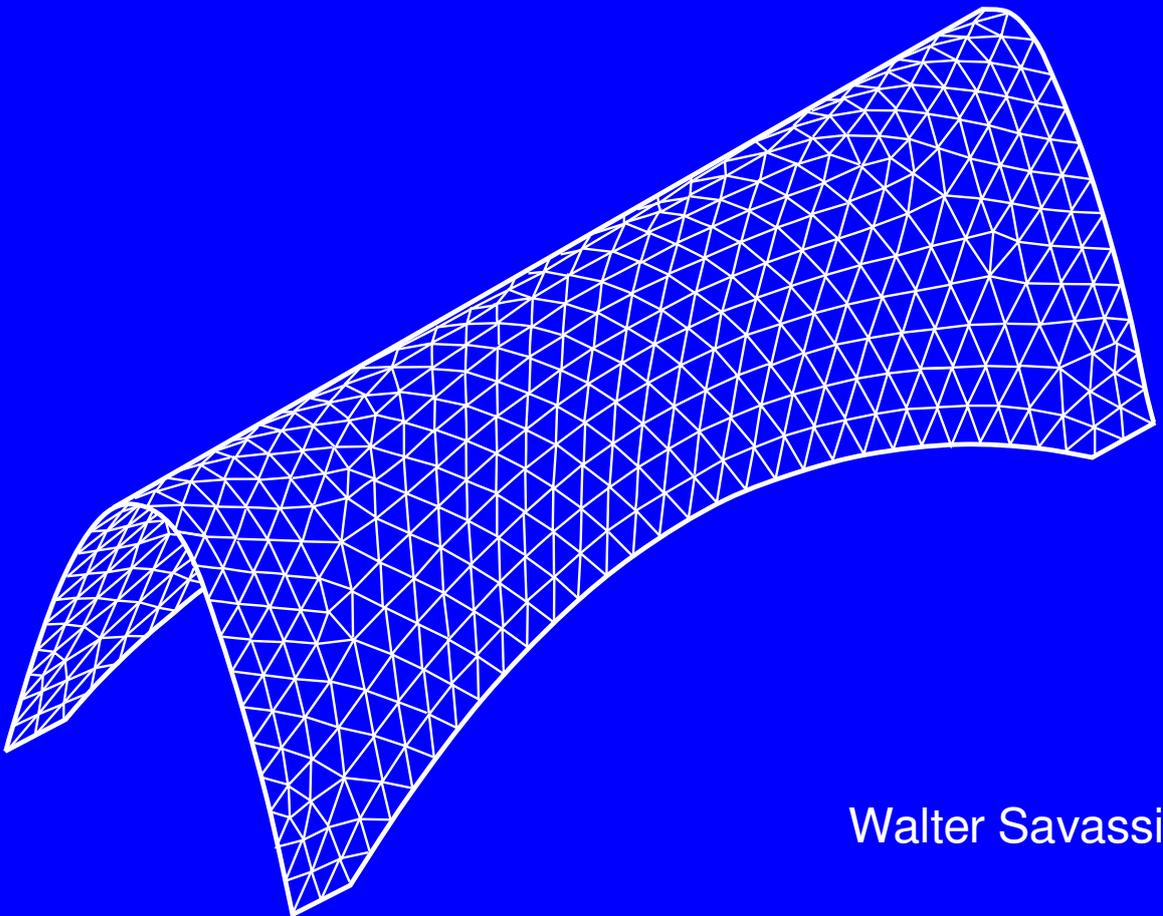


UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

na análise numérica de estruturas

(Primeiras noções sobre o Método dos Elementos Finitos)



Walter Savassi

São Carlos
EESC-USP
2016

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

MÉTODO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

na análise numérica de estruturas

(Primeiras noções sobre o Método dos Elementos Finitos)

Walter Savassi

DOI 10.11606/9788580230390

**São Carlos
EESC-USP
2016**

Universidade de São Paulo

Reitor - Prof. Dr. Marco Antonio Zago

Vice-Reitor - Prof. Dr. Vahan Agopyan

Escola de Engenharia de São Carlos

Diretor - Prof. Dr. Paulo Sergio Varoto

Vice-diretor - Prof. Dr. Sergio Persival Baroncini Proença

Ficha catalográfica preparada pelo Serviço de Biblioteca
"Prof. Dr. Sergio Rodrigues Fontes" da EESC/USP

S266m Savassi, Walter
Método da energia potencial total na análise
numérica de estruturas : primeiras noções sobre o
método dos elementos finitos / Walter Savassi. --
São Carlos : EESC/USP, 2016.
183 p.
ISBN 978-85-8023-039-0

1. Estruturas - análise numérica. 2. Método dos
elementos finitos. I. Título

©2023 Licença de uso: CC BY-SA 4.0. É permitida a reprodução de todo o conteúdo deste e-book para quaisquer fins, desde que citada a fonte.



Errata

Pág.	Linha	Correção
28	2	O elemento 2,2 da matriz é $4/3$
47	11	Na expressão de Π substituir U_s por \mathcal{U}_s
63	8	O elemento 8,12 da matriz é $-S$
63	12	O elemento 12,8 da matriz é $-S$
63	21	O elemento 8,12 da matriz é $-S$
63	25	O elemento 12,8 da matriz é $-S$
69	5	Substituir o denominador $4EJ$ por $8EJ$

Na década de 1970, o método dos elementos finitos foi lecionado pela primeira vez neste Departamento de Engenharia de Estruturas pelos professores Carlos Alberto Brebbia (Universidade de Southampton) e Walter Bosshard (ETH, Zurique). A primeira tese de doutorado, no Departamento de Engenharia de Estruturas, sobre o emprego do método dos elementos finitos em estruturas, foi defendida por este autor no ano de 1972. Depois, a partir de 1973, coube a este autor encarregar-se dessa disciplina, primeiramente na pós-graduação, até 1993, e, logo em seguida, 1975, propondo e ministrando a disciplina Introdução ao método dos elementos finitos, optativa para a graduação.

Tendo permanecido como Professor Colaborador Senior, desde a aposentadoria, 1993, dentre outras atividades, ministra disciplinas optativas. Em uma delas (Complementos de Resistência dos Materiais) há um capítulo dedicado ao método da energia potencial total, em publicação específica. Tendo-se em vista a necessidade de preparar os alunos dos cursos de graduação, de modo que tenham capacidade para utilizar os extensos recursos computacionais disponíveis para análise estrutural, durante alguns anos o autor resolveu outros exemplos, supostamente adequados para cativar e formar esses futuros profissionais. Daí resulta parte da coletânea de exemplos apresentados nesta publicação, complementada com material de Savassi, 1996. A intenção é mostrar os aspectos básicos do método da energia, de maneira detalhada e, inicialmente, somente restritos à sua essência, sem referência a aspectos puramente operacionais (para computador). Como é sabido, embora as primeiras propostas do método dos elementos finitos tenham surgido na engenharia estrutural de forma um tanto intuitiva, posteriormente foi possível demonstrar que podiam enquadrar-se como aplicação do método da energia. Posteriormente, e até hoje, novas versões foram sendo desenvolvidas e aplicadas.

O método da energia potencial total estacionária pode ser empregado, por via analítica, para obter as equações diferenciais regentes e suas condições de contorno para um determinado tipo de elemento estrutural. Porém, sua maior utilidade prática reside na possibilidade de obtenção de soluções aproximadas para as incógnitas envolvidas (deslocamentos, quando for utilizado o processo dos deslocamentos) sem necessidade de empregar as equações diferenciais. O procedimento constitui o que se conhece como a versão clássica do método dos elementos finitos.

É claro que as equações diferenciais podem também ser obtidas pela via clássica de abordagem local e, portanto, sob este ponto de vista, não haveria vantagem no emprego do método da energia.

Esta publicação procura expor, com uso de elementos estruturais simples (tirantes, vigas), os fundamentos do método e sua aplicação. A escolha de elementos estruturais simples, no início da publicação, visa não envolver expressões extensas nas várias etapas da apresentação. Também é útil, para os objetivos desta publicação, adotar essa escolha, porque se conhecem as soluções analíticas exatas e, por causa disto, mostrar como agir com o emprego do método aproximado para conseguir soluções aproximadas de boa qualidade, pois podem convergir para as respostas corretas.

Portanto, preliminarmente, e durante razoável extensão do texto, essas estruturas simples, também chamadas elementos estruturais unidimensionais, serão alvo de atenção. De modo geral as funções de aproximação empregadas para os deslocamentos são polinômios algébricos de grau n . Para facilitar a exposição considera-se que um determinado tipo de elemento estrutural, para o qual se admite uma função de aproximação com grau n definido, constituirá um modelo. Será mostrado que à medida que se empregarem, para uma série de modelos desse tipo estrutural, sucessivamente, polinômios com n crescente, a resposta aproximada convergirá para a analítica fechada. Note-se que haverá resposta, mesmo que o grau n seja inferior (obedecido certo mínimo, dependendo do tipo de solicitação a instalar no elemento estrutural) ao grau correspondente ao da resposta analítica. Nesse caso, tem-se efetivamente uma resposta aproximada. Mostra-se também que, se n_e for o grau do polinômio que descreve a solução exata, a aplicação do método com a utilização de polinômio com grau maior do que n_e dará resposta com valores nulos para os coeficientes dos monômios que tenham $n > n_e$. Isso estabelece um “critério de parada”, dentre outros possíveis, conforme será visto.

O fato de permitir obtenção de respostas aproximadas que podem convergir para a resposta exata constitui uma das características de maior utilidade do método dos elementos finitos, porque no caso de estruturas bi e tridimensionais (chapas, placas, cascas, blocos) raramente são conhecidas respostas analíticas fechadas. Então, nesse caso, somente soluções aproximadas serão passíveis de

procura, com a subdivisão em subdomínios (elementos finitos) e a adoção de funções de aproximação, do tipo polinômios algébricos. E o procedimento para essas estruturas complexas será o mesmo apresentado para as estruturas simples. Em resumo: Utilizam-se, propositalmente, as estruturas simples para a apresentação do método sem complicações. A extensão do procedimento para estruturas complexas será então mais fácil.

Como subproduto do trabalho tem-se uma coleção de elementos finitos que permitem resolver exatamente estruturas isostáticas ou hiperestáticas compostas por barras (treliças, pórticos), com carregamentos constituídos por força transversal linearmente distribuída, força e momento concentrados.

Apesar de não existir intenção explícita de detalhar aspectos relacionados com emprego de computadores, para a solução de estruturas em geral, alguns detalhes e orientações são oferecidos oportunamente, de maneira que o leitor tenha facilidade quando for utilizar pacotes computacionais comerciais, para emprego do método em trabalhos acadêmicos ou profissionais.

Acredita-se que parte do material aqui apresentado possa servir de base para a adaptação e substituição de alguns temas abordados nas disciplinas de Estática das Estruturas, permitindo que seu conteúdo fique mais próximo do que se deva ensinar, atualmente, visando o uso de computadores, para a solução de problemas da prática cotidiana.

Embora, propositalmente, no início, não se exagerou no uso de linguagem matricial, para a apresentação do assunto, aproveitou-se para enquadrar nesse formato algumas passagens das formulações. A linguagem matricial não é parte da conceituação do método da energia. Porém, para a aplicação prática será necessário compor, ou usar, programas computacionais, cujos algoritmos precisam da linguagem matricial para facilitar a programação.

Na abordagem de exemplos que utilizaram mais do que um subdomínio, para compor uma estrutura, também procurou-se expor o procedimento de tal modo que já se transmitisse o que uma codificação para linguagem de computador deverá considerar.

De modo geral, os exemplos apresentaram características geométricas e mecânicas expressas literalmente, com um mínimo de envolvimento com valores numéricos fixos. Isso permite oferecer ao leitor a oportunidade de examinar as respostas obtidas com uma análise paramétrica, que pode enriquecer a formação sobre a correta percepção do comportamento estrutural dos casos considerados.

Alguns dos exemplos, em parâmetros generalizados, foram aproveitados da apostila de Complementos de Resistência dos Materiais, do Departamento de Estruturas da EESC, de autoria de José Elias Laier, João Carlos Barreiro e Walter Savassi.

O autor agradece a notável colaboração dos colegas Professores Márcio Roberto Silva Corrêa e Rodrigo Ribeiro Paccola, no exame do material, sugestões apresentadas e principalmente estimulando o prosseguimento da preparação da publicação. Agradece também a sempre pronta disposição do prezado colega Dr. Dorival Piedade Neto, do Laboratório de Informática e Mecânica Computacional do Departamento de Engenharia de Estruturas, para processar alguns dos exemplos, visando conferir resultados e, também, para providenciar a figura da capa.

Também agradece aos prezados funcionários Francisco Carlos Guete de Brito pelo competente e caprichoso trabalho de elaboração dos desenhos e Antonio Valdair Carneiro pela digitação da parte inicial do texto.

Por último, o autor agradece a colaboração de leitores que porventura detectarem alguma incorreção involuntária no texto.

SUMÁRIO

1 MÉTODO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA	7
1.1 APRESENTAÇÃO	7
1.2 MÉTODO DA ENERGIA POTENCIAL	8
1.3 ELEMENTOS ESTRUTURAIS DEFORMÁVEIS	10
1.4 TRABALHO DAS FORÇAS EXTERNAS	10
1.5 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA	11
1.6 ENERGIA POTENCIAL DAS FORÇAS EXTERNAS	12
1.7 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	13
1.8 PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA	14
1.9 PROCURA DE SOLUÇÕES COM O PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL ESTACIONÁRIA POR VIA ANALÍTICA	15
1.10 USO DO MÉTODO DA ENERGIA POTENCIAL ESTACIONÁRIA PARA PROCURAR SOLUÇÕES APROXIMADAS	17
1.10.1 <u>Funções de aproximação</u>	18
1.10.1.1 Polinômios dependentes de parâmetros generalizados	19
1.10.1.2 Polinômios dependentes de parâmetros nodais	19
1.10.2 <u>Procedimentos de cálculo baseados na energia potencial total estacionária</u>	20
2 ELEMENTOS ESTRUTURAIS UNIDIMENSIONAIS	22
2.1 TIRANTES	22
2.1.1 <u>Introdução</u>	22
2.1.2 <u>Exemplos</u>	23
2.1.2.1 Parâmetros generalizados e uma função de aproximação para o domínio completo	23
2.1.2.1.1 <i>T1G Tirante isostático com força concentrada P na extremidade e força q distribuída em todo o comprimento ℓ, admitindo-se $u(x)$ linear para o domínio completo</i>	23
2.1.2.1.2 <i>T2G Tirante isostático com força P concentrada na extremidade, com $u(x)$ quadrático em todo o subdomínio</i>	26
2.1.2.1.3 <i>T3G Sugestão de exercício: Tirante isostático; força q uniforme; u quadrático.</i>	28
2.1.2.1.4 <i>T4G Sugestão de exercício: Tirante isostático; força externa linearmente distribuída; $u(x)$ de 3º grau</i>	29
2.1.2.1.5 <i>T5G Tirante isostático; força P no interior; $u(x)$ linear em todo o domínio</i>	31
2.1.2.2 Parâmetros generalizados e subdivisão em subdomínios	33
2.1.2.2.1 <i>T6G Tirante isostático; força P no interior; dois subdomínios; $u(x)$ linear em cada um</i>	33
2.1.2.3 Parâmetros nodais e uma função de aproximação para o domínio completo	34
2.1.2.3.1 <i>T1N Tirante isostático; P na extremidade; $u(x)$ linear</i>	38
2.1.2.3.2 <i>T2N Tirante isostático; força distribuída constante; $u(x)$ quadrático</i>	39
2.1.2.3.3 <i>T3N Tirante hiperestático; força distribuída constante; $u(x)$ de segundo grau</i>	42

2.1.2.4	Parâmetros nodais e subdivisão em subdomínios	43
2.1.2.4.1	<i>T4N Tirante isostático; força externa P no interior; dois subdomínios; $u(x)$ linear em cada um</i>	43
2.1.2.4.2	<i>T5N Tirante isostático; força distribuída uniforme; discretização sucessiva em vários subdomínios; u linear em cada um deles</i>	46
a)	<u>T5NA Primeira discretização - 2 subdomínios</u>	47
b)	<u>T5NB Segunda discretização - 4 Subdomínios</u>	50
c)	<u>T5NC Discretizações com maior número de subdomínios</u>	53
2.1.2.4.3	<i>T6N Tirante hiperestático; força distribuída constante; dois subdomínios; $u(x)$ linear em cada um</i>	55
2.1.2.4.4	<i>T7N Sugestão de exercício: Tirante hiperestático; força externa P no interior da barra; dois subdomínios; $u(x)$ linear em cada um</i>	56
2.2	TRELIÇAS	56
2.2.1	<u>Introdução</u>	56
2.2.2	<u>Generalização da relação entre deslocamentos e forças nodais de barras sob ação axial</u>	56
2.2.3	<u>Exemplos</u>	60
2.2.3.1	TR1: Treliça isostática	60
2.2.3.2	TR2: Sugestão de exercício	65
2.3	VIGAS	66
2.3.1	<u>Introdução</u>	66
2.3.2	<u>Exemplos</u>	67
2.3.2.1	Parâmetros generalizados e uma função de aproximação para o domínio completo	67
2.3.2.1.1	<i>V1G Viga prismática em balanço com força concentrada na extremidade livre, com polinômio de 2º grau.</i>	67
2.3.2.1.2	<i>V2G Viga prismática em balanço; força concentrada na extremidade livre, com polinômio de 3º grau.</i>	69
2.3.2.1.3	<i>V3G Viga em balanço com força concentrada na extremidade livre, com polinômio de grau n</i>	71
2.3.2.2	Parâmetros generalizados e subdivisão em subdomínios	71
2.3.2.2.1	<i>V4G Viga simplesmente apoiada; força concentrada no meio do vão; polinômio cúbico em cada metade</i>	72
2.3.2.3	Parâmetros nodais e uma função de aproximação para o domínio completo	74
2.3.2.3.1	<i>V5N Viga em balanço; força e momento concentrados na extremidade; polinômio cúbico</i>	74
2.3.2.3.2	<i>V6N Viga simplesmente apoiada; força uniforme; polinômio de 2º grau</i>	78
2.3.2.3.3	<i>V7N Viga simplesmente apoiada; força uniforme; polinômio de 3º grau</i>	80
2.3.2.3.4	<i>V8N Viga simplesmente apoiada; força uniforme; polinômio de 4º grau</i>	82
2.3.2.3.5	<i>V9N Viga simplesmente apoiada; força uniforme; polinômio de 5º grau: v, v' e v''</i>	85
2.3.2.3.6	<i>V10N Viga simplesmente apoiada; força linearmente variável; polinômio de 5º grau, sem derivadas segundas; 3 nós</i>	91
2.3.2.3.7	<i>V11N Subdomínio de viga; força linearmente variável; polinômio de 5º grau, 3 nós, sem derivadas segundas com <u>condensação estática</u></i>	97
2.3.2.3.8	<i>V12N Viga simplesmente apoiada; força concentrada central; polinômio de 3º grau</i>	103
2.3.2.4	Parâmetros nodais e subdivisão em subdomínios	105
2.3.2.4.1	<i>V13N Viga simplesmente apoiada; força concentrada central; polinômio de terceiro grau em cada metade</i>	105
2.3.2.4.2	<i>V14N Viga contínua de dois tramos; carregamento uniforme distinto em cada tramo; polinômios de 5º grau</i>	107
2.3.2.4.3	<i>V15N Viga contínua; força uniforme e M concentrado no apoio interno; 2 polinômios de 4º grau</i>	109
2.3.2.4.4	<i>V16N Exercício proposto: Viga simplesmente apoiada; força uniforme;</i>	

<i>discretização sucessiva com polinômios de 3º grau</i>	114
2.3.2.4.5 <i>V17N Viga contínua de dois tramos; variação de seção; forças concentradas e distribuída; polinômios de 3º e de 4º graus</i>	114
2.4 ESTRUTURA COMPOSTA	120
2.4.1 <u>EC1 Subdomínio com flexo/compressão e subdomínio com ação axial;</u>	120
2.4.2 <u>Generalização do subdomínio de pórtico</u>	126
2.4.3 <u>EC2 Exercício sugerido: pórtico</u>	129
2.4.3 <u>EC3 Subdomínios com flexão e ação axial; carregamento composto; pórtico</u>	130
2.5 PILARES	140
2.5.1 <u>Introdução</u>	140
2.5.2 <u>Exemplos</u>	140
2.5.2.1 Parâmetros generalizados e uma função para o domínio completo	140
2.5.2.1.1 <i>P1G Pilar apoiado/apoiado; P na extremidade; polinômio do 2º grau</i>	140
2.5.2.1.2 <i>P2G Pilar apoiado/apoiado; P na extremidade; polinômio do 3º grau</i>	143
2.5.2.1.3 <i>P3G Pilar apoiado/apoiado; P na extremidade; polinômio do 4º grau</i>	143
2.5.2.1.4 <i>P4G Pilar apoiado/apoiado; q uniforme; polinômio do 2º grau</i>	143
2.5.2.1.5 <i>P5G Pilar apoiado/apoiado; q uniforme; polinômio do 3º grau</i>	144
2.5.2.1.6 <i>P6G Pilar apoiado/apoiado; q uniforme; polinômio do 4º grau</i>	145
2.5.2.1.7 <i>P7G Pilar apoiado/apoiado; q uniforme; polinômio do 5º grau</i>	146
2.5.2.1.8 <i>P8G Pilar engastado/livre; P no topo; polinômio do 2º grau</i>	147
2.5.2.1.9 <i>P9G Pilar engastado/livre; P no topo; polinômio do 3º grau</i>	148
2.5.2.1.10 <i>P10G Pilar engastado/livre; P no topo; polinômio do 4º grau</i>	148
2.5.2.1.11 <i>P11G Pilar engastado/livre; q uniforme; polinômio do 3º grau</i>	150
2.5.2.1.12 <i>P12G Pilar engastado/livre; P no topo; polinômio do 4º grau</i>	151
2.5.2.2 Parâmetros generalizados e subdivisão em subdomínios	152
2.5.2.2.1 <i>P13G Pilar apoiado/apoiado; seção variável; polinômio do 3º grau em cada trecho</i>	152
3 ELEMENTOS ESTRUTURAIS BIDIMENSIONAIS	155
3.1 INTRODUÇÃO	155
3.1.1 <u>Relações entre deslocamentos e deformações</u>	155
3.1.2 <u>Relações entre deformações e tensões</u>	155
3.2 CASO BIDIMENSIONAL DO ESTADO PLANO DE TENSÕES – CHAPAS	156
3.3 CASO BIDIMENSIONAL DO ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES	156
3.4 ESTADO PLANO DE TENSÕES – CHAPAS; MÉTODO DA ENERGIA	157
3.4.1 <u>Subdomínios triangulares com aproximação de primeiro grau</u>	158
3.4.1.1 Parâmetros generalizados	158
3.4.1.2 Parâmetros nodais	159
3.4.1.2.1 <i>Relações deslocamento deformações</i>	160
3.4.1.2.2 <i>Energia de deformação</i>	161
3.4.1.2.3 <i>Carregamento</i>	161
3.4.1.2.4 <i>Energia potencial total e sua minimização</i>	162
3.4.1.2.5 <i>Matrizes de rigidez e de forças nodais equivalentes</i>	163
3.4.1.2.6 <i>Exemplo de aplicação</i>	164
a) <u>Montagem da matriz de rigidez da estrutura</u>	165
b) <u>Solução do problema</u>	167
c) <u>Cálculo das deformações e tensões</u>	167
3.4.2 <u>Subdomínios triangulares com aproximação de grau superior</u>	169

