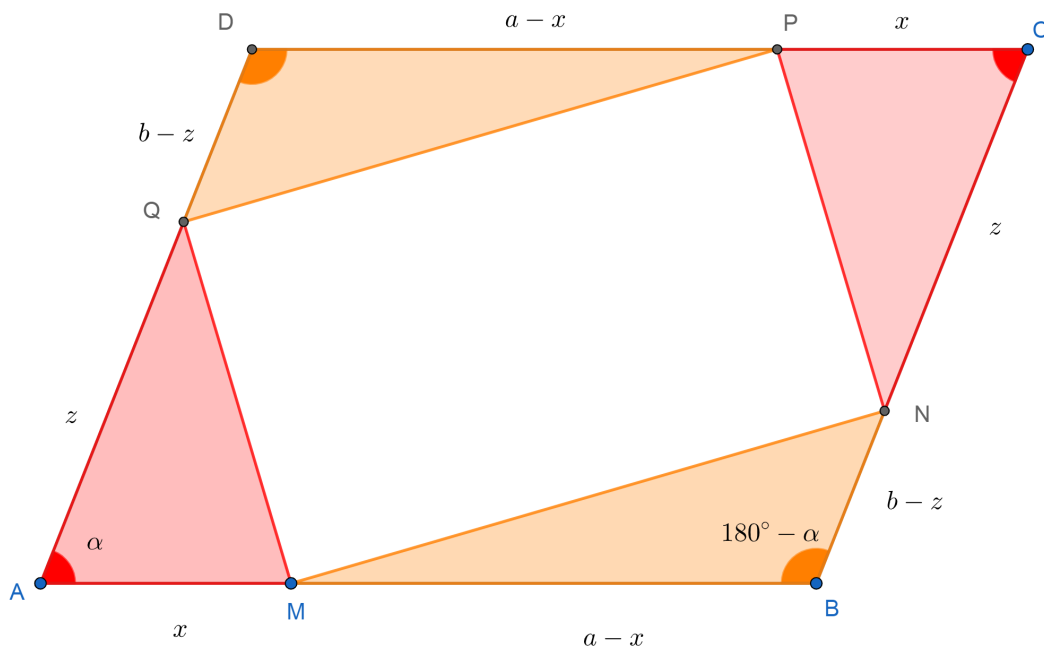
$$A_{TR}(x) = \frac{bx}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{a} \right).$$

Pode ser provado que o máximo da área acima acontece quando $x = \frac{a}{2}$.

4.12.2 Generalização

A tese do problema continua valendo se o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, não necessariamente retângulo. Isto é, sendo iguais as áreas dos triângulos AQM , BMN , CNP e DPQ o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo. A Figura 4.24 mostra uma construção geométrica neste caso.

Figura 4.24: Construção geométrica partindo de um paralelogramo. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Na última construção geométrica foi usado que somente um dos quatro pontos M , N , P e Q é independente. Do cálculo da área dos triângulos AMQ e DPQ tem-se:

$$xz \sin(\alpha) = (a - x)(b - z) \sin(180^\circ - \alpha) = (a - x)(b - z) \sin(\alpha),$$

$$z = b\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Isto é, a área de cada triângulo pode ser escrita como:

$$A_{TP}(x) = \frac{bx}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) \sin(\alpha).$$

Pode ser provado que o máximo da área acima acontece quando $x = \frac{a}{2}$.

