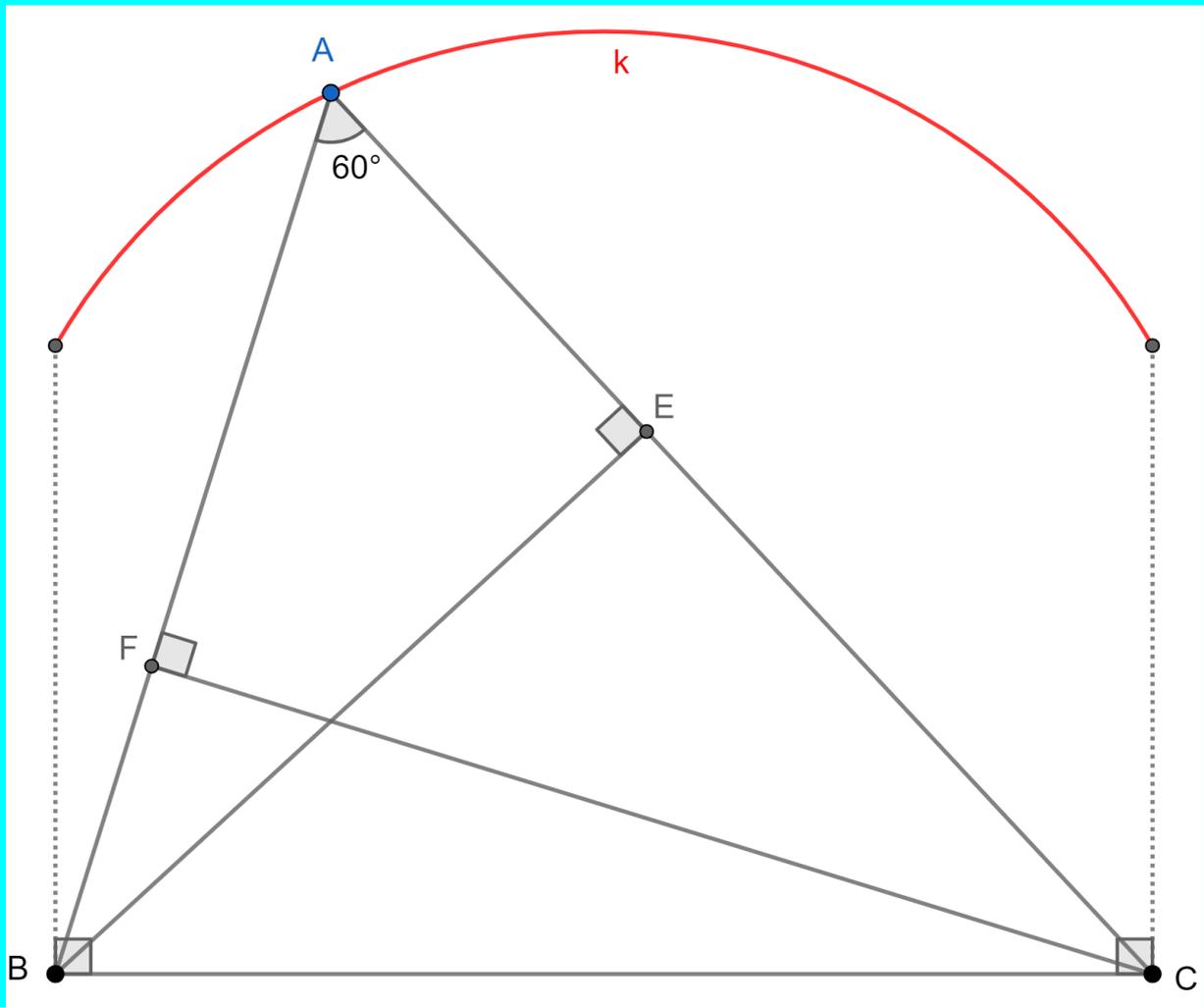


# Trigonometria: dos conceitos básicos até problemas olímpicos



**Juan López Linares**

**Alexys Bruno Alfonso**

JUAN LÓPEZ LINARES  
ALEXYS BRUNO ALFONSO

**Trigonometria: dos conceitos básicos até problemas olímpicos**

DOI: 10.11606/9786587023359

Pirassununga - SP  
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)  
2023

# UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**Reitor:** Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

**Vice-Reitora:** Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

## FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

**Diretor:** Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

**Vice-Diretor:** Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

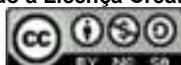
### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da  
Universidade de São Paulo

L864t	López Linares, Juan Trigonometria: dos conceitos básicos até problemas olímpicos / Juan López Linares, Alexys Bruno-Alfonso. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2023. 83 p.  ISBN 978-65-87023-35-9 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023359  1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino Fundamental. 5. Ensino Médio. 6. Formação de Professores. I. Bruno-Alfonso, Alexys. II. Título.
-------	--

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

**Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.**



*Dedicamos este livro a nossas famílias.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecemos aos Professores e Estudantes do curso de Geometria Olímpica com GeoGebra que motivaram a escrita deste livro eletrônico.

Agradecemos a nossas famílias pelo incentivo e compreensão.

## AUTORES

**Prof. Associado JUAN LÓPEZ LINARES:** <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Professor Associado do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores e estudantes de alto rendimento.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProFMat) pela UFSCar em 2019 e Livre Docente na área de Ensino de Matemática Olímpica na FZEA USP em 2022.

**Prof. Associado ALEXYS BRUNO-ALFONSO:** <https://orcid.org/0000-0002-6194-529X>.

Professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-graduação em Ciência e Tecnologia de Materiais (POSMAT), na Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, SP. Formação: Graduação em Física (1992) e Doutorado em Física (1996) - Universidad de La Habana, Cuba, Estágios de Pós-doutorado na Unicamp (1997), UFF (1998) e USP (1999) e Livre-docência em Matemática Aplicada à Física, Unesp (2016). Pesquisa: funções de Wannier, método tight binding, cristais fotônicos, novos materiais bidimensionais, cálculo fracionário. Foi bolsista de Produtividade em Pesquisa do CNPq (2012-2021). Promovido a professor associado II em 2023.

## **Título**

Trigonometria: dos conceitos básicos até problemas olímpicos

## **Prefácio**

A trigonometria é importante porque fornece uma base para entender e analisar ângulos, formas e relações espaciais. Suas aplicações são amplas e se estendem a vários campos, tornando-se um ramo essencial da matemática em contextos teóricos e práticos. Este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 40 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. A discussão é organizada em quatro capítulos: Fundamentos de trigonometria; Construções, exercícios e desafios; Conjugados Isogonais; Problemas de olimpíadas internacionais. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mão na massa.

**Palavras-chave:** Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

# Lista de Figuras

2.1	Relações métricas no triângulo retângulo. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	17
2.2	Definição de Radiano e mapeamento dos pontos da circunferência numa reta. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	19
2.3	Funções Seno, Cosseno e Tangente. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	20
2.4	Funções Cossecantes e Secantes. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	22
2.5	Cálculo de Seno e Cosseno de Ângulos Notáveis. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	23
2.6	Equivalências de senos e cossenos no primeiro quadrante. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	24
2.7	Seno e Cosseno da Soma de dois Ângulos. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	25
2.8	Demonstração da Lei dos Senos. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	27
2.9	Lei dos Cossenos. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	29
2.10	Guia para a demonstração do Teorema 7. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	31
3.1	Passos iniciais para a construção do Arco Capaz. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	33
3.2	Construção do Arco Capaz no semiplano superior do segmento $AB$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	34
3.3	Construção geométrica para o Exercício 2. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	35
3.4	Construção geométrica para o Exercício 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	36
3.5	Construção geométrica inicial para o Exercício 4. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	37
3.6	Construção geométrica para o Exercício 4. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	38
3.7	Construção geométrica para o Exercício 5. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	39
3.8	Construção geométrica inicial para o Problema 1. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	40
3.9	Resolução do Problema 1. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	41
3.10	Construção geométrica inicial para o Problema 2. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	42
3.11	Resolução do Problema 2. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	43
3.12	Demonstração pela Relação de Stewart. O baricentro $G$ minimiza a soma dos quadrados das distâncias de um ponto $P$ aos vértices de um triângulo $ABC$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	44
3.13	Construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	45
3.14	Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	47

3.15	Construção geométrica para o Problema 4. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	49
4.1	Construção geométrica para conjugados isogonais. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	51
4.2	Construção geométrica para provar que circuncentro $O$ e ortocentro $H$ são conjugados isogonais. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	52
4.3	Critério de isogonalidade relativo a um vértice. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	53
4.4	Teorema fundamental dos conjugados isogonais. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	54
4.5	Resolução do Problema 5. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	56
4.6	Lei dos Senos e Isogonais. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	57
4.7	Resolução do Problema 6. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	58
5.1	Resolução do Problema 7. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	61
5.2	Ilustração do Problema 8. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	62
5.3	Construção geométrica da Resolução-1 do Problema 8. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	63
5.4	Construção geométrica da Resolução-2 do Problema 8. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	64
5.5	Em um triângulo retângulo existem dois pontos com a propriedade requerida. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	66
5.6	Triângulo com ponto $D$ que satisfaz que $CD$ é a média geométrica de $AD$ e $BD$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	67
5.7	Interpretação geométrica para $\sin(\theta_i) [\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})]$ na resolução do Problema 10. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	71
5.8	Distância entre dois pontos medida por uma corda na semicircunferência trigonométrica, que tem raio de medida 1, para resolução do Problema 11. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	73

# Sumário

## Lista de Figuras

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
1.1	Por que estudar trigonometria? . . . . .	12
1.2	Um pouco de história . . . . .	13
1.3	Trigonometria nas olimpíadas de matemática . . . . .	14
1.4	Organização, GeoGebra e publicações anteriores . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Fundamentos de trigonometria</b>	<b>17</b>
2.1	Relações métricas no triângulo retângulo. . . . .	17
2.2	Radiano como unidade de medida de ângulos . . . . .	18
2.3	Funções Seno, Cosseno e Tangente . . . . .	19
2.4	Relação trigonométrica fundamental . . . . .	21
2.5	Funções Cossecantes, Secante e Cotangente . . . . .	22
2.6	Cálculo de seno e cosseno de ângulos notáveis . . . . .	23
2.7	Equivalências de senos e cossenos no primeiro quadrante . . . . .	24
2.8	Seno e cosseno da soma de dois ângulos . . . . .	25
2.9	Lei dos Senos . . . . .	27
2.10	Lei dos Cossenos . . . . .	28
2.11	Relação de Stewart . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Construções, exercícios e desafios</b>	<b>33</b>
3.1	Construção do Arco Capaz . . . . .	33
3.2	Arame, triângulo isósceles e bissetriz . . . . .	35
3.2.1	Resolução do Exercício 2 . . . . .	35
3.3	Ponto em quadrado equidistante de dois vértices e um lado . . . . .	36
3.3.1	Resolução do Exercício 3 . . . . .	36
3.4	Ângulo de visão de um prédio, distâncias e altura . . . . .	37
3.4.1	Resolução do Exercício 4. . . . .	37
3.5	Exercício envolvendo a Lei dos Senos . . . . .	38

3.5.1	Resolução do Exercício 5. . . . .	38
3.6	Problema envolvendo a Lei dos Senos . . . . .	39
3.6.1	Resolução do Problema 1. . . . .	39
3.7	Problema envolvendo a Lei dos Cossenos . . . . .	41
3.7.1	Resolução do Problema 2. . . . .	41
3.8	Relação de Stewart para encontrar o mínimo da soma dos quadrados das distâncias de um ponto aos vértices . . . . .	43
3.9	Lei dos Cossenos e Senos . . . . .	45
3.9.1	Resolução do Problema 3. . . . .	45
3.10	Invariante entre circuncentros de dois triângulos num trapézio . . . . .	46
3.10.1	Resolução do Problema 4. . . . .	47
<b>4</b>	<b>Conjugados isogonais</b> . . . . .	<b>50</b>
4.1	Definição de conjugados isogonais . . . . .	50
4.2	Conjugados isogonais de pontos notáveis . . . . .	51
4.3	Teorema fundamental dos conjugados isogonais . . . . .	52
4.4	Problema resolvido pelo uso de isogonais . . . . .	55
4.4.1	Resolução do Problema 5 . . . . .	55
4.5	Lei dos Senos e Isogonais . . . . .	56
4.6	Exemplo de utilização da Lei dos Senos e Isogonais. . . . .	58
4.6.1	Resolução do Problema 6 . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Problemas de olimpíadas internacionais</b> . . . . .	<b>60</b>
5.1	Cosseno e Seno de ângulos notáveis. Arco Capaz. Triângulo Acutângulo. P1 NI IGO 2017. . . . .	60
5.1.1	Resolução do Problema 7 . . . . .	60
5.2	Trigonometria, triângulos isósceles e retângulos. P3 NE IGO 2015. . . . .	62
5.2.1	Resolução-1 do Problema 8 . . . . .	63
5.2.2	Resolução-2 do Problema 8 . . . . .	63
5.3	Trigonometria e média geométrica em um triângulo arbitrário. P2 IMO 1974. . . . .	65
5.3.1	Caso do triângulo retângulo no Problema 9. . . . .	65
5.3.2	Resolução do Problema 9. . . . .	66
5.4	Trigonometria e soma de áreas. P12 SL da IMO 1975. . . . .	69
5.4.1	Resolução do Problema 10. . . . .	70
5.5	Distância entre pontos na semicircunferência trigonométrica. P15 SL da IMO 1975. . . . .	72
5.5.1	Considerações iniciais sobre o Problema 11. . . . .	72
5.5.2	Resolução do Problema 11. . . . .	74



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Por que estudar trigonometria?

A trigonometria é importante por vários motivos:

- A trigonometria é o ramo da matemática que lida com as relações entre os ângulos e os lados dos triângulos. Ele fornece uma estrutura para entender e resolver problemas relacionados a ângulos, distâncias e formas. Esse conhecimento é crucial em vários campos, incluindo engenharia, arquitetura, navegação, física e astronomia.
- A trigonometria é amplamente utilizada em várias disciplinas científicas e de engenharia. Ajuda na análise e resolução de problemas relacionados a ondas, oscilações, vibrações, som, luz, eletricidade e outros fenômenos físicos. Por exemplo, entender as funções trigonométricas é essencial para analisar o comportamento de correntes alternadas, calcular as trajetórias de objetos em movimento ou projetar estruturas estáveis.
- A trigonometria desempenha um papel vital na navegação e nos sistemas de posicionamento global (GPS). Usando os princípios da trigonometria, os dispositivos GPS podem determinar localizações precisas e calcular distâncias entre diferentes pontos na superfície da Terra. Essas informações são cruciais para sistemas de navegação, criação de mapas e rastreamento utilizados na aviação, transporte marítimos e levantamento terrestre.
- A trigonometria tem utilizações práticas na vida cotidiana. Por exemplo, é usado na construção e arquitetura para calcular ângulos, determinar a altura e a distância das estruturas e garantir a estabilidade. A trigonometria também é usada nos campos da arte, computação gráfica e animação para criar imagens realistas e visualmente atraentes, manipulando ângulos, rotações e perspectivas.
- Estudar trigonometria ajuda a desenvolver habilidades de resolução de problemas e pensamento analítico. Ele treina indivíduos para dividir desafios complexos em componentes

mais simples, identificar padrões e aplicar conceitos matemáticos para encontrar soluções. Essas habilidades são valiosas em várias carreiras, como engenharia, física, ciência da computação, economia e finanças.

No geral, a trigonometria é importante porque fornece uma base para entender e analisar ângulos, formas e relações espaciais. Suas aplicações são amplas e se estendem a vários campos, tornando-se um ramo essencial da matemática em contextos teóricos e práticos.

## 1.2 Um pouco de história

A trigonometria, o ramo da matemática que lida com as relações entre os ângulos e os lados dos triângulos, tem uma história cativante que se estende por milênios. Desde suas primeiras raízes nas civilizações antigas até seu profundo impacto na ciência e tecnologia modernas, o desenvolvimento da trigonometria é uma prova da curiosidade humana, da engenhosidade e da busca pelo conhecimento.

A trigonometria encontra seu início nas antigas civilizações do Egito, Mesopotâmia e Vale do Indo. Essas culturas reconheceram a importância dos princípios geométricos, particularmente na medição de terrenos, na construção de edifícios e na previsão de eventos astronômicos. Embora seus métodos carecessem da linguagem formal da trigonometria, eles desenvolveram técnicas rudimentares para calcular ângulos e distâncias, lançando as bases para desenvolvimentos futuros.

Os antigos gregos elevaram a trigonometria a novos patamares com sua abordagem geométrica. Por volta do século II aC, o matemático Hiparco de Nicéia [43] desenvolveu a primeira tabela trigonométrica. Ao vincular os comprimentos das cordas em um círculo aos ângulos correspondentes, Hiparco preparou o caminho para cálculos precisos de valores trigonométricos [1].

No entanto, foi o renomado matemático e astrônomo Claudius Ptolomeu [42], que viveu no século II dC, que compilou o trabalho mais influente sobre trigonometria em seu livro “Almagesto”. O trabalho de Ptolomeu não apenas expandiu a tabela de acordes de Hiparco, mas também introduziu o conceito de “trígono” como uma unidade de medida para ângulos. Seus princípios trigonométricos formaram a base da trigonometria no mundo ocidental durante séculos.

Durante a Idade de Ouro islâmica medieval, os estudiosos fizeram contribuições significativas para vários campos, incluindo a matemática. O matemático persa Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi [41], conhecido como o “Pai da Álgebra”, escreveu extensivamente sobre trigonometria em seu livro “The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing”. Al-Khwarizmi refinou o trabalho de Ptolomeu e introduziu a função tangente, que abriu novas possibilidades para cálculos trigonométricos.

Outro matemático islâmico, Mohammad Abu'l-Wafa Al-Buzjani [47], avançou ainda mais a trigonometria no século X. Ele introduziu as funções cotangentes e secantes e desenvolveu métodos para resolver triângulos esféricos, permitindo cálculos astronômicos precisos.

A era do Renascimento testemunhou um ressurgimento do interesse pelos textos gregos antigos, incluindo o “Almagesto” de Ptolomeu. Físicos-Matemáticos como Regiomontanus [44], Copérnico [48] e Kepler [4] exploraram a trigonometria no contexto da astronomia, revolucionando nossa compreensão do movimento celeste. A trigonometria tornou-se uma ferramenta essencial para navegadores, cartógrafos e astrônomos, permitindo medições e cálculos precisos nessas áreas.

No século XVII, o matemático inglês Thomas Harriot [49] desenvolveu o conceito da função seno e, no século XVIII, Leonhard Euler [45] introduziu a notação que utiliza-se até hoje. O trabalho de Euler lançou as bases para o campo moderno da trigonometria, transformando-o em um sistema matemático abrangente.

A trigonometria encontrou inúmeras aplicações na ciência, tecnologia e engenharia modernas. Da arquitetura e topografia à física, computação gráfica e processamento de sinais, os princípios trigonométricos sustentam vários campos. O desenvolvimento de calculadoras e computadores avançados expandiu ainda mais o alcance e a precisão dos cálculos trigonométricos, tornando-os uma ferramenta indispensável no século XXI.

### 1.3 Trigonometria nas olimpíadas de matemática

As Olimpíadas de Matemática são competições de prestígio que desafiam as mentes jovens mais brilhantes da matemática. Essas competições rigorosas exigem que os participantes resolvam problemas matemáticos complexos e criativos, muitas vezes exigindo uma compreensão profunda de vários conceitos matemáticos. Entre eles, a trigonometria se destaca como uma ferramenta poderosa que desempenhou um papel significativo na resolução de problemas olímpicos ao longo dos anos.