3.4.3 <u>Subdomínios poligonais (quadrângulos, etc.)</u>	170
3.5 FLEXÃO DE PLACAS	170
3.5.1 <u>Introdução</u>	170
3.5.3 <u>Hipóteses</u>	170
3.5.2 <u>Esforços solicitantes</u>	171
3.5.4 <u>Energia potencial total; esquema geral para o processo dos deslocamentos</u>	171
3.5.4.1 Estado de tensões em ponto genérico da placa	171
3.5.4.2 Modelo cinemático admitido para os deslocamentos da placa	172
3.5.4.3 Energia de deformação	172
3.5.4.4 Potencial de carregamento externo	173
3.5.4.5 Energia potencial total	173
3.5.4.6 Princípio da mínima energia potencial total	173
3.5.4.6.1 <i>Solução analítica</i>	173
3.5.4.6.2 <i>Soluções aproximadas com subdomínios retangulares</i>	174
a) <u>Detalhamento do emprego do elemento retangular com 12 parâmetros nodais</u>	174
b) <u>Aplicação à placa quadrada</u>	178
3.5.4.6.3 <i>Soluções aproximadas com subdomínios triangulares</i>	179
a) <u>Subdomínio triangular mais simples</u>	179
b) <u>Subdomínio triangular com polinômio completo de 5º grau</u>	180
4 ELEMENTOS ESTRUTURAIS TRIDIMENSIONAIS	181
4.1 INTRODUÇÃO	181
4.1.1 <u>Relações entre deslocamentos e deformações</u>	181
4.1.2 <u>Relações entre deformações e tensões</u>	182
4.2 FORMAS DE SUBDOMÍNIOS MAIS SIMPLES E FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO ASSOCIADAS	182
BIBLIOGRAFIA	182

1 MÉTODO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA

1.1 APRESENTAÇÃO

A intenção principal ao elaborar este texto é motivar o estudo do emprego do método da energia potencial total estacionária, com a utilização de numerosos exemplos de elementos estruturais e estruturas compostas, proporcionando aos estudantes a oportunidade de obter familiaridade com os fundamentos do hoje extensamente empregado *método dos elementos finitos*, em sua versão baseada no princípio dos trabalhos virtuais, para a determinação de soluções aproximadas de boa qualidade.

Para tanto, apresentam-se desde as formulações mais elementares, empregando parâmetros generalizados para exprimir as intensidades na descrição das funções de aproximação, até aquelas que empregam parâmetros nodais, mais apropriados para a utilização prática mediante uso de programas para computador.

Também intencionalmente, começa-se com o estudo das peças ou elementos estruturais simples, unidimensionais, que são os tirantes, para a apresentação da aplicação dos procedimentos do método.

É evidente que para tais elementos estruturais são sobejamente conhecidas as soluções tradicionais, oriundas da aplicação da estática, com integração das equações diferenciais. Porém, são aqui utilizados para descrever com facilidade as etapas de cálculo, quando se emprega o método da energia, para obter soluções aproximadas. Uma outra vantagem da utilização desses exemplos de estruturas muito simples reside no fato de permitirem comprovar, com pouco volume de cálculo, que, mesmo fazendo-se uso de método aproximado, pode-se chegar a soluções de precisão muito satisfatória.

No caso de outros elementos estruturais, tais como vigas, colunas, chapas e placas, repete-se a aplicação dos procedimentos empregados naquele caso mais simples.

Enfatiza-se nos exemplos que, além do princípio dos trabalhos virtuais aplicado a estruturas deformáveis, é necessário conhecer apenas os aspectos do modelo cinemático admitido para o tipo particular de elemento estrutural em foco. Desse modelo cinemático decorre a formulação do relacionamento entre deslocamentos e deformações específicas para o elemento estrutural estudado (caso dos tirantes – seções transversais mantêm-se planas e sofrem apenas translações segundo a direção do eixo da peça; escoras ou pilares, vigas – seções permanecem planas, podendo apresentar translações segundo a direção ortogonal ao eixo da peça e rotações em torno de eixo ortogonal ao plano médio da peça). Desse modo, todos os casos poderão ser tratados com uso de expressão básica única para a energia de deformação, calculada como a integral, no volume do domínio (ou subdomínio), da energia de deformação específica. Isso significa não ser necessário recorrer a qualquer expressão particularizada da Resistência dos Materiais para a citada parcela da energia acumulada.

São sugeridos vários exercícios no decorrer da exposição do texto; alguns bastante elementares, outros mais trabalhosos. Recomenda-se que o leitor, realmente interessado, aborde esses exercícios, assim como, quando sentir necessidade, complemente alguma passagem não explicitamente oferecida na publicação. Estudo que consistir apenas na leitura do texto pode não produzir aproveitamento integral de aprendizado e não dará informação sobre o volume de trabalho dedutivo, que é inerente ao desenvolvimento do método em todas as suas etapas. É correntemente sabido que se aprende melhor quando se faz.

No texto, as palavras elementos finitos são utilizadas com parcimônia, pelo menos no início, preferindo-se subdomínio, quando se trata de uma parte do domínio do elemento estrutural. Na verdade, ao final do estudo, ou até antes disso, ficará evidente que subdomínio e elemento finito são sinônimos.

Tem-se a expectativa de que um leitor interessado que procure aprender, adicionalmente, apenas mais alguns detalhes relativos à operacionalização do método, estará habilitando-se para entender e utilizar programas computacionais que empregam o método dos elementos finitos na análise numérica das estruturas.

Quando se pretende resolver um problema da mecânica das estruturas, a abordagem clássica (equilíbrio, compatibilidade, relações constitutivas) nos conduz a uma equação diferencial (ou sistema de equações diferenciais). Diz-se que o problema está formulado. Para tanto admitiu-se válido um determinado modelo cinemático, que define como o elemento estrutural poderá deformar-se. Para elementos estruturais simples existem soluções analíticas para as equações diferenciais. Mas para casos mais complexos (mesmo unidimensionais) pode não existir solução analítica fechada.

Diante disto, torna-se necessário encontrar algum caminho para obter solução. O caminho dos métodos numéricos é o que geralmente é adotado. Poderia ser também por via experimental (modelos reduzidos ou o próprio protótipo).

Há mais de 60 anos foi lançado o método numérico que depois recebeu a denominação de método dos elementos finitos. Inicialmente desenvolvido e empregado por engenheiros de estruturas, hoje encontra aplicação em múltiplos campos, tais como a dinâmica dos fluidos (fluxo sanguíneo em vasos, etc.). Esse método, em contraposição ao método clássico "local" (ponto) que formula o problema via equação diferencial, considera porções "finitas" do elemento estrutural e para elas admite funções de aproximação para os deslocamentos procurados. Essas funções têm forma pré-escolhida e parâmetros incógnitos a determinar. Exemplo de funções de aproximação frequentemente usadas são os polinômios algébricos, que são o somatório de funções de potências de coordenadas multiplicadas por coeficientes que darão as intensidades do que se está procurando encontrar. No caso das estruturas podem ser escolhidos os deslocamentos dos seus pontos como incógnitas. É o caso do chamado "processo dos deslocamentos".

Esta publicação tem a intenção de apresentar de forma gradual os fundamentos e a aplicação da versão clássica do método dos elementos finitos aos problemas da mecânica das estruturas em regime linear. Embora, inicialmente, o método tenha sido proposto de forma um tanto intuitiva, por engenheiros de estruturas, posteriormente foi possível identificar as bases teóricas que o colocaram no âmbito do que aqui está sendo denominado "método da energia potencial total estacionária". Inúmeras outras versões do método, aprimoradas ao longo do tempo, estão disponíveis ou em desenvolvimento.

1.2 MÉTODO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL NO CÁLCULO DE ESTRUTURAS

Apresenta-se a seguir, com base nas fontes mencionadas, um breve histórico sobre as origens do que veio constituir o atual método dos elementos finitos.

Nesta publicação, o método da energia potencial total será utilizado para *solução* aproximada de problemas estruturais.

Tendo sido proposto há várias décadas, pode ser também utilizado para a *formulação* de

problemas estruturais, chegando-se, de forma alternativa, à obtenção das equações diferenciais e condições de contorno mecânicas que regem o problema tratado. Vide item 1.9. Esse não tem sido, ainda, o caminho usualmente empregado para formular os problemas estruturais em cursos de graduação. Realmente, para seguir esse caminho, de forma conceituada, seria necessário empregar recursos matemáticos não usuais em cursos de graduação – cálculo das variações, funcionais, etc.

Mas a grande utilidade do método reside na sua capacidade de resolver aproximadamente os vários problemas de elementos estruturais, ou de estruturas completas empregadas na engenharia, sem passar diretamente pelo tratamento da solução das equações diferenciais regentes. E uma das grandes virtudes do método reside na possibilidade de obter as respostas aproximadas com convergência para os valores corretos.

Quando ainda não se dispunha de computadores, suas primeiras versões vieram a público para permitir a procura de soluções numéricas aproximadas, em casos de estruturas cujas equações diferenciais tinham solução trabalhosa, ou impossível, sob o ponto de vista analítico. Sabe-se, por exemplo, que grande parte de casos usuais de estruturas bidimensionais (placas ou lajes) enquadram-se nessa situação. Têm *formulação* pronta, em termos de equações diferenciais e condições de contorno, mas a *solução analítica* será difícil e ou impossível!

Por esse motivo, tem grande interesse a procura de soluções aproximadas de boa qualidade, quer dizer, que apresentem convergência para a solução exata, por exemplo.

Segundo Bosshard, 1971, a primeira proposição, utilizando subdivisão da estrutura em subdomínios, (posteriormente chamados de elementos finitos) é historicamente atribuída a Richard Courant, registrada em seu livro Métodos da Física Matemática, 1924, embora esse mesmo autor tenha relatado ideias básicas atribuídas a Euler, sobre discretização em subdomínios da estrutura.

Vale lembrar, para perceber a distância no tempo, que Euler viveu de 1707 a 1783.

Courant apresentou um exemplo numérico para o problema da torção de barra, cujas seções transversais foram subdivididas em triângulos. A proposta de Courant ficou desconhecida dos engenheiros habituados a cálculos de tensões e deslocamentos por mais de 10 anos.

Antes de Courant, proposta de uso de função de aproximação fora descrita por John William Strutt, 3º Lord Rayleigh (1842 – 1919) e por Walter Ritz, em 1909, este aprimorando a ideia ao propor uso de combinação linear de funções de aproximação e não apenas uma função. À Ritz também se atribui o estabelecimento de bases matemáticas seguras ao procedimento, conforme relatado em Timoshenko e Gere, 1983.

O uso intensivo e mais amplo dessas ideias somente foi possível com o advento dos computadores, nos anos cinquenta. Primeiramente, antes do método dos elementos finitos, mas já na era dos computadores, surgiram formulações hoje englobadas no campo do que ficou conhecido como “análise matricial de estruturas”, segundo a qual a estrutura completa era discretizada com a subdivisão em elementos estruturais, cujo relacionamento força/deslocamento (estabelecido pela rigidez), ou o relacionamento inverso (flexibilidade) era deduzido com particularizações dos conhecimentos da estática clássica. A sistematização do cálculo, com algoritmos adequados para processamento por computadores, permitiu resolver com rapidez e confiança uma série de estruturas compostas por barras (pórticos, grelhas, treliças). Vários livros sobre a “Análise matricial de estruturas” foram publicados. Diante do sucesso possibilitado pela formulação de um método adequado para seu emprego mediante uso de computadores, engenheiros do projeto e análise de estruturas aeroespaciais procuraram determinar, inicialmente de maneira intuitiva e aproximada, as rigidezes de elementos estruturais bidimensionais, estendendo assim a aplicação daquilo que já se utilizava para as estruturas de barras. Aproximadamente uma década depois, com o envolvimento de pesquisadores matemáticos, associados aos engenheiros estruturais, bases matemáticas foram colocadas para esse novo procedimento, conhecido desde seu início, como já citado, pelo nome de “método dos elementos finitos”. Posteriormente, houve a extensão para outros campos tais como eletromagnetismo, mecânica dos fluidos, etc., tendo-se hoje aplicações tão importantes quanto aquelas relacionadas com o estudo do que ocorre com fluxos sanguíneos em artérias e válvulas, por exemplo, assim como na biomecânica, etc.

Progressivamente, além da versão acima relatada do método dos elementos finitos, baseado

no método da energia potencial, muitas outras versões foram sendo formuladas e utilizadas.

Neste trabalho será abordada a versão baseada no princípio da estacionariedade da energia potencial total.

Serão resolvidos problemas de elementos estruturais e de estruturas compostas. Admite-se que os materiais se comportam em regime elástico linear e que os deslocamentos lineares e as rotações sejam pequenos.

1.3 ELEMENTOS ESTRUTURAIS DEFORMÁVEIS

Sob a ação dos carregamentos externos os elementos estruturais componentes sofrem deformações. Internamente ocorrem alterações nas deformações específicas que, integradas em todo o volume do elemento estrutural, revelam externamente as mudanças de comprimento, curvatura, rotações, etc.

Mesmo no caso de estruturas bem projetadas, obedientes à normalização (padrões) e adequadamente calculadas, as deformações causadas pelos carregamentos sempre ocorrem, mesmo que a olho nu pareçam inexistentes.

Essa pequena ordem de grandeza das deformações é o que se supõe, (ou se impõe), usualmente, quando é feito o cálculo dos elementos estruturais e da estrutura resultante. Na maioria dos casos, supõe-se que as deformações e os deslocamentos em geral serão pequenos e, ao terminar a etapa de cálculo, verifica-se se essa hipótese está sendo obedecida pela estrutura dimensionada. Quer dizer, além de ser resistente, a estrutura deve ter limites quanto às deformações, por causa da necessidade de não provocar desconfortos ou desconfiâncias sobre sua integridade futura.

É claro que, dependendo do tipo de utilização que a estrutura deva ter durante sua vida útil, há casos em que a hipótese acima poderá ser diferente e, conseqüentemente, a formulação da teoria sobre o seu comportamento deverá levar isto em conta.

Aqui, conforme adiantado, será admitido que as deformações e os deslocamentos lineares e angulares sejam pequenos.

1.4 TRABALHO DAS FORÇAS EXTERNAS

Neste e nos itens seguintes recordam-se alguns temas da mecânica das estruturas, abordados também nas disciplinas de resistência dos materiais, apenas para reavivá-los.

Durante o carregamento das estruturas, de forma lenta e gradual, ocorrerão deslocamentos e, portanto, as forças externas executarão trabalho.

Suponha-se, em particular, o caso de um elemento estrutural genérico, isolado e adequadamente vinculado, por exemplo uma viga simplesmente apoiada (Fig. 1.1). Escolhe-se o elemento estrutural unidimensional viga porque é fácil visualizar, em desenho, os deslocamentos transversais ampliados, provocados por carregamentos. No caso de uma força concentrada genérica, de valor final \vec{P} , que, durante sua aplicação progressiva sobre a viga, se move \vec{t} , em decorrência da deformação também progressiva da viga, ocorrerá a execução do trabalho

$$T = \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{t} = \frac{1}{2} P t \cos \alpha = \frac{1}{2} P d \quad (1.1a)$$

onde α é o ângulo entre as linhas de ação dos vetores força e deslocamento respectivamente e d é a projeção do deslocamento na direção da força.

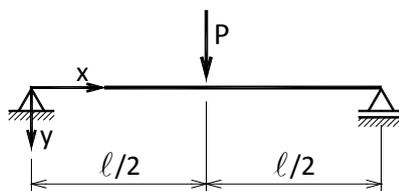


Figura 1.1 - Viga simplesmente apoiada

De forma análoga, um momento externo \bar{M} executaria um trabalho, sobre a correspondente projeção θ da rotação, descrito por

$$T = \frac{1}{2} \bar{M} \theta \quad (1.1b)$$

1.5 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA

Para ilustrar essa grandeza, apenas por simplicidade, suponha-se que a viga simplesmente apoiada tenha seção retangular constante, com momento de segunda ordem J , material com módulo de elasticidade E , vão l e uma única força P vertical para baixo, concentrada no meio do vão. O sistema de referência tem um eixo x horizontal positivo para a direita e um eixo y vertical positivo para baixo. (A partir deste ponto deixa-se de utilizar a seta indicativa de vetor, nas grandezas consideradas pois, na quase totalidade, os vetores são praticamente colineares).

Como é sabido, é usual denominar-se com a letra v a projeção vertical dos deslocamentos da viga provocados por carregamentos, segundo o eixo y , assim como os deslocamentos na direção de x são designados por u .

Adotado o sistema de eixos acima definido, sabe-se que, com as deformações ocorridas, uma seção transversal sofre translação segundo a direção y e rotação, segundo o eixo z , ortogonal ao plano médio (x, y) . Vide Fig. 1.2.

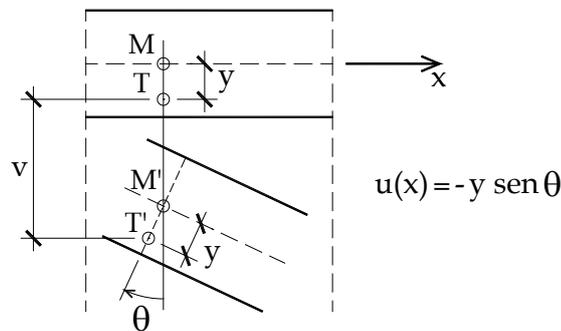


Figura 1.2 - Seção transversal em repouso e deslocada (translação e rotação)

Pela geometria dessa figura e diante da hipótese de deslocamentos e rotações pequenas, pode-se escrever, conforme ensina a Resistência dos Materiais, (Proença, 2001), para o ponto T:

$$u = -y \frac{dv}{dx} \quad (1.2)$$

Revolvendo-se algo sobre o comportamento do material da viga, suponha-se determinado, em ensaio adequado, o diagrama tensão x deformação da figura abaixo (Fig. 1.3)

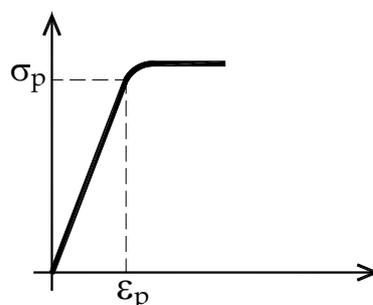


Figura 1.3 – Diagrama tensão deformação

Esse diagrama representa o que ocorre em um ponto do material ensaiado, no qual a tensão

σ corresponde uma deformação específica ε . Ele representa, no trecho reto do diagrama, a descrição gráfica do que expressa a lei de Hooke em um ensaio unidimensional. Sendo E o módulo de elasticidade do material, o relacionamento entre tensão e deformação pode ser expresso por

$$\sigma = E \varepsilon \quad (1.3)$$

Pode-se calcular a integral da tensão σ quando a deformação correspondente variar no intervalo entre o valor nulo (em repouso) e um valor final ε .

Com auxílio do diagrama pode-se ver que um valor elementar dessa integral, indicado por dU_0 valerá

$$dU_0 = \sigma d\varepsilon \quad (1.4)$$

Utilizando-se a relação tensão x deformação, dada pela lei de Hooke, e integrando-se, resulta

$$U_0 = \int_0^\varepsilon E \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (1.5)$$

Essa grandeza recebe o nome de energia de deformação específica. Tem, como pode ser verificado, a dimensão de trabalho, ou energia, por unidade de volume.

Resulta que se pode calcular, para obter a energia de deformação elementar armazenada no volume dV ,

$$dU = U_0 dV \quad (1.6)$$

Então, para uma estrutura com volume V

$$U = \int_V U_0 dV \quad (1.7)$$

A energia de deformação específica terá uma expressão particularizada para cada tipo de elemento estrutural, de acordo com o seu modelo cinemático.

No caso das vigas, conforme o modelo cinemático definido anteriormente, tem-se que

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = -y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (1.8)$$

Então a energia de deformação na viga será calculada com

$$U = \int_V U_0 dV = \frac{1}{2} \int_0^\ell E \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \int_A y^2 dA \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell EJ \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (1.9)$$

O nome completo para essa grandeza é energia potencial de deformação elástica.

Por ter sido admitido que a viga esteja em regime elástico, essa energia é recuperável quando o carregamento que a produziu for removido lentamente. Pode-se chamar U de energia potencial das forças internas. Ela é uma parte da energia potencial total do sistema mecânico viga que está sendo analisado.

1.6 ENERGIA POTENCIAL DAS FORÇAS EXTERNAS

A outra parte da energia potencial do sistema mecânico, neste caso chamado viga, está associada ao carregamento externo.

Suponha-se o carregamento constituído pela força concentrada de 1.4 e também força vertical $q(x)$ distribuída em todo o vão. A posição do eixo da viga descarregada pode ser considerada coincidente com a do eixo x . Essa é uma configuração de repouso. Sob a atuação do carregamento gradual, o eixo da viga ocupará uma posição de equilíbrio denominada configuração

deformada, (“a elástica”) definida pela expressão de $v(x)$, que descreve o andamento dos deslocamentos transversais ao eixo.