4.13 Área de triângulos, hexágono, trapézio. P2 NE IGO 2018

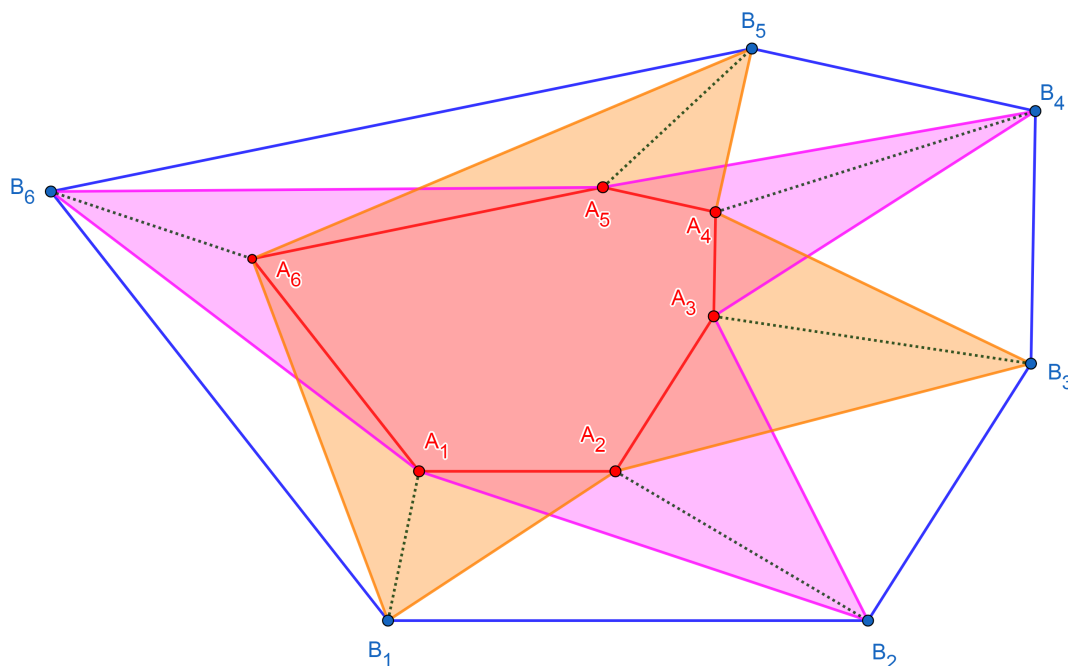
Problema 14. *O hexágono convexo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ está contido no interior do hexágono convexo $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ de modo que $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3, \dots$, $A_6A_1 \parallel B_6B_1$. Provar que as áreas dos hexágonos simples $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ e $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ são iguais. (Um hexágono simples é um hexágono que não intersecta ele mesmo.)*

Problema 2 (Nível Elemental) da 5 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2018.

4.13.1 Resolução do Problema 14

A Figura 4.25 ilustra uma construção geométrica possível para auxiliar na interpretação do problema.

Figura 4.25: Construção geométrica para auxiliar na interpretação. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Nota-se primeiro que o hexágono convexo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ está completamente no interior dos dois hexágonos simples $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ e $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$. Segundo, para facilitar a visualização traçam-se os segmentos A_1B_1 , $A_2B_2, \dots$, A_6B_6 . Terceiro, como $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3, \dots$, $A_6A_1 \parallel B_6B_1$, então os quadriláteros $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, $\dots$, $A_6B_6B_1A_1$

são trapézios. Quarto, por terem a mesma altura e base os pares de triângulos a seguir tem a mesma área:

$$A(\triangle A_1B_1A_2) = A(\triangle A_1B_2A_2),$$

$$A(\triangle A_2B_3A_3) = A(\triangle A_2B_2A_3),$$

$$\vdots$$

$$A(\triangle A_6B_1A_1) = A(\triangle A_6B_6A_1).$$

Finalmente, nota-se que:

$$\begin{aligned} A(\square A_1B_2A_3B_4A_5B_6) &= A(\square A_1A_2A_3A_4A_5A_6) + A(\triangle A_1B_2A_2) + A(\triangle A_2B_2A_3) + \cdots + \\ &\quad + A(\triangle A_6B_6A_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\square A_1B_2A_3B_4A_5B_6) &= A(\square A_1A_2A_3A_4A_5A_6) + A(\triangle A_1B_1A_2) + A(\triangle A_2B_3A_3) + \cdots + \\ &\quad + A(\triangle A_6B_1A_1) = A(\square B_1A_2B_3A_4B_5A_6). \end{aligned}$$