Um dos principais pontos fortes da trigonometria reside em sua capacidade de estabelecer e analisar relações geométricas. Problemas de olimpíadas geralmente envolvem configurações intrincadas onde ângulos, comprimentos e áreas interagem. Identidades e proporções trigonométricas, como seno, cosseno e tangente, podem ajudar a estabelecer conexões entre ângulos e lados de triângulos, círculos e outras figuras geométricas. Ao empregar essas relações, os participantes da Olimpíada podem desvendar complexos quebra-cabeças geométricos e navegar em direção a soluções elegantes.

Identidades trigonométricas servem como ferramentas poderosas na resolução de problemas de Olimpíadas de Matemática. Essas identidades, derivadas de razões trigonométricas básicas, permitem a manipulação e simplificação de expressões. As identidades pitagóricas,

de ângulo duplo e da soma e diferença estão entre as mais usadas na solução de problemas da Olimpíada. Ao empregar habilmente essas identidades, os participantes podem transformar equações trigonométricas complicadas em formas mais simples, tornando mais fácil derivar soluções e descobrir padrões ocultos.

Os problemas das olimpíadas de matemática geralmente exigem a integração da trigonometria com outros ramos da matemática, como álgebra e teoria dos números. As funções trigonométricas podem ser efetivamente combinadas com técnicas algébricas para resolver equações e inequações envolvendo expressões trigonométricas. Além disso, problemas de aritmética contendo números inteiros e divisibilidade podem ser abordados usando ferramentas trigonométricas, pois os valores trigonométricos geralmente exibem periodicidade e propriedades cíclicas que podem ser aproveitadas para deduzir ideias da teoria dos números.

A trigonometria desempenha um papel fundamental na análise de transformações geométricas, como rotações, reflexões e translações. Ao compreender a conexão entre razões trigonométricas e transformações geométricas, os participantes podem resolver problemas de Olimpíadas que envolvem simetria, congruência e transformações geométricas. Além disso, a geometria coordenada, que utiliza equações algébricas para representar figuras geométricas, pode se beneficiar muito dos conceitos trigonométricos. As funções trigonométricas podem ajudar a determinar ângulos, inclinações e distâncias em sistemas de coordenadas, fornecendo uma ferramenta valiosa para a solução de problemas da Olimpíada.

A natureza visual da trigonometria aumenta a intuição geométrica e ajuda na resolução de problemas. Ao visualizar figuras geométricas e entender a interação de ângulos e lados, os participantes podem fazer conjecturas intuitivas e desenvolver estratégias para lidar com problemas complexos. Os conceitos trigonométricos permitem que os participantes convertam desafios geométricos abstratos em representações visuais concretas, abrindo caminho para abordagens inovadoras e soluções elegantes.

## 1.4 Organização, GeoGebra e publicações anteriores

O livro faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O mesmo aconteceu na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma Moodle de Cultura e Extensão da USP. O texto conta com 40 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, links para os gráficos interativos são disponibilizados em páginas do [GeoGebra](#). Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube. A discussão é organizada em quatro capítulos: Fundamentos de trigonometria; Construções,

exercícios e desafios; Conjugados Isogonais; Problemas de olimpíadas internacionais. Mas sem a pretensão de esgotar os temas abordados.

O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contra partida, na versão impressa tradicional o aprendiz precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma resolução.

O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movimentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes. Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendizado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar e buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Bruno Holanda [5], do Prof. Rodrigo Pinheiro [50] e do Prof. Cícero Thiago [54]. Também serviram como referência os livros de Geometria [40], Geometria Analítica [2] e Matemática Discreta [39] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Dez livros eletrônicos gratuitos com as notas de aulas do curso Geometria Olímpica com GeoGebra estão disponíveis em [25], [26], [27], [21], [19], [16], [17], [7], [11] e [9]. Também foram publicados quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [24], [12], [13] e [14]. Outros trabalhos da área de Matemática são [18], [28], [29], [30], [23], [31], [32], [6], [33], [35], [36], [37], [38], [51], [34], [52], [20], [22], [15], [53], [10] e [8].

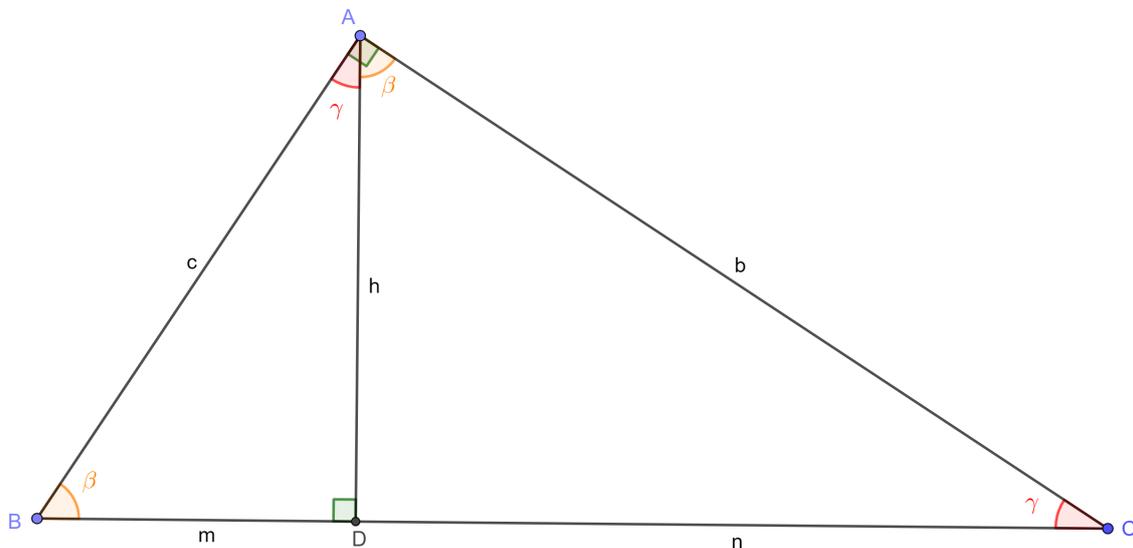
## Capítulo 2

# Fundamentos de trigonometria

### 2.1 Relações métricas no triângulo retângulo.

A Figura 2.1 será utilizada como referência para discutir as relações métricas no triângulo retângulo.

Figura 2.1: Relações métricas no triângulo retângulo. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Seja  $AD$  a altura relativa ao vértice  $A$  do  $\triangle ABC$ , retângulo em  $A$ . Sejam  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$ ,  $BD = m$ ,  $DC = n$  e  $AD = h$ . Segue que  $a = m + n$ ,  $\angle DAC = \beta$ ,  $\angle DAB = \gamma$  e  $\beta + \gamma = 90^\circ$ . Pelo critério de semelhança AA obtêm-se:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA,$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC,$$

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC.$$

Conseqüentemente valem as proporcionalidades entre os lados:

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{h} = \frac{a}{c}, \quad (2.1.1)$$

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{n} = \frac{a}{b}, \quad (2.1.2)$$

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} = \frac{c}{b}. \quad (2.1.3)$$

De (2.1.2) e (2.1.1) encontra-se:

$$b^2 = n \cdot a, \quad (2.1.4)$$

$$c^2 = m \cdot a. \quad (2.1.5)$$

Em palavras, cateto ao quadrado é igual ao produto da sua projeção pela hipotenusa. Somando (2.1.4) e (2.1.5) chega-se na equação do Teorema de Pitágoras:

$$b^2 + c^2 = n \cdot a + m \cdot a = (n + m)a = a^2,$$

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (2.1.6)$$

Adicionalmente, de (2.1.3) mostra-se que  $h$  é a média geométrica do produto das projeções:

$$h^2 = m \cdot n \Leftrightarrow h = \sqrt{m \cdot n}. \quad (2.1.7)$$

Finalmente, de (2.1.1) encontra-se que a hipotenusa vezes a altura é igual ao produto dos catetos:

$$a \cdot h = b \cdot c. \quad (2.1.8)$$

Coletivamente as equações (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6), (2.1.7) e (2.1.8) são conhecidas como relações métricas do triângulo retângulo.

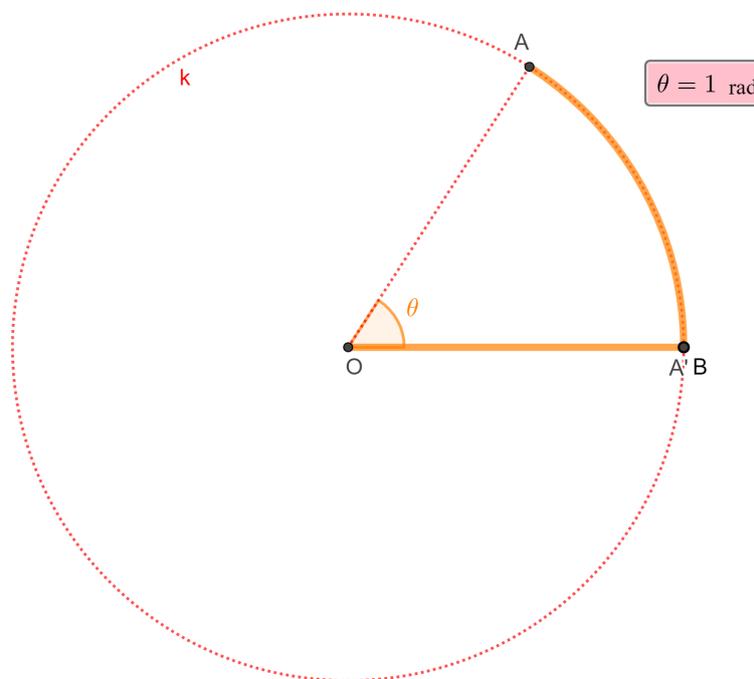
## 2.2 Radiano como unidade de medida de ângulos

**Definição 1** (Radiano). *Denomina-se Radiano, e denota-se rad, à medida angular do arco de uma circunferência de raio  $r$ , quando o arco também mede  $r$ . Ou seja, um ângulo central de 1 rad numa circunferência de raio  $r$  determina um comprimento de arco  $r$ .*

A Figura 2.2 ilustra a Definição 1. A versão interativa também mostra que cada ponto  $A$

sobre uma circunferência  $k$  pode ser mapeado no ponto  $A'$  sobre uma reta de tal forma que as medidas de  $OA'$  e  $BA$  coincidam.

Figura 2.2: Definição de Radiano e mapeamento dos pontos da circunferência numa reta. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Um ângulo de  $360^\circ$  (uma volta completa) equivale a  $2\pi$  rad, ou simplesmente  $2\pi$  (onde a unidade rad fica implícita). O comprimento  $l$  de um arco de circunferência de ângulo  $\theta$  (em Radianos) e raio  $r$  é:

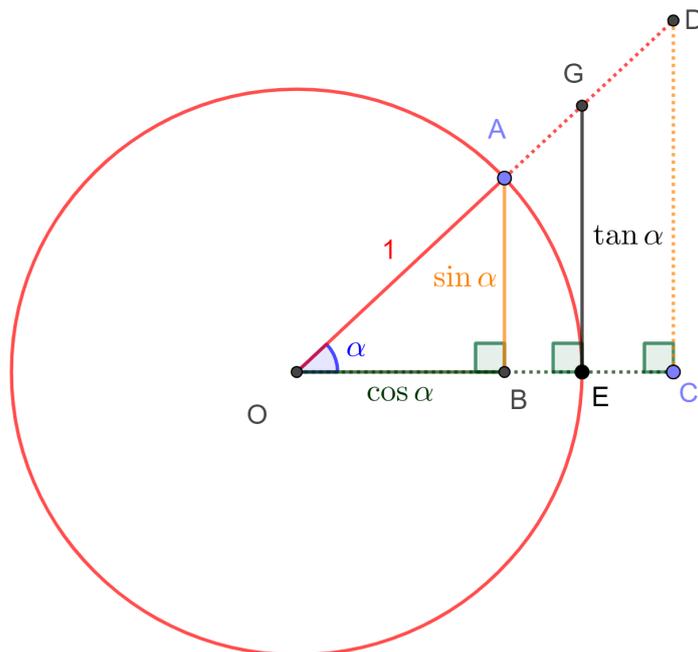
$$l = \theta \cdot r.$$

Utilizando uma regra de três encontra-se:

$$\theta = 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,29^\circ.$$

## 2.3 Funções Seno, Cosseno e Tangente

A Figura 2.3 mostra uma circunferência trigonométrica (de raio unitário) e três triângulos  $OAB$ ,  $OGE$  e  $ODC$ , retângulos em  $B$ ,  $E$  e  $C$ , respectivamente.

Figura 2.3: Funções Seno, Cosseno e Tangente. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: Os autores.

Pelo critério de semelhança AA vale que:

$$\triangle DCO \sim \triangle GEO \sim \triangle ABO.$$

Portanto,

$$\frac{DC}{DO} = \frac{GE}{GO} = \frac{AB}{AO},$$

$$\frac{CO}{DO} = \frac{EO}{GO} = \frac{BO}{AO},$$

$$\frac{DC}{CO} = \frac{GE}{EO} = \frac{AB}{BO}.$$

As igualdades anteriores não dependem da posição específica do ponto  $C$  sobre o eixo  $x$ , somente do  $\angle AOB = \angle GOE = \angle DOC = \alpha$ . Isto leva à definição das funções seno, cosseno e tangente.

**Definição 2** (Funções Seno, Cosseno e Tangente). *Num triângulo retângulo, relativo ao ângulo de medida  $\alpha$  formado por um dos catetos e a hipotenusa, vale:*

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}}.$$

Relativo a circunferência trigonométrica da Figura 2.3 vale:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{AB}{AO} = AB,$$

$$\operatorname{cos}(\alpha) = \frac{OB}{AO} = OB,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{GE}{OE} = GE.$$

A Figura 2.3 sugere que para todo ângulo  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  vale:

$$\operatorname{sen}(\alpha) \leq \alpha \leq \operatorname{tg}(\alpha).$$

## 2.4 Relação trigonométrica fundamental

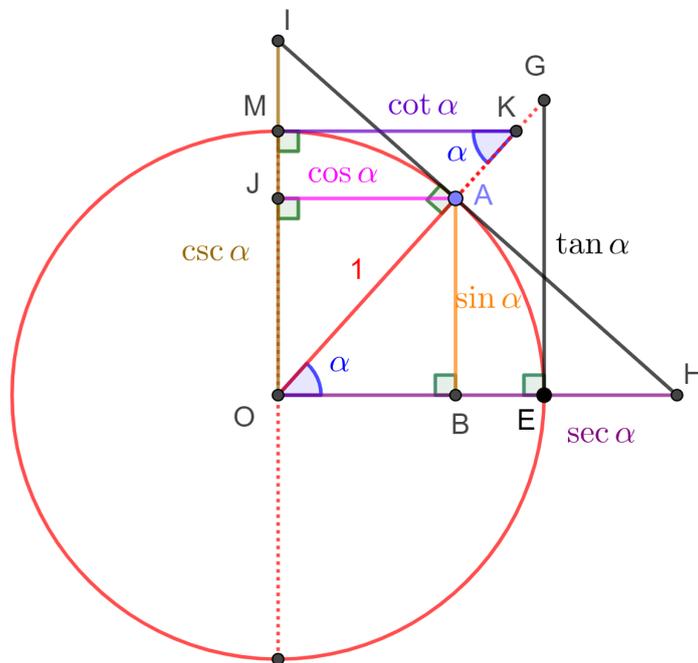
**Teorema 1** (Relação trigonométrica fundamental). *Para todo ângulo de medida  $\alpha$  vale:*

$$\operatorname{cos}^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1. \quad (2.4.1)$$

*Demonstração.* Basta aplicar o Teorema de Pitágoras no  $\triangle OBA$  da Figura 2.3. □

## 2.5 Funções Cossecantes, Secante e Cotangente

Figura 2.4: Funções Cossecantes e Secantes. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

No  $\triangle IAO$ , retângulo em  $A$ , aplica-se uma das relações métricas (O quadrado dos catetos é igual ao produto da projeção com a hipotenusa):

$$OA^2 = OJ \cdot OI,$$

$$1^2 = 1 = OI \cdot \text{sen} \alpha,$$

$$OI = \frac{1}{\text{sen} \alpha} = \text{csc} \alpha.$$

No  $\triangle HAO$ , retângulo em  $A$ , aplica-se uma das relações métricas (O quadrado dos catetos é igual ao produto da projeção com a hipotenusa):

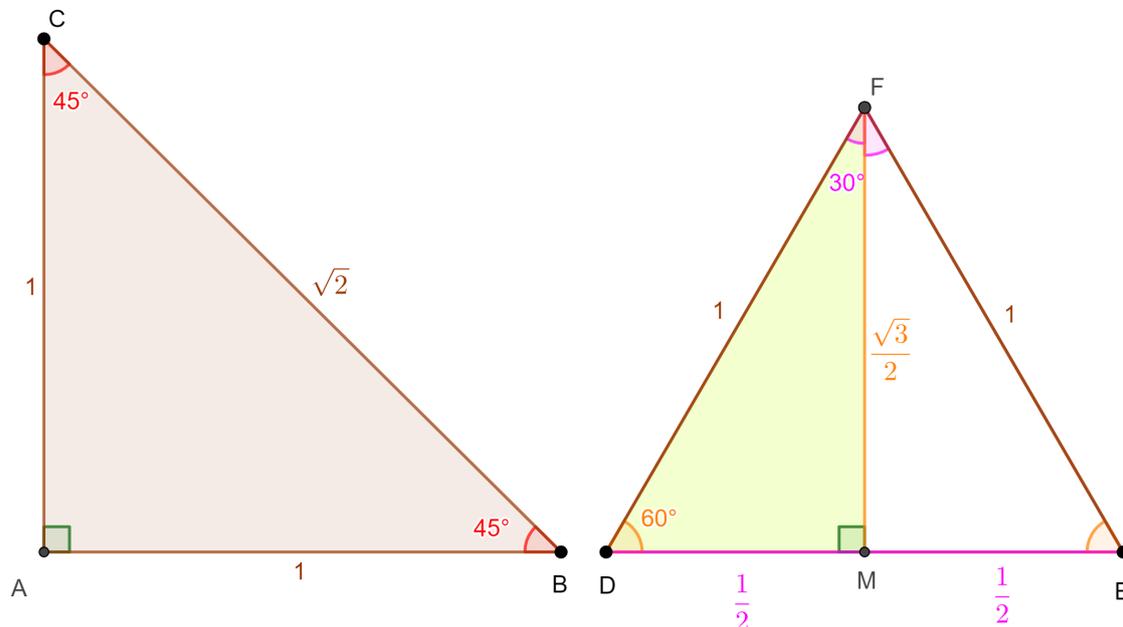
$$OA^2 = OH \cdot OB,$$

$$1^2 = 1 = OH \cdot \text{cos} \alpha,$$

$$OH = \frac{1}{\text{cos} \alpha} = \text{sec} \alpha.$$

## 2.6 Cálculo de seno e cosseno de ângulos notáveis

Figura 2.5: Cálculo de Seno e Cosseno de Ângulos Notáveis. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

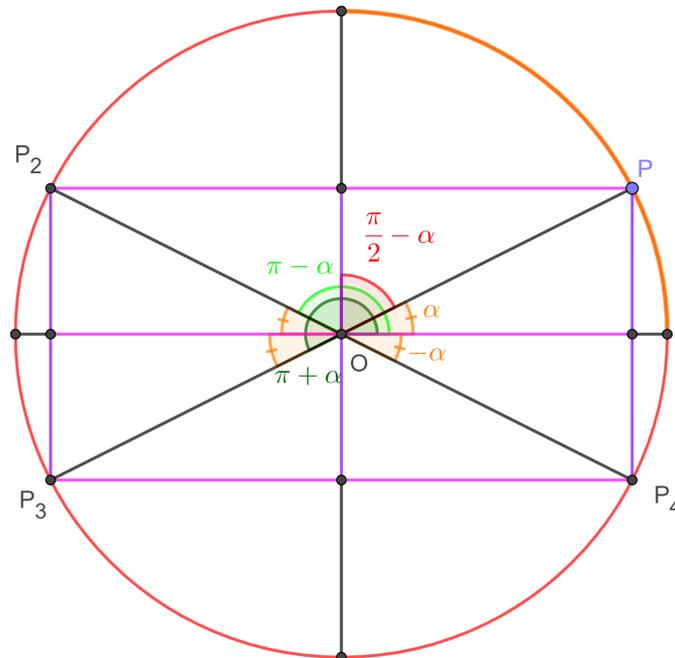
$$\text{sen}(45^\circ) = \text{cos}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{sen}(30^\circ) = \text{cos}(60^\circ) = \frac{1}{2},$$

$$\text{sen}(60^\circ) = \text{cos}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