Considere-se o trabalho realizado pelo carregamento (com valores finais e constantes) para fazer a viga retornar à posição de repouso.

No caso de forças positivas (para baixo) esse trabalho será negativo pois, para que a viga chegue à posição inicial de repouso, os deslocamentos terão sentido para cima, de módulo igual ao $v(x)$ que essas mesmas forças gradualmente haviam provocado.

O trabalho descrito é, por definição, a energia potencial do carregamento ou das forças externas

$$\Omega = -Pv\left(\frac{\ell}{2}\right) - \int_0^{\ell} qv(x) dx \quad (1.10)$$

Como consequência da definição do trabalho T das mesmas forças externas, durante o carregamento gradual da estrutura, pode-se escrever

$$\Omega = -2T \quad (1.11)$$

porque, enquanto T representa o trabalho considerando força e deslocamento correspondente crescendo gradualmente desde zero até os valores finais, o Ω é calculado com as forças constantes (valor final) multiplicadas pelo correspondente deslocamento que elas provocaram, com o sinal trocado.

A soma das duas parcelas de energia potencial interna e externa é denominada *energia potencial total da estrutura*

$$\Pi = \mathcal{U} + \Omega \quad (1.12)$$

Para uso posterior, observe-se que

$$\Pi = \mathcal{U} + \Omega = T - 2T = -T = \frac{\Omega}{2} \quad (1.13)$$

Comentários

Note-se que o procedimento utilizado até aqui para calcular a energia de deformação da viga não precisou da expressão do momento fletor $M(x)$ que é função de x e da força. Relacionamento desse tipo é utilizado na Resistência dos Materiais quando se tem o $M(x)$. Aqui, porém, conforme será visto, na procura de soluções aproximadas, o ponto de partida será sempre a adoção de expressões que descrevem a aproximação para os deslocamentos do elemento estrutural, ou seu subdomínio, segundo o modelo cinemático definido.

Admitida uma aproximação possível, no caso das vigas, o valor de \mathcal{U} será obtido com emprego da segunda derivada de $v(x)$, conforme expressão (1.9). O valor de \mathcal{U} ficará dependente de parâmetros a determinar, conforme será visto na sequência desta publicação. Do mesmo modo, os valores de Ω e Π ficarão dependentes desses parâmetros incógnitos. Será visto também que, obedecendo certos requisitos, as soluções com as funções de aproximação conduzem a resultados bastante satisfatórios. E, conforme adiantado, é com essa intenção que este assunto está sendo abordado, isto é, para procurar soluções aproximadas de problemas estruturais em geral.

1.7 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Seja a viga simplesmente apoiada, conforme Fig. 1.4, e o carregamento indicado.

Nessa figura estão registrados (com ampliação para permitir visualização) os deslocamentos $v(x)$ que ocorreram, na posição de equilíbrio, sob a ação de P , no meio do vão, e de q . Conforme visto anteriormente, tanto as forças como os deslocamentos por elas provocados na viga foram aplicados e ocorrendo lentamente, desde valores nulos até os valores finais mostrados na Fig. 1.4. E a situação nesse instante é a da configuração deformada, da viga *em equilíbrio* estável (a aplicação e remoção de qualquer perturbação na posição deformada, modifica a elástica apenas enquanto durar

essa perturbação, e a viga retorna sempre à configuração anterior de equilíbrio).

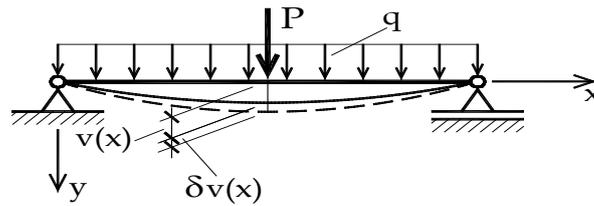


Figura 1.4 – Deslocamentos transversais $v(x)$ e sua variação

Observe-se que os vetores representativos das forças deveriam estar desenhados sobre a curva $v(x)$. Todavia, diante da hipótese de ocorrência de deslocamentos e rotações pequenas, não haverá qualquer diferença nos cálculos se o carregamento estiver sobre a posição do eixo indeformado.

Imagine-se agora que tanto as forças P e q quanto as tensões internas σ_x permaneçam constantes e que, por meio de algum outro agente, a linha elástica seja alterada até atingir a situação em tracejado da figura e indicada com

$$v(x) + \delta v(x) \quad (1.14)$$

Como consequência dos δv ocorrerão alterações de deformações específicas $\delta \varepsilon_x$ no interior da viga.

Então, nela haverá o armazenamento de um acréscimo δU na energia de deformação

$$\delta U = \iiint_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV \quad (1.15)$$

As forças P e q , constantes, executarão um trabalho

$$\delta T = P \delta v \left(\frac{\ell}{2} \right) + \int_0^\ell q \delta v(x) dx \quad (1.16)$$

O “*princípio dos deslocamentos virtuais*” afirma que se a viga está em equilíbrio, conforme admitido, o trabalho virtual executado pelas forças externas é igual ao trabalho virtual das forças internas.

Então

$$\delta U = \delta T \quad (1.17)$$

1.8 PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA

De (1.16) e (1.10) tem-se

$$\delta T = -\delta \Omega \quad (1.18)$$

Portanto

$$\delta U = -\delta \Omega \quad (1.19)$$

ou

$$\delta U + \delta \Omega = 0 \quad (1.20)$$

Ou, finalmente, indicando-se a energia potencial total com

$$\Pi = \mathcal{U} + \Omega$$

resultará

$$\delta\Pi = 0 \tag{1.21}$$

Essa operação significa que, estando a estrutura em configuração de equilíbrio, com a imposição de δv deve resultar uma primeira variação $\delta\Pi$ nula para a energia potencial total.

Em outras palavras, na situação de equilíbrio, a estrutura está com sua energia potencial total estacionária.

É possível provar que nos casos de equilíbrio estável a energia potencial total é estacionária e *mínima*. Isso tem a ver com o sinal positivo da segunda variação $\delta^2\Pi$. Ou, também, pode ser afirmado que, movendo-se a estrutura da sua posição de equilíbrio estável, apareceria um acréscimo positivo em Π , porque na posição de equilíbrio estável Π é mínimo.

O procedimento de cálculo que decorre de (1.21) é semelhante ao que se encontra no cálculo diferencial, quando da procura de extremos de funções. No cálculo de extremos de funções a procura é pelo ponto onde a função terá extremos. Porém, no caso de Π o que se procura é a função $v(x)$ que torna Π (função de $v(x)$) extremo.

Por causa disso a expressão anterior (1.21) corresponde ao princípio da energia potencial total estacionária.

No caso de equilíbrio instável ainda se tem (1.21) válido. Mas, nesse caso, a energia será apenas estacionária e não mínima como no caso do equilíbrio estável.

1.9 PROCURA DE SOLUÇÕES COM O PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL ESTACIONÁRIA POR VIA ANALÍTICA

Este item, por tratar analiticamente da imposição da condição da estacionariedade de Π , pode ser facultativamente estudado por alunos de graduação.

Por ser mais simples de ilustrar visualmente, considere-se o caso de uma viga em balanço, de vão (domínio) ℓ , com força P na extremidade, conforme a Fig. 1.5

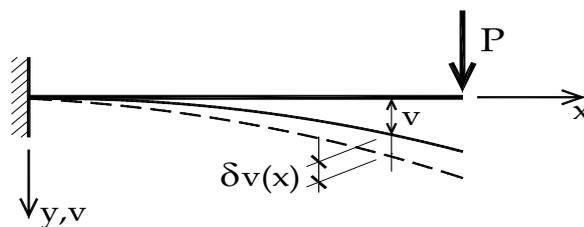


Figura 1.5 - Viga em balanço

Nesse caso

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell EJ \left[\frac{d^2v}{dx^2} \right]^2 dx - Pv(\ell) \tag{1.22}$$

Suponha-se que a variação virtual de deslocamentos possa ser expressa como (Langhaar, 1962)

$$\delta v = \lambda \eta(x) \tag{1.23}$$

onde λ é um número tão pequeno quanto necessário (e que quando feito nulo elimina o acréscimo virtual de deslocamento) e $\eta(x)$ é uma função de mesma natureza que a $v(x)$ procurada.

Então, a energia potencial total correspondente à posição $v(x) + \delta v(x)$ será

$$\Pi + \Delta\Pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell EJ \left[\frac{d^2}{dx^2} [v(x) + \lambda\eta(x)] \right]^2 dx - P[v(\ell) + \lambda\eta(\ell)] \quad (1.24)$$

donde, usando-se (1.22)

$$\Delta\Pi = \lambda EJ \int_0^\ell \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^2\eta}{dx^2} dx + \frac{1}{2} EJ \lambda^2 \int_0^\ell \left[\frac{d^2\eta}{dx^2} \right]^2 dx - \lambda P\eta(\ell) \quad (1.25)$$

que pode ser vista sob a forma

$$\Delta\Pi = -\lambda P\eta(\ell) + \lambda EJ \int_0^\ell \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^2\eta}{dx^2} dx + \frac{1}{2} EJ \lambda^2 \int_0^\ell \left[\frac{d^2\eta}{dx^2} \right]^2 dx = \delta\Pi + \frac{1}{2} \delta^2\Pi \quad (1.26)$$

onde a primeira parcela $\delta\Pi$ é linear em λ e a segunda parcela $\frac{1}{2} \delta^2\Pi$ é quadrática em λ .

Por hipótese, se Π for mínimo, $\Delta\Pi$ deve ser positivo.

Conforme já constatado, ao mover-se a estrutura da sua posição de equilíbrio estável (energia mínima), com a imposição de um estado de deslocamento virtual, deverá ocorrer um acréscimo positivo de Π . Quer dizer, o segundo membro de (1.26) deve ser positivo.

Observe-se que, se $\delta\Pi$ não for nulo, resulta que $2|\delta\Pi| > |\delta^2\Pi|$, para valores suficientemente pequenos de λ ; então $\delta\Pi$ controla o sinal de $\Delta\Pi$. Desse modo a única maneira de se garantir que $\Delta\Pi$ seja positivo, em (1.26), será impondo que $\delta\Pi$ deve anular-se.

Simplificando-se a notação

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v'' \quad \text{e} \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \eta'' \quad \text{etc.}$$

a integral em $\delta\Pi$ pode ser trabalhada, com duas integrações por partes, para ter-se

$$\begin{aligned} \int_0^\ell v'' \eta'' dx &= [v'' \eta']_0^\ell - \int_0^\ell v''' \eta' dx = v''(\ell) \eta'(\ell) - [v''' \eta]_0^\ell + \int_0^\ell v'''' \eta dx = \\ &= v''(\ell) \eta'(\ell) - v'''(\ell) \eta(\ell) + \int_0^\ell v'''' \eta dx \end{aligned}$$

onde foram impostas as condições cinemáticas de contorno.

Então, tem-se, segundo (1.26), com $\delta\Pi = 0$:

$$\delta\Pi = -\lambda [P + EJv''''(\ell)] \eta(\ell) - \lambda EJv''(\ell) \eta'(\ell) + \lambda EJ \int_0^\ell v''''(x) \eta(x) dx = 0 \quad (1.27)$$

Diante disto as seguintes condições devem ocorrer independentemente, para $\delta\Pi$ anular-se para qualquer função $\eta(x)$:

$$v''''(x) = 0 \quad (1.28)$$

$$v''(\ell) = 0 \quad (1.29)$$

$$P + EJv''(\ell) = 0 \quad (1.30)$$

Essas são condições suficientes para que $\delta\Pi$ se anule. É possível provar-se que essas condições são também necessárias (Langhaar, 1962). Neste texto isto não será feito.

A expressão (1.28) indica que a solução deve satisfazer a equação diferencial, conhecida da Resistência dos Materiais, (no caso em que não existe carregamento distribuído sobre a viga):

$$\frac{d^4v}{dx^4} = 0 \quad (1.31)$$

A expressão (1.29) indica que a segunda derivada (curvatura) deve anular-se em $x = \ell$, pois nesse ponto não há momento aplicado, enquanto que (1.30) indica que a força cortante no mesmo ponto deve igualar a força aplicada P .

Conforme sabido, a equação de quarta ordem é a equação diferencial que rege o problema neste caso da viga (sem força distribuída q) e as duas últimas equações são as chamadas condições mecânicas de contorno, que expressam o fato de ser nulo o momento fletor na extremidade livre, onde também a força cortante deve ser igual a P . No caso da existência de uma força distribuída $q(x)$ sobre a viga a equação de quarta ordem deixa de ser homogênea, aparecendo $q(x)/EI$ no segundo membro.

1.10 USO DO MÉTODO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA PARA PROCURAR SOLUÇÕES APROXIMADAS

Segundo o escopo desta publicação, reitera-se outra observação importante, lembrando-se que não seria completamente preferível procurar a expressão da equação diferencial, que rege o problema que estiver sendo estudado, por meio da aplicação do princípio da estacionariedade da energia potencial total, (conforme feito no item anterior) porque, nesse caso, sabe-se chegar à mesma equação diferencial com a imposição direta do equilíbrio de um adequado trecho infinitesimal do elemento estrutural. Haveria como vantagem apenas o fato de se obter informação complementar pois, ao exigir que $\delta\Pi = 0$, são obtidas também as condições mecânicas de contorno, que adicionalmente precisam ser obedecidas. Observe-se que em problemas mais complexos de estruturas bidimensionais poderia ser mais difícil escrever diretamente as correspondentes condições mecânicas de contorno.

A grande vantagem, porém, do uso do método da energia potencial total, é que ele possibilita procurar soluções numéricas aproximadas para os problemas estruturais de qualquer natureza.

O procedimento é relativamente simples.

Sabendo-se qual o tipo de elemento estrutural que está sendo estudado, sabe-se construir a expressão de Π , função das funções incógnitas envolvidas $[u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)]$, em geral.

Adotando-se *funções de aproximação* (geralmente polinômios algébricos) para as funções envolvidas, a expressão de Π ficará apenas função dos coeficientes α_i, β_i , etc., dos polinômios. Se, em um caso unidimensional, cuja função deslocamento incógnita seja $u(x)$, os polinômios forem descritos por expressões do tipo

$$u(x) = \sum_0^n \alpha_i x^i \quad (1.32)$$

a energia potencial total será expressa por uma função quadrática dos α_i

$$\Pi = \Pi[\alpha_i] \quad (1.33)$$

Aplicando-se o princípio da mínima energia potencial total, a minimização será feita sobre uma função desses coeficientes dos polinômios.

Como consequência, a variação primeira $\delta\Pi$ torna-se $d\Pi$, ou seja, o diferencial total da função Π .

O problema então será determinar o extremo de uma função Π de várias variáveis α_i que são os coeficientes dos polinômios de aproximação, obedecidas as condições de contorno cinemáticas.

Sendo

$$\delta\Pi = d\Pi = \sum_0^n \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_i} d\alpha_i = 0 \quad (1.34)$$

e como os $d\alpha_i$ são arbitrários e, portanto, podem ser considerados diferentes de zero, resulta que cada derivada no somatório acima deve ser igualada a zero.

Com isto é obtido um sistema de equações lineares algébricas que (juntamente com as condições de contorno da estrutura em foco) permitem resolver o problema.

Obtidos os deslocamentos, podem ser calculadas as deformações, as tensões, resultantes de tensões (forças axiais, momentos fletores e forças cortantes) assim como o valor da energia potencial total correspondente à aproximação empregada.

1.10.1 Funções de aproximação

As funções de aproximação que serão utilizadas nesta publicação são expressas por polinômios algébricos, como ocorre frequentemente no emprego do método da energia potencial.

É claro que a qualidade da resposta dependerá do grau adotado para o polinômio de aproximação. Como saber se essa qualidade é suficiente?

Uma maneira reside no exame da evolução do valor da energia potencial, para decidir-se se já foi obtida uma aproximação suficiente para os deslocamentos. À medida que forem sendo utilizadas aproximações sucessivas, com graus crescentes para os polinômios, a energia potencial total deve tender para valor mínimo.

Outra maneira de avaliar se a qualidade da resposta aproximada é suficiente é observar a evolução dos deslocamentos ou dos esforços internos (força axial neste caso) em pontos importantes da estrutura. É oportuno destacar que os deslocamentos convergirão mais rapidamente para valores corretos, em relação ao que ocorrerá com os esforços solicitantes, porque os esforços dependem de derivadas da função que descreve os deslocamentos.

Tendo-se em vista que somente as condições cinemáticas de contorno devem ser obrigatoriamente impostas, outro procedimento efetivo, para avaliar se a aproximação adotada está razoável, será verificar se as condições mecânicas de contorno (que dependem de derivadas da função incógnita) estão satisfeitas. Conforme será mostrado nos exemplos, a vinculação do elemento estrutural em exame determinará quais as condições cinemáticas de contorno (geométricas) que deverão ser impostas (obrigatoriamente) sobre o que resulta de (1.34).

Casos de elementos estruturais simples podem ser resolvidos com emprego de *funções de aproximação válidas para o domínio todo*. Caso essa aproximação ainda não seja satisfatória, pode-se adotar polinômio de maior grau e repetir os procedimentos.

Outra maneira de melhorar a aproximação pode ser dividir o domínio estudado em subdomínios e sobre cada um deles adotar-se uma função de aproximação polinomial, geralmente de mesmo grau em todos os subdomínios. É claro que, com qualquer desses dois procedimentos, aumenta-se o número de incógnitas do problema.

Se o carregamento distribuído atuar em um trecho menor do que o do comprimento l do domínio, a última integral em (1.10) será calculada somente no trecho carregado. É óbvio que a contribuição de trechos descarregados será nula para o valor dessa integral. Oportunamente será esclarecido com mais detalhes que nesse caso será recomendável usar uma aproximação específica para cada trecho carregado, fazendo a imposição de compatibilidades de deslocamentos entre trechos. Em outras palavras, será o caso de utilizar subdomínios distintos para cada trecho com carregamento diferente.

Os últimos comentários são gerais e válidos, em princípio, para qualquer tipo de elemento estrutural. Os exemplos apresentados nesta publicação, e sua sequência, servirão para ilustrar os pontos acima comentados.

Repetindo, a seguir, fica-se com o exame de elementos estruturais simples, apenas para ter facilidade de apresentar os procedimentos de cálculo do método da energia potencial, permitindo ao leitor absorvê-los integralmente, logo de início.

Posteriormente, em outros itens da publicação, retoma-se o assunto para generalizar e detalhar as deduções, de maneira a dar-lhes poder para estudar e resolver estruturas compostas.

Por exemplo, a partir do conhecimento do que ocorre com um elemento estrutural básico, (primeiro exemplo; barra sob solicitação axial), passar-se-á, em capítulo específico, para a sua utilização na composição de treliças, com barras orientadas segundo direções genéricas do espaço bidimensional.

1.10.1.1 Polinômios dependentes de parâmetros generalizados

Os polinômios completos de grau n (indicados, eventualmente, com P_n) são descritos por meio da soma de $n + 1$ monômios que contêm potências de x multiplicadas por parâmetros generalizados α_i , portanto sob a forma amplamente utilizada em outras aplicações. Por exemplo, se a função em foco for $g(x)$ tem-se

$$g(x) = \sum_0^n \alpha_i x^i \quad (1.35)$$

Por exemplo:

$$\text{função linear: } g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad (1.36)$$

$$\text{função cúbica } g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, \quad \text{etc.} \quad (1.37)$$

São essas expressões de funções de aproximação que serão utilizadas desde o início desta publicação, pois a intenção principal é apresentar e aplicar o método da energia potencial, desvelando os seus aspectos essenciais, sem preocupação imediata de formulação alternativa que facilite a implementação da aplicação a estruturas mais complexas, portanto com obrigatório emprego de computadores, como se verá mais tarde.

Também por esses motivos, utilizam-se, em primeiro lugar, exemplos de tirantes como elementos estruturais mais simples e adequados para essa finalidade. E, com esses elementos estruturais, não surgem volumes significativos de trabalho algébrico, tornando possível a exposição detalhada, tanto com emprego de parâmetros generalizados, quanto nodais.

1.10.1.2 Polinômios dependentes de parâmetros nodais

Todavia, já ao passar-se, em seguida, para o estudo das peças fletidas, um volume maior de desenvolvimento algébrico ficará evidenciado, recomendando alternativa naturalmente mais apropriada para a sistematização dos cálculos. Seguindo-se essa recomendação, serão empregados os parâmetros nodais para a descrição das funções de aproximação.

Parâmetros nodais são valores da própria função em determinados pontos do seu domínio, denominados **nós**. Os valores da própria função (e suas derivadas, com polinômios de grau mais elevado) são utilizados para descrever a função no domínio ou no subdomínio. Observe-se que esses pontos não são necessariamente articulações, embora eles possam coincidir algumas vezes com a posição de articulações entre elementos estruturais unidimensionais.

Seja, por exemplo, uma função $g(x)$, linear em um domínio de comprimento ℓ segundo x , que pode ser escrita como dependente dos valores nodais g_1 e g_2 que essa função tem nos pontos nodais 1 e 2, definidos, por hipótese, nas extremidades $x = 0$ e $x = \ell$ do domínio.

Tem-se, nesse caso

$$g(x) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) g_1 + \frac{x}{\ell} g_2 \quad (1.38)$$

A obtenção dessa expressão a partir de (1.36) é fácil de detalhar, como pode ser feito pelo leitor interessado. Bastará particularizá-la para os nós e obter os parâmetros α_0 e α_1 . A substituição desses parâmetros na expressão original (1.36) e o rearranjo dos termos dará a expressão (1.38).

Com os exemplos apresentados nos vários capítulos, empregando-se sucessivamente polinômios de maior grau nos subdomínios (elementos finitos), obtém-se uma biblioteca de casos

frequentes na análise estrutural.

1.10.2 Procedimentos de cálculo baseados na energia potencial total estacionária

Retornando-se ao caso do emprego das funções de aproximação descritas por polinômios dependentes de parâmetros generalizados, sabe-se que, usando-se (1.32), resulta para o diferencial (variação da energia aproximada, neste caso):

$$d\Pi = \sum_0^n \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i \quad (1.39)$$

Devendo ser, conforme resulta da aplicação da estacionariedade da energia

$$d\Pi = 0 \quad (1.34)$$

e sendo os $d\alpha_i$ arbitrários, não simultaneamente nulos, cada uma das derivadas parciais deverá anular-se independentemente

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (1.40)$$

Portanto resultará um sistema de equações lineares (porque Π é quadrático) que resolve o problema, após a introdução das condições de contorno cinemáticas.