Capítulo 5

Referências Bibliográficas

- [1] DELGADO, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Página 13)
- [2] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium**: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009. New York: Springer, 2011. (Página 49, 52, 58, 60, 66, 68, 70, 73, 74, 76, 79)
- [3] HOLANDA, B. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2011. (Página 13)
- [4] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: [10.22533/at.ed.24221310814](https://doi.org/10.22533/at.ed.24221310814). Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [5] LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023311>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [6] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A. Trigonometria: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:14-36, jun. 2023. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6799/5334>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [7] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A. **Trigonometria: dos conceitos básicos até problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga:

- Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 83 p. ISBN 978-65-87023-35-9 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023359>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [8] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [9] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdv17ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [10] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdv18202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [11] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Congruências numéricas: cinco problemas resolvidos propostos para olimpíadas internacionais de matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 23, n. 2, p. 01-15, 20 dez. 2023. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://doi.org/10.21167/cqdv23n22023001015>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [12] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [13] LÓPEZ LINARES, J. Cálculo de áreas: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Revista de Matemática da UFOP, RMAT**, v. 1, n.1, pp: 01-21, 27 fev. 2024. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/7040>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)

- [14] LÓPEZ LINARES, J. **Ex-incentros: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 80 p. ISBN 978-65-87023-32-8 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023328>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [15] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [16] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [17] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [18] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [19] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [20] LÓPEZ LINARES, J. Jogos com a desigualdade triangular. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 3, p. 73-94, dez. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n32022073094. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [21] LÓPEZ LINARES, J. **Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e desigualdades**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade
-
- LÓPEZ LINARES, J. **Áreas: teoria, construções e problemas** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2024. 93 p. ISBN 978-65-87023-40-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023403>.

- de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 85 p. ISBN 978-65-87023-28-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023281>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [22] LÓPEZ LINARES, J. **Potência de ponto relativo a uma circunferência: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 64 p. ISBN 978-65-87023-30-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023304>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [23] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática**. 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [24] LÓPEZ LINARES, J. Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis: cinco problemas resolvidos propostos para olimpíadas internacionais de matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 23, n. 1, p. 317-334, jul. 2023. DOI: 10.21167/cqdv23n12023317334. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/373/382>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [25] LÓPEZ LINARES, J. **Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicêntricos: problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 72 p. ISBN 978-65-87023-34-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023342>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [26] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023212>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [27] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)

- [28] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra - v. 3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 91 p. ISBN 978-65-87023-24-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [29] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdv21202123169664jlljpmsafj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [30] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22–40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdv20202123169664jlljpmsafj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [31] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [32] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [33] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)

- [34] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [35] LÓPEZ LINARES, J. **Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 57 p. ISBN 978-65-87023-26-7 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023267>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [36] LÓPEZ LINARES, J. Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 1, p. 27-47, jul. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n12022027047. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [37] LÓPEZ LINARES, J. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023250>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [38] LÓPEZ LINARES, J. **Treinamento de Professores e Estudantes do Ensino Fundamental e Médio com Problemas de Olimpíadas de Matemática**. 155 f. Tese (Livre-docência) Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, 2022. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/livredocencia/74/tde-28112022-091705/pt-br.php>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [39] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdv19202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [40] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção ProfMat). (Página 13)

- [41] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Página 13)
- [42] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Heron of Alexandria**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2015. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Heron/>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 18)
- [43] PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Página 13)
- [44] SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [45] SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J.; RAMALHO DE FREITAS, M.P.O. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol.3, N.1, Jan-Jun 2022, pp. 70-87. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [46] SANTOS, J. P. M.; Marcus Vinícius de Araújo Lima; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J. Minimização da soma de quadrados de distâncias aos vértices em polígonos convexos, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol. 3, N. 2, Jul - Dez 2022, pp. 66 – 82. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i2.11309>. Acesso em: 29 fev. 2024. (Página 13)
- [47] THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria-Nível 2, 2006. (Página 13)