## 2.7 Equivalências de senos e cossenos no primeiro quadrante

Figura 2.6: Equivalências de senos e cossenos no primeiro quadrante. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

$$\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}(\alpha),$$

$$\text{cos}(\pi - \alpha) = -\text{cos}(\alpha),$$

$$\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}(\alpha),$$

$$\text{cos}(\pi + \alpha) = -\text{cos}(\alpha),$$

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha),$$

$$\text{cos}(-\alpha) = \text{cos}(\alpha).$$

Também vale:

$$\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}(\alpha),$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{cos}(\alpha).$$

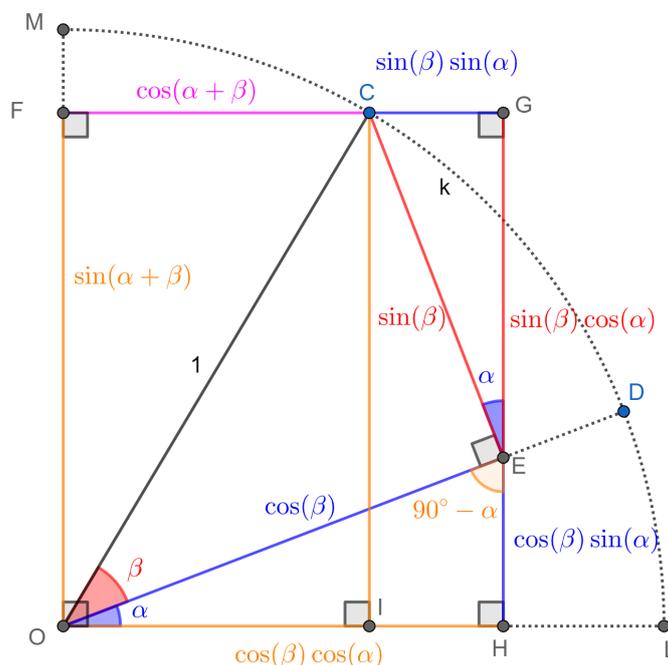
## 2.8 Seno e cosseno da soma de dois ângulos

**Teorema 2** (Seno e Cosseno da Soma de dois Ângulos). *Para quaisquer dois ângulos de medidas  $\alpha$  e  $\beta$  valem:*

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \text{sen}(\beta),$$

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos}(\alpha) \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta).$$

Figura 2.7: Seno e Cosseno da Soma de dois Ângulos. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

*Demonstração.* Considera-se uma circunferência unitária  $k$ , de centro  $O$ , e os pontos  $C, D, L, M \in k$  com  $OL \perp OM$ . Sejam  $\angle DOL = \alpha$  e  $\angle COD = \beta$ . A prova na Figura 2.7 está ilustrada no caso  $\alpha + \beta < 90^\circ$ , embora seja válida para qualquer outro valor da soma. Sejam os pontos  $E, I$  e  $F$  as projeções ortogonais do ponto  $C$  sobre os segmentos  $OD, OL$  e  $OM$ , respectivamente. Do  $\triangle OEC$  vale que:

$$OE = \cos(\beta),$$

$$CE = \text{sen}(\beta).$$

Do  $\triangle OIC$  tem-se:

$$OI = FC = \cos(\alpha + \beta),$$

$$FO = CI = \text{sen}(\alpha + \beta).$$

Seja o ponto  $H$  a projeção ortogonal do ponto  $E$  sobre o segmento  $OL$ . Do  $\triangle OHE$  vale que:

$$EH = OE \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = \cos(\beta) \operatorname{sen}(\alpha),$$

$$OH = OE \cdot \cos(\alpha) = \cos(\beta) \cos(\alpha).$$

Seja o ponto  $G = HE \cap FC$ . Nota-se que  $\angle OEH = 90^\circ - \alpha$  e  $\angle GEC = \alpha$ . Do  $\triangle EGC$  segue:

$$EG = CE \cdot \cos(\alpha) = \operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha),$$

$$CG = CE \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\alpha).$$

Portanto,

$$OF = IC = HE + EG,$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta),$$

$$FC = FG - CG = OH - CG,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta).$$

□

**Corolário 3** (Seno e Cosseno da Soma do Ângulo Duplo). *Para qualquer ângulo  $\alpha$  vale,*

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha), \quad (2.8.1)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha). \quad (2.8.2)$$

*Demonstração.* Basta colocar  $\alpha = \beta$  nas fórmulas do Teorema 2 (Seno e Cosseno da Soma de dois Ângulos). □

Uma apresentação deste teorema está disponível em [vídeo](#).

**Corolário 4.** *Para qualquer ângulo  $\alpha$  vale,*

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2(\alpha). \quad (2.8.3)$$

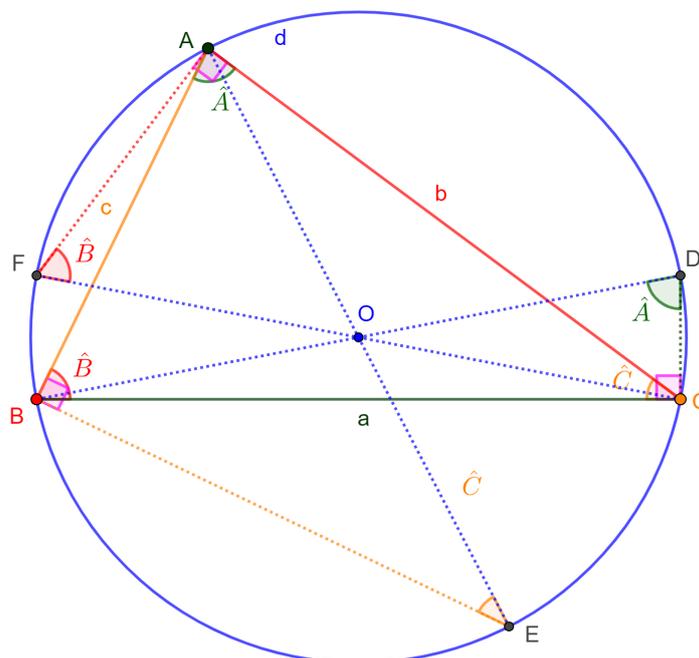
*Demonstração.* Basta utilizar em (2.8.2) a equação (2.4.1) para eliminar por separado  $\operatorname{sen}^2(\alpha)$  ou  $\cos^2(\alpha)$ . □

## 2.9 Lei dos Senos

**Teorema 5** (Lei dos Senos). *Seja o  $\triangle ABC$  de lados  $BC = a$ ,  $CA = b$  e  $AB = c$  e  $R$  o raio da circunferência circunscrita. Então,*

$$2R = \frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})}.$$

Figura 2.8: Demonstração da Lei dos Senos. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

*Demonstração.* Construir a circunferência circunscrita  $d$  utilizando duas mediatrizes (Figura 2.8). Traçar a semirreta  $BO$  e marcar o ponto  $D$  tal que  $BD$  é diâmetro de  $d$ . Segue que  $\angle BCD = 90^\circ$ . Por enxergarem a mesma corda  $BC$  vale:

$$\angle BAC = \angle BDC = \hat{A}.$$

No triângulo retângulo  $DCB$  tem-se:

$$\text{sen}(\hat{A}) = \frac{a}{2R}.$$

Ou seja,

$$2R = \frac{a}{\text{sen}(\hat{A})}.$$

Analogamente, no triângulo retângulo  $FAC$  vale que:

$$\text{sen}(\hat{B}) = \frac{b}{2R}.$$

Portanto,

$$2R = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})}.$$

Do mesmo modo, no triângulo retângulo  $EBA$  segue:

$$\text{sen}(\hat{C}) = \frac{c}{2R}.$$

Isto é,

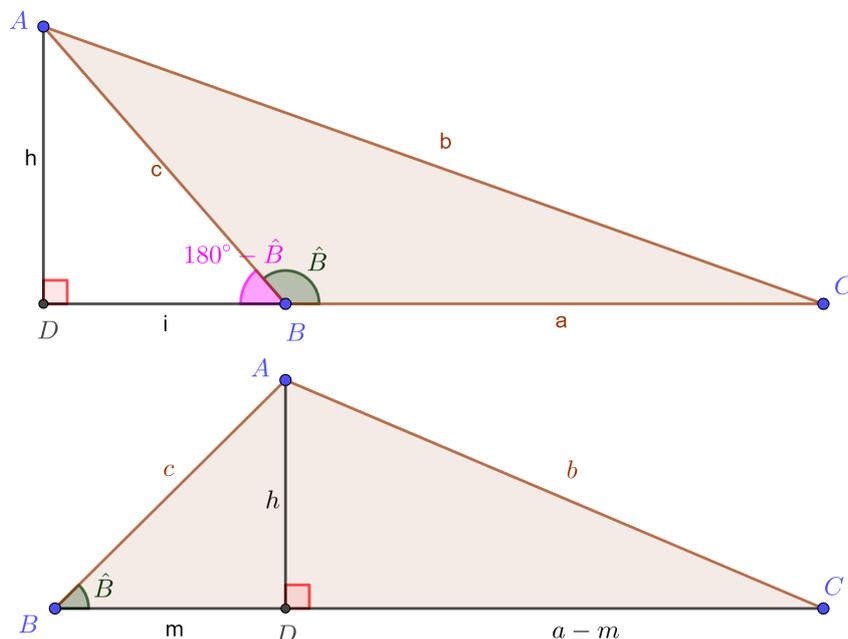
$$2R = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})}.$$

□

## 2.10 Lei dos Cossenos

**Teorema 6** (Lei dos Cossenos). *Seja o  $\triangle ABC$  de lados  $BC = a$ ,  $CA = b$  e  $AB = c$  (Figura 2.9). Então,*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\hat{B}).$$

Figura 2.9: Lei dos Cossenos. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: Os autores.

*Demonstração.* Devem-se estudar dois casos: i)  $90^\circ < \hat{B} < 180^\circ$  e ii)  $0 < \hat{B} < 90^\circ$ .

i)  $90^\circ < \hat{B} < 180^\circ$ . Seja  $D$  o pé da altura do vértice  $A$  sobre a reta  $BC$ ,  $AD = h$  e  $BD = i$ . Aplicando-se o Teorema ?? (Teorema de Pitágoras) segue:

$$\triangle ADB \Rightarrow h^2 = c^2 - i^2,$$

$$\triangle ADC \Rightarrow h^2 = b^2 - (i + a)^2,$$

$$c^2 - i^2 = b^2 - i^2 - 2ia - a^2,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ia,$$

$$\cos(180^\circ - \hat{B}) = \frac{i}{c} = -\cos(\hat{B}) \Rightarrow i = -c \cdot \cos(\hat{B}),$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{B}).$$

ii)  $0 < \hat{B} < 90^\circ$ . Seja  $D$  o pé da altura do vértice  $A$  sobre a reta  $BC$ ,  $AD = h$  e  $BD = m$ . Aplicando-se o Teorema ?? (Teorema de Pitágoras) segue:

$$\triangle ADB \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2,$$

$$\triangle ADC \Rightarrow h^2 = b^2 - (a - m)^2,$$

$$c^2 - m^2 = b^2 - a^2 + 2am - m^2,$$

$$\begin{aligned}b^2 &= a^2 + c^2 - 2am, \\ \cos(\hat{B}) &= \frac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot \cos(\hat{B}), \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{B}).\end{aligned}$$

□

## 2.11 Relação de Stewart

Matthew Stewart [46] foi um cientista escocês que escreveu sobre geometria e movimento planetário. Nasceu em 1717 e morreu em 1785. O teorema a seguir deve-se a ele.

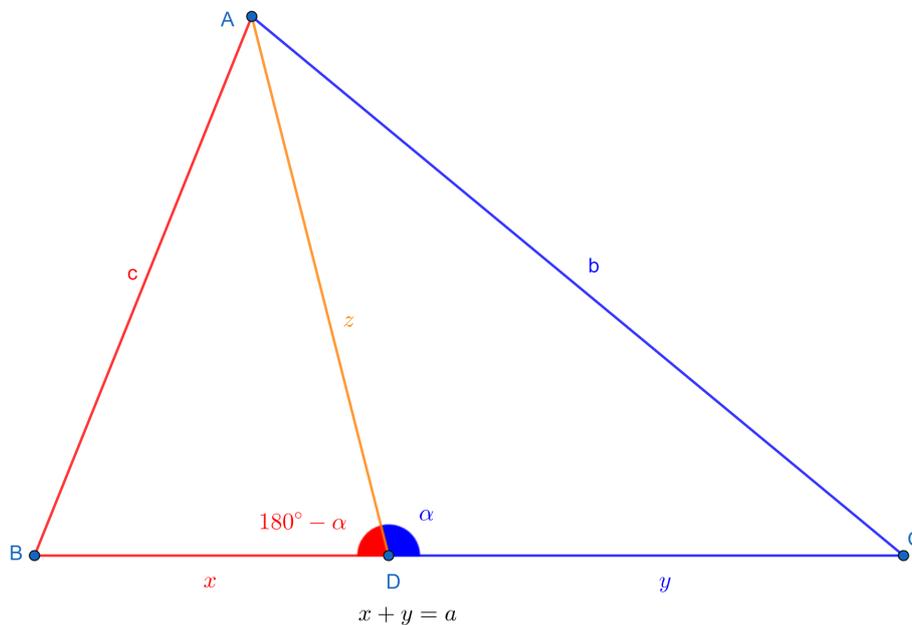
**Teorema 7** (Relação de Stewart). *Seja  $D$  um ponto no lado  $BC$  do  $\triangle ABC$ . Sejam  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $BD = x$ ,  $CD = y$  e  $AD = z$ . Vale que:*

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = a + z^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

*Ou equivalentemente:*

$$z^2 = \frac{b^2}{a}x + \frac{c^2}{a}y - xy. \tag{2.11.1}$$

Esta relação permite encontrar o comprimento de uma ceviana  $AD$  sem precisar conhecer os ângulos por ela determinados. A Figura 2.10 permite acompanhar a prova.

Figura 2.10: Guia para a demonstração do Teorema 7. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: Os autores.

*Demonstração.* Pelo Teorema 6 (Lei dos Cossenos) no  $\triangle ABD$  tem-se:

$$c^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos(180^\circ - \alpha).$$

Mas  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$ . Logo,

$$c^2 = x^2 + z^2 + 2xz \cos(\alpha),$$

$$\frac{c^2}{x} = x + \frac{z^2}{x} + 2z \cos(\alpha). \quad (2.11.2)$$

Pelo Teorema 6 (Lei dos Cossenos) no  $\triangle ACD$  tem-se:

$$b^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos(\alpha),$$

$$\frac{b^2}{y} = y + \frac{z^2}{y} - 2z \cos(\alpha). \quad (2.11.3)$$

Somando (2.11.2) e (2.11.3) segue:

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = x + y + z^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = a + z^2 \frac{a}{xy},$$

$$\frac{b^2x + c^2y}{axy} = 1 + \frac{z^2}{xy},$$
$$z^2 = \frac{b^2x + c^2y}{a} - xy.$$

□

**Observação 1.** Ainda com referência a Figura 2.10, no caso em que  $D$  é o ponto médio de  $BC$  vale  $x = y = \frac{a}{2}$  e  $z = m_a$  (mediana relativa ao vértice  $A$ ). Utilizando (2.11.1) encontra-se:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

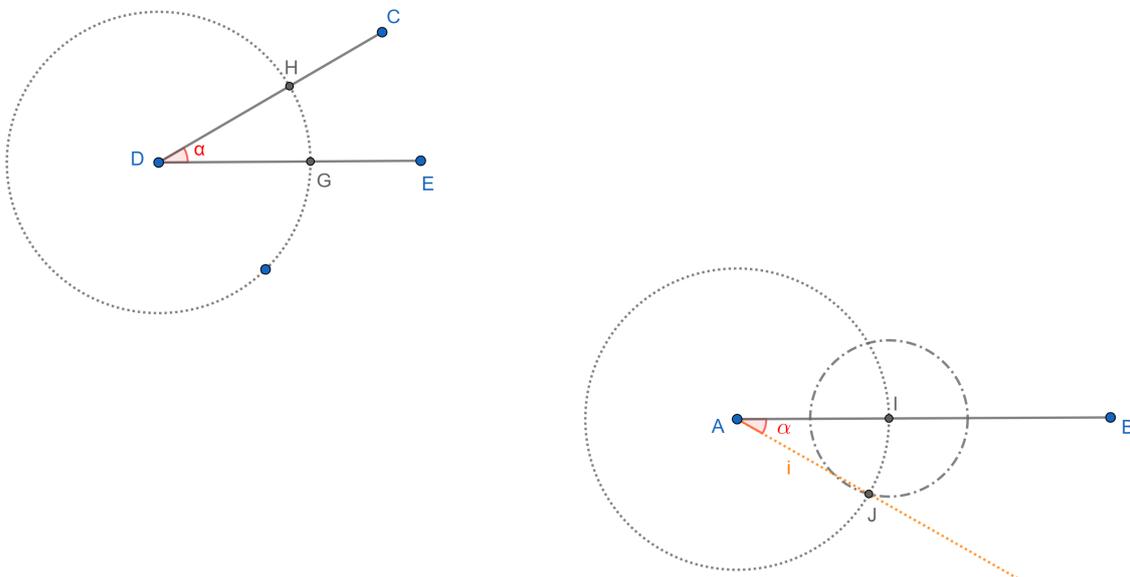
## Capítulo 3

# Construções, exercícios e desafios

### 3.1 Construção do Arco Capaz

**Exercício 1.** Construir o Arco Capaz dado um segmento  $AB$  e um  $\angle CDE = \alpha$ . Isto é, encontrar todos os pontos do espaço que são visto sob o mesmo ângulo  $\alpha$  desde  $AB$ .

Figura 3.1: Passos iniciais para a construção do Arco Capaz. Versão interativa [aqui](#).



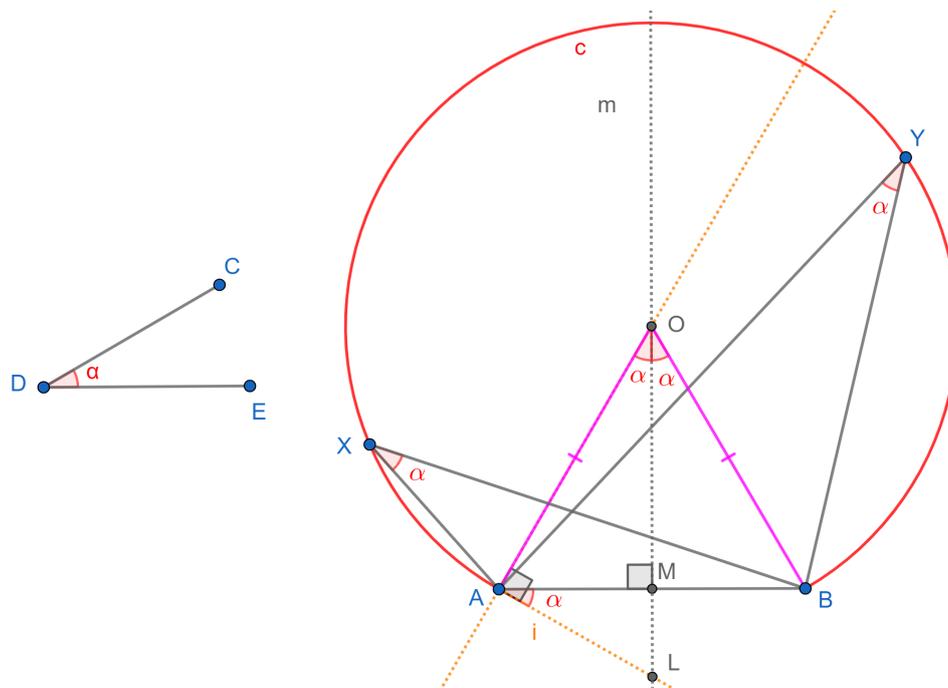
Fonte: Os autores.