Observe-se que a variação $\delta g(x)$ para um polinômio genérico de aproximação será descrita em função das variações dos parâmetros generalizados.

Por exemplo, para o polinômio (1.36)

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

a primeira variação será expressa por

$$\delta g(x) = \delta \alpha_0 + \delta \alpha_1 x \quad (1.41)$$

isto é as variáveis (intensidades) são os α_i , enquanto os monômios em x e suas potências definem a forma das funções escolhidas para aproximação.

Uma maneira de se visualizar separadamente a intensidade da forma pode ser com a descrição desse polinômio $g(x)$ como produto de duas matrizes (uma linha e outra vetor), conforme abaixo:

$$g(x) = \{1 \quad x\} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (1.42)$$

A matriz linha descreve a forma (linear, neste caso) enquanto que o vetor contém as intensidades, a determinar com o emprego do método da energia.

Note-se que fazer

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (1.43)$$

significa fazer

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (1.44)$$

Ora, dimensionalmente, a derivada da energia de deformação em relação a um parâmetro

deslocamento (mesmo que generalizado) é uma força, também no sentido generalizado. De modo semelhante, a derivada do potencial das forças externas em relação ao mesmo parâmetro deslocamento generalizado é igual à força generalizada.

Portanto, cada equação do tipo (1.43) é uma equação de equilíbrio.

Essa é a leitura alternativa (ou inversa) do princípio dos deslocamentos virtuais. Significa que a imposição de

$$d\Pi = 0 \tag{1.45}$$

resulta na descrição do equilíbrio (isto é, na descrição daquilo que deve ser obedecido como consequência da imposição da estacionariedade da energia total).

Inversamente, a primeira expressão (1.17) do princípio dos deslocamentos virtuais, que foi aqui utilizada, vale para a estrutura suposta em equilíbrio e, por isso, conduziu às expressões (1.20) ou (1.40).

O caso da flexão de vigas foi utilizado, até aqui, por causa da facilidade de visualizar os deslocamentos transversais $v(x)$ e sua variação (deslocamento virtual) $\delta v(x)$.

Porém, para introduzir o estudante no detalhamento do estudo da aplicação do princípio da mínima energia potencial total, na procura de soluções aproximadas, prefere-se, para facilitar a tarefa, deixar de lado as vigas e utilizar um elemento estrutural ainda mais simples, conforme já adiantado.

Será o caso das barras com solicitação por força axial. Começa-se com o caso de força axial de tração (tirantes), para ficar livre, por ora, da consideração de instabilidades de equilíbrio, como poderia ser o caso das barras com força normal de compressão (escoras).

É o que se fará no item seguinte, seguindo-se o procedimento acima, segundo o qual, adotando-se funções de aproximação para as funções incógnitas, dependentes de coeficientes a determinar, calcula-se Π e sobre ele impõe-se (1.21). Disso resultarão equações discretas de equilíbrio. Prescrevendo-se sobre elas as condições de contorno cinemáticas (geométricas), resolve-se o sistema que fornecerá os coeficientes incógnitos. A substituição desses coeficientes na expressão inicial das funções de aproximação permite calcular tanto os valores dessas funções em pontos particulares, para aferição ou uso dos resultados, quanto os valores de suas derivadas para obtenção dos esforços solicitantes.

2 ELEMENTOS ESTRUTURAIS UNIDIMENSIONAIS

2.1 TIRANTES

2.1.1 Introdução

Conforme anunciado na apresentação, o assunto principal desta publicação será inicialmente abordado com o estudo dos elementos estruturais bastante simples, unidimensionais, sob tração, conhecidos como tirantes. Posteriormente serão abordados elementos unidimensionais sob compressão, flexão, bidimensionais (chapas e placas) e uma breve introdução sobre caso tridimensional será apresentada. Tratando-se de barras prismáticas isoladas sob ação axial, bastará usar coordenada local x , ao longo do eixo da barra, para expressar a componente de deslocamento longitudinal $u(x)$. Posteriormente, por exemplo no caso das treliças, será necessário o uso de sistema global de referência conforme será exposto em 2.2.2.

Os tirantes poderão ser carregados com forças concentradas P_i , em qualquer ponto do domínio dessa barra, e/ou distribuídas $q_i(x)$, ao longo do eixo, no domínio todo ou em partes dele, Fig. 2.1.

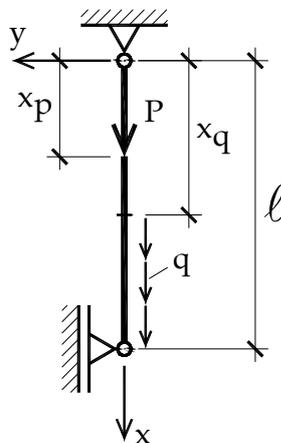


Figura 2.1 - Tirante com P no interior e q em parte do domínio

Já foi salientado que a primeira providência, para qualquer elemento estrutural, é saber como descrever o modelo cinemático suposto para ele, isto é, quais as componentes de deslocamentos que devem ser determinadas e como esses deslocamentos podem se desenvolver quando atuarem os carregamentos.

No caso de um tirante, o modelo deve representar aquilo que possa ocorrer em uma barra solicitada somente por força axial centrada. E o que pode acontecer nessas barras consiste em deslocamentos segundo x , função apenas de x , que são uniformes em todos os pontos (y, z) de qualquer seção transversal da barra. Portanto, ocorrem apenas translações das seções transversais (que permanecem planas) na direção do eixo da barra, como consequência de hipótese, razoável, pois que essas barras devem ter dimensões das seções transversais pequenas em relação ao comprimento da barra. Em resumo, sob o ponto de vista cinemático, admite-se que cada seção transversal permanece plana e ortogonal ao eixo longitudinal do tirante. Salienta-se que a adoção do eixo coordenado acima definido exige que as forças externas concentradas ou distribuídas sejam consideradas positivas quando orientadas no mesmo sentido do eixo x , assim como, obviamente, serão positivos os deslocamentos $u(x)$ que ocorrerem no sentido idêntico ao de x positivo.

Supondo-se carregamento externo constituído por forças concentradas aplicadas em pontos discretos e também força distribuída, por ora ao longo de toda a barra, tem-se para a energia potencial total

$$\Pi = \mathcal{U} + \Omega = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV - P_1 u(x_1) - P_2 u(x_2) - \int_0^l q(x) u(x) dx \quad (2.1)$$

Para satisfazer o modelo cinemático, bastará escolher função de aproximação para o único deslocamento incógnito $u(x)$, por ora suposto descrito em função de parâmetros generalizados. Posteriormente serão utilizados parâmetros ditos nodais, para descrever funções de aproximação sob a forma de polinômio algébrico completo de grau n . Também podem ser utilizadas outras funções, como polinômios trigonométricos, por exemplo.

No caso da descrição dos polinômios algébricos dependentes de parâmetros generalizados tem-se, por exemplo,

$$u(x) = \sum_0^n \alpha_i x^i \quad (2.2)$$

Então, de acordo com o modelo cinemático, em regime de pequenos deslocamentos e deformações, calcula-se a deformação axial específica com

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \sum_1^n i \alpha_i x^{i-1} \quad (2.3)$$

Com a equação constitutiva (Lei de Hooke, no caso linear elástico, aqui admitido) tem-se

$$\sigma = \varepsilon E \quad (2.4)$$

Resulta para \mathcal{U}

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon^2 dV \quad (2.5)$$

Supondo-se barra prismática (A = área da seção transversal constante), tem-se:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell E \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \left(\int_A dydz \right) dx - P_1 u(x_1) - P_2 u(x_2) - \int_0^\ell q(x) u(x) dx \quad (2.6)$$

Então, finalmente

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - P_1 u(x_1) - P_2 u(x_2) - \int_0^\ell q(x) u(x) dx \quad (2.7)$$

Portanto, com a introdução da aproximação escolhida, e de sua primeira derivada, a energia Π (2.7) torna-se função quadrática dos parâmetros generalizados α_i , incógnitos.

A imposição da condição estacionária para Π permitirá determinar esses parâmetros incógnitos. Com isto, retornando-se à expressão original de $u(x)$, pode-se calcular esse deslocamento aproximado em qualquer ponto, assim como, com a primeira derivada, pode-se calcular o $\varepsilon(x)$. Com a lei de Hooke calcula-se a tensão axial $\sigma(x)$ e com ela determina-se a força axial $N(x)$. Finalmente avalia-se a energia potencial total Π .

2.1.2 Exemplos

2.1.2.1 Parâmetros generalizados e uma função de aproximação para o domínio completo

2.1.2.1.1 T1G Tirante isostático com força concentrada P na extremidade e força q distribuída em todo o comprimento ℓ , admitindo-se $u(x)$ linear para o domínio completo.

Este exemplo, Fig. 2.2, por ser o mais simples possível, basta para revelar a essência do método, pois tem apresentação bastante compacta e contém todos os ingredientes para a sua aplicação.

Será tratado, primeiramente, como domínio único, sem discretização em subdomínios. Posteriormente, casos de tirante com carregamento distribuído, ou concentrado no interior do domínio, serão discretizados em subdomínios, com aproximação linear para o deslocamento axial, para demonstrar que, com a discretização, pode-se obter respostas satisfatórias para problemas

onde a variação real dos deslocamento axial é de grau maior do que a se admitiu para as aproximações nos subdomínios.

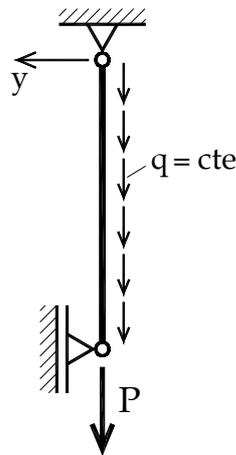


Figura 2.2 – Tirante sob carregamento distribuído e força de extremidade

Os exemplos posteriores, evidentemente, seguirão o mesmo padrão. Também servirão, porém, para evidenciar as características gerais e vantajosas do método, no que diz respeito a:

- possibilidade de melhorar a qualidade da solução, com aumento do grau dos polinômios de aproximação;
- capacidade de abordar casos em que ocorram descontinuidades nas derivadas da função solução, com uso de aproximações em subdomínios da estrutura;
- possibilidade de fazer verificações sobre a qualidade da solução, com avaliações da convergência sobre série de resultados sucessivos dos deslocamentos, em pontos particulares da estrutura, do valor da energia potencial total, ou da obediência às condições mecânicas de contorno, etc.

Além disso, já foi destacado que o elemento estrutural deste exemplo, sob a ação de forças axiais de extremidade, é o elemento estrutural básico para a composição de treliças. Para tanto, mais adiante, esse elemento será retomado, com orientação genérica do seu eixo, para deduzir-se o relacionamento entre as ações de extremidade e deslocamentos correspondentes, quando referidos a eixos coordenados globais.

Aqui, pode-se considerar que o sistema de eixos adotado seja chamado de “local” e nele apenas o da direção axial, x , será necessário.

Inicia-se também com a aproximação mais simples possível, que é a aproximação linear. A função apenas contendo o termo constante α_0 , evidentemente, não servirá como aproximação, porque não haveria deformação específica em uma barra que somente pudesse sofrer translação, se os vínculos permitissem.

A expressão da energia potencial total contém, no caso dos tirantes, uma derivada primeira na parcela da energia de deformação \mathcal{U} . Mostra-se que a aproximação linear é boa para o caso em que somente a força concentrada esteja atuando na extremidade, mas não o é para o caso da força axial, uniformemente distribuída, atuando sozinha. Exemplo seguinte revelará que, para a força externa uniformemente distribuída, uma aproximação com polinômio de segundo grau é adequada. Se a força distribuída não estiver em toda a extensão do tirante, haverá necessidade de considerar diferentes aproximações em cada trecho, conforme já acenado.

Seja o exemplo anunciado, conforme a Fig. 2.2, e seja a função de aproximação dada por polinômio algébrico de primeiro grau:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

Observe-se que cada parâmetro generalizado tem dimensão diferente da dos demais. A variação desse deslocamento, a seguir considerada como “deslocamento virtual”, pode ser

indicada com

$$\delta u(x) = \delta \alpha_0 + \delta \alpha_1 x$$

Devendo $u(x)$ obedecer à condição de contorno cinemática

$$u(0) = \alpha_0 = 0 = \text{fixo} \quad (\text{portanto } \delta \alpha_0 = 0)$$

resultam

$$u(x) = \alpha_1 x \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{du}{dx} = \alpha_1$$

Com a lei de Hooke tem-se

$$\sigma = \varepsilon E = \alpha_1 E$$

Introduzindo-se em (2.7), particularizada para este exemplo, tem-se

$$\pi = \mathcal{U} + \Omega = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA \alpha_1^2 dx - P \alpha_1 \ell - q \int_0^\ell \alpha_1 x dx$$

Integrando-se

$$\pi = \frac{EA}{2} \alpha_1^2 \ell - P \alpha_1 \ell - q \alpha_1 \frac{\ell^2}{2}$$

Nota-se agora que π é função de α_1 . Então, a primeira variação de Π torna-se um diferencial e ficará com a expressão

$$d\pi = \frac{\partial \pi}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 = \left[EA \alpha_1 \ell - P \ell - q \frac{\ell^2}{2} \right] d\alpha_1 = 0$$

Nessa expressão usou-se a notação de derivação parcial, prevendo-se que, em geral, π será função de várias variáveis α_i .

Tendo-se em vista que $d\alpha_1$ é diferente de zero, para que possa haver deslocamento virtual du , ou δu , não nulo, conclui-se que

$$EA \ell \alpha_1 = P \ell + q \frac{\ell^2}{2}$$

Note-se que essa equação pode ser interpretada como uma forma generalizada da “equação da mola”, na qual $EA \ell$ representa a rigidez, α_1 é o deslocamento generalizado e o segundo membro é força generalizada.

Da equação anterior resulta

$$\alpha_1 = \frac{1}{EA} \left(P + \frac{q \ell}{2} \right)$$

e

$$u = \frac{1}{EA} \left(P + \frac{q \ell}{2} \right) x$$

Daí decorre que a força axial na barra será

$$N = \sigma A = E\varepsilon A = Eu'A = P + \frac{q\ell}{2} = \text{constante}$$

Examinando-se as respostas, verifica-se que a expressão dos deslocamentos devidos somente à força concentrada é exata e, por causa disso, também a força axial N é exata. Ou seja, para esse carregamento, a aproximação adotada (linear) corresponde à solução exata. Também a condição mecânica de contorno $N(\ell) = P$ fica obedecida.

Por outro lado, se o carregamento fosse apenas com a força axial uniformemente distribuída, nota-se que, embora o valor do deslocamento axial máximo tenha resultado igual ao exato

$$u_{m\acute{a}x} = u(\ell) = \frac{q\ell^2}{2EA},$$

a força axial ao longo da barra seria constante, o que não é verdadeiro para o carregamento distribuído. Outra constatação é que, com esse carregamento distribuído, a condição de contorno $N(\ell) = 0$ não estará obedecida.

Conclusão: a aproximação linear é ótima para o carregamento com P na extremidade, mas não é boa para o caso do carregamento distribuído.

Calculando-se a energia potencial total tem-se, respectivamente, para força distribuída e concentrada:

$$\Pi_q = \frac{\Omega}{2} = \frac{-q^2\ell^3}{8EA} \quad \Pi_P = \frac{\Omega}{2} = \frac{-P^2\ell}{2EA}$$

2.1.2.1.2 T2G Tirante isostático com força P concentrada na extremidade, com $u(x)$ quadrático em todo o domínio.

Sabe-se que, para efeito geral, ao utilizar o método da energia para procurar soluções aproximadas é necessário resolver o problema sob análise com a adoção de uma sequência de funções de aproximação e verificar como se comporta a convergência dos resultados, até que se possa decidir pela aproximação satisfatória.

Este exemplo da Fig. 2.3 é, então, adequado para demonstrar que o acréscimo de monômio quadrático não é necessário para este caso. Conforme visto no exemplo anterior, para o carregamento aqui considerado, a aproximação linear para o deslocamento já foi suficiente para dar bons resultados, tanto para deslocamentos, quanto para esforço interno e condição mecânica de contorno. A solução mostrará explicitamente que a adoção de polinômio quadrático, embora fosse desnecessária, não perturba o resultado já obtido, uma vez que resultará na manutenção do monômio linear em x e na exclusão do monômio quadrático da expressão original. Este aspecto será retomado no estudo das vigas.

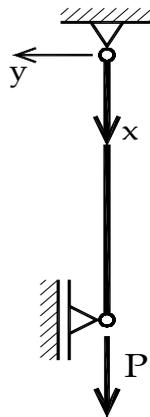


Figura 2.3 – Tirante com força de extremidade

Seja a função de aproximação descrita por polinômio algébrico de segundo grau:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

Impondo-se a condição cinemática de contorno:

$$u(0) = \alpha_0 = 0$$

fica-se com

$$u(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

Observa-se, para uso posterior no exemplo, que um deslocamento virtual possível para o caso é descrito por

$$du(x) = d\alpha_1 x + d\alpha_2 x^2$$

Calculando-se a primeira derivada do deslocamento aproximado tem-se

$$\varepsilon = u' = \alpha_1 + 2\alpha_2 x$$

Introduzindo-se em (2.7), com $P_1 = P$, $P_2 = 0$ e $q = 0$, tem-se

$$\pi = \mathcal{U} + \Omega = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA (\alpha_1 + 2\alpha_2 x)^2 dx - P(\alpha_1 \ell + \alpha_2 \ell^2)$$

Integrando-se

$$\pi = \frac{EA}{2} \left(\alpha_1^2 \ell + 2\alpha_1 \alpha_2 \ell^2 + \frac{4}{3} \alpha_2^2 \ell^3 \right) - P(\alpha_1 \ell + \alpha_2 \ell^2)$$

Então

$$d\pi = \frac{\partial \pi}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \pi}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 = 0$$

Relembrando-se que o que está sendo utilizado, na realidade, tem fundamento no princípio dos deslocamentos virtuais, a expressão acima pode ser interpretada como uma soma de produtos de forças generalizadas (as derivadas de Π) pelos respectivos incrementos de deslocamentos generalizados. Os $d\alpha_1$ e $d\alpha_2$ são variações (incrementos) das intensidades generalizadas, ou componentes do deslocamento virtual $du(x)$, conforme expressão anteriormente explicitada.

Segundo o princípio dos deslocamentos virtuais os incrementos são arbitrários e não nulos, pois se nulos fossem não ocorreria deslocamento $du(x)$.

Então, para que $d\pi$ seja nulo, cada uma das derivadas de π deve anular-se separadamente, isto é

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} = \frac{EA}{2} (2\alpha_1 \ell + 2\alpha_2 \ell^2) - P\ell = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} = \frac{EA}{2} \left(2\alpha_1 \ell^2 + \frac{8}{3} \alpha_2 \ell^3 \right) - P\ell^2 = 0$$

Tem-se um sistema de equações lineares algébricas, representado matricialmente sob a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \ell \end{Bmatrix} = \frac{P}{EA} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Observa-se que agora a equação da mola está “ampliada”. É uma equação matricial com duas equações de equilíbrio entre “forças” generalizadas. A matriz quadrada, simétrica, é chamada *matriz de rigidez generalizada*.

A solução desse sistema de equações lineares algébricas fornecerá

$$\alpha_1 = \frac{P}{EA} ; \quad \alpha_2 = 0$$

Nota-se, portanto, que se obteve a mesma resposta anterior. Em outras palavras, o acréscimo de monômio de grau superior àquele que forneceu resposta exata não é possível, sendo isto obtido com a própria utilização do método. Alerta-se o leitor para o fato de que isso será válido se a resposta com a melhor aproximação já foi obtida e tentar-se melhorá-la. Enquanto isso não acontecer, pode ser que na solução tentativa com algum grau de polinômio posterior resulte algum coeficiente de monômio com valor nulo, mas isso significando que o modo de deformação que ele representa não pode ser exibido pela estrutura em exame, em decorrência de vinculação, carregamento, etc.

Esta observação será retomada e ilustrada em exemplo futuro de elementos de viga.

Calculando-se a energia potencial total correspondente à aproximação linear tem-se

$$\Pi_P = \frac{\Omega}{2} = \frac{-P^2 \ell}{2EA}$$

valor coincidente com aquele de 2.1.2.1.1.

2.1.2.1.3 T3G Sugestão de exercício: Tirante isostático; força q uniforme; u quadrático; Resolver sem usar o texto abaixo.

Aplicar o princípio da mínima energia potencial total em tirante com a vinculação idêntica à dos exemplos anteriores, Fig. 2.4, sob força uniformemente distribuída q em todo o comprimento e aproximação $u(x)$ quadrática.

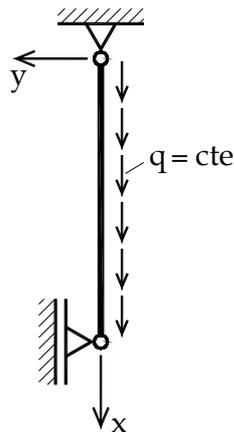


Figura 2.4 – Tirante sob força uniforme q

$$u(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

$$u'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x$$

$$\pi = \mathcal{U} + \Omega = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA (\alpha_1 + 2\alpha_2 x)^2 dx - q \int_0^\ell (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2) dx$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \alpha_1} = EA \int_0^\ell (\alpha_1 + 2\alpha_2 x) dx - q \int_0^\ell x dx = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \alpha_2} = EA \int_0^\ell (\alpha_1 + 2\alpha_2 x) 2x dx - q \int_0^\ell x^2 dx = 0$$

$$EA \left(\alpha_1 \ell + 2\alpha_2 \frac{\ell^2}{2} \right) = q \frac{\ell^2}{2}$$

$$EA \left(2\alpha_1 \frac{\ell^2}{2} + 4\alpha_2 \frac{\ell^3}{3} \right) = q \frac{\ell^3}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \ell \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{EA} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{q\ell}{EA}$$

$$\alpha_2 = \frac{-q}{2EA}$$

$$u(x) = \frac{q\ell}{EA} x + \frac{-q}{2EA} x^2 = \frac{q\ell^2}{2EA} \left(2\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right) = \frac{q\ell^2}{2EA} (2\xi - \xi^2)$$

onde $\xi = x/\ell$

Resposta: $u(x) = q/EA (lx - x^2/2)$

Faça o gráfico dessa função, nele indicando o valor máximo, o valor no meio do comprimento e particularidades de tangentes à curva em pontos importantes, para definir precisamente o seu andamento e conferir condições de contorno cinemática e mecânica.