Será construído a parte do Arco Capaz que fica acima da reta  $AB$ . A parte que fica abaixo é encontrada de maneira análoga.

1. Construir duas circunferências de igual raio com centro em  $D$  e  $A$ . Marcar os pontos de interseção  $H$ ,  $G$  e  $I$  conforme a Figura 3.1.

2. Com centro em  $I$  traçar uma circunferência de raio  $HG$ , marcar o ponto de interseção  $J$  e esboçar a semirreta  $i = AJ$ .
3. Por construção,  $AI = AJ = DH = DG$  e  $HG = IJ$ . Pelo critério de congruência LLL segue que  $\triangle DHG \equiv \triangle AIJ$ .
4. Construir a mediatriz  $m$  dos pontos  $A$  e  $B$ . Denotar por  $M$  o ponto médio entre  $A$  e  $B$ . Marcar  $L = m \cap i$ .
5. Passando por  $A$  construir uma perpendicular à semirreta  $AL$ . Marcar a o ponto  $O$ , interseção desta com  $m$ . Como  $\angle LAO = \angle AML = \angle OMA = 90^\circ$ , segue que  $\angle LAM = \angle AOM = \alpha$ .
6. Construir o arco  $c$ , maior de  $AB$ , com centro em  $O$  e raio  $OA$ . Como  $O$  está na mediatriz de  $AB$  tem-se que  $OA = OB$ , o  $\triangle AOB$  é isósceles e  $\angle AOM = \angle BOM = \alpha$ . De  $LA$  ser tangente a  $c$  em  $A$  o ângulo  $LAB$  é chamado de segmento e  $\angle LAB = \frac{1}{2}\angle AOB$ . O  $\angle AOB$  define-se como central. Em palavras, o ângulo de segmento é metade do central.
7. Qualquer ponto  $X$  ou  $Y$  no arco  $c$ , maior da corda  $AB$  (Arco Capaz), é visto com o mesmo ângulo. Vale que  $\angle AXB = \angle AYB = \alpha$  e estes são chamados de ângulos inscritos (Figura 3.2).

Figura 3.2: Construção do Arco Capaz no semiplano superior do segmento  $AB$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

## 3.2 Arame, triângulo isósceles e bissetriz

**Exercício 2.** *Dobra-se um pedaço de arame de 32 de comprimento formando um triângulo isósceles de 12 de base. Calcular a medida do comprimento da bissetriz do ângulo oposto à base.*

### 3.2.1 Resolução do Exercício 2

Seja  $AB$  a base do triângulo isósceles  $ABC$ . Como  $AB = 12$  e o perímetro é 32 segue que  $BC = CA = 10$ . A bissetriz do ângulo oposto à base do  $\triangle ABC$  coincide com a altura e a mediana correspondente. Isto é, sendo o ponto  $D$  pé da bissetriz vale que  $AD = DB = 6$  (Figura 3.3). Utilizando a ida do Teorema de Pitágoras no  $\triangle CDB$  encontra-se:

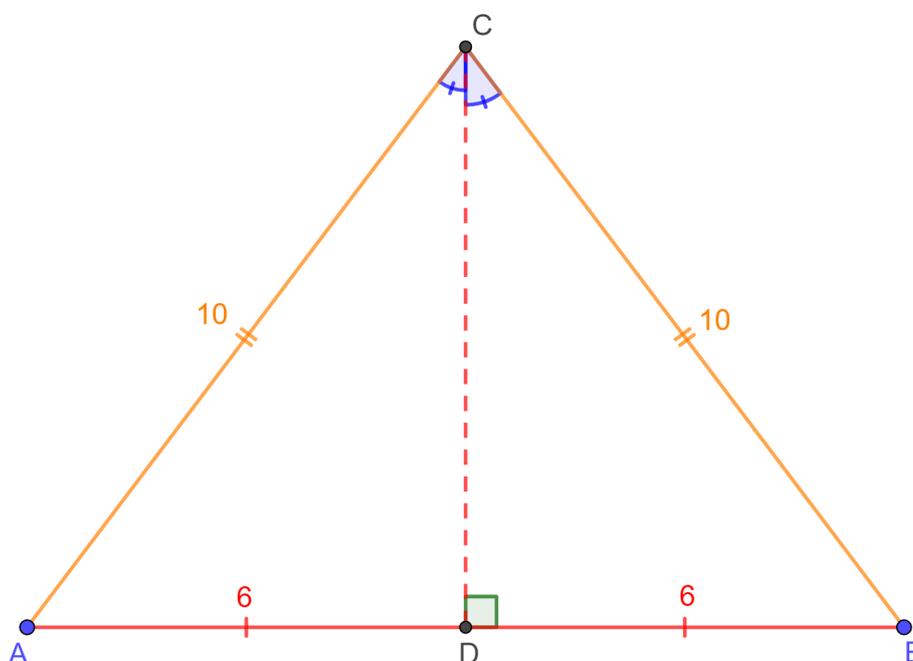
$$DB^2 + CD^2 = BC^2,$$

$$6^2 + CD^2 = 10^2,$$

$$CD^2 = 10^2 - 6^2 = (10 - 6)(10 + 6) = 4 \cdot 16,$$

$$CD = 2 \cdot 4 = 8.$$

Figura 3.3: Construção geométrica para o Exercício 2. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.



$$\frac{5L^2}{4} = 20L,$$

$$L^2 - 16L = L(L - 16) = 0,$$

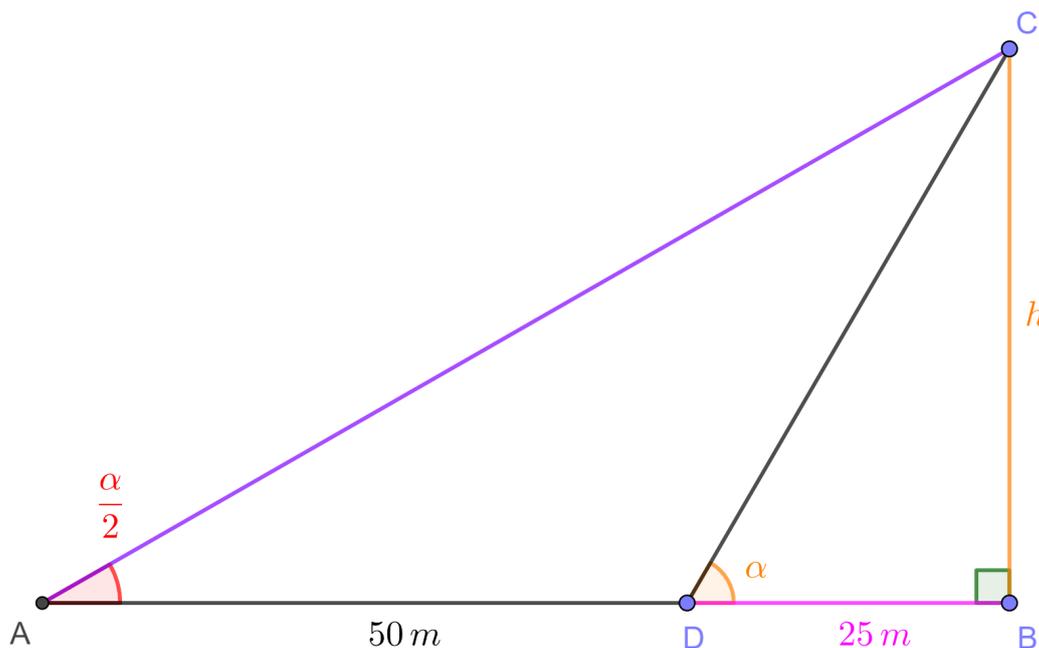
$$L = 16.$$

### 3.4 Ângulo de visão de um prédio, distâncias e altura

**Exercício 4.** Um observador estando a 25 m de um prédio o visualiza sob um certo ângulo. Afastando-se, na direção perpendicular ao prédio mais 50 m o ângulo de visualização é a metade do anterior. Qual a altura do prédio?

#### 3.4.1 Resolução do Exercício 4.

Figura 3.5: Construção geométrica inicial para o Exercício 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

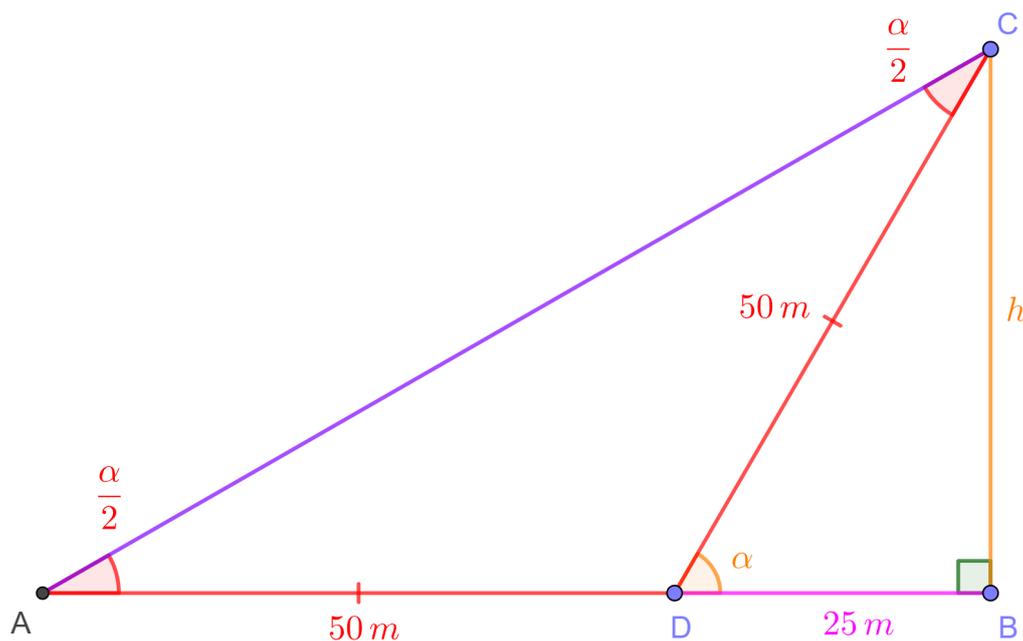
A Figura 3.5 mostra uma construção geométrica inicial. O prédio é representado pelo segmento  $BC = h$ . O observador, inicialmente no ponto  $D$ , desloca-se até o ponto  $A$ . Seja  $\angle CDB = \alpha$ . Por hipótese,  $BD = 25\text{ m}$ ,  $DA = 50\text{ m}$  e  $\angle CAD = \frac{\alpha}{2}$ .

Em relação ao  $\triangle ADC$  o  $\angle CDB$  é externo no vértice  $D$  (Figura 3.6). Isto é, soma dos ângulos internos não adjacentes. Logo,  $\angle ACD = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}$ . Ou seja, o  $\triangle ADC$  é isósceles, de

base  $AC$ . Segue que  $CD = DA = 50\text{ m}$ . Pela ida do Teorema de Pitágoras aplicado no  $\triangle CDB$  encontra-se:

$$\begin{aligned}h^2 + 25^2 &= 50^2, \\h^2 &= 50^2 - 25^2 = (2 \cdot 25)^2 - 25^2 = 3 \cdot 25^2, \\h &= 25\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Figura 3.6: Construção geométrica para o Exercício 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

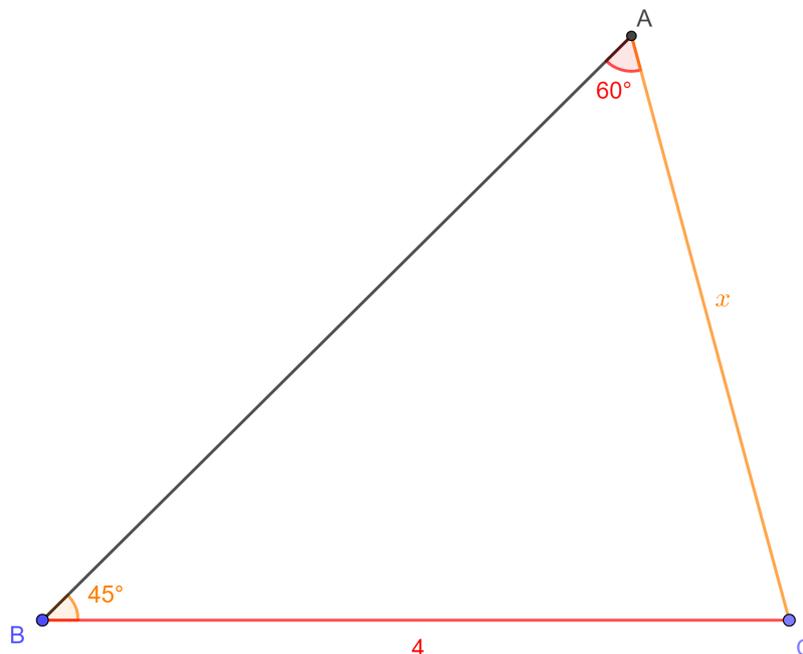
## 3.5 Exercício envolvendo a Lei dos Senos

**Exercício 5.** Num  $\triangle ABC$  são dados  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$  e  $BC = 4$ . Determinar a medida de  $AC$ .

### 3.5.1 Resolução do Exercício 5.

A Figura 3.7 mostra uma construção geométrica.

Figura 3.7: Construção geométrica para o Exercício 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Pela Lei dos Senos tem-se:

$$\frac{x}{\operatorname{sen}(45^\circ)} = \frac{4}{\operatorname{sen}(60^\circ)}.$$

Segue que:

$$x = \frac{4 \cdot \operatorname{sen}(45^\circ)}{\operatorname{sen}(60^\circ)} = 4 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

## 3.6 Problema envolvendo a Lei dos Senos

**Problema 1.** Num triângulo acutângulo  $ABC$ , o ângulo em  $A$  é  $30^\circ$ .  $H$  é seu ortocentro e  $M$  é o ponto médio de  $BC$ . Sobre a reta  $HM$  toma-se um ponto  $T$  diferente de  $H$  tal que  $HM = MT$ . Mostrar que  $AT = 2BC$ .

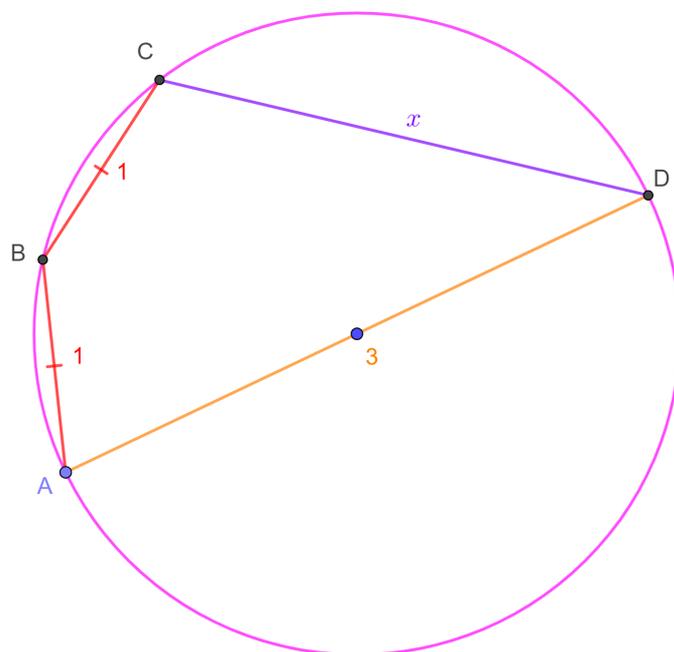
### 3.6.1 Resolução do Problema 1.

A Figura 3.8 mostra uma construção geométrica inicial.





Figura 3.10: Construção geométrica inicial para o Problema 2. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

É construído o segmento  $BD$ . Como  $AD$  é diâmetro da circunferência o  $\triangle ABD$  é retângulo em  $B$  (Figura 3.11). Pela ida do Teorema de Pitágoras segue:

$$BD = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Como  $AB = BC = 1$  os ângulos inscritos que enxergam essas cordas são congruentes:

$$\angle CDB = \angle BDA = \alpha.$$

Do triângulo  $ABD$  tem-se:

$$\cos(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Logo, aplicando a Lei dos Cossenos no  $\triangle BCD$  encontra-se:

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2 \cdot BD \cdot CD \cdot \cos(\alpha),$$

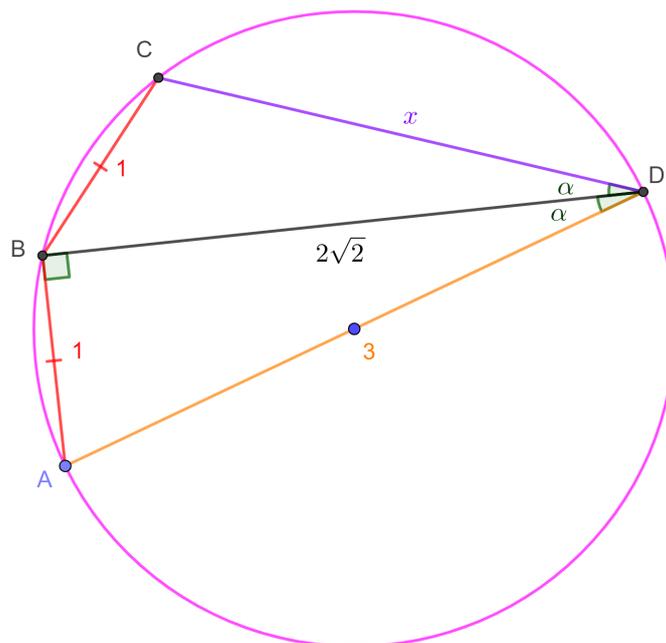
$$1 = 8 + x^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$x^2 - \frac{16}{3}x + 7 = 0,$$

$$x \in \left\{ \frac{7}{3}, 3 \right\}.$$

Como  $AD$  é diâmetro o valor da corda  $CD$  de medida  $x$  precisa ser inferior a 3. Conclui-se que  $x = \frac{7}{3}$ . A solução  $x = 3$  corresponde a um quadrilátero degenerado onde os pontos  $C$  e  $A$  coincidem. A Figura 3.11 mostra o problema resolvido.

Figura 3.11: Resolução do Problema 2. Versão interativa [aqui](#).