Determine a expressão de $N(x)$ e faça seu gráfico, nele respeitando todas as particularidades da curva (valor e derivada) definidas em todos os pontos do domínio, principalmente no início e no fim do comprimento ℓ .

Verifique se a condição mecânica de contorno estará satisfeita em $x = \ell$.

Calculando-se a energia total tem-se

$$\Pi_q = \frac{\Omega}{2} = \frac{-q^2 \ell^3}{6EA}$$

valor que corresponde à solução exata e é menor do que aquele do item 2.1.2.1.1.

2.1.2.1.4 T4G Sugestão de exercício: Tirante isostático; força linearmente distribuída; u de 3º grau; Resolver sem consultar o texto abaixo.

Aplicar o princípio da mínima energia potencial total em tirante com a vinculação idêntica à dos exemplos anteriores, sob força q linearmente distribuída em todo o comprimento, Fig. 2.5, e aproximação $u(x)$ de terceiro grau em todo o domínio. Suponha que o valor mínimo da força externa ocorra em $x = 0$, que o valor máximo seja denominado por q_1 e que ocorra na extremidade $x = \ell$.

Este exemplo mostra que a aproximação cúbica é boa para esse carregamento. A aproximação quadrática não seria boa!

Detalhando-se para o caso de força distribuída constante, tem-se

$$q(x) = q_1 \frac{x}{\ell}$$

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

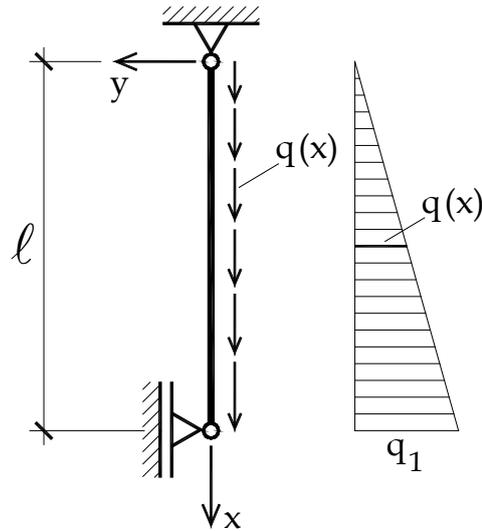


Figura 2.5 – Tirante sob força linearmente distribuída

A condição cinemática de contorno leva a $\alpha_0 = 0$.

$$u' = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$$

$$\pi = U + \Omega = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA (\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2)^2 dx - \frac{q_1}{\ell} \int_0^\ell x (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) dx$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \alpha_1} = EA \int_0^\ell (\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2) dx - \frac{q_1}{\ell} \int_0^\ell x^2 dx = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \alpha_2} = EA \int_0^\ell (\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2) 2x dx - \frac{q_1}{\ell} \int_0^\ell x^3 dx = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \alpha_3} = EA \int_0^\ell (\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2) 3x^2 dx - \frac{q_1}{\ell} \int_0^\ell x^4 dx = 0$$

ou

$$EA \left(\alpha_1 \ell + 2\alpha_2 \frac{\ell^2}{2} + 3\alpha_3 \frac{\ell^3}{3} \right) - q_1 \frac{\ell^2}{3} = 0$$

$$EA \left(2\alpha_1 \frac{\ell^2}{2} + 4\alpha_2 \frac{\ell^3}{3} + 6\alpha_3 \frac{\ell^4}{4} \right) - q_1 \frac{\ell^3}{4} = 0$$

$$EA \left(3\alpha_1 \frac{\ell^3}{3} + 6\alpha_2 \frac{\ell^4}{4} + 9\alpha_3 \frac{\ell^5}{5} \right) - q_1 \frac{\ell^4}{5} = 0$$

ou

$$EA(\alpha_1 + \alpha_2 \ell + \alpha_3 \ell^2) - q_1 \frac{\ell}{3} = 0$$

$$EA \left(\alpha_1 + 4\alpha_2 \frac{\ell}{3} + 3\alpha_3 \frac{\ell^2}{2} \right) - q_1 \frac{\ell}{4} = 0$$

$$EA \left(\alpha_1 + 3\alpha_2 \frac{\ell}{2} + 9\alpha_3 \frac{\ell^2}{5} \right) - q_1 \frac{\ell}{5} = 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \ell \\ \alpha_3 \ell^2 \end{Bmatrix} = \frac{q_1 \ell}{60EA} \begin{Bmatrix} 20 \\ 15 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

Portanto

$$\alpha_1 = \frac{q_1 \ell}{2EA} \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 = -\frac{q_1}{6EA\ell}$$

$$u = \frac{q_1 \ell}{2EA} x - \frac{q_1}{6EA\ell} x^3 = \frac{q_1 \ell^2}{6EA} \left(3 \frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^3} \right)$$

$$u(\ell) = \frac{q_1 \ell^2}{6EA} (3 - 1) = \frac{q_1 \ell^2}{3EA}$$

$$u' = \frac{q_1 \ell^2}{6EA} \left(\frac{3}{\ell} - \frac{3x^2}{\ell^3} \right)$$

$$u'(0) = \frac{q_1 \ell}{2EA} \quad ; \quad \text{Valor coerente com o da força axial máxima.}$$

$$u'(\ell) = \frac{q_1 \ell^2}{6EA} \left(\frac{3}{\ell} - \frac{3}{\ell} \right) = 0 \quad (\text{Idêntico à condição mecânica na extremidade inferior !})$$

Resposta:

$$u = \frac{q_1 \ell^2}{EA} \left\{ \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^3}{6} \right\}$$

Faça o gráfico dessa função, nele indicando o valor máximo e particularidades de tangentes à curva em pontos importantes, para definir precisamente o seu andamento.

Determine a expressão de $N(x)$ e faça seu gráfico, com todas as particularidades da curva, definidas em todos os pontos do domínio, principalmente no início e no fim do comprimento ℓ .

Verifique se a condição mecânica de contorno estará satisfeita em $x = \ell$.

Calcule o valor de Π .

2.1.2.1.5 T5G Tirante isostático com força P concentrada no interior do domínio; u linear em todo o domínio

Aplica-se o método da energia ao caso de tirante com vinculação idêntica à dos exemplos anteriores e com força concentrada P no interior do domínio e $u(x)$ descrito por polinômio linear para todo o comprimento do elemento estrutural, Fig. 2.6.

Este exemplo mostra que não é boa aproximação, porque ela não será capaz de captar a descontinuidade da derivada de $u(x)$ que ocorre no ponto de aplicação da força concentrada.

Adotando-se a aproximação linear, já obediente à condição geométrica (ou cinemática) de contorno no apoio superior

$$u(x) = \alpha_1 x$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \alpha_1$$

$$\pi = \mathcal{U} + \Omega = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA \alpha_1^2 dx - Pu(x_P) = \frac{EA}{2} \alpha_1^2 \ell - P\alpha_1 x_P$$

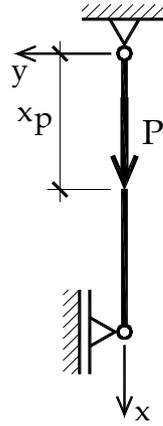


Figura 2.6 – Tirante com força no interior do domínio

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 = (EA\alpha_1 \ell - Px_p) d\alpha_1 = 0$$

Sendo $d\alpha_1$ não nulo, resultam

$$\alpha_1 = \frac{P x_p}{EA \ell} \quad \text{e} \quad u(x) = \frac{P x_p}{EA \ell} x$$

Calculando-se o valor da energia potencial total tem-se

$$\Pi_P = \frac{\Omega}{2} = \frac{-P^2 x_p^2}{2EA\ell}$$

Fazendo-se os gráficos, Fig. 2.7, de $u(x)$, $u'(x)$ e $N(x)$ verifica-se, facilmente, que o resultado não é coerente com a real solitação da barra. Note-se, pelo exame do andamento dos gráficos, que os resultados neles expostos somente seriam corretos se $x_p = \ell$, que é caso já examinado.

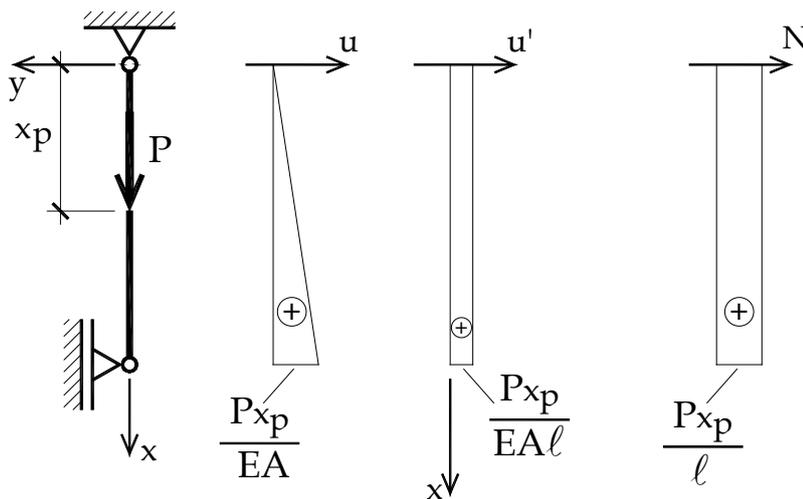


Figura 2.7 – Deslocamentos, deformações e força axial.

No caso proposto, sabe-se que em $x = x_p$ há descontinuidade da força axial, portanto há descontinuidade de σ e, por consequência, descontinuidade de $\varepsilon = u'$. Isto sugere que a abordagem deve considerar dois subdomínios (trechos) na barra, cada um com expressão própria para $u(x)$. É o que se apresenta no exemplo seguinte.

2.1.2.2 Parâmetros generalizados e subdivisão em subdomínios

2.1.2.2.1 T6G Tirante isostático, com força concentrada P no interior do domínio e duas funções distintas de aproximação linear, uma para cada trecho descarregado. Fig. 2.6.

Na formulação com parâmetros generalizados, mostra-se a necessidade de usar equação complementar, explícita, para garantir a continuidade de $u(x)$ no ponto de união (compatibilização de deslocamentos) entre as duas funções (ponto de aplicação da força P). Em exemplos seguintes, utilizando-se formulação com emprego de parâmetros nodais, a compatibilização será imposta de maneira direta, implícita.

Aproximação de primeiro grau para o primeiro trecho (do apoio fixo até o ponto $x = x_p$)

$$u_I = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

Devendo obedecer a condição cinemática de contorno, resulta

$$u_I = \alpha_1 x$$

Logo

$$u'_I = \alpha_1$$

A outra aproximação para o trecho restante da barra, desde o ponto de aplicação da força P será

$$u_{II} = \beta_0 + \beta_1 x$$

Como as expressões de u_I e u_{II} são distintas, torna-se necessário impor igualdade de valores dessas duas funções no ponto $x = x_p$, isto é, para garantir continuidade de deslocamento axial nesse ponto.

Então

$$u_I(x_p) = u_{II}(x_p)$$

ou seja

$$\alpha_1 x_p = \beta_0 + \beta_1 x_p$$

Esta é a expressão de dependência entre os coeficientes presentes em cada uma das duas aproximações adotadas. Dela resulta, por escolha arbitrária

$$\beta_0 = (\alpha_1 - \beta_1)x_p$$

para uso posterior.

Com isto pode-se escrever

$$\Pi = \mathcal{U}_I + \mathcal{U}_{II} + \Omega = \frac{EA}{2} \int_0^{x_p} \alpha_1^2 dx + \frac{EA}{2} \int_{x_p}^{\ell} \beta_1^2 dx - P \alpha_1 x_p$$

Note-se que, na parcela do potencial da força concentrada externa, optou-se pelo uso de $u_I(x_p)$, como multiplicador da força. Tendo-se em vista que já foi imposta continuidade de deslocamentos axiais nesse ponto, a utilização de $u_I(x_p)$ ou $u_{II}(x_p)$ será indiferente. Optou-se pela expressão mais curta!

A integração fornecerá

$$\Pi = \frac{EA}{2}\alpha_1^2 x_P + \frac{EA}{2}\beta_1^2(\ell - x_P) - P\alpha_1 x_P$$

As derivadas igualadas a zero serão

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} = EA\alpha_1 x_P - Px_P = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \beta_1} = EA\beta_1(\ell - x_P) = 0$$

Imediatamente tira-se desse sistema que

$$\alpha_1 = \frac{P}{EA} \quad \beta_1 = 0$$

independentemente da posição x_P da força e, como decorrência

$$\beta_0 = \alpha_1 x_P$$

Logo

$$u_I = \frac{P}{EA}x$$

$$u_{II} = \alpha_1 x_P = \frac{Px_P}{EA} = \text{constante}$$

Como consequência

$$N_I = EAu'_I = P \quad N_{II} = EAu'_{II} = 0$$

$$\Pi = \frac{\Omega}{2} = \frac{-P^2 x_P}{2EA}$$

Como exercício, fazer os gráficos dos deslocamentos e das forças axiais, ao longo da barra, verificando se eles retratam a realidade.

Observe-se, ainda, que, pelos resultados obtidos, quando $x_P = \ell$ resultaria β_1 indefinido, o que não é preocupante, porque nesse caso a aproximação $u_{II}(x)$ seria desnecessária!

2.1.2.3 Parâmetros nodais e uma função de aproximação para o domínio completo

Passa-se a utilizar as funções de aproximação descritas por parâmetros nodais em lugar dos generalizados.

De modo geral, define-se *parâmetro nodal* como o valor particular da função de aproximação (e, também de suas derivadas, em exemplos posteriores) em pontos escolhidos, chamados “nós”, do domínio do elemento estrutural, ou de seus subdomínios.

A quantidade de pontos e parâmetros nodais dependem do grau da função de aproximação e do tipo de parâmetros nodais escolhidos. Por exemplo, quanto aos tirantes, no caso de se utilizar polinômio de aproximação de primeiro grau, os parâmetros nodais devem ser dois e localizados nas extremidades do subdomínio, para permitir a imposição direta de continuidade de deslocamento axial entre elementos adjacentes. Como se observou em exemplos anteriores, quando parâmetros generalizados foram utilizados, foi necessário usar equação explícita para compatibilizar deslocamentos axiais em subdomínios adjacentes.

Como outro exemplo, se fosse adotada função de aproximação de terceiro grau (4 parâmetros) os parâmetros nodais poderiam ser: a) quatro valores da função $u(x)$ em quatro pontos do domínio do elemento estrutural (dois pontos nas extremidades e dois no interior) ou; b) os valores da função e da sua primeira derivada $u'(x)$ em cada um dos nós de extremidade.

No caso do subdomínio de tirante, para os exemplos apresentados nesta publicação, serão utilizados apenas os valores da função de aproximação em cada nó (do interior ou de extremidades). Ter-se-á, então, apenas um parâmetro por nó. E isto facilita a exposição a seguir, assim como a explicação sobre a formação da matriz de rigidez da estrutura a partir das contribuições das matrizes de rigidez dos subdomínios.

Se existirem apenas nós de extremidade (aproximação linear), as forças axiais nos subdomínios serão constantes. Haverá portanto descontinuidade dessa grandeza nos nós de subdomínios adjacentes. Mas, se o número de subdomínios crescer, essa descontinuidade tenderá a desaparecer.

Esclarece-se que os pacotes computacionais de análise de estruturas baseiam-se no uso de formulação com emprego de parâmetros nodais.

Indicam-se na Fig. 2.8 os dois pontos nodais i e j nas extremidades do elemento estrutural que será considerado como subdomínio genérico, ainda não vinculado, para formar a estrutura.

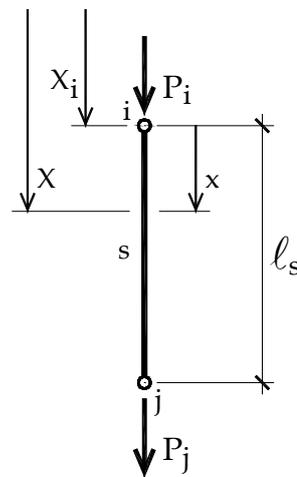


Figura 2.8 - Subdomínio genérico de tirante; Sistemas local e global

Desse modo, considera-se a situação geral para o subdomínio que poderá ter carregamento em cada um dos seus pontos nodais e também ao longo do comprimento.

Seja um subdomínio s , conforme a Fig. 2.8, com um nó em cada extremidade. Adota-se, uma aproximação com forma linear nesse subdomínio. Conforme o procedimento rotineiro, parte-se da expressão em parâmetros generalizados

$$u_s = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

onde x é uma coordenada local, com origem no nó i . Particularizando-se para os nós tem-se

$$u_s(0) = u_i = \alpha_0$$

$$u_s(x_j) = u_j = \alpha_0 + \alpha_1 x_j$$

Com linguagem matricial, pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

Dai pode-se obter

$$\alpha_0 = u_i \quad \alpha_1 = \frac{u_j - u_i}{x_j}$$

Portanto, sendo $x_j = \ell_s$

$$u_s = u_i + \frac{u_j - u_i}{\ell_s} x = \left(1 - \frac{x}{\ell_s}\right) u_i + \frac{x}{\ell_s} u_j \quad (2.8)$$

Comentário

Como é sabido, mostra-se que se a forma da função de aproximação depender de uma coordenada global, com origem fora do subdomínio, o resultado é o mesmo no subdomínio.

Seja, então, com a coordenada global X

$$u_s(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X \quad (2.9)$$

Então

$$u_s(X_i) = u_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_i$$

$$u_s(X_j) = u_j = \alpha_0 + \alpha_1 X_j$$

Com linguagem matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & X_i \\ 1 & X_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \mathbf{u}^n$$

onde n refere-se a nodal e com letras em “negrito” passa-se a indicar matrizes.

Disto pode-se obter

$$\alpha_0 = \frac{u_i X_j - u_j X_i}{X_j - X_i} \quad \alpha_1 = \frac{u_j - u_i}{X_j - X_i}$$

Portanto, sendo $X_j - X_i = \ell_s$,

$$u_s = \frac{1}{\ell_s} [u_i X_j - u_j X_i + (u_j - u_i) X] = \frac{1}{\ell_s} [(X_j - X) u_i + (X - X_i) u_j]$$

Essa expressão, assim como a (2.8), interpola u_s entre os valores nodais, para qualquer X no interior do subdomínio.

Considerando-se a coordenada local x , com origem no primeiro nó i do subdomínio, tem-se

$$X = X_i + x$$

Levando-se isto na expressão anterior tem-se

$$u_s = \frac{1}{\ell_s} [(X_j - X_i - x) u_i + x u_j] = \frac{1}{\ell_s} [(\ell_s - x) u_i + x u_j]$$

ou

$$u_s = \left[\left(1 - \frac{x}{\ell_s}\right) u_i + \frac{x}{\ell_s} u_j \right] \quad (2.10)$$

que coincide com (2.8).

Note-se que, com (2.9)

$$\frac{du_s}{dX} = \alpha_1 = \frac{du_s}{dx} = \frac{u_j - u_i}{\ell_s}$$

e, também

$$\int_{X_i}^{X_j} \dots dX = \int_0^{\ell_s} \dots dx$$

Fica claro, portanto, que será mais cômodo utilizar coordenadas locais para cálculos relativos a cada subdomínio.

Então, conforme adiantado, tome-se o subdomínio genérico da figura anterior, sem vinculação, que tem forças concentradas nos nós e ao qual acrescenta-se força distribuída q no comprimento ℓ_s .

Feito isto, já ficou evidente, durante vários dos exemplos resolvidos com subdivisão em subdomínios, que a energia potencial total é formada com o somatório das energias de deformação específica e do potencial de carregamentos de cada subdomínio. Isto porque cada parcela do somatório somente depende dos parâmetros generalizados que definem a função de aproximação de cada subdomínio. A eventual dependência indireta, ou interação entre eles, será estabelecida com a imposição das mencionadas compatibilizações de deslocamentos entre subdomínios.

Agora, para sistematizar a aplicação do método, serão utilizadas funções de aproximação dependentes de parâmetros nodais. Nesse caso, fica ainda mais evidente que cada parcela da energia potencial total, correspondente a cada subdomínio, somente depende dela mesma, em termos de parâmetros nodais e carregamentos.

Logo, tem-se

$$\Pi = \sum_1^{n_s} \Pi_s$$

onde n_s indica número de subdomínios da estrutura, o mesmo valendo para

$$d\Pi = \sum_1^{n_s} d\Pi_s$$

Portanto, é possível destacar-se um subdomínio genérico, da estrutura e do somatório, e sobre ele impor a condição de minimização $d\Pi_s = 0$. Serão obtidas equações algébricas que relacionam os deslocamentos nodais desse subdomínio com as respectivas forças nodais oriundas do carregamento sobre ele.

Desse modo, como explicação didática, pode-se dizer que à composição da estrutura, subdomínio a subdomínio, pode-se associar a correspondente montagem da matriz dos coeficientes (matriz de rigidez) do sistema de equações algébricas, a partir das relações deslocamento/forças nodais acima referidas, de cada subdomínio. Definindo-se em que ordem os parâmetros nodais da estrutura figurarão no vetor que os agrupa, resultará a matriz dos coeficientes (rigidez) do sistema. Essa observação aplica-se, também, à montagem do vetor de forças nodais do segundo membro do sistema de equações.

Tome-se, então, o subdomínio genérico, para o qual já foi deduzida acima a expressão (2.8) de $u_s(x)$. Deixa-se para impor posteriormente as condições de contorno cinemáticas de cada problema particular. Supõe-se, também, a existência de força distribuída q .

A energia potencial total será

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_s} EA_s (u'_s)^2 dx - P_i u_i - P_j u_j - \int_0^{\ell_s} q u_s dx \quad (2.11)$$

Com a expressão da variação linear de $u_s(x)$, tem-se

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_s} EA_s \left(\frac{u_j - u_i}{\ell_s} \right)^2 dx - P_i u_i - P_j u_j - \int_0^{\ell_s} q \left[\left(1 - \frac{x}{\ell_s} \right) u_i + \frac{x}{\ell_s} u_j \right] dx =$$

$$\frac{EA_s}{2\ell_s} (u_j^2 - 2u_i u_j + u_i^2) - P_i u_i - P_j u_j - \frac{q\ell_s}{2} (u_i + u_j)$$

Então, aplicando-se o princípio da energia estacionária, tem-se

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} du_i + \frac{\partial \Pi}{\partial u_j} du_j = 0$$

Conforme já visto, é necessário impor que

$$\frac{\partial \Pi_s}{\partial u_i} = \frac{EA_s}{2\ell_s} (2u_i - 2u_j) - P_i - \frac{q\ell_s}{2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_s}{\partial u_j} = \frac{EA_s}{2\ell_s} (2u_j - 2u_i) - P_j - \frac{q\ell_s}{2} = 0$$

ou, sob forma matricial

$$\frac{EA_s}{\ell_s} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i + \frac{q\ell_s}{2} \\ P_j + \frac{q\ell_s}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

que pode ser indicada de forma compacta por

$$\mathbf{k}_s^{*n} \boldsymbol{\delta}_s^n = \mathbf{f}_s^{*n}$$

onde (*) indica referência somente a deslocamentos e forças na direção do eixo do subdomínio.

No primeiro membro dessa expressão está o produto de uma matriz quadrada (matriz de rigidez) por um vetor de deslocamentos incógnitos e no segundo membro tem-se um vetor de forças nodais externas conhecidas, composto por forças concentradas nos nós e também oriundas de eventuais carregamentos ao longo do interior do subdomínio. Está aí, novamente a “equação da mola”, sob forma matricial.

Então, cada resultado desse tipo será utilizado para compor o sistema de equações da estrutura, à medida que ela for “montada” com o acréscimo sucessivo de subdomínios. Pode-se observar, neste ponto, que as forças externas, concentradas nos nós de extremidade, poderão ser acrescentadas posteriormente ao vetor de forças nodais da estrutura.

A cada subdomínio acrescentado na construção da estrutura (tirante!) corresponderá outro Π_s do tipo tratado anteriormente que, por sua vez, com a derivação em relação aos seus parâmetros nodais, contribuirá com equações algébricas do tipo (2.12), para formar o sistema de toda a estrutura. Bastará atribuir aos índices locais i, j os números dos nós na estrutura. No caso de estruturas unidimensionais, uma numeração sequencial crescente dos nós adjacentes da estrutura pode ser utilizada para basear a explicação que segue. *Quando todos os subdomínios estiverem considerados, a estrutura estará completa e, em correspondência, o sistema de equações estará formado*, bastando haver feito as superposições dos coeficientes de rigidez nas posições ditadas pelos números dos nós respectivos. Isso vale de forma explícita para este caso, onde cada nó tem apenas um grau de liberdade, isto é um parâmetro por nó. Vide 2.1.2.4.2.

A última providência será impor as condições de contorno cinemáticas. Com isto a matriz de rigidez da estrutura deixa de ser singular e a solução será encontrada.

2.1.2.3.1 T1N Tirante isostático; P na extremidade; $u(x)$ linear

Aplica-se o procedimento à situação do exemplo do tirante isostático, Fig. 2.9, com aproximação linear, já considerado em **T1G**, fixo no nó superior 1 e livre no nó inferior 2, onde atua uma força concentrada P , com apenas um subdomínio de comprimento $\ell_s = \ell$:

Conforme deduzido anteriormente, tem-se, neste caso, abandonando-se o índice s :

$$k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

com

$$k = \frac{EA}{\ell}$$

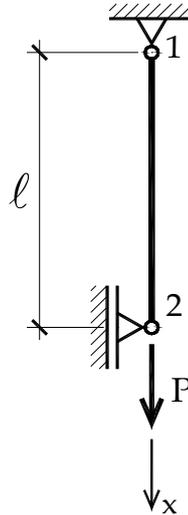


Figura 2.9 - Tirante sob força de extremidade

Impondo-se a condição de contorno cinemática no nó superior $u_1 = 0$, com o artifício abaixo, que não modifica a ordem da matriz de rigidez e dos vetores de deslocamento e de forças nodais, tem-se

$$k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

Resulta, imediatamente

$$u_2 = \frac{P\ell}{EA}$$

2.1.2.3.2 T2N Tirante isostático; força distribuída constante; $u(x)$ quadrático

Trata-se de tirante ainda isostático, com força uniforme q em todo o comprimento e uma aproximação quadrática para o deslocamento axial.

Mostra-se como utilizar a descrição da função de aproximação quadrática com três parâmetros nodais.

Inicia-se com a descrição de $u(x)$ como função de segundo grau, por meio de parâmetros generalizados

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

Escolhendo-se pontos nodais i, j nas extremidades e m no meio do comprimento ℓ do tirante, Fig. 2.10, os parâmetros nodais correspondentes podem ser escritos com uso da expressão acima, particularizada para as coordenadas dos nós escolhidos, respectivamente $0, \ell/2$ e ℓ .

$$u_i = \alpha_0$$

$$u_m = u_i + \alpha_1 \frac{\ell}{2} + \alpha_2 \frac{\ell^2}{4}$$

$$u_j = u_i + \alpha_1 \ell + \alpha_2 \ell^2$$

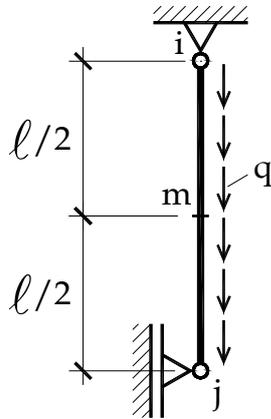


Figura 2.10 - Tirante isostático, um subdomínio, aproximação quadrática

Com essas equações serão obtidos

$$\alpha_0 = u_i$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\ell} (-3u_i + 4u_m - u_j)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\ell^2} (2u_i - 4u_m + 2u_j)$$

Levando-se na expressão original e colocando-se os parâmetros nodais em evidência tem-se

$$u(x) = \left(1 - \frac{3x}{\ell} + 2\frac{x^2}{\ell^2}\right) u_i + 4\left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2}\right) u_m + \left(\frac{-x}{\ell} + \frac{2x^2}{\ell^2}\right) u_j$$

Na Fig. 2.11 estão desenhadas as funções de forma correspondentes aos três parâmetros nodais.

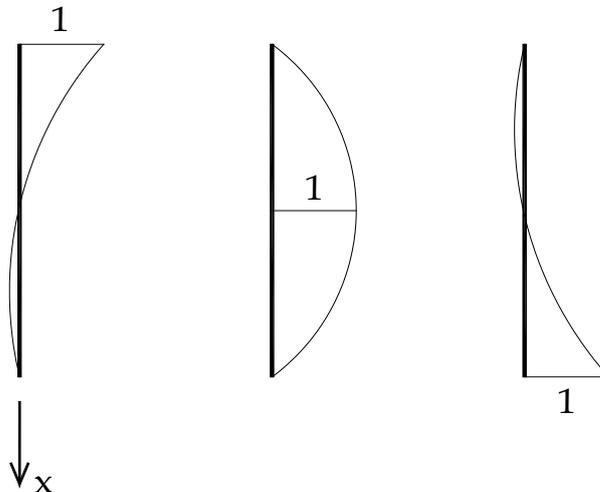


Figura 2.11 - Funções de forma associadas aos parâmetros nodais u_i , u_m e u_j

Observe-se que no segundo membro da expressão anterior cada parâmetro nodal está

multiplicado por uma função de forma quadrática, que é combinação linear dos monômios originais $1, x, x^2$.

Aplicando ao caso proposto do tirante com força uniforme q em todo o comprimento, a primeira derivada da função de aproximação será

$$u'(x) = \left(1 - \frac{3}{\ell} + 4\frac{x}{\ell^2}\right)u_i + 4\left(\frac{1}{\ell} - \frac{2x}{\ell^2}\right)u_m + \left(\frac{-1}{\ell} + \frac{4x}{\ell^2}\right)u_j$$

Impondo-se a condição de contorno $u_i = 0$ e levando-se na expressão da energia potencial total tem-se

$$\Pi = \frac{EA}{2} \int_0^\ell \left[4\left(\frac{1}{\ell} - \frac{2x}{\ell^2}\right)u_m + \left(\frac{-1}{\ell} + \frac{4x}{\ell^2}\right)u_j\right]^2 dx - q \int_0^\ell \left[4\left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2}\right)u_m + \left(\frac{-x}{\ell} + \frac{2x^2}{\ell^2}\right)u_j\right] dx$$

Esta expressão pode ser escrita com menos caracteres se passar-se a adotar uma coordenada auxiliar, adimensional, já apresentada anteriormente,

$$\xi = \frac{x}{\ell}$$

observando-se que quando se usar variável x os limites de integração são 0 e ℓ , ao passo que para ξ os limites serão 0 e 1.

Além disso

$$dx = \ell d\xi$$

Note-se, antes de efetuar substituições, que a energia pode ser escrita sob a forma seguinte, pondo-se o fator $1/\ell$ em evidência em cada uma das duas parcelas da primeira integral e, portanto, $1/\ell^2$ para fora do colchete do integrando:

$$\Pi = \frac{EA}{2\ell^2} \int_0^\ell \left[4\left(1 - \frac{2x}{\ell}\right)u_m + \left(-1 + \frac{4x}{\ell}\right)u_j\right]^2 dx - q \int_0^\ell \left[4\left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2}\right)u_m + \left(\frac{-x}{\ell} + \frac{2x^2}{\ell^2}\right)u_j\right] dx$$

portanto, inserindo-se agora a nova variável ξ , tem-se

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{EA}{2\ell^2} \int_0^1 \left[4(1 - 2\xi)u_m + (-1 + 4\xi)u_j\right]^2 \ell d\xi - q \int_0^1 \left[4(\xi - \xi^2)u_m + (-\xi + 2\xi^2)u_j\right] \ell d\xi \\ &= \frac{EA}{2\ell^2} \int_0^1 \left\{ [16(1 - 4\xi + 4\xi^2)u_m^2 + 8(-1 + 6\xi - 8\xi^2)u_m u_j + \right. \\ &\quad \left. + (1 - 8\xi + 16\xi^2)u_j^2] \right\} \ell d\xi - q \int_0^1 \left[4(\xi - \xi^2)u_m + (-\xi + 2\xi^2)u_j\right] \ell d\xi = \\ &= \frac{EA}{2\ell} \left\{ \left[16 - \frac{64}{2} + \frac{64}{3}\right]u_m^2 + \left[-8 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3}\right]u_m u_j + \left[1 - \frac{8}{2} + \frac{16}{3}\right]u_j^2 \right\} + \\ &\quad - q\ell \left\{ \left[\frac{4}{2} - \frac{4}{3}\right]u_m + \left[\frac{-1}{2} + \frac{2}{3}\right]u_j \right\} \\ &= \frac{EA}{12\ell} \left\{ [96 - 192 + 128]u_m^2 + [-48 + 144 - 128]u_m u_j + [6 - 24 + 32]u_j^2 \right\} + \\ &\quad - \frac{q\ell}{6} \left\{ [12 - 8]u_m + [-3 + 4]u_j \right\} \\ &= \frac{EA}{12} \left[32u_m^2 - 32u_m u_j + 14u_j^2 \right] - \frac{q\ell^2}{6} \left[4u_m + u_j \right] \end{aligned}$$

Calculando-se as derivadas parciais e igualando-as a zero resultam

$$\frac{EA}{12}(64u_m - 32u_j) = \frac{2}{3}q\ell^2$$

$$\frac{EA}{12}(-32u_m + 28u_j) = \frac{q\ell}{6}$$

Resolvendo-se o sistema resultam

$$u_m = 0,375 \frac{q\ell^2}{EA}$$

$$u_j = 0,5 \frac{q\ell^2}{EA}$$

que são respostas corretas, isto é idênticas às analíticas, por exemplo.

Isso pode ser confrontado com a resposta do problema **T3G**, anterior.

Calcule o valor de Π e compare-o com o obtido em 2.1.2.1.3.

2.1.2.3.3 T3N Tirante hiperestático; força distribuída constante; $u(x)$ de segundo grau

Barra idêntica à do caso anterior, porém com apoios fixos em ambas as extremidades, (hiperestática), Fig. 2.12, sob carregamento axial uniforme q em todo o comprimento e função de aproximação dada por polinômio de segundo grau. (Pergunta-se: a aproximação poderia ser admitida como sendo linear? Por quê?)

Aproveitando-se a expressão de $u(x)$ do exemplo **T2N**, na qual os nós i e j estão nas extremidades da barra e o nó m está no meio do comprimento, tem-se

$$u(x) = \left(1 - \frac{3x}{\ell} + 2\frac{x^2}{\ell^2}\right)u_i + 4\left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2}\right)u_m + \left(\frac{-x}{\ell} + \frac{2x^2}{\ell^2}\right)u_j$$

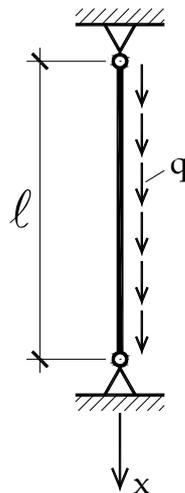


Figura 2.12 – Tirante hiperestático, carregamento uniforme

Impondo-se as condições cinemáticas de contorno

$$u(0) = u_i = u(\ell) = u_j = 0$$

resultará

$$u(x) = 4\left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2}\right)u_m$$

Logo

$$u' = 4 \left(\frac{1}{\ell} - \frac{2x}{\ell^2} \right) u_m$$

e

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{EA}{2} \int_0^\ell \left[4 \left(\frac{1}{\ell} - \frac{2x}{\ell^2} \right) u_m \right]^2 dx - q \int_0^\ell 4 \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right) u_m dx \\ &= \frac{EA}{2} 16 \int_0^\ell \left(\frac{1}{\ell^2} - \frac{4x}{\ell^3} + \frac{4x^2}{\ell^4} \right) u_m^2 dx - 4q \left(\frac{\ell^2}{2\ell} - \frac{\ell^3}{3\ell^2} \right) u_m \\ &= 8EA \left(\frac{\ell}{\ell^2} - \frac{4\ell^2}{2\ell^3} + \frac{4\ell^3}{3\ell^4} \right) u_m^2 - 4q \left(\frac{\ell^2}{2\ell} - \frac{\ell^3}{3\ell^2} \right) u_m \\ &= \frac{8EA}{\ell} \left(\frac{6-12+8}{6} \right) u_m^2 - 4q\ell \left(\frac{3-2}{6} \right) u_m \\ &= \frac{8EA}{6\ell} 2u_m^2 - \frac{4}{6} q\ell u_m = \frac{16EA}{6\ell} u_m^2 - \frac{4}{6} q\ell u_m = \frac{8EA}{3\ell} u_m^2 - \frac{2}{3} q\ell u_m \end{aligned}$$

A imposição da condição de estacionariedade requer que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_m} = \frac{16EA}{3\ell} u_m - \frac{2}{3} q\ell = 0$$

Portanto

$$u_m = \frac{6}{48} \frac{q\ell^2}{EA} = \frac{q\ell^2}{8EA}$$

Então

$$u(x) = 4 \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right) \frac{q\ell^2}{8EA} = \frac{q\ell^2}{2EA} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right)$$

$$u' = \frac{q\ell^2}{2EA} \left(\frac{1}{\ell} - \frac{2x}{\ell^2} \right) = \frac{q\ell}{2EA} \left(1 - \frac{2x}{\ell} \right)$$

$$N = \frac{q\ell}{2} \left(1 - \frac{2x}{\ell} \right)$$

que é a resposta exata. Deixa-se ao leitor a tarefa de calcular o valor de Π e compará-lo com o valor de 2.1.2.1.3. Qual deles deve ser menor, tendo-se em vista a diferença de vinculação? Faça os gráficos de $u(x)$ e $N(x)$.

2.1.2.4 Parâmetros nodais e subdivisão em subdomínios

2.1.2.4.1 T4N Tirante isostático; força externa P no interior; dois subdomínios; $u(x)$ linear em cada um

Seja o caso de tirante idêntico ao caso 2.1.2.1.5, com força concentrada no interior do domínio em $X = \ell_1$, Fig. 2.13, utilizando-se dois subdomínios que têm função de aproximação distinta e linear em cada subdomínio. O comprimento do segundo subdomínio é ℓ_2 . Há três nós na estrutura, numerados sequencialmente de 1 a 3.

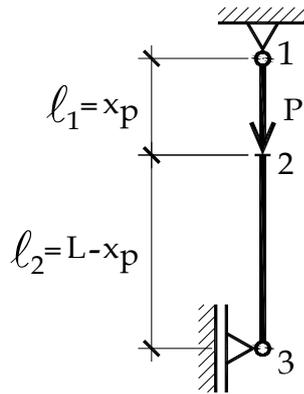


Figura 2.13 - Tirante isostático com dois subdomínios e força no interior do domínio

Esse exemplo já foi tratado com parâmetros generalizados. Será retomado, agora com a consideração de parâmetros nodais.

Conforme adiantado, mostra-se que a continuidade de $u(x)$ estará diretamente imposta no nó intermediário, onde a medida u_2 é comum aos dois trechos do domínio. Explicitam-se os procedimentos de sistematização de cálculo, com a montagem da estrutura (ou domínio) por meio da justaposição de subdomínios. Também se utilizam sistemas locais e sistema global para coordenadas, numeração de nós, etc., de maneira natural.

Então, com vistas na generalização, suponha-se que o tirante seja “a estrutura” e que os subdomínios dessa estrutura sejam elementos estruturais. Pode-se dizer que a estrutura esteja em um ambiente global e os elementos componentes em ambiente local. Os subdomínios somente apresentam diferença, neste caso, no comprimento. Indique-se, então, com ℓ o comprimento do subdomínio genérico e com L o comprimento da estrutura. Quando a estrutura for montada com a justaposição dos subdomínios, o primeiro subdomínio terá $\ell = x_p$ e o segundo terá $\ell = L - x_p$.

Seguindo-se o tratamento “local” de um subdomínio genérico (elemento genérico), de comprimento ℓ , onde se admite variação linear de $u(x)$ descrita por meio de parâmetros nodais u_i e u_j nos nós locais i e j , foi deduzido que

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) u_i + \frac{x}{\ell} u_j$$

Suponha-se, conforme a Fig. 2.13, que os nós na estrutura (barra completa, ambiente global) sejam indicados com os números 1, 2 nas extremidades do subdomínio I e 2, 3, nas extremidades do subdomínio II.

Então, trata-se de particularizar a expressão

$$\frac{EA_s}{\ell_s} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i + \frac{q\ell_s}{2} \\ P_j + \frac{q\ell_s}{2} \end{Bmatrix}$$

para cada subdomínio.

Fazendo-se

$$k_i = \frac{EA}{\ell_i}$$

tem-se:

a) para o subdomínio I

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

notando-se, pela expressão acima, que a força externa foi incorporada no potencial do carregamento do segundo nó do subdomínio *I*. Pelas observações anteriores pertinentes, essa força poderia ser adicionada somente ao final, no nó 2, quando o sistema de equações completo estiver formado. Note-se que os parâmetros nodais locais foram substituídos pelos correspondentes parâmetros globais, isto é, já foi feita a correspondência entre numeração local e global.

b) para o subdomínio *II*

$$k_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Disto resultará, para a estrutura composta por esses dois subdomínios,

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Neste exemplo apresentou-se de maneira sintética o procedimento de montagem das matrizes de rigidez e de forças nodais.

No exemplo TSN far-se-á explicação ainda mais detalhada sobre a formação dessas matrizes.

Impondo-se a condição de contorno no nó superior $U_1 = 0$, o sistema acima pode ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A solução para os dois deslocamentos não nulos resulta

$$U_2 = \frac{P\ell_1}{EA} \quad U_3 = \frac{P\ell_1}{EA} = U_2$$

Em seguida, as primeiras derivadas e as forças axiais em cada trecho podem ser calculadas, conforme realizado anteriormente nos outros exemplos. Os gráficos de deslocamentos e forças axiais podem ser construídos e o valor da energia potencial total poderá ser calculado.

Adianta-se que este é o esquema seguido para a aplicação do chamado método dos elementos finitos para a análise completa de estruturas.

O que está sendo denominado subdomínio pode ser chamado de elemento finito, isto é uma parte finita da estrutura sobre a qual são admitidas válidas expressões de formas de variação conhecida de deslocamentos, multiplicadas por parâmetros incógnitos (generalizados ou nodais) que poderão ser determinados mediante a imposição da condição de estacionariedade da energia potencial total. A denominação *elementos finitos* é empregada para diferenciar esta abordagem (formulação global) em relação ao tratamento clássico, via equações diferenciais, que é chamado de formulação local, por considerar imposição de equilíbrio sobre uma parte *infinitesimal* do domínio.

Então, pode-se afirmar que, até este ponto desta publicação, a essência do método já foi contemplada na exposição. É óbvio que, em estruturas cujas soluções analíticas não são conhecidas, as soluções via elementos finitos serão realmente aproximadas. Entretanto, com o uso de elementos com aproximações expressas por funções de grau apropriado, ou quando a discretização da estrutura for feita com um número elevado de subdomínios, as respostas aproximadas poderão atingir a precisão desejada.

Outros detalhes, que visam apenas tornar esse procedimento ainda mais sistematizável e,

portanto, mais facilmente programável, podem ser confrontados em publicações específicas sobre o método dos elementos finitos. Isso, na verdade, será necessário para permitir a aplicação do método a problemas maiores, com muitos elementos estruturais componentes, quando, evidentemente, será mandatório recorrer a computadores para as tarefas de cálculo.

2.1.2.4.2 T5N Tirante isostático; força distribuída constante; discretização sucessiva em vários subdomínios; $u(x)$ linear em cada um deles

Tirante isostático, sob força externa uniformemente distribuída em todo o domínio, com discretização sucessiva em subdomínios, em cada um dos quais se admite variação linear para o deslocamento axial $u(x)$. É o problema 2.1.2.3.2 anterior, porém utilizando-se subdomínios nos quais a variação da aproximação para os deslocamentos é expressa por polinômio de grau inferior ao daquele que conduziu à resposta exata.