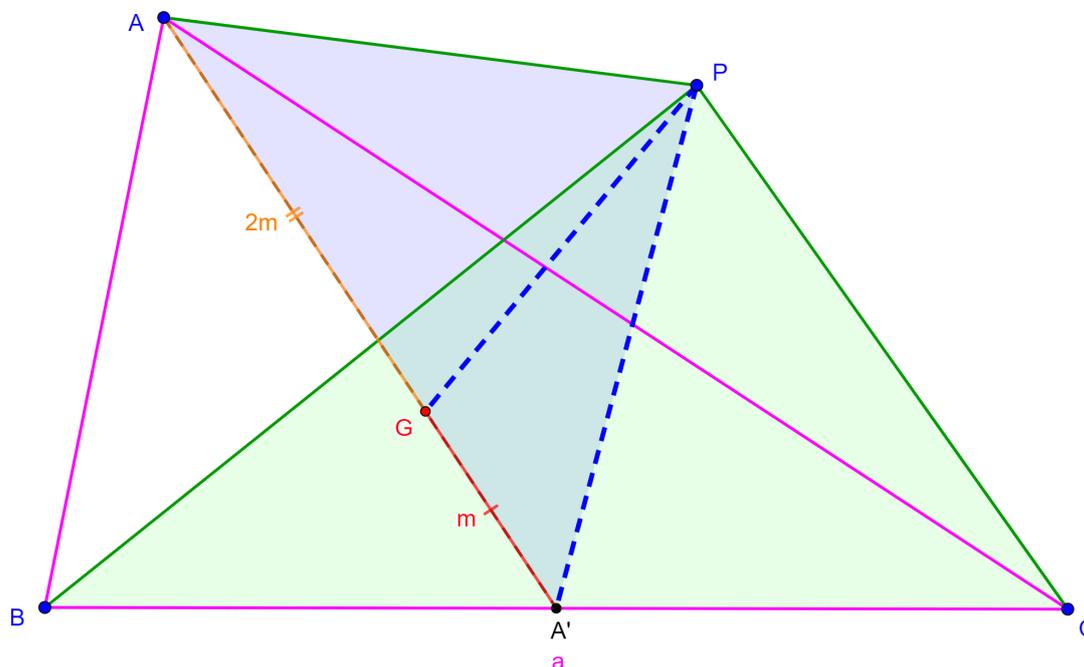


Fonte: Os autores.

### 3.8 Relação de Stewart para encontrar o mínimo da soma dos quadrados das distâncias de um ponto aos vértices

**Proposição 8.** *A soma dos quadrados das distâncias de um ponto  $P$  aos vértices de um triângulo  $ABC$  é mínima quando  $P$  é o baricentro  $G$  (Figura 3.12).*

Figura 3.12: Demonstração pela Relação de Stewart. O baricentro  $G$  minimiza a soma dos quadrados das distâncias de um ponto  $P$  aos vértices de um triângulo  $ABC$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

*Demonstração.* No  $\triangle ABC$  toma-se  $BC = a$ . Seja  $A'$  o ponto médio de  $BC$ ,  $G$  o baricentro do  $\triangle ABC$  e  $P$  um ponto qualquer. Utilizando a Relação de Stewart no  $\triangle PBC$ , com mediana  $PA'$ , tem-se:

$$PB^2 + PC^2 = 2(PA')^2 + \frac{a^2}{2}. \quad (3.8.1)$$

Como o baricentro  $G$  é tal que  $GA = 2GA'$ , seja  $GA' = m$  e  $GA = 2m$ . Aplicando o Teorema de Stewart no  $\triangle APA'$ , com ceviana  $PG$ , segue:

$$PA^2 + 2(PA')^2 = 3PG^2 + 6m^2. \quad (3.8.2)$$

Somando (3.8.1) com (3.8.2) encontra-se:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + 6m^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Como  $a$  e  $m$  são constantes (não dependem de  $P$ ), então  $PA^2 + PB^2 + PC^2$  é mínimo quando  $PG = 0$ .  $\square$

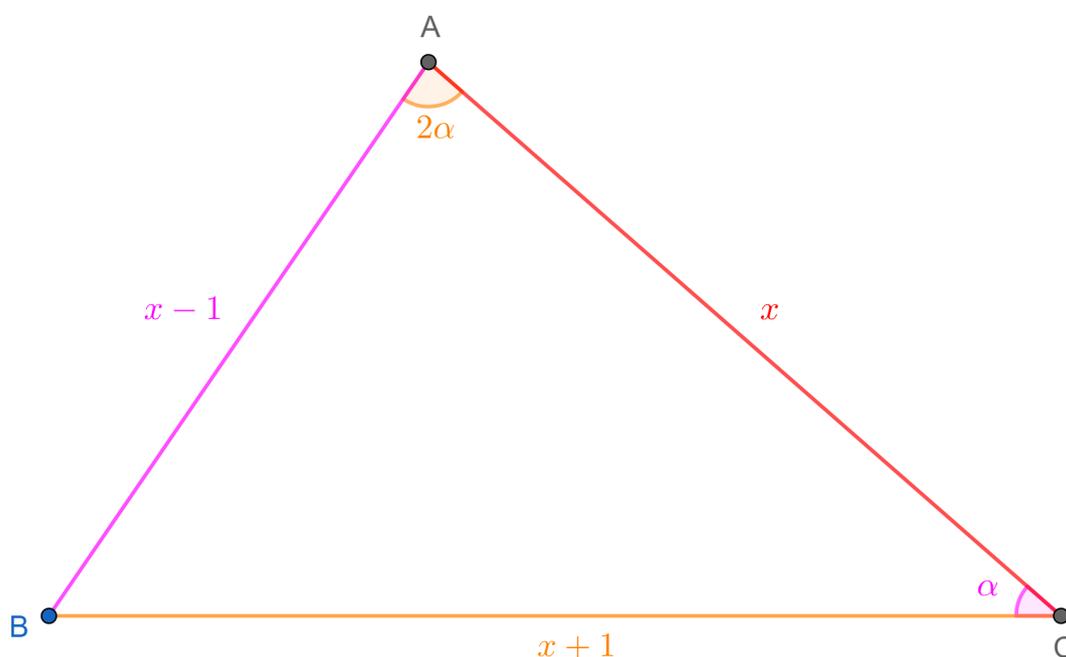
### 3.9 Lei dos Cossenos e Senos

**Problema 3.** *Seja  $ABC$  um triângulo cuja medida dos lados são números inteiros e consecutivos. Além disso, o maior ângulo é o dobro do menor. Determinar a medida dos lados deste triângulo.*

#### 3.9.1 Resolução do Problema 3.

A Figura 3.13 mostra uma construção geométrica.

Figura 3.13: Construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Considera-se o caso:

$$\angle A \Rightarrow \angle B > \angle C = \alpha.$$

Das condições do problema  $\angle A = 2\alpha$ . Como os lados são inteiros consecutivos segue que  $a = x + 1$ ,  $b = x$  e  $c = x - 1$ . Pela Lei dos Senos tem-se que:

$$\frac{x+1}{\text{sen}(2\alpha)} = \frac{x+1}{2 \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha)} = \frac{x-1}{\text{sen}(\alpha)}.$$

Desenvolvendo tem-se:

$$\cos(\alpha) = \frac{x+1}{2(x-1)}.$$

Pela Lei dos Cossenos no  $\triangle ABC$ :

$$(x-1)^2 = (x+1)^2 + x^2 - 2x(x+1)\cos(\alpha).$$

Combinando as duas últimas equações encontra-se:

$$(x-1)^2 = (x+1)^2 + x^2 - \frac{x(x+1)^2}{x-1}.$$

Desenvolvendo e simplificando:

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 = \cancel{x^2} + 2x + 1 + x^2 - \frac{x(x+1)^2}{x-1},$$

$$\frac{x(x+1)^2}{x-1} = 4x + x^2 = x(x+4),$$

$$(x+1)^2 = (x+4)(x-1),$$

$$\cancel{x^2} + 2x + 1 = \cancel{x^2} + 3x - 4,$$

$$x = 5.$$

Conclui-se que as medidas dos lados são  $a = 6$ ,  $b = 5$  e  $c = 4$ . Adicionalmente,

$$\cos(\alpha) = \frac{6}{2(4)} = \frac{3}{4},$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3}{4}\right) \approx 41,41^\circ.$$

Pode ser verificado, utilizando o mesmo procedimento, que no caso

$$\angle B > \angle A = 2\alpha > \angle C = \alpha$$

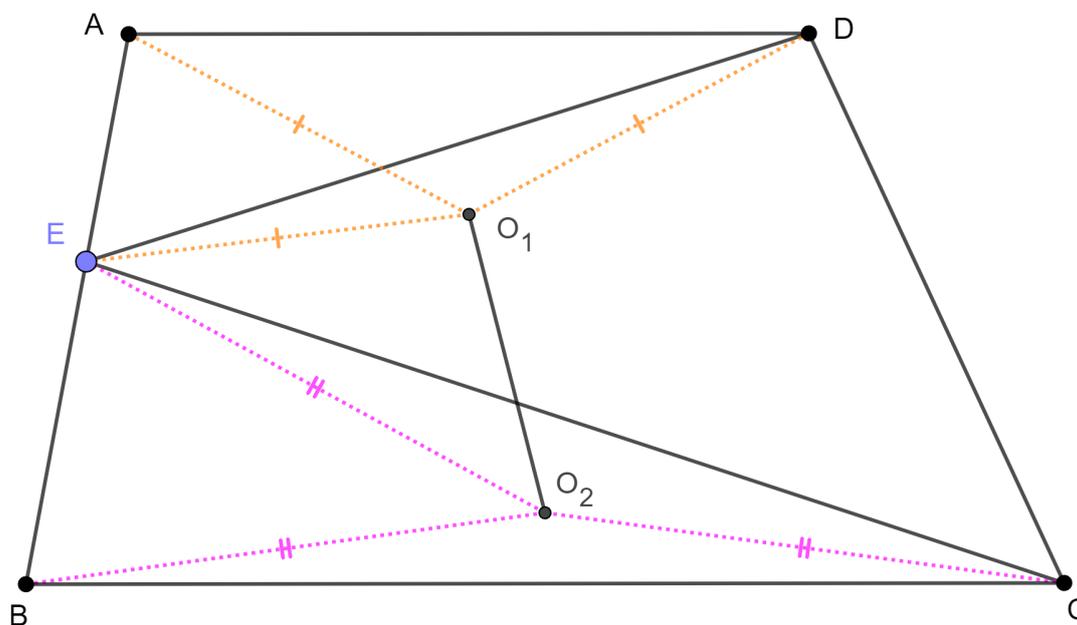
não existe solução.

### 3.10 Invariante entre circuncentros de dois triângulos num trapézio

**Problema 4.** Num trapézio  $ABCD$  vale que  $AD \parallel BC$ . Sejam  $E \in AB$ ,  $O_1$  e  $O_2$  os circuncentros dos  $\triangle AED$  e  $\triangle BEC$ , respectivamente. Provar que o comprimento do segmento  $O_1O_2$  é fixo.

## 3.10.1 Resolução do Problema 4.

Figura 3.14: Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

A Figura 3.14 mostra uma construção geométrica inicial. Sejam

$$\angle AEO_1 = \alpha,$$

$$\angle ADE = \beta.$$

Utilizando os triângulos isósceles  $O_1AE$ ,  $O_1AD$  e  $O_1DE$  ( $O_1$  equidista de  $A$ ,  $D$  e  $E$ ) encontra-se:

$$\alpha = 90^\circ - \beta. \quad (3.10.1)$$

Sejam

$$\angle BEO_2 = \gamma,$$

$$\angle ECB = \delta.$$

Usando os triângulos isósceles  $O_2BE$ ,  $O_2CE$  e  $O_2BC$  chega-se em:

$$\gamma = 90^\circ - \delta. \quad (3.10.2)$$

Seja  $\angle O_2EO_1 = \epsilon$  (Figura 3.15). Como  $\angle BEA = 180^\circ$ , de (3.10.1) e (3.10.2) segue:

$$\epsilon = \beta + \delta. \quad (3.10.3)$$

Seja o ponto  $F$  tal que:

$$EF \parallel AD \parallel BC.$$

Por alternos entre paralelas:

$$\angle DEF = \angle ADE = \beta,$$

$$\angle CEF = \angle ECB = \delta.$$

Do resultado anterior e (3.10.3) encontra-se:

$$\angle DEC = \angle O_1EO_2 = \epsilon.$$

Sejam  $\angle EAD = \hat{A}$  e  $\angle CBE = \hat{B}$ . Pela Lei dos Senos aplicada nos  $\triangle EAD$  e  $\triangle CBE$  tem-se:

$$\frac{DE}{\text{sen}(\hat{A})} = 2O_1E,$$

$$\frac{EC}{\text{sen}(\hat{B})} = 2O_2E.$$

Dividindo as duas equações anteriores:

$$\frac{DE}{EC} = \frac{O_1E \text{sen}(\hat{A})}{O_2E \text{sen}(\hat{B})}. \quad (3.10.4)$$

Seja o ponto  $G$  no prolongamento do segmento  $CB$ , a esquerda de  $B$ . Por alternos entre paralelas:

$$\angle ABG = \angle EAD = \hat{A}.$$

Logo,

$$\hat{A} = 180^\circ - \hat{B},$$

$$\text{sen}(\hat{A}) = \text{sen}(180^\circ - \hat{B}) = \text{sen}(\hat{B}).$$

Substituindo o resultado anterior em (3.10.4) encontra-se:

$$\frac{DE}{EC} = \frac{O_1E}{EO_2}. \quad (3.10.5)$$

Como  $\angle DEC = \angle O_1EO_2$  e (3.10.5), pelo critério de semelhança LAL, segue que:

$$\triangle DEC \sim \triangle O_1EO_2.$$

Consequentemente:

$$\frac{O_1O_2}{DC} = \frac{O_1E}{DE}.$$

Da equação anterior e utilizando novamente a Lei dos Senos no  $\triangle ADE$  tem-se:

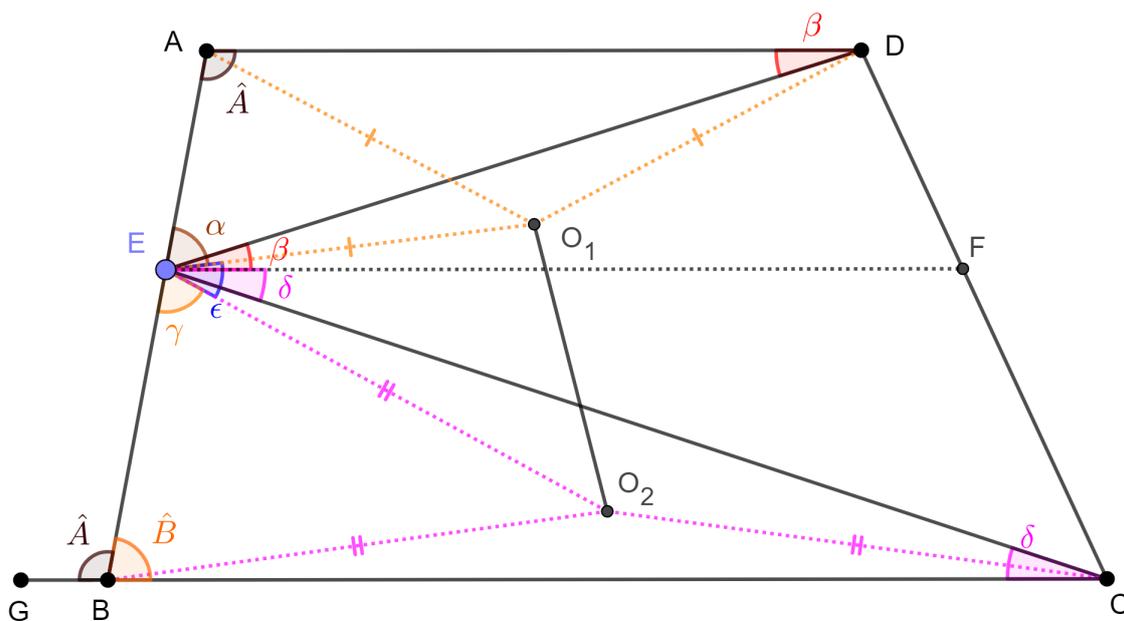
$$\frac{O_1O_2}{DC} = \frac{O_1E}{2O_1E \sin(\hat{A})},$$

$$\frac{O_1O_2}{DC} = \frac{1}{2 \sin(\hat{A})}.$$

Ou seja, o comprimento do segmento  $O_1O_2$ , não depende da posição do ponto  $E \in AB$ . Portanto,  $O_1O_2$  é uma constante:

$$O_1O_2 = \frac{DC}{2 \sin(\hat{A})}.$$

Figura 3.15: Construção geométrica para o Problema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

# Capítulo 4

## Conjugados isogonais

### 4.1 Definição de conjugados isogonais

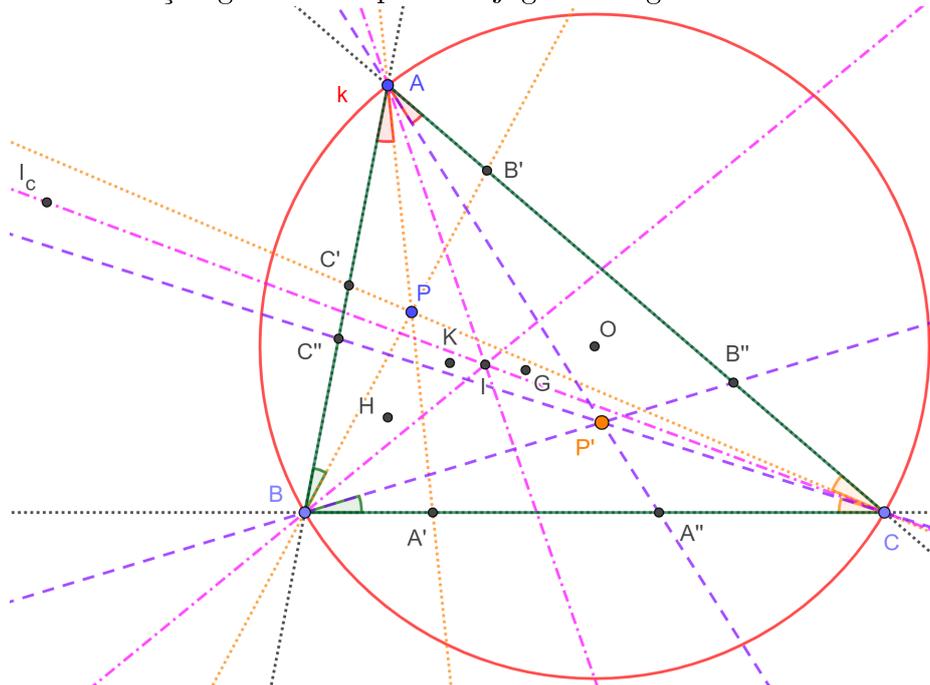
**Definição 3.** *Sejam um triângulo  $ABC$  e  $k$  seu circuncírculo. O conjugado isogonal  $P'$  do ponto  $P \notin k$  é obtido refletindo as retas  $PA$ ,  $PB$  e  $PC$  em relação às bissetrizes internas de  $ABC$ , que passam por  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Isto é,  $P'$  é tal que valem as igualdades de ângulos a seguir (Figura 4.1):*

$$\angle BAP = \angle CAP',$$

$$\angle ABP = \angle CBP',$$

$$\angle ACP = \angle BCP'.$$

Figura 4.1: Construção geométrica para conjugados isogonais. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

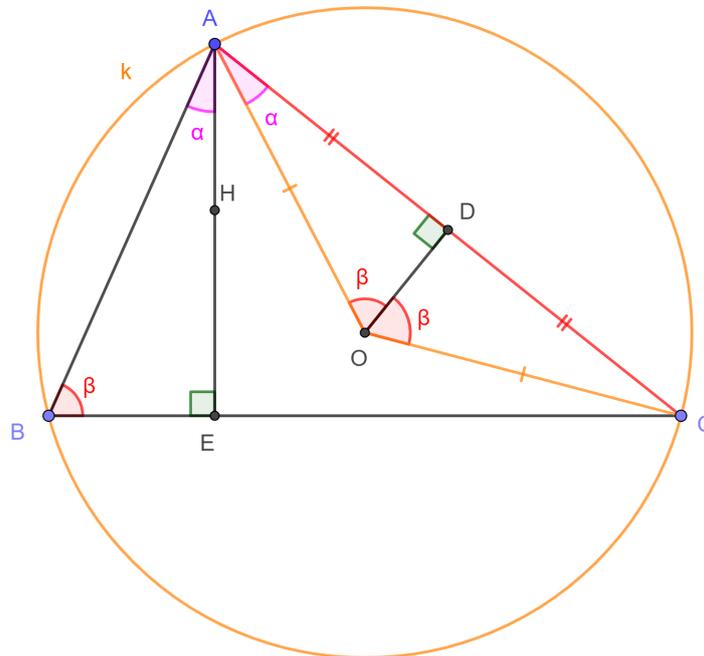
## 4.2 Conjugados isogonais de pontos notáveis

Os conjugados isogonais (Figura 4.1) de alguns pontos notáveis são:

- Do incentro  $I$  é ele mesmo.
- Dos ex-incentros  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  também são eles mesmos.
- Do circuncentro  $O$  é o ortocentro  $H$  e vice-versa (Proposição 9).
- Do baricentro  $G$  é o ponto  $K$ , chamado simediano ou de Lemoine, e vice-versa.