Essa é uma característica principal que os elementos finitos apresentam em geral, porque, em problemas de estruturas mais complexas (placas, cascas, etc.) não são conhecidas as funções das soluções analíticas!

Em seguida estão detalhados os cálculos relativos às discretizações com 2 (Fig. 2.14) e 4 subdomínios. No final do item serão apresentados os gráficos comparativos para 2, 4 e 8 subdomínios componentes. Além disso, também para examinar a exibição da evolução da convergência, resultados estão apresentados em tabelas elucidativas, para discretizações em 2, 4, 8, 16 e 32 elementos.

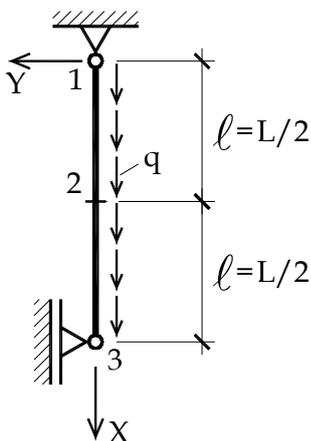


Figura 2.14 - Tirante isostático, dois subdomínios, aproximação linear em cada um

*Este exemplo permite verificar aquilo que já fora adiantado em **T1G**, quando mostrou-se que a solução com aproximação linear para todo o domínio não conduz a resultado satisfatório!*

Por outro lado, embora a melhor solução tenha sido obtida no exemplo anterior, quando foi utilizada uma aproximação de segundo grau válida para todo o domínio, (solução coincidente com a solução exata, de segundo grau!), mostra-se agora que o uso de função de aproximação de menor grau, porém em vários subdomínios da barra, também pode levar à convergência para a solução correta.

Em particular, chama-se a atenção para a necessidade usual de se fazer o monitoramento da qualidade da resposta, acompanhando e examinando a variação dos resultados sucessivos. Também é importante salientar que a sequência de discretizações deve ser feita de tal maneira que cada uma delas contenha os pontos de conexão entre subdomínios das discretizações anteriores. Portanto, o conjunto de pontos nodais de uma discretização conterá os pontos nodais de discretizações anteriores. Isso garantirá a exibição de convergência monotônica dos resultados para a resposta correta, no caso em exame. Outros requisitos para obtenção de convergência serão abordados oportunamente.

a) T5NA Primeira discretização - 2 subdomínios

Conforme anunciado em 2.1.2.3, e aplicado em 2.1.2.4.1, faz-se um detalhamento mais explícito e pormenorizado dos passos para a formação das matrizes de rigidez e de forças nodais da estrutura, a partir das matrizes correspondentes dos subdomínios.

Conforme Fig. 2.14, sejam 1, 2 e 3 os nós na numeração global (da estrutura). Seja $\ell_s = \ell$ o comprimento de cada um dos dois subdomínios I e II e L o comprimento da estrutura.

Para cada subdomínio tem-se

$$\begin{aligned}\Pi_s &= \frac{EA}{2} \int_0^\ell \left[\frac{1}{\ell} (-u_i + u_j) \right]^2 dx - q \int_0^\ell \left[\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) u_i + \frac{x}{\ell} u_j \right] dx \\ &= \frac{EA}{2\ell} (u_i^2 - 2u_i u_j + u_j^2) - q \frac{\ell}{2} (u_i + u_j)\end{aligned}\quad (2.13)$$

Portanto para a estrutura com dois subdomínios s

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II} = \sum_{s=I}^{II} (U_s + \Omega_s)$$

Neste caso, por ser estrutura unidimensional, com nós numerados sequencialmente, é imediata a identificação da correspondência entre numeração local e global dos parâmetros nodais.

Calculando-se, então, a expressão de Π , já empregando parâmetros nodais referidos ao sistema global, sem impor, por enquanto, a condição cinemática de contorno, tem-se que

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{EA}{2\ell} (U_1^2 - 2U_1 U_2 + U_2^2) - q \frac{\ell}{2} [U_1 + U_2] + \frac{EA}{2\ell} (U_2^2 - 2U_2 U_3 + U_3^2) - q \frac{\ell}{2} [U_2 + U_3] = \\ &= \frac{EA}{2\ell} [(U_1^2 - 2U_1 U_2 + U_2^2) + (U_2^2 - 2U_2 U_3 + U_3^2)] - q \frac{\ell}{2} (U_1 + U_2 + U_2 + U_3)\end{aligned}$$

Intencionalmente, na expressão acima, deixou-se escrita separadamente a contribuição individual de cada subdomínio.

Nas equações seguintes a manutenção da repetição de parcelas iguais visa facilitar a compreensão do que será exposto.

A imposição de $d\Pi = 0$ implica em

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial U_1} dU_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial U_2} dU_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial U_3} dU_3 = 0 \quad (2.14)$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial U_1} &= \frac{EA}{\ell} (U_1 - U_2) - q \frac{\ell}{2} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial U_2} &= \frac{EA}{\ell} (-U_1 + U_2 + U_2 - U_3) - q\ell \\ \frac{\partial \Pi}{\partial U_3} &= \frac{EA}{\ell} (-U_2 + U_3) - q \frac{\ell}{2}\end{aligned}\quad (2.15)$$

A condição cinemática de contorno $U_1 = 0$ tem como consequência que $dU_1 = 0$, pois o valor de U_1 é fixo (nulo), quer dizer não pode ter variação. Portanto, em (2.14) $d\Pi$, desaparece o primeiro termo do segundo membro

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_1} dU_1$$

Como os demais incrementos podem ser arbitrariamente não nulos, resulta que as

derivadas, (2.15), em relação a U_2 e a U_3 (onde $U_1 = 0$) devem anular-se, isto é, tem-se que:

$$\begin{aligned}\frac{EA}{\ell}(2U_2 - U_3) - q\ell &= 0 \\ \frac{EA}{\ell}(-U_2 + U_3) - q\frac{\ell}{2} &= 0\end{aligned}\tag{2.16}$$

Antes, porém, de encontrar essa solução, aproveita-se para apresentar outro procedimento que é útil para entender como o sistema de equações (matriz de rigidez e de forças nodais da estrutura) podem, alternativamente, ser obtidos a partir da matriz de rigidez e da matriz de forças nodais equivalentes de cada subdomínio. Isto já foi feito em 2.1.2.4.1, de maneira implícita, sem detalhamento. Posteriormente, estes mesmos procedimentos serão empregados em outros exemplos, tal como no caso de viga simplesmente apoiada com força P concentrada no centro do vão e de uma treliça plana. Note-se que as condições cinemáticas de contorno não serão aplicadas “a priori”. Para sistematizar, elas serão impostas após completar a formação das matrizes da estrutura.

Considere a equação básica para um elemento de treliça (2.12), em cujo segundo membro estão supostas apenas as forças nodais equivalentes denominadas, respectivamente, por f_{u_i} e f_{u_j} , devidas a carregamentos no subdomínio

$$\begin{aligned}\frac{EA}{\ell}(u_i - u_j) &= f_{u_i} \\ \frac{EA}{\ell}(-u_i + u_j) &= f_{u_j}\end{aligned}\tag{2.17}$$

Sob forma matricial tem-se

$$\frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_i} \\ f_{u_j} \end{Bmatrix}$$

Esse resultado já foi indicado em 2.1.2.3 e, sob forma compacta, tem-se

$$\mathbf{k}_s^{*n} \boldsymbol{\delta}_s^n = \mathbf{f}_s^{*n}$$

Isto foi obtido para um subdomínio de tirante.

Agora, quando se pretende utilizar dois subdomínios no tirante em foco, a notação será mais explícita para permitir acompanhamento do processo. Além disso, chama-se a atenção para o fato que, sendo sequencial a numeração dos nós da estrutura, fica fácil fazer a correspondência entre os nós locais i, j e os números 1,2 e 2,3 dos nós globais da estrutura. Então, mesmo nas equações do subdomínio, fazendo-se a correspondência, os deslocamentos nodais serão indicados com letra maiúscula, referindo-se portanto aos deslocamentos globais da estrutura.

Para o subdomínio I a equação acima ficará sob a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{EA} \begin{Bmatrix} f_{u_1}^I \\ f_{u_2}^I \end{Bmatrix}$$

Quanto ao segundo membro prefere-se, pelo menos por ora, manter notação de índices com letra minúscula para enfatizar que as forças nodais indicadas são oriundas do carregamento ao longo do subdomínio. Eventuais forças nodais concentradas nos nós serão acrescentadas após a montagem das matrizes da estrutura.

Sem promover nenhuma alteração de significados, essa relação pode ser colocada sob uma forma “expandida”, envolvendo todos os deslocamentos e forças nodais equivalentes da estrutura em análise, que está subdividida em 2 subdomínios, isto é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{EA} \begin{Bmatrix} f_{u_1}^I \\ f_{u_2}^I \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{Sub I})$$

Do mesmo modo, para o subdomínio *II* tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{u_1}^{II} \\ f_{u_2}^{II} \end{Bmatrix} \quad (\text{Sub II})$$

É fácil perceber que nas expressões (2.15) das derivadas do Π em relação aos parâmetros nodais do subdomínio I (referidos à numeração global da estrutura) não aparecerão contribuições dos parâmetros do nó global 3. Do mesmo modo, nas expressões das derivadas de Π em relação aos parâmetros nodais do subdomínio *II* (referidos à numeração global da estrutura) não aparecerão contribuições dos parâmetros do nó global 1. Isso fica claro ao examinar o aspecto das matrizes de rigidez e de forças nodais das expressões acima (Sub I) e (Sub II).

Neste caso, observe-se também que a matriz do primeiro membro em (Sub II) pode ser vista como formada pela “translação” da submatriz de ordem 2 x 2 da matriz 3 x 3 do primeiro membro de (Sub I). A soma dessas duas equações matriciais, membro a membro, coeficiente a coeficiente, fornecerá

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{EA} \begin{Bmatrix} f_{u_1}^I \\ f_{u_2}^I + f_{u_1}^{II} \\ f_{u_2}^{II} \end{Bmatrix} = \frac{q\ell^2}{EA} \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 1,0 \\ 0,5 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Esse resultado pode também ser entendido da seguinte maneira. É como se uma matriz “gabarito” de ordem 3 x 3, neste caso, fosse preenchida sucessivamente com os valores da submatriz de rigidez 2 x 2 de cada subdomínio, colocados nas posições ditadas pela ordem dos parâmetros nodais correspondentes no vetor de deslocamentos, fazendo-se a soma dos valores que se superpuserem. Explicação semelhante é válida para o vetor de forças nodais do segundo membro da equação acima.

Destaca-se que ocorre a “translação” da submatriz 2 x 2, neste caso, porque a numeração dos nós da estrutura foi adotada sequencialmente. Se a numeração, por alguma razão, não fosse a sequencial, a contribuição da matriz de rigidez de cada subdomínio para a matriz de rigidez da estrutura ocorreria de forma diversa. Vide, por exemplo, o caso da chapa no capítulo 3, item 3.4.1.2.6. Resultaria uma matriz de rigidez com os valores não nulos posicionados em locais mais distantes da diagonal principal. Isso pode ser pesquisado pelo leitor, com mais evidência, se, como exercício, nos casos seguintes de discretização em maior número de subdomínios, for adotada numeração não sequencial para os nós da estrutura. É claro que no vetor de parâmetros nodais, por vários motivos, a lista deles obedecerá a ordem sequencial, nó por nó.

Apenas como ilustração vide que, no caso desta discretização em 2 subdomínios, se a numeração dos nós, a partir do apoio fixo superior, fosse 1, 3 e 2 o sistema acima ficaria com a forma seguinte

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_1}^I \\ f_{u_2}^{II} \\ f_{u_2}^I + f_{u_1}^{II} \end{Bmatrix} = \frac{q\ell^2}{EA} \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1,0 \end{Bmatrix}$$

Há outras maneiras de fazer a formalização das operações relativas à formação das matrizes da estrutura a partir das matrizes dos subdomínios!

Impondo-se em (2.18) a condição de contorno cinemática $U_1 = 0$, que implica em eliminar, nessa equação matricial, a primeira linha dos dois membros e a primeira coluna da matriz do

primeiro membro, como consequência do que foi explicado acima, fica-se com a forma seguinte

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell^2}{EA} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{Bmatrix}$$

que coincide com (2.16)

A solução do sistema é

$$U_2 = \frac{3q\ell^2}{2EA} = \frac{3qL^2}{2(4EA)} = \frac{3qL^2}{4(2EA)} \quad \text{e} \quad U_3 = \frac{2q\ell^2}{EA} = \frac{2qL^2}{EA \cdot 4} = \frac{qL^2}{2EA}$$

Nota-se que nos nós as respostas coincidem com as exatas. Mas entre os nós a variação de $u(x)$ é linear, conforme admitido pela função de aproximação para cada subdomínio. Além disso, a condição mecânica de contorno no ponto $x = L$, que deve ser $N(L) = 0$, não está obedecida, pois

$$N(L) = \frac{U_3 - U_2}{\ell} EA = \frac{2}{L} EA(U_3 - U_2) = \frac{qL}{4} = 0,25qL$$

Forças axiais nos subdomínios

$$\begin{Bmatrix} N_I \\ N_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,75 \\ 0,25 \end{Bmatrix} qL$$

Na figura (2.16) serão exibidos resultados desta discretização e das seguintes com maior número de subdomínios, para comparação.

O valor da energia potencial total correspondente à solução encontrada é

$$\begin{aligned} \Pi_{aprox} &= \frac{\Omega}{2} = -\frac{1}{2} \left[q\ell \frac{3q\ell^2}{2EA} + \frac{q\ell}{2} \frac{2q\ell^2}{EA} \right] = -\frac{1}{2} \frac{q^2\ell^3}{EA} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) = -\frac{5}{4} \frac{q^2L^3}{EA \cdot 8} = -\frac{5}{32} \frac{q^2L^3}{EA} \\ &= -0,15625 \frac{q^2L^3}{EA} \end{aligned}$$

que é 6,67% maior do que o valor correto

$$\Pi = \frac{-q^2L^3}{6EA} = -0,16667 \frac{q^2L^3}{EA}$$

b) T5NB Segunda discretização – 4 Subdomínios

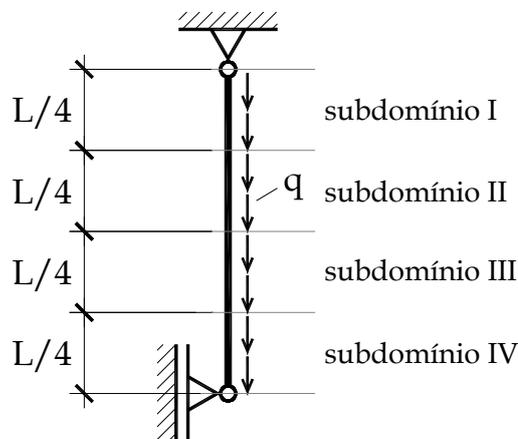


Figura 2.15 - Tirante isostático, 4 subdomínios, aproximação linear em cada um

Pode-se melhorar a solução, discretizando-se o tirante em 4 subdomínios, $\ell = L/4$ com

nós 1, 2, 3, 4 e 5 na numeração global da estrutura. Nós 1 e 5 nas extremidades do tirante e os nós 2, 3 e 4 nas uniões dos subdomínios *I – II*, *II – III* e *III – IV*, Fig. 2.15.

Novamente, aproveitando-se a explicação relativa à subdivisão em 2 subdomínios, agora, a montagem do sistema final de equações para a estrutura, antes da imposição da condição cinemática de contorno no nó superior, será feita com os seguintes passos:

Para o subdomínio *I*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_1}^I \\ f_{u_2}^I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Do mesmo modo, para os subdomínios *II*, *III* e *IV* tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{u_1}^{II} \\ f_{u_2}^{II} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{u_1}^{III} \\ f_{u_2}^{III} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{u_1}^{IV} \\ f_{u_2}^{IV} \end{Bmatrix}$$

A soma dessas quatro equações matriciais, membro a membro, fornecerá

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_1}^I \\ f_{u_2}^I + f_{u_1}^{II} \\ f_{u_2}^{II} + f_{u_1}^{III} \\ f_{u_2}^{III} + f_{u_1}^{IV} \\ f_{u_2}^{IV} \end{Bmatrix} = \frac{q\ell^2}{EA} \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0,5 \end{Bmatrix}$$

Impondo-se a condição de contorno cinemática $U_1 = 0$, fica-se com a forma seguinte

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell^2}{EA} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0,5 \end{Bmatrix}$$

Aqui, aproveita-se para comentar algo que ficou ainda mais evidenciado neste sistema de equações e que é a característica chamada em “banda” da matriz de rigidez da estrutura. Como se nota, ela se apresenta com os valores não nulos agrupados nas adjacências da sua diagonal principal. Define-se largura da semi-banda da matriz como o máximo dentre os números que indicam, em cada

linha, quantas colunas existem desde a coluna na diagonal principal até o último elemento não nulo. No caso da matriz de rigidez acima a largura da semi-banda é igual a 2. Essa semi-banda depende do número de graus de liberdade em cada nó e da máxima diferença entre os números (na numeração global) dos nós dos subdomínios que compõem a estrutura.

Isto pode ser expresso por

$$LSM = (MAXDIF + 1) * NPARN$$

onde LSM = largura da semi-banda; $MAXDIF$ = máxima diferença entre os números (numeração global da estrutura) que designam os pontos nodais de cada um de todos os subdomínios da estrutura; $NPARN$ = número de parâmetros em cada nó.

Aplicando-se ao caso da discretização em análise tem-se

$$LSM = (1 + 1) * 1 = 2$$

Sabe-se que quanto menor for o valor de LSM , que um sistema de equações tiver, menor será o número de operações a realizar para resolvê-lo, o que implica em menor tempo de processamento e maior precisão. Conforme comentado anteriormente, a largura da semi-banda depende, além de $NPARN$, também da sequência da numeração escolhida para os nós da estrutura. Foi ilustrado que com a numeração sequencial conseguiu-se a menor $MAXDIF$. Os pacotes computacionais para resolver casos de estruturas com emprego de métodos numéricos apresentam embutidos os algoritmos que promovem a renumeração dos nós para que se tenha a semi-banda mais estreita.

A solução do sistema de equações fornece

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \frac{q\ell^2}{EA} \begin{pmatrix} 3,5 \\ 6,0 \\ 7,5 \\ 8,0 \end{pmatrix} = \frac{qL^2}{16EA} \begin{pmatrix} 3,5 \\ 6,0 \\ 7,5 \\ 8,0 \end{pmatrix} = \frac{qL^2}{2EA} \begin{pmatrix} 0,4375 \\ 0,75 \\ 0,9375 \\ 1,0 \end{pmatrix}$$

onde foi feita a substituição $\ell = L/4$.

Novamente, neste caso, nos nós os valores coincidem com os exatos. A Fig. 2.16 mostra a evolução dos deslocamentos aproximados nos nós, para 2, 4 e 8 subdomínios.

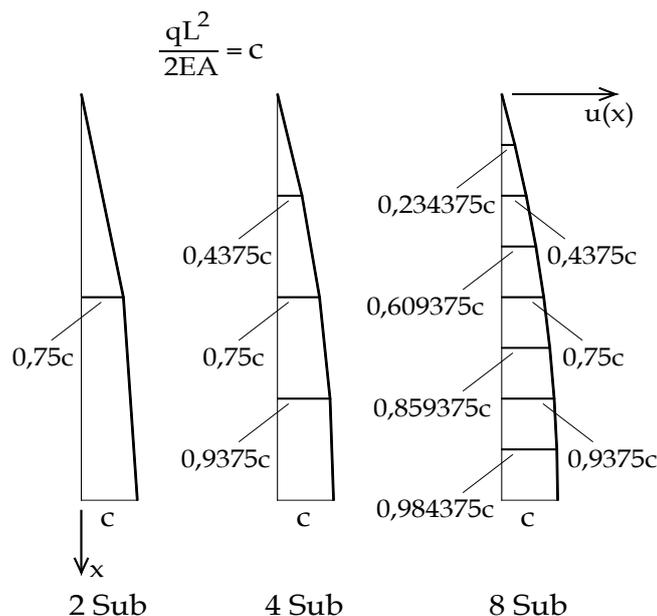


Figura 2.16 - Deslocamentos nodais em 3 discretizações sucessivas

A convergência para deslocamentos é notável.
Os valores das forças axiais são

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,875 \\ 0,625 \\ 0,375 \\ 0,125 \end{pmatrix} qL$$

Ilustra-se a seguir o cálculo de

$$N(L) = N_4 = \frac{u_5 - u_4}{\ell} EA = \frac{4}{L} EA(u_5 - u_4) \frac{qL^2}{2EA} = 2qL(0,0625) = 0,125qL$$

que resultou mais próximo do valor nulo, em relação ao resultado da discretização anterior em 2 subdomínios, mas é diferente de zero, como deveria ser, conforme a condição mecânica de contorno $N(L) = 0$.

Na origem tem-se

$$N(0) = \frac{u_2}{\ell} EA = 0,875qL$$

mais próxima de qL , em relação à aproximação anterior, mas ainda não aceitável.

A energia potencial total é

$$\Pi = -0,1640625 \frac{q^2 L^3}{EA}$$

c) T5NC Discretizações com maior número de subdomínios

E assim, sucessivamente, foram feitas outras subdivisões em 8, 16, 32 e 64 subdomínios, seguindo-se a exposição anterior, obtendo-se os resultados (com programa para computador) reunidos nas Tabelas 2.1, 2.2, 2.3, e 2.4, (até 32 subdomínios quanto aos deslocamentos e forças axiais, Tabelas 2.3 e 2.4).

O exame dos resultados evidencia a convergência para os valores corretos, à medida que o número de subdomínios cresce. Para facilitar a escrita os índices que designam os subdomínios estão indicados com algarismos arábicos.