**Proposição 9.** *O circuncentro  $O$  e ortocentro  $H$  do  $\triangle ABC$  são conjugados isogonais (Figura 4.2).*

Figura 4.2: Construção geométrica para provar que circuncentro  $O$  e ortocentro  $H$  são conjugados isogonais. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

*Demonstração.* Como  $O$  é o centro da circunferência  $k$ , circunscrita ao  $\triangle ABC$ , então:

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta.$$

Isto é, o ângulo central é duas vezes o inscrito (Figura 4.2).

Por construção,  $AD = DC$ ,  $AO = OC$  e  $OD \perp AC$ . Logo, pelo critério de congruência LLL vale que:

$$\triangle ADO \equiv \triangle CDO$$

e  $\angle DOA = \angle DOC = \beta$ . Tem-se que  $H \in AE$  e  $AE \perp BC$ . Segue pelo critério de semelhança AA que:

$$\triangle ADO \sim \triangle AEB$$

e  $\angle DAO = \angle EAB = \alpha$ . Em outras palavras, as retas  $AO$  e  $AE$  são simétricas em relação a bissetriz ao  $\angle BAC$ . Uma construção análoga pode ser feita partindo dos outros dois vértices.  $\square$

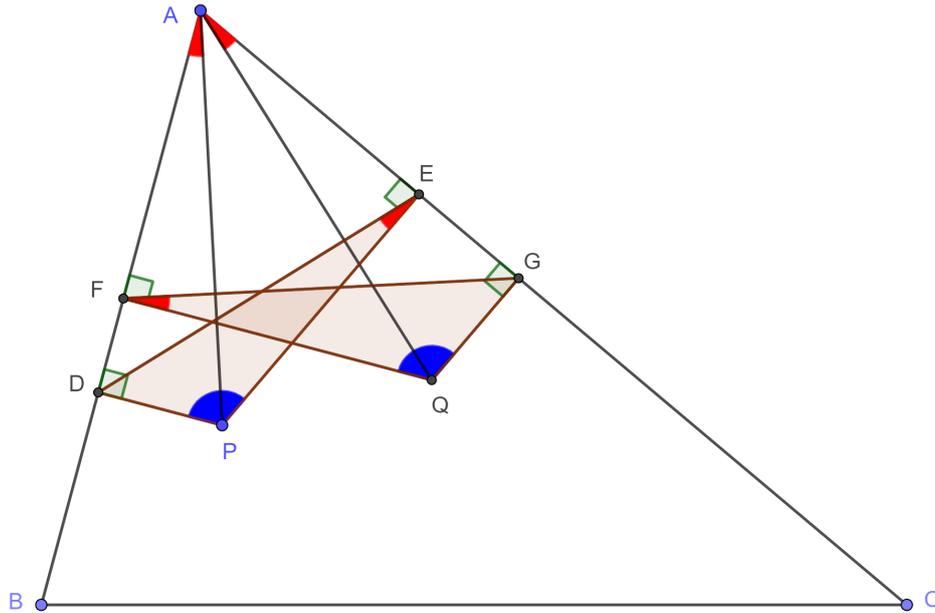
### 4.3 Teorema fundamental dos conjugados isogonais

**Lema 10** (Critério de isogonalidade relativo a um vértice). *Sejam um  $\triangle ABC$ , dois pontos  $P$  e  $Q$  e  $D$  e  $E$  ( $F$  e  $G$ ) as projeções ortogonais de  $P$  ( $Q$ ) sobre os lados  $AB$  e  $AC$ , respectivamente*

(Figura 4.3). As retas  $AP$  e  $AQ$  são isogonais se, e somente se,

$$\frac{PD}{PE} = \frac{QG}{QF}.$$

Figura 4.3: Critério de isogonalidade relativo a um vértice. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

*Demonstração.* Inicia-se supondo que  $AP$  e  $AQ$  são isogonais (Figura 4.3). Isto é,

$$\angle PAB = \angle QAC = \alpha.$$

Como  $\angle ADP = \angle AEP = 90^\circ$  o quadrilátero  $ADPE$  é inscrito e

$$\angle DEP = \angle DAP = \alpha.$$

Analogamente, como

$$\angle AFQ = \angle AGQ = 90^\circ$$

o quadrilátero  $AFQG$  é cíclico e

$$\angle GFQ = \angle GAQ = \alpha.$$

Adicionalmente,

$$\angle DPE = 180^\circ - \angle A = \angle GQF = \beta.$$

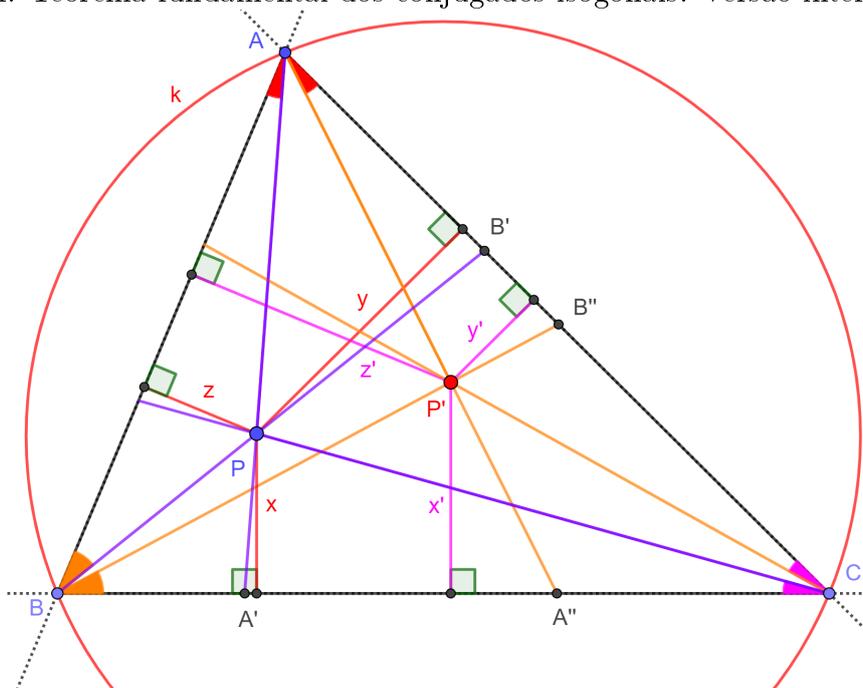
Pelo critério de semelhança ângulo-ângulo segue que  $\triangle DPE \sim \triangle GQF$ . Logo,

$$\frac{PD}{PE} = \frac{QG}{QF}.$$

Revertendo os passos prova-se a recíproca. □

**Teorema 11** (Teorema fundamental dos conjugados isogonais). *Dado um triângulo  $ABC$ ,  $k$  seu circuncírculo e três cevianas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  que concorrem em um ponto  $P \notin k$ , as cevianas isogonais a elas  $AA''$ ,  $BB''$  e  $CC''$ , obtidas através da reflexão em relação às bissetrizes internas, são concorrentes no conjugado isogonal  $P'$  (Figura 4.4).*

Figura 4.4: Teorema fundamental dos conjugados isogonais. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

*Demonstração.* Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  as distâncias de  $P$  aos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente (Figura 4.4). Analogamente, Sejam  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  as distâncias de  $P'$  aos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente.

Supondo que  $AA'' \cap BB'' = P'$ , quer-se provar que  $BB'' \cap CC'' = P'$ . Como  $P$  e  $P'$  são conjugados isogonais, pela ida do Lema 10, relativo ao vértice  $A$  vale que

$$\frac{z}{y} = \frac{y'}{z'} \Leftrightarrow zz' = yy',$$

e relativo ao vértice  $B$

$$\frac{z}{x} = \frac{x'}{z'} \Leftrightarrow zz' = xx'.$$

Segue que  $yy' = xx' \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{x'}{y'}$ . Ou seja, pela volta do Lema 10, têm-se:

$$BB'' \cap CC'' = P'.$$

Logo,

$$AA'' \cap BB'' \cap CC'' = P'.$$

□

## 4.4 Problema resolvido pelo uso de isogonais

**Problema 5.** *No triângulo  $ABC$ ,  $P$  e  $Q$  são pontos no interior tais que:*

$$\angle CBP = \angle PBQ = \angle QBA = \frac{1}{3}\angle ABC,$$

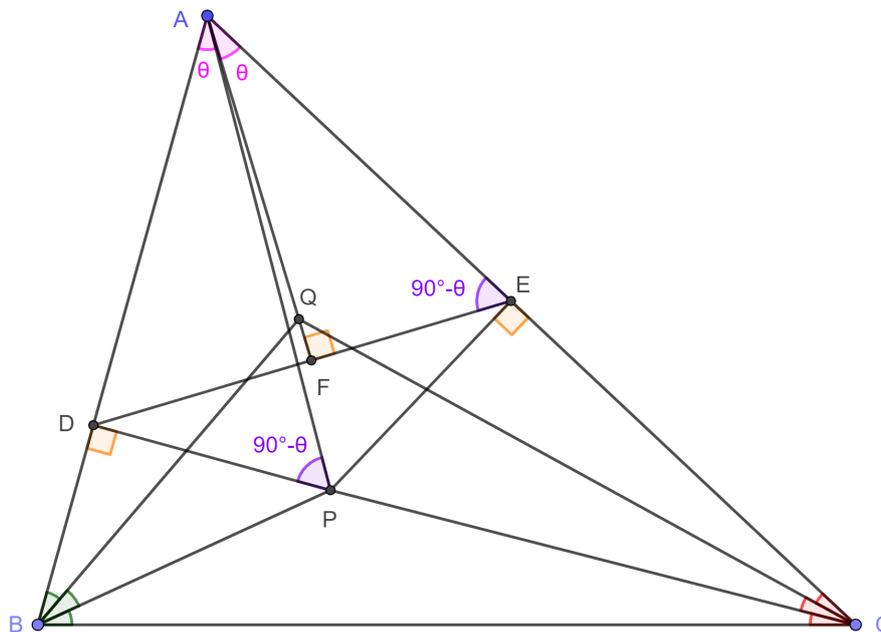
$$\angle BCP = \angle PCQ = \angle QCA = \frac{1}{3}\angle ACB.$$

*Sejam  $D$  e  $E$  as projeções ortogonais de  $P$  sobre  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. Provar que  $AQ$  é perpendicular a  $DE$ .*

### 4.4.1 Resolução do Problema 5

A Figura 4.5 permite acompanhar a resolução do Problema 5.

Figura 4.5: Resolução do Problema 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

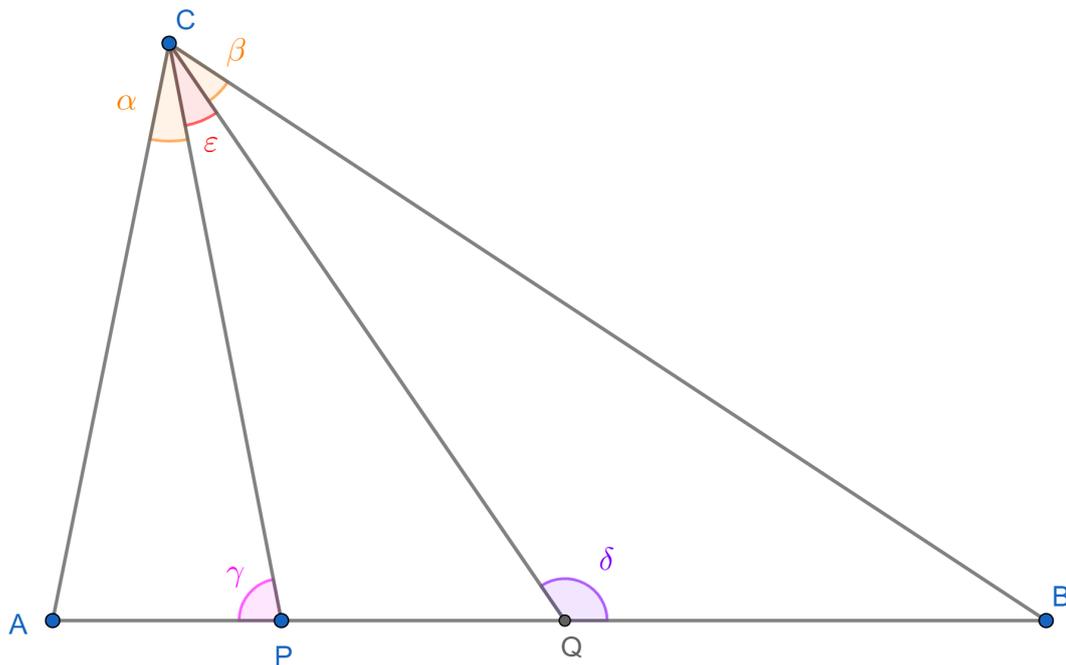
Seja  $\angle PAD = \theta$ . Então  $\angle APD = 90^\circ - \theta$  e, como  $\angle ADP = \angle AEP = 90^\circ$ , o quadrilátero  $ADPE$  é inscritível. Logo,  $\angle AED = \angle APD = 90^\circ - \theta$ .

Seja o ponto  $F = AQ \cap DE$ . Pelo  $\triangle AFE$  resta provar que  $\angle EAQ = \theta$ . Como  $\angle PBC = \angle QBA$  e  $\angle BCP = \angle QCA$ , os pares de retas  $BP$  e  $BQ$  e  $CP$  e  $CQ$  são simétricos entre si em relação às bissetrizes de  $\angle ABC$  e  $\angle ACB$ , respectivamente. Ou seja,  $P$  e  $Q$  são conjugados isogonais e  $\angle PAB = \angle QAE = \theta$ .

### 4.5 Lei dos Senos e Isogonais

**Teorema 12** (Lei dos Senos e Isogonais). *Seja o  $\triangle ABC$  e os pontos  $P, Q \in AB$  tais que  $\angle ACP = \angle BCQ$  (Figura 4.6). Então,*

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{QA}{QB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2. \tag{4.5.1}$$

Figura 4.6: Lei dos Senos e Isogonais. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: Os autores.

*Demonstração.* No caso em que  $P = Q$  a equação (4.5.1) segue do Teorema ?? (Bissetriz Interna).

Sejam  $\angle ACP = \alpha$ ,  $\angle BCP = \beta$ ,  $\angle PCQ = \varepsilon$  e  $\angle APC = \gamma$ . Pelo Teorema 5 (Lei dos Senos) aplicada nos triângulos  $APC$  e  $BPC$  tem-se:

$$\frac{PA}{AC} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\gamma)},$$

$$\frac{PB}{BC} = \frac{\text{sen}(\beta + \varepsilon)}{\text{sen}(180^\circ - \gamma)}.$$

Como  $\text{sen}(\gamma) = \text{sen}(180^\circ - \gamma)$  segue que:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AC \cdot \text{sen}(\alpha)}{BC \cdot \text{sen}(\beta + \varepsilon)}. \quad (4.5.2)$$

Analogamente, seja  $\angle BQC = \delta$ . Pelo Teorema 5 (Lei dos Senos) aplicada nos triângulos  $AQC$  e  $BQC$  tem-se:

$$\frac{QA}{AC} = \frac{\text{sen}(\alpha + \varepsilon)}{\text{sen}(180^\circ - \delta)},$$

$$\frac{QB}{BC} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\delta)}.$$

Como  $\text{sen}(\delta) = \text{sen}(180^\circ - \delta)$  segue que:

$$\frac{QA}{QB} = \frac{AC \cdot \text{sen}(\alpha + \varepsilon)}{BC \cdot \text{sen}(\beta)}. \quad (4.5.3)$$

Colocando  $\alpha = \beta$  e multiplicando (4.5.2) e (4.5.3) encontra-se:

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{QA}{QB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2.$$

□

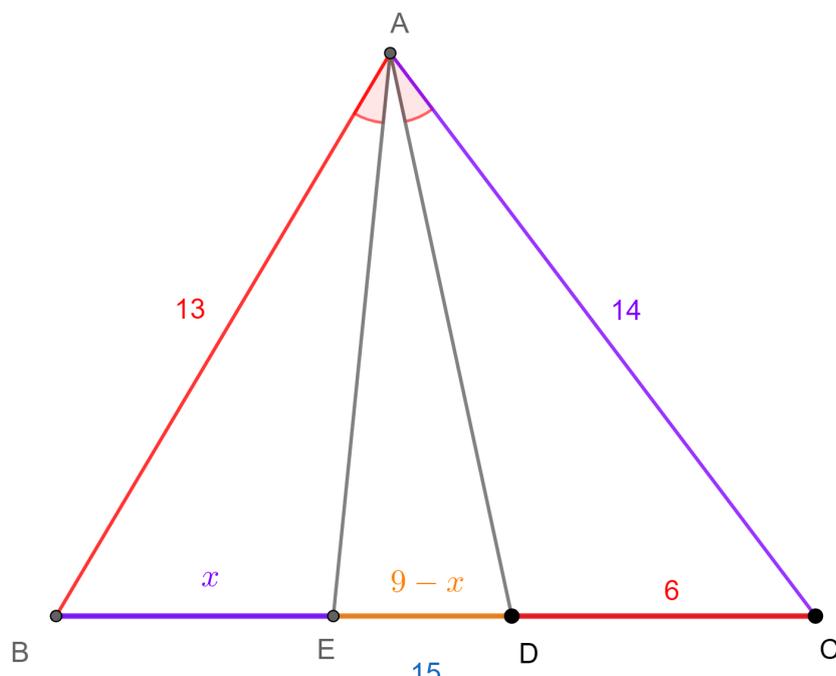
## 4.6 Exemplo de utilização da Lei dos Senos e Isogonais.

**Problema 6.** *Seja  $ABC$  um triângulo tal que  $AB = 13$ ,  $BC = 15$  e  $CA = 14$ . Seja  $D$  o ponto do segmento  $BC$  tal que  $CD = 6$ . Seja  $E$  o ponto de  $BC$  tal que  $CE > CD$  e  $\angle BAE = \angle CAD$ . Determinar  $BE$ .*

### 4.6.1 Resolução do Problema 6

Na Figura 4.7 ilustra-se a resolução do problema.

Figura 4.7: Resolução do Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Pelo Teorema 12 (Lei dos Senos e as Isogonais) vale:

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{BD}{DC} = \left( \frac{BA}{CA} \right)^2,$$

$$\frac{x}{15-x} \cdot \frac{9}{6} = \left( \frac{13}{14} \right)^2.$$

$$x = \frac{15 \cdot 13^2}{13^2 + 6 \cdot 7^2} = \frac{2535}{463}.$$

## Capítulo 5

### Problemas de olimpíadas internacionais

#### 5.1 Cosseno e Seno de ângulos notáveis. Arco Capaz. Triângulo Acutângulo. P1 NI IGO 2017.

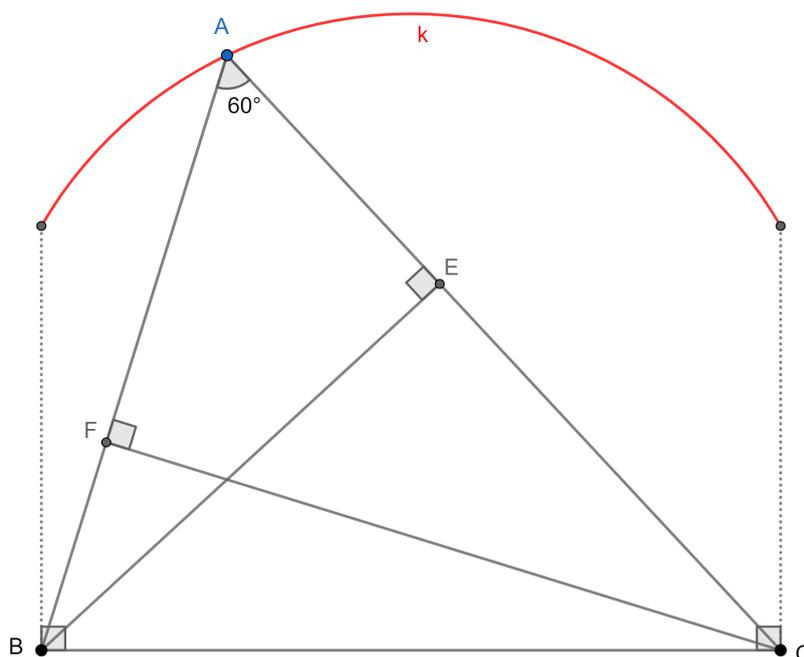
**Problema 7.** *Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo com ângulo em  $A$  de  $60^\circ$ . Sejam  $E$  e  $F$  os pés das alturas por  $B$  e  $C$ , respectivamente. Provar que:*

$$CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB). \quad (5.1.1)$$

Problema 1 (Nível Intermediário) da 4<sup>a</sup> Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2017.

##### 5.1.1 Resolução do Problema 7

Na Figura 5.1 ilustra-se a resolução do problema.

Figura 5.1: Resolução do Problema 7. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: Os autores.

Neste caso, uma construção geométrica precisa não é imprescindível para resolver o problema, bastaria ter feito um esboço. Porém, aproveita-se a simplicidade da figura para lembrar da construção do Arco Capaz  $k$  e de triângulos acutângulos. A sequência de passos para a construção do Arco Capaz pode ser vista [aqui](#). O ponto  $A$  deve estar posicionado sobre  $k$ .

Lembra-se que  $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ , logo, no triângulo  $AEB$  (retângulo em  $E$ ) pode-se escrever:

$$\cos(60^\circ) = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}. \quad (5.1.2)$$

Analogamente, no triângulo  $AFC$  (retângulo em  $F$ ) tem-se:

$$\cos(60^\circ) = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}. \quad (5.1.3)$$

A seguir troca-se  $AE$  por  $AC - CE$  e  $AF$  por  $AB - BF$  em (5.1.2) e (5.1.3):

$$\frac{AC - CE}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{AB - BF}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Colocando em evidência  $CE$  e  $BF$  segue que:

$$CE = AC - \frac{1}{2}AB,$$

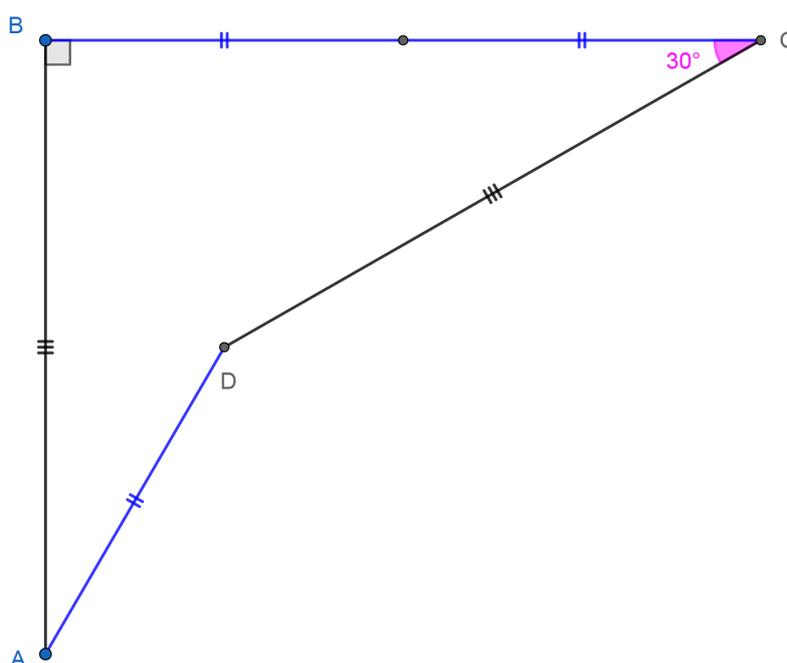
$$BF = AB - \frac{1}{2}AC.$$

Da diferença das duas equações anteriores conclui-se a validade de (5.1.1). Uma resolução deste problema também está disponível em [vídeo](#).

## 5.2 Trigonometria, triângulos isósceles e retângulos. P3 NE IGO 2015.

**Problema 8.** Na Figura 5.2 sabe-se que  $AB = CD$  e  $BC = 2AD$ . Provar que  $\angle BAD = 30^\circ$ .

Figura 5.2: Ilustração do Problema 8. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Problema 3 (Nível Elemental) da 2ª Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2015, proposto por Morteza Saghafian. A seguir são apresentadas duas resoluções.

### 5.2.1 Resolução-1 do Problema 8

Partindo do ponto  $D$  traçam-se as perpendiculares a  $BC$  e  $AB$ . Sejam os pontos  $E$  e  $F$  as interseções, respetivamente. Como  $\angle FBE = 90^\circ$  o quadrilátero  $FBED$  é um retângulo e  $FB = DE$ . No  $\triangle DCE$  tem-se:

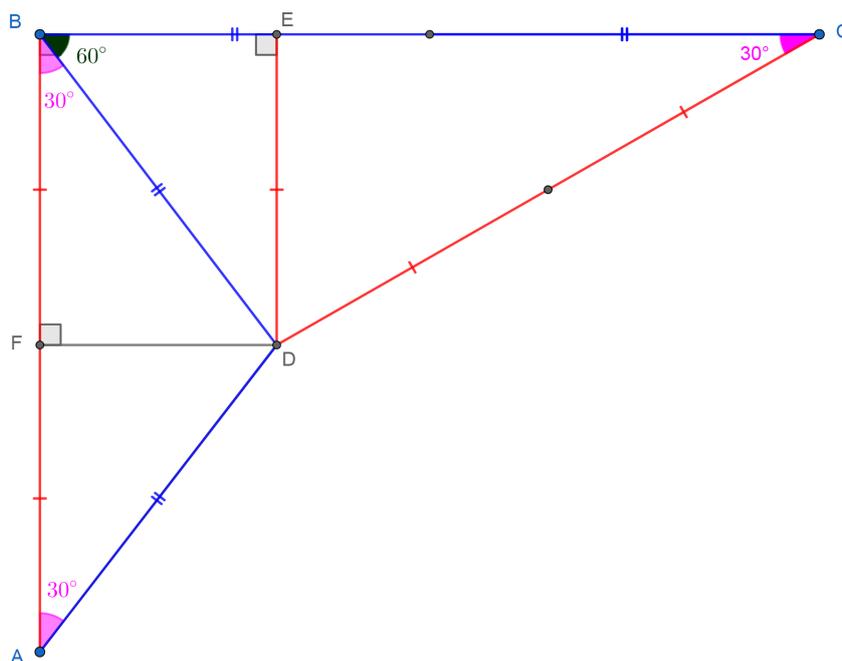
$$\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2} = \frac{DE}{DC}.$$

Mas, por hipótese,  $DC = AB$ , logo  $F$  é ponto médio de  $AB$ . Como  $DF$  é altura e mediana, o  $\triangle DAB$  é isósceles de base  $AB$ . Logo  $AD = DB$  e  $\angle DAB = \angle DBA$ . Adicionalmente, de  $BC = 2AD$  segue:

$$\frac{DB}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2} = \text{sen}(30^\circ).$$

Isto é, o  $\triangle BDC$  é retângulo em  $D$  (devido à Lei dos Senos). Portanto,  $\angle DBC = 60^\circ$  e  $\angle DBA = \angle BAD = 30^\circ$ . A Figura 5.3 mostra a construção geométrica correspondente a esta resolução do problema.

Figura 5.3: Construção geométrica da Resolução-1 do Problema 8. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

### 5.2.2 Resolução-2 do Problema 8

Partindo do segmento  $CD$  é construído um triângulo equilátero  $DCP$ . Somando os ângulos  $BCD$  e  $DCP$  segue que:  $\angle BCP = 90^\circ$ . O quadrilátero  $ABCP$  é um retângulo com

$AB = CP = DC$ . Tem-se:

$$\angle APD = \angle APC - \angle DPC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \angle BCD.$$

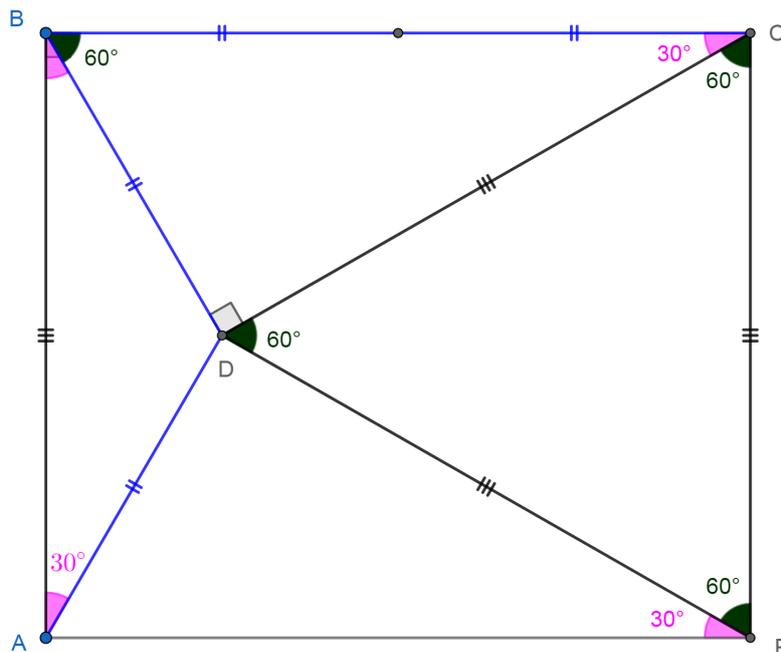
Adicionalmente,  $AP = BC$  e  $PD = CD$ . Pelo critério de congruência LAL segue  $\triangle APD \cong \triangle BCD$ . Consequentemente  $AD = BD$ , o  $\triangle DAB$  é isósceles de base  $AB$  e  $\angle DAB = \angle DBA$ .

Nota-se ainda que  $BC = 2AD$ , logo:

$$\frac{DB}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2} = \text{sen}(30^\circ).$$

Isto é, o  $\triangle BDC$  é retângulo em  $D$  (devido à Lei dos Senos). Conclui-se que  $\angle DBC = 60^\circ$  e  $\angle DBA = \angle BAD = 30^\circ$ . A Figura 5.4 mostra a construção geométrica correspondente a esta resolução. Uma discussão deste problema também está disponível em [vídeo](#).

Figura 5.4: Construção geométrica da Resolução-2 do Problema 8. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

### 5.3 Trigonometria e média geométrica em um triângulo arbitrário. P2 IMO 1974.

**Problema 9.** *Seja  $ABC$  um triângulo arbitrário. Provar que existe um ponto  $D$  no lado  $AB$  tal que  $CD$  é a média geométrica de  $AD$  e  $BD$  se, e somente se,*

$$\sqrt{\sin(\hat{A}) \sin(\hat{B})} \leq \sin\left(\frac{\hat{C}}{2}\right). \quad (5.3.1)$$

A IMO 1974 foi realizada na cidade de Erforte, na Alemanha. O problema acima foi proposto por Matti Lehtinen da delegação da Finlândia [3].

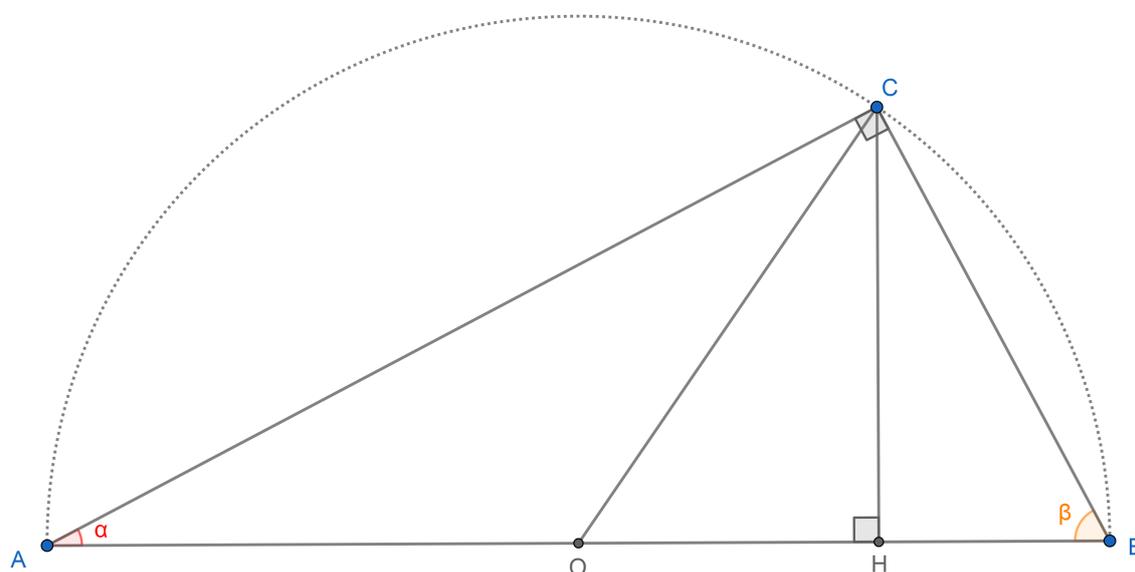
#### 5.3.1 Caso do triângulo retângulo no Problema 9.

A Figura 5.5 mostra o caso em que o  $\triangle ABC$  é retângulo em  $C$ . Sabe-se que existem dois pontos  $D$  com a propriedade requerida:  $D_1 = H$  está no pé da altura em relação ao vértice  $C$  e  $D_2 = O$  está no ponto médio do segmento  $AB$ . Nos dois casos vale:

$$\frac{CD^2}{AD \cdot BD} = 1. \quad (5.3.2)$$

Em outras palavras,  $CD$  é a média geométrica de  $AD$  e  $BD$ . Para  $D_1$  a equação (5.3.2) é uma das relações métricas do triângulo retângulo, o quadrado da altura relativa ao vértice com ângulo reto é o produto das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. Para  $D_2$  vale que  $CO = AO = BO$ , a mediana relativa à hipotenusa mede a metade desta.

Figura 5.5: Em um triângulo retângulo existem dois pontos com a propriedade requerida. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Com  $\hat{A} = \alpha$ ,  $\hat{B} = \beta = 90^\circ - \alpha$  e  $\hat{C} = 45^\circ$  a equação (5.3.1) transforma-se em:

$$\sqrt{\sin(\alpha) \sin(90^\circ - \alpha)} \leq \sin(45^\circ),$$

$$\sin(\alpha) \cos(\alpha) \leq \frac{1}{2}. \quad (5.3.3)$$

Um forma de mostrar que a desigualdade (5.3.3) é válida para todo  $\alpha$  é notando que:

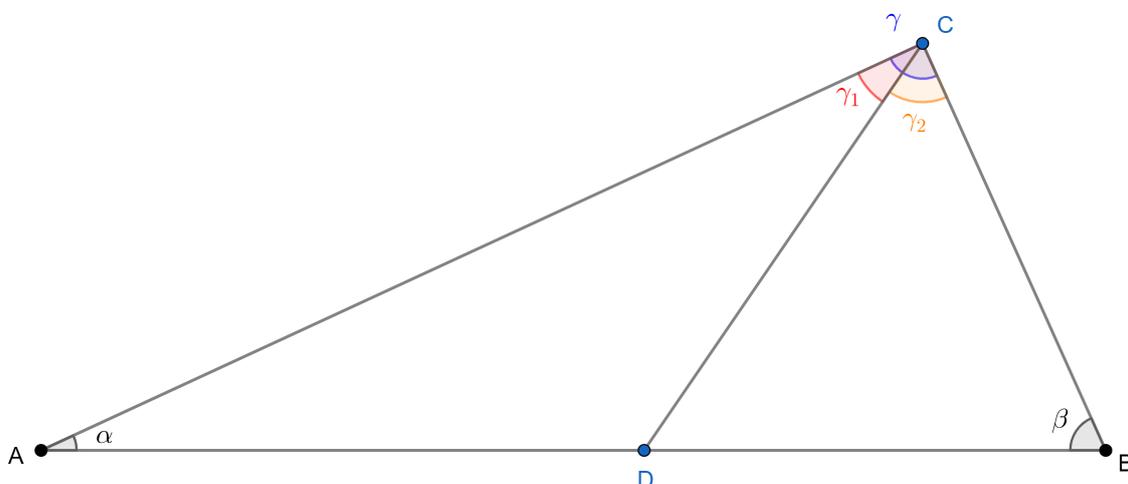
$$\sin(\alpha) \cos(\alpha) \leq \frac{1}{2} \iff \sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \leq 1,$$

o que sempre é verdade pois o cateto oposto é sempre menor que a hipotenusa.

### 5.3.2 Resolução do Problema 9.

O problema proposto dá uma condição necessária e suficiente para a existência de um ponto  $D^*$  com a propriedade referida em um triângulo arbitrário, não necessariamente retângulo, como ilustrado na Figura 5.6.

Figura 5.6: Triângulo com ponto  $D$  que satisfaz que  $CD$  é a média geométrica de  $AD$  e  $BD$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Inicia-se definindo uma função real  $f$ , com variável no conjunto de todas as posições possíveis do ponto  $D$  no lado  $AB$ ,  $D \neq A$  e  $D \neq B$ , dada pela equação:

$$f(D) = \frac{CD^2}{AD \cdot BD}. \quad (5.3.4)$$

Sejam os ângulos  $\hat{A} = \alpha$ ,  $\hat{B} = \beta$ ,  $\hat{C} = \gamma$ ,  $\hat{ACD} = \gamma_1$  e  $\hat{BCD} = \gamma_2$ . Tem-se:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo  $DCA$  encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{CD}{\text{sen}(\alpha)} &= \frac{AD}{\text{sen}(\gamma_1)}, \\ \frac{CD}{AD} &= \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\gamma_1)}. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Analogamente, aplicando a Lei dos Senos no triângulo  $DCB$  encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{CD}{\text{sen}(\beta)} &= \frac{BD}{\text{sen}(\gamma_2)}, \\ \frac{CD}{BD} &= \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\gamma_2)}. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Com as equações (5.3.5) e (5.3.6) reescreve-se (5.3.4) como:

$$f(D) = \frac{\text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\gamma_1) \text{sen}(\gamma_2)}. \quad (5.3.7)$$

Movimentando o ponto  $D$  no lado  $AB$  do triângulo arbitrário  $ABC$  mudarão  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  e conseqüentemente  $f(D)$ . Quer-se encontrar o conjunto imagem dessa função, o que permitirá determinar a condição necessária e suficiente da existência do ponto  $D^*$  que satisfaz  $f(D^*) = 1$ . Para isso será procurada uma desigualdade que relacione  $\text{sen}(\gamma_1) \text{sen}(\gamma_2)$  com  $\text{sen}(\gamma)$ .

Convém neste ponto lembrar de duas identidades trigonométricas:

$$\cos(\gamma_1 - \gamma_2) = \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) + \text{sen}(\gamma_1) \text{sen}(\gamma_2), \quad (5.3.8)$$

$$\cos(\gamma_1 + \gamma_2) = \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) - \text{sen}(\gamma_1) \text{sen}(\gamma_2). \quad (5.3.9)$$

Subtraindo (5.3.9) de (5.3.8) encontra-se que:

$$\text{sen}(\gamma_1) \text{sen}(\gamma_2) = \frac{1}{2} [\cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \cos(\gamma_1 + \gamma_2)],$$

$$\text{sen}(\gamma_1) \text{sen}(\gamma_2) = \frac{1}{2} [\cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \cos(\gamma)].$$

Como  $\cos(\gamma_1 - \gamma_2) \leq 1$ , valendo a igualdade quando  $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\gamma}{2}$ , segue que:

$$\text{sen}(\gamma_1) \text{sen}(\gamma_2) \leq \frac{1}{2} [1 - \cos(\gamma)]. \quad (5.3.10)$$

Partindo de (5.3.9) pode-se escrever:

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\cos(\gamma) = \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\cos(\gamma) = 1 - 2 \text{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2} [1 - \cos(\gamma)] = \text{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right). \quad (5.3.11)$$

Substituindo (5.3.11) em (5.3.10) encontra-se:

$$\text{sen}(\gamma_1) \text{sen}(\gamma_2) \leq \text{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right). \quad (5.3.12)$$

Agora substituindo (5.3.12) em (5.3.7) chega-se a:

$$f(D) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\gamma_1) \operatorname{sen}(\gamma_2)} \geq \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Isto é, a imagem da função  $f$  não pode ser menor que o valor mínimo dado por:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Por outro lado, como

$$\operatorname{sen}(\gamma_1) \operatorname{sen}(\gamma_2)$$

tende a zero por valores positivos quando o ponto  $D$  tende ao ponto  $A$  ou ao ponto  $B$ , tem-se que a função  $f$  é ilimitada superiormente. Em outras palavras, vale que:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \leq f(D) < \infty.$$

Como procura-se que o valor  $f(D^*) = 1$  esteja contido no intervalo acima conclui-se que isto é possível se, e somente se,

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \leq 1,$$

$$\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)} \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right). \quad (5.3.13)$$

Quando a desigualdade anterior é satisfeita existem duas posições do ponto  $D$ , uma perto de  $A$  e outra perto de  $B$ , tais que  $f(D) = 1$ . No caso da igualdade, os dois pontos  $D$  degeneram em um.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  escreve-se  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$  em (5.3.13):

$$\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \leq \operatorname{sen}^2\left(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \leq \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \quad (5.3.14)$$

A desigualdade (5.3.14) é uma forma alternativa de escrever (5.3.1).

## 5.4 Trigonometria e soma de áreas. P12 SL da IMO 1975.

**Problema 10.** *Sejam  $A = (1, 0)$  e  $M_i$  pontos no primeiro quadrante do círculo trigonométrico de centro  $O = (0, 0)$ . Considerar os arcos  $AM_1 = \theta_1$ ,  $AM_2 = \theta_2$ ,  $AM_3 = \theta_3, \dots$ ,  $AM_\nu = \theta_\nu$ ,*

tais que:

$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \dots < \theta_\nu.$$

Provar que:

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(2\theta_i) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_{i+1}) < \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(\theta_i + \theta_{i+1}). \quad (5.4.1)$$

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Burgas, Bulgária. O problema acima foi selecionado para a lista curta (Short List, SL) da competição e proposto pela delegação da Grécia [3].

### 5.4.1 Resolução do Problema 10.

Inicialmente reescreve-se (5.4.1) como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(2\theta_i) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_{i+1}) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(\theta_i + \theta_{i+1}) &< \frac{\pi}{2}, \\ \sum_{i=1}^{\nu-1} [\operatorname{sen}(2\theta_i) - \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_{i+1}) - \operatorname{sen}(\theta_i + \theta_{i+1})] &< \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Convém neste ponto lembrar de duas identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(\theta + \beta) = \operatorname{sen}(\theta) \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta) \cos(\theta), \quad (5.4.3)$$

$$\operatorname{sen}(\theta - \beta) = \operatorname{sen}(\theta) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta) \cos(\theta). \quad (5.4.4)$$

Quando  $\theta = \beta$  em (5.4.3) tem-se:

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \quad (5.4.5)$$

e somando (5.4.3) e (5.4.4) encontra-se:

$$\operatorname{sen}(\theta + \beta) + \operatorname{sen}(\theta - \beta) = 2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\beta). \quad (5.4.6)$$

Utilizando (5.4.5) e (5.4.6) pode-se reescrever o interior do somatório em (5.4.2):

$$\operatorname{sen}(2\theta_i) - \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_{i+1}) - \operatorname{sen}(\theta_i + \theta_{i+1}) = 2 \operatorname{sen}(\theta_i) \cos(\theta_i) - 2 \operatorname{sen}(\theta_i) \cos(\theta_{i+1}),$$

$$\operatorname{sen}(2\theta_i) - \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_{i+1}) - \operatorname{sen}(\theta_i + \theta_{i+1}) = 2 \operatorname{sen}(\theta_i) [\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})].$$

Segue que (5.4.2) transforma-se em:

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} \text{sen}(\theta_i) [\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})] < \frac{\pi}{4},$$

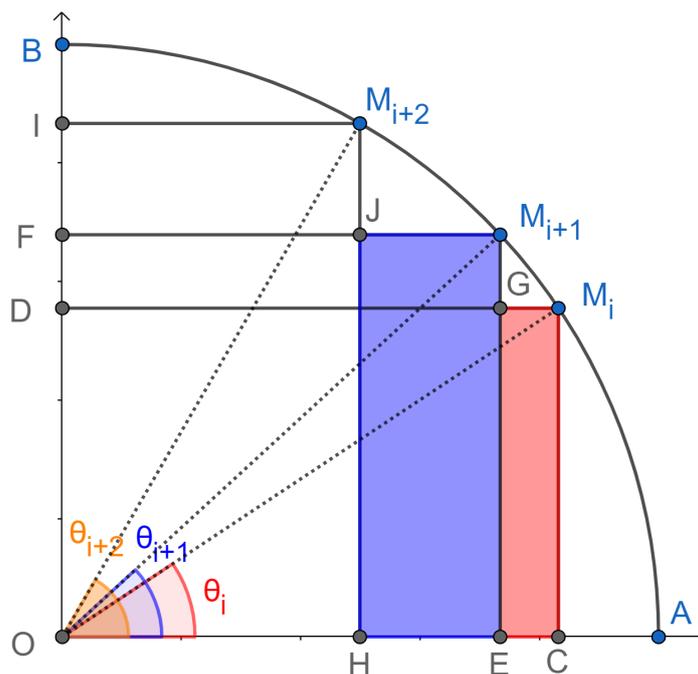
$$\text{sen}(\theta_1) [\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)] + \dots + \text{sen}(\theta_{\nu-1}) [\cos(\theta_{\nu-1}) - \cos(\theta_\nu)] < \frac{\pi}{4}. \tag{5.4.7}$$

Existe uma interpretação geométrica simples para cada um dos somandos da forma:

$$\text{sen}(\theta_i) [\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})].$$

A Figura 5.7 mostra o primeiro quadrante de um círculo trigonométrico (*raio* = 1) e três pontos genéricos sobre o arco da circunferência:  $M_i, M_{i+1}$  e  $M_{i+2}$ . Lembra-se que, por hipótese, tem-se:  $\theta_i < \theta_{i+1} < \theta_{i+2}$ .

Figura 5.7: Interpretação geométrica para  $\text{sen}(\theta_i) [\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})]$  na resolução do Problema 10. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Sejam os pontos  $C, E$  e  $H$  os pés das perpendiculares ao eixo  $x$  passando por  $M_i, M_{i+1}$  e  $M_{i+2}$ , respectivamente. Sejam os pontos  $D, F$  e  $I$  os pés das perpendiculares ao eixo  $y$  passando por  $M_i, M_{i+1}$  e  $M_{i+2}$ , respectivamente. Seja o ponto  $G$  a interseção dos segmentos  $DM_i$  e  $EM_{i+1}$  e seja o ponto  $J$  a interseção dos segmentos  $FM_{i+1}$  e  $HM_{i+2}$ .

Nota-se que as coordenadas dos pontos  $M_i$  são  $(\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$  e os segmentos  $EC$ ,  $HE$ ,  $M_iC$  e  $M_{i+1}E$  tem comprimentos  $\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})$ ,  $\cos(\theta_{i+1}) - \cos(\theta_{i+2})$ ,  $\sin(\theta_i)$  e  $\sin(\theta_{i+1})$ , respetivamente. Logo, as áreas dos retângulos  $M_iGEC$  e  $M_{i+1}JHE$  são:

$$\begin{aligned} & \sin(\theta_i) (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})), \\ & \sin(\theta_{i+1}) (\cos(\theta_{i+1}) - \cos(\theta_{i+2})), \end{aligned}$$

respetivamente.

Como a área da interseção entre retângulos vizinhos é zero, as somas das suas áreas é sempre inferior a área de  $\frac{1}{4}$  de círculo unitário. Ou seja,  $\frac{\pi}{4}$ . Isto é, vale (5.4.7) e consequentemente (5.4.1).

## 5.5 Distância entre pontos na semicircunferência trigonométrica. P15 SL da IMO 1975.

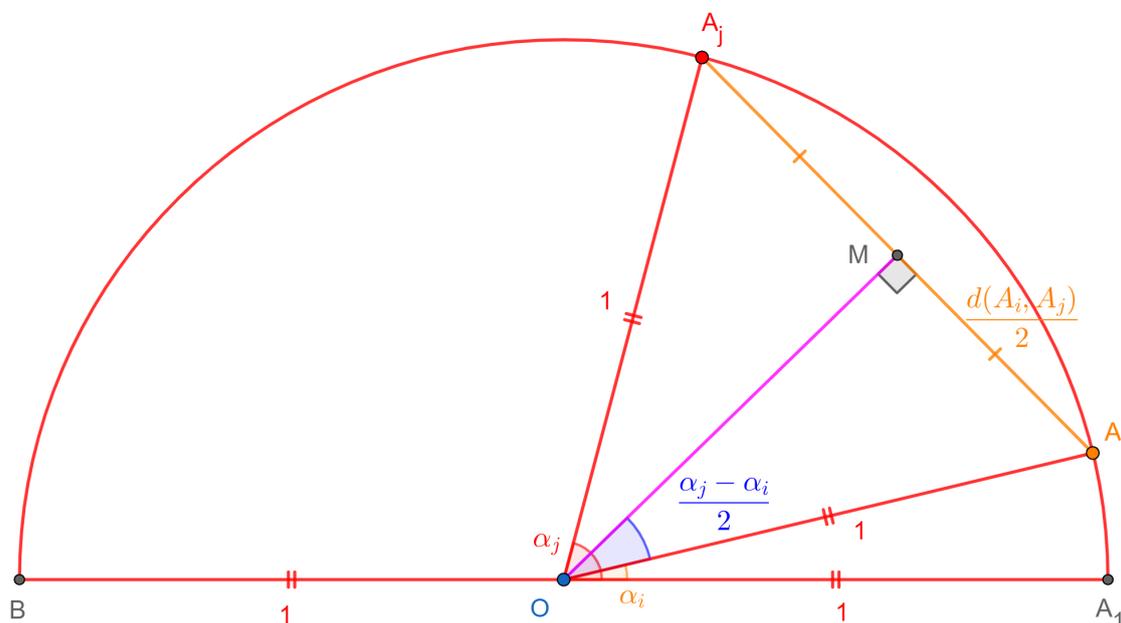
**Problema 11.** *É possível colocar 1975 pontos numa circunferência de raio 1 de tal forma que as distâncias entre quaisquer dois pontos (medida pela corda que os conecta) seja um número racional?*

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Burgas, Bulgária. O problema acima foi selecionado para a lista curta (Short List, SL) da competição e proposto pela delegação da antiga União Soviética [3].

### 5.5.1 Considerações iniciais sobre o Problema 11.

A Figura 5.8 mostra os pontos  $A_i$  e  $A_j$  em uma semicircunferência de raio 1 e centrada em  $O = (0, 0)$ . O segmento  $BA_1$  representa a horizontal. Sejam os ângulos  $\angle A_iOA_1 = \alpha_i$  e  $\angle A_jOA_1 = \alpha_j$ . Suponha-se, sem perda de generalidade, que  $\alpha_j > \alpha_i$ .

Figura 5.8: Distância entre dois pontos medida por uma corda na semicircunferência trigonométrica, que tem raio de medida 1, para resolução do Problema 11. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

**Proposição 13.** A distância entre os pontos  $A_i$  e  $A_j$  pode ser calculada como:

$$d(A_i, A_j) = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha_j - \alpha_i}{2} \right). \tag{5.5.1}$$

*Demonstração.* Como  $OA_i = OA_j = 1$  o  $\triangle A_iOA_j$  é isósceles de base  $A_iA_j$ . Segue que a altura  $OM$  também é bissetriz e mediana. Logo,

$$\angle A_iOM = \angle MOA_j = \frac{\alpha_j - \alpha_i}{2},$$

$$A_iM = MA_j = \frac{d(A_i, A_j)}{2}.$$

Pelo  $\triangle OMA_i$ , retângulo em  $M$ , pode ser escrito que:

$$\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha_j - \alpha_i}{2} \right) = \frac{d(A_i, A_j)}{2},$$

$$d(A_i, A_j) = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha_j - \alpha_i}{2} \right).$$

□

### 5.5.2 Resolução do Problema 11.

Assume-se que o centro da circunferência está no ponto  $O = (0, 0)$  e que os pontos  $A_1, A_2, \dots, A_{1975}$  são colocados na semicircunferência superior. Denotam-se os ângulos por  $\angle A_i O A_1 = \alpha_i$  com  $1 \leq i \leq 1975$ ,  $\alpha_1 = 0$  e  $\alpha_i < \alpha_j$  para todo  $i < j$ .

Utilizando a identidade para o seno da diferença

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(y) \cos(x),$$

pode-se escrever (5.5.1) como:

$$d(A_i, A_j) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_j}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha_j}{2}\right). \quad (5.5.2)$$

A distância será um número racional se  $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)$  e  $\cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)$  são racionais para todo  $1 \leq i \leq 1975$ .

Lembra-se de outras duas identidades trigonométricas que relacionam as funções seno e cosseno com a tangente:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2x) &= \frac{2 \operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}^2(x) + 1}, \\ \cos(2x) &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{tg}^2(x) + 1}. \end{aligned}$$

Nota-se agora que é possível introduzir uma mudança de variáveis:  $t = \operatorname{tg}(x)$ . Com isto, dado  $t \in \mathbb{Q}$  existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que sejam válidas simultaneamente as equações a seguir:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) &= \frac{2t}{t^2 + 1}, \\ \cos(x) &= \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Verifica-se que:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{2t}{t^2 + 1} \leq 1, \quad \forall t \in [-\infty, \infty], \\ -1 &\leq \frac{1 - t^2}{t^2 + 1} \leq 1, \quad \forall t \in [-\infty, \infty]. \end{aligned}$$

Logo, existe um número infinito de valores de  $t$  racionais, e tão pequenos quanto se queira, para os quais  $\operatorname{sen}(x)$  e  $\cos(x)$  são números racionais e por (5.5.2) a distância entre os pontos  $A_i$  e  $A_j$  será um número racional.

Alternativamente, inspirados na construção de ternos pitagóricos, pode-se verificar que se

$t$  é racional, então o triângulo de lados

$$\left(1, \frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}\right)$$

é retângulo. Tomando  $t$  racional e pequeno, encontram-se diversos ângulos para os quais senos e cossenos são racionais.

# Capítulo 6

## Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, TOM M. Ptolemy's Inequality and the Chordal Metric. **Mathematics Magazine**, v. 40, p. 233–235, 1967. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0025570X.1967.11975804>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 13)
- [2] DELGADO, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Página 16)
- [3] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009**. New York: Springer, 2011. (Página 65, 70, 72)
- [4] FIELD, J. V. **Johannes Kepler**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kepler/>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 14)
- [5] HOLANDA, B. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2011. (Página 16)
- [6] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: [10.22533/at.ed.24221310814](https://doi.org/10.22533/at.ed.24221310814). Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [7] LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de

- Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023311>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [8] LÓPEZ LINARES, J. Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis: cinco problemas resolvidos propostos para olimpíadas internacionais de matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 23, n. 1, p. 317-334, jul. 2023. DOI: 10.21167/cqdv23n12023317334. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/373/382>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [9] LÓPEZ LINARES, J. **Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicêntricos: problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 72 p. ISBN 978-65-87023-34-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023342>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [10] LÓPEZ LINARES, J.; ; BRUNO-ALFONSO, A. Trigonometria: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:14-36, jun. 2023. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6799/5334>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [11] LÓPEZ LINARES, J. **Ex-incentros: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 80 p. ISBN 978-65-87023-32-8 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023328>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [12] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [13] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [14] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3**. Portal de Livros Abertos da USP,

---

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A. **Trigonometria: dos conceitos básicos até problemas olímpicos** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 83 p. ISBN 978-65-87023-35-9 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023359>.

Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)

- [15] LÓPEZ LINARES, J. Jogos com a desigualdade triangular. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 3, p. 73-94, dez. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n32022073094. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [16] LÓPEZ LINARES, J. **Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e desigualdades**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 85 p. ISBN 978-65-87023-28-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023281>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [17] LÓPEZ LINARES, J. **Potência de ponto relativo a uma circunferência: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 64 p. ISBN 978-65-87023-30-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023304>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [18] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática**. 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [19] LÓPEZ LINARES, J. **Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 57 p. ISBN 978-65-87023-26-7 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023267>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [20] LÓPEZ LINARES, J. Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 1, p. 27-47, jul. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n12022027047. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)

---

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A. **Trigonometria: dos conceitos básicos até problemas olímpicos** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 83 p. ISBN 978-65-87023-35-9 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023359>.

- [21] LÓPEZ LINARES, J. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023250>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [22] LÓPEZ LINARES, J. **Treinamento de Professores e Estudantes do Ensino Fundamental e Médio com Problemas de Olimpíadas de Matemática**. 155 f. Tese (Livre-docência) Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, 2022. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/livredocencia/74/tde-28112022-091705/pt-br.php>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [23] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdv19202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [24] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [25] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023212>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [26] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [27] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra - v. 3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 91 p. ISBN 978-65-87023-24-3 (e-book).

Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 4 nov. 2023.  
(Página 16)

- [28] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [29] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvoll7ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [30] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdvoll8202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [31] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22-40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdvoll20202123169664jlljpmfaj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [32] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso em: 4 nov. 2023.  
(Página 16)
- [33] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)

- [34] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [35] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [36] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [37] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [38] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdv21202123169664jlljpmfj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [39] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção ProfMat). (Página 16)
- [40] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Página 16)
- [41] O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Abu Ja’far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em:

- <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi/>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 13)
- [42] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Claudius Ptolemy**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ptolemy/>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 13)
- [43] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Hipparchus of Rhodes**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Thales/>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 13)
- [44] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Johann Müller Regiomontanus**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2004. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Regiomontanus/>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 14)
- [45] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Leonhard Euler**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1998. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 14)
- [46] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Matthew Stewart**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2005. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stewart/>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 30)
- [47] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Mohammad Abu'l-Wafa Al-Buzjani**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Abul-Wafa/>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 14)
- [48] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Nicolaus Copernicus**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2002. Disponível em:

- <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Copernicus/>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 14)
- [49] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Thomas Harriot**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2000. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Harriot/>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 14)
- [50] PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Página 16)
- [51] SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [52] SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J.; RAMALHO DE FREITAS, M.P.O. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol.3, N.1, Jan-Jun 2022, pp. 70-87. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [53] SANTOS, J. P. M.; Marcus Vinícius de Araújo Lima; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J. Minimização da soma de quadrados de distâncias aos vértices em polígonos convexos, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol. 3, N. 2, Jul - Dez 2022, pp. 66 – 82. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i2.11309>. Acesso em: 4 nov. 2023. (Página 16)
- [54] THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria-Nível 2, 2006. (Página 16)