Condição mecânica de contorno

Registrada nas últimas linhas de cada coluna da Tab. 2.4 e estão reunidas na Tab. 2.1 seguinte

Tabela. 2.1 - Valor da força axial/ (qL) em $x = L$ (Condição mecânica de contorno)

	Número de Subdomínios						
	2	4	8	16	32	64	Exato
$N(L)/qL$	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	0,0078125	0,0

Energia potencial total Π

Tabela. 2.2 - Energia potencial total / $(\frac{q^2 L^3}{EA})$

	Número de Subdomínios						
	2	4	8	16	32	64	Exato
$\Pi / (\frac{q^2 L^3}{EA})$	-0,15625	-0,1640625	-0,1660156	-0,1665039	-0,1666260	-0,1666565	-1/6

Tabela. 2.3 - Deslocamentos nodais/ $(\frac{qL^2}{EA})$

Desloc/ $(\frac{qL^2}{EA})$	Número de Subdomínios				
	2	4	8	16	32
U_2	0,375	0,21875	0,1171875	0,06546875	0,030761719
U_3	0,5	0,375	0,21875	0,1171875	0,06546875
U_4		0,46875	0,3046875	0,1699219	0,089355469
U_5		0,5	0,375	0,21875	0,1171875
U_6			0,4296875	0,2636719	0,1440430
U_7			0,46875	0,3046875	0,1699219
U_8			0,4921875	0,3417969	0,1948242
U_9			0,5	0,375	0,21875
U_{10}				0,4042969	0,2416992
U_{11}				0,4296875	0,2636719
U_{12}				0,4511719	0,2846680
U_{13}				0,46875	0,3046875
U_{14}				0,4824219	0,3237305
U_{15}				0,4921875	0,3417969
U_{16}				0,4980469	0,3588867
U_{17}				0,5	0,375
U_{18}					0,3901367
U_{19}					0,4042969
U_{20}					0,4174805
U_{21}					0,4296875
U_{22}					0,4409180
U_{23}					0,4511719
U_{24}					0,4604492
U_{25}					0,46875
U_{26}					0,4760742
U_{27}					0,4824219
U_{28}					0,4877930
U_{29}					0,4921875
U_{30}					0,4956055
U_{31}					0,4980469
U_{32}					0,4995117
U_{33}					0,5

Tabela. 2.4 - Forças axiais/ (qL)

Nos Subdomínios (qL) (*)	Número de Subdomínios				
	2	4	8	16	32
N_1	0,75	0,875	0,9375	0,96875	0,984375
N_2	0,25	0,625	0,8125	0,90625	0,953125
N_3		0,375	0,6875	0,84375	0,921875
N_4		0,125	0,5625	0,78125	0,890625
N_5			0,4375	0,71875	0,859375
N_6			0,3125	0,65625	0,828125
N_7			0,1875	0,59375	0,796875
N_8			0,0625	0,53125	0,765625
N_9				0,46875	0,734375
N_{10}				0,40625	0,703125
N_{11}				0,34375	0,671875
N_{12}				0,28125	0,640625
N_{13}				0,21875	0,609375
N_{14}				0,15625	0,578125
N_{15}				0,09375	0,546875
N_{16}				0,03125	0,515625
N_{17}					0,484375
N_{18}					0,453125
N_{19}					0,421875
N_{20}					0,390625
N_{21}					0,359375
N_{22}					0,328125
N_{23}					0,296875
N_{24}					0,265625
N_{25}					0,234375
N_{26}					0,203125
N_{27}					0,171875
N_{28}					0,140625
N_{29}					0,109375
N_{30}					0,078125
N_{31}					0,046875
N_{32}					0,015625

Pela evolução dos resultados da força axial em $x = L$, na série de discretizações, percebe-se que a convergência para o valor correto (igual a zero) é muito boa. Isto fica ainda mais evidente quando o número de subdomínios é 64 e a força axial em $x = L$ é apenas $0,0078125qL$.

2.1.2.4.3 T6N Tirante hiperestático; força distribuída constante; 2 subdomínios; u linear

Aplicando-se agora ao caso do tirante da Fig. 2.17, bi-apoiado, hiperestático, com força uniforme distribuída em todo o domínio de comprimento L e adotando-se dois subdomínios iguais ($\ell_s = L/2$), cada um com aproximação linear para o deslocamento axial, tem-se:

$$\frac{EA}{\ell_s} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = q\ell_s \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,5 + 0,5 \\ 0,5 \end{Bmatrix}$$

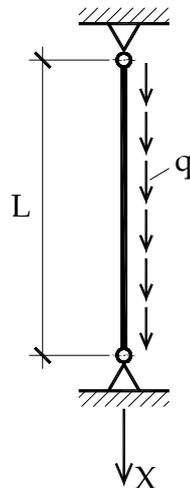


Figura 2.17 - Tirante hiperestático com força distribuída uniforme

Aplicando-se as condições cinemáticas de contorno $U_1 = U_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell_s^2}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,5 + 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde

$$U_2 = \frac{q\ell_s^2}{2EA} = \frac{qL^2}{8EA}$$

Esse valor, no nó central, coincide com o valor exato. Porém, de acordo com a variação linear adotada para os dois subdomínios, entre os nós os valores não serão exatos. Seria necessário fazer subdivisões em maior número de subdomínios, com procedimento análogo ao do exemplo anterior, para alcançar valores exatos em um maior número de pontos nodais, caso necessário.

Pelo andamento das dimensões das matrizes de rigidez e de forças nodais é possível imaginar o que ocorreria com a consideração de 4 subdomínios com variação linear de deslocamentos para o mesmo exemplo acima. E, com isto, conforme assinalado anteriormente, ter-se-á orientação para sistematizar o cálculo com emprego de computador, quando o número de subdomínios (incógnitas) for maior.

2.1.2.4.4 T7N Sugestão de exercício: Tirante hiperestático; força externa P no interior da barra, dois subdomínios; u linear em cada um

É caso semelhante a 2.1.2.4.1 T4N, porém com vínculo fixo também na base. Aproveitar para examinar o andamento dos deslocamentos e das forças axiais nos trechos da barra em função da variação da posição X_p do ponto de aplicação de P .

2.2 TRELIÇAS

2.2.1 Introdução

Até agora, quando foram utilizados subdomínios nos exemplos de tirantes, a formulação das equações, e sua aplicação para compor o tirante, foi bastante imediata, porque todos os eixos dos subdomínios eram colineares. As matrizes de rigidez e de forças nodais se referiam a deslocamentos globais colineares.

Quando, porém, for o caso de estrutura (treliça) composta por barras cujos eixos que concorrem em “pontos”, chamados nós da treliça, não são colineares é necessário complementar o tratamento até agora dispensado ao elemento básico chamado “barra de treliça”. Note-se que no caso de subdomínio barra de treliça, com função de aproximação linear, os nós das extremidades do subdomínio irão coincidir com os nós da treliça (encontro de barras componentes).

De modo geral, como já sabido, a barra de treliça é elemento estrutural cujo comprimento é bem maior do que as dimensões da sua seção transversal e que pode estar submetido a esforço de tração (tirante) ou de compressão. Quanto à compressão, o desenvolvimento para obtenção das matrizes de rigidez e de forças nodais será análogo ao que se fez para os tirantes, desde que se tomem medidas para que o subdomínio esteja adequadamente contraventado, para não ficar sujeito à perda de estabilidade lateral.

A eventual flexão que ocorre em barras componentes de treliça, cujo eixo não seja vertical, produz efeitos que podem ser negligenciados. O peso próprio de cada barra pode ser dividido em duas partes, cada uma aplicada aos nós de extremidade. (Isto é coerente com aproximação linear para $u(x)$ e força distribuída uniforme no comprimento).

Recorda-se uma conclusão importante, oriunda de resultados anteriores, que mostrou que o uso de subdomínio formado por barra linear, com dois nós de extremidade e, portanto, com função de aproximação linear, leva a resultado exato se o carregamento externo for apenas constituído por forças aplicadas nas extremidades (nós) na direção do eixo do subdomínio.

Portanto, isto será útil para a abordagem das treliças.

2.2.2 Generalização da relação entre deslocamentos e forças nodais de barras sob ação axial

Já é conhecido o relacionamento entre deslocamentos nodais e respectivas forças nodais, quando uma barra genérica (Fig. 2.18) estiver referida a eixo local x coincidente com seu próprio eixo geométrico. Isto, conforme detalhado anteriormente, decorre da minimização de

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_s} EA_s \left(\frac{u_j - u_i}{\ell_s} \right)^2 dx - f_{u_i} \cdot u_i - f_{u_j} \cdot u_j \quad (2.19)$$

correspondente a um subdomínio s , com função de aproximação linear, descrita com uso de parâmetros nodais locais u_i e u_j , e em cujas extremidades existam forças nodais f_{u_i} e f_{u_j} correspondentes.

A imposição de $d\Pi_s = 0$, fornece, como já visto:

$$\frac{EA_s}{\ell_s} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_i} \\ f_{u_j} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Isto serviu para determinar deslocamentos dos nós da barra que somente têm liberdade para se deslocar na direção do eixo dessa barra.

No caso de uma estrutura com múltiplas barras de treliça, cujos eixos têm diversas orientações, será necessário adotar um único sistema de referência (pelo menos em cada nó) para que as contribuições da energia potencial de cada barra possam ser acumuladas e compor a energia potencial da estrutura. Afinal, o equilíbrio no nó requer derivada de Π em relação a uma mesma direção. Isso exige que em cada nó r da estrutura seja utilizado um sistema de referência para os seus deslocamentos finais U_r e V_r . É usual escolher esses sistemas com a mesma orientação dos eixos globais X, Y . Desse modo, em cada nó, há a necessidade de relacionar o deslocamento local axial u_r com os deslocamentos globais U_r e V_r referidos a X, Y .

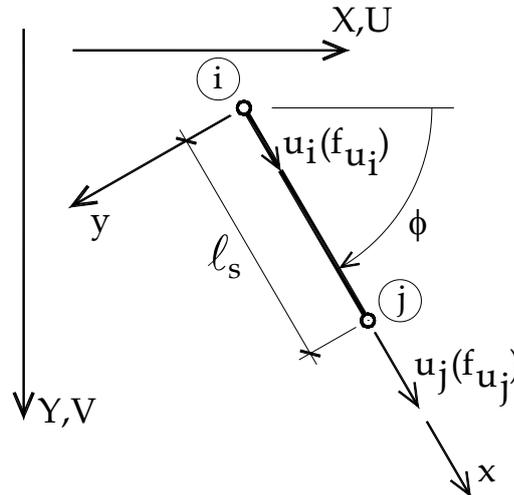


Figura 2.18 - Elemento genérico de treliça

De acordo com a figura anterior em qualquer nó r tem-se, pela geometria:

$$u_r = U_r \cdot \cos\phi + V_r \cdot \sen\phi \quad (2.21)$$

ou, utilizando-se notação mais compacta para $\cos\phi = c$ e $\sen\phi = s$,

$$u = U \cdot c + V \cdot s \quad (2.22)$$

Retome-se a expressão (2.19), que integrada dará:

$$\Pi_s = \frac{EA_s}{2\ell_s} (u_j - u_i)^2 - f_{u_i} \cdot u_i - f_{u_j} \cdot u_j \quad (2.23)$$

Substituindo-se nela a relação (2.22), em cada nó, tem-se:

$$\frac{EA_s}{2\ell_s} [(U_j c + V_j s) - (U_i c + V_i s)]^2 - f_{u_i} (U_i c + V_i s) - f_{u_j} (U_j c + V_j s) \quad (2.24)$$

Então, derivando-se em relação aos parâmetros nodais globais:

$$\frac{\partial \Pi_s}{\partial U_i} = \frac{EA_s}{\ell_s} [U_j c + V_j s - U_i c - V_i s](-c) - c f_{u_i} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_s}{\partial V_i} = \frac{EA_s}{\ell_s} [U_j c + V_j s - U_i c - V_i s](-s) - s f_{u_i} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_s}{\partial U_j} = \frac{EA_s}{\ell_s} [U_j c + V_j s - U_i c - V_i s](+c) - c f_{u_j} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_s}{\partial V_j} = \frac{EA_s}{\ell_s} [U_j c + V_j s - U_i c - V_i s](+s) - s f_{u_j} = 0$$

(2.25 a,b,c,d)

Com linguagem matricial

$$\frac{EA_s}{\ell_s} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cf_{u_i} \\ sf_{u_i} \\ cf_{u_j} \\ sf_{u_j} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

ou, com forma condensada,

$$\mathbf{K}_s \mathbf{D}_s = \mathbf{F}_s \quad (2.27)$$

Para evitar confusões as matrizes de subdomínio são indicadas com letras maiúsculas com índice s , para deslocamentos e forças, pois elas estão associadas aos parâmetros do sistema global. Omitiu-se o “expoente” n para simplificar a escrituração.

Esse resultado também pode ser obtido de forma alternativa conforme detalhado a seguir.

Recordando-se resultado obtido anteriormente para tirante, considere-se a expressão (2.20), repetida a seguir, que relaciona apenas deslocamentos e forças nodais na direção do eixo da barra (sistema referencial local).

$$\frac{EA_s}{\ell_s} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_i} \\ f_{u_j} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Indicando-a com forma condensada, também sem o expoente n , tem-se

$$\mathbf{k}_s^* \boldsymbol{\delta}_s = \mathbf{f}_s^* \quad (2.28)$$

onde, conforme esclarecido anteriormente, as matrizes são relativas apenas aos deslocamentos segundo x , local.

Seja um vetor com todas as possíveis componentes dos deslocamentos dos nós i e j referidas ao sistema local

$$\mathbf{d}_s = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

e o vetor com as componentes dos mesmos deslocamentos dos nós, porém referidas ao sistema global, já indicado em (2.26) e (2.27)

$$\mathbf{D}_s = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Em qualquer ponto da barra (subdomínio) tem-se

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Portanto, nos nós tem-se

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

e a relação inversa tem a expressão

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

ou

$$\mathbf{d}_s = \mathbf{R} \mathbf{D}_s \quad (2.34)$$

na qual \mathbf{R} é usualmente denominada matriz de rotação.

A relação (2.20) pode ser reescrita de outra forma (sem alterar o significado), para incluir todos os deslocamentos nodais \mathbf{d}_s , ficando-se com

$$\frac{EA_s}{\ell_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_i} \\ 0 \\ f_{u_j} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

ou, sob forma compacta

$$\mathbf{k}_s \mathbf{d}_s = \mathbf{f}_s \quad (2.36)$$

Pré-multiplicando-se membro a membro por \mathbf{d}_s^t

$$\mathbf{d}_s^t \mathbf{k}_s \mathbf{d}_s = \mathbf{d}_s^t \mathbf{f}_s \quad (2.37)$$

Usando-se a relação (2.34) tem-se

$$\mathbf{D}_s^t [\mathbf{R}^t \mathbf{k}_s \mathbf{R}] \mathbf{D}_s = \mathbf{D}_s^t [\mathbf{R}^t \mathbf{f}_s] \quad (2.38)$$

Então, obviamente, resulta que

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{R}^t \mathbf{k}_s \mathbf{R} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_s = \mathbf{R}^t \mathbf{f}_s \quad (2.39 \text{ a,b})$$

Efetuando-se as operações contidas em (2.39 a,b) obtém-se, novamente a (2.26)

$$\frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cf_{u_i} \\ sf_{u_i} \\ cf_{u_j} \\ sf_{u_j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{U_i} \\ F_{V_i} \\ F_{U_j} \\ F_{V_j} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Esta equação será também utilizada, posteriormente, para acrescentar a ação axial em subdomínios de viga, para solução de problemas de pórticos.

2.2.3 Exemplos

2.2.3.1 TR1 Treliça isostática

Seja a estrutura da Fig. 2.19, composta pelos subdomínios *I* a *IX*. Adota-se o sistema de eixos (global) *X, Y* com origem no nó global 1.

Nota-se que em todos os nós concorrem barras com eixos segundo direções diferentes. Portanto, é o caso em que, em cada nó, o relacionamento entre componentes de força e de deslocamentos deve referir-se a um mesmo sistema de coordenadas. Esse sistema, por comodidade, acaba sendo único para todos os nós, na maioria dos casos. É o sistema global, com origem no nó global 1.

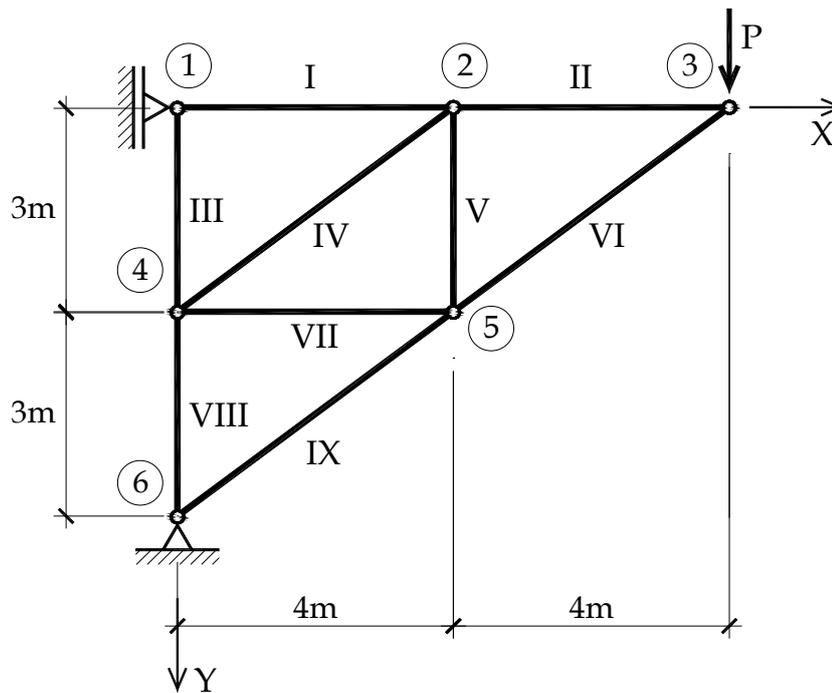


Figura 2.19 – Treliça isostática

Aplicando-se ao exemplo da Fig. 2.19, pretende-se determinar os deslocamentos dos nós e as forças axiais nas barras dessa treliça plana. Todas as barras são do mesmo material, com módulo de elasticidade E , e a área da seção transversal é A .

Seguindo-se a numeração de nós globais e barras da figura acima, prepara-se a Tabela 2.5, para descrever a orientação do eixo x de cada barra (com os números de nó inicial e final de cada uma) assim como a sua direção, definida pelo ângulo ϕ , positivo no sentido dextrorso, entre os semi-eixos positivos de X (global) e x (local de cada barra), conforme ilustrado na Fig. 2.18.

Tabela 2.5 - Conexão dos nós e orientação das barras

Barra	Nó i	Nó j	ϕ^0	$\cos\phi$	$\sen\phi$
I	1	2	0	1	0
II	2	3	0	1	0
III	1	4	90	0	1
IV	4	2	$\arctg\phi = -0,75$	0,8	-0,6
V	2	5	90	0	1
VI	5	3	$\arctg\phi = -0,75$	0,8	-0,6
VII	4	5	0	1	0
VIII	4	6	90	0	1
IX	6	5	$\arctg\phi = -0,75$	0,8	-0,6

Na Fig. 2.19 a numeração de nós foi feita de maneira aleatória. Todavia, em casos de

estruturas de maior vulto, com muitos graus de liberdade (muitos nós) é preciso procurar numerar os nós de maneira a obter a menor largura de semi-banda do sistema de equações resultante. Com isso diminui-se o tempo de processamento e aumenta-se a precisão dos resultados numéricos. Esse aspecto foi abordado no item 2.1.2.4.2 **T5N**.

As matrizes de rigidez das barras, referidas aos parâmetros nodais locais, ordenados conforme o vetor de deslocamentos presente na expressão do primeiro membro de (2.35), serão, particularizando-a para cada barra:

a) barras horizontais

$$\mathbf{k}_x = \frac{EA}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q & 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$Q = 0,25 EA$$

b) barras verticais

$$\mathbf{k}_y = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & -S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 & S \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

onde

$$S = EA/3$$

c) barras inclinadas

$$\mathbf{k}_\phi = \frac{EA}{5} \begin{bmatrix} 0,64 & -0,48 & -0,64 & 0,48 \\ -0,48 & 0,36 & 0,48 & -0,36 \\ -0,64 & 0,48 & 0,64 & -0,48 \\ 0,48 & -0,36 & -0,48 & 0,36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T1 & -T2 & -T1 & T2 \\ -T2 & T3 & T2 & -T3 \\ -T1 & T2 & T1 & -T2 \\ T2 & -T3 & -T2 & T3 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

onde

$$T1 = 0,128 EA \quad T2 = 0,096 EA \quad T3 = 0,072 EA$$

A matriz de rigidez da estrutura, sem impor condições de contorno cinemáticas, tem ordem ou dimensão 12 x 12.

Imagine-se o espaço das 12 x 12 posições dos elementos dessa matriz disponível para “preenchimento”. Esse espaço será denominado “espaço base”.

Como é cômodo e útil, o vetor de parâmetros nodais da estrutura pode ser definido como uma sequência dos deslocamentos U_i, V_i de cada nó, desde o 1º até o 6º, explicitado abaixo sob forma transposta

$$\mathbf{D}^{n,t} = \{U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad U_3 \quad V_3 \quad U_4 \quad V_4 \quad U_5 \quad V_5 \quad U_6 \quad V_6\}$$

Tendo-se em vista essas definições para a sequência dos parâmetros nodais, tanto a nível de elemento quanto a nível de estrutura, ficará simples entender como montar a matriz de rigidez da estrutura, a partir da contribuição das matrizes de rigidez dos elementos.

Então, repetindo-se explicação anterior (2.1.2.4.2), uma das maneiras de entender e

visualizar a formação da matriz de rigidez da estrutura completa pode ser a seguinte:

a) Cada uma das matrizes de rigidez dos 9 subdomínios é expandida, de acordo com a numeração global dos seus nós, passando da dimensão 4 x 4 para a ordem 12 x 12 da matriz de rigidez da estrutura.

Por exemplo, a expressão abaixo representa a matriz de rigidez expandida da barra VI para a ordem 12 x 12, com suas submatrizes 2 x 2 ocupando posições correspondentes segundo a numeração dos nós inicial (5) e final (3) na numeração global da estrutura. Vide Fig. 2.19 ou Tabela 2.5.

$$k_{VI} = EA \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0,128 & -0,096 & \cdot & -0,128 & 0,096 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -0,096 & 0,072 & \cdot & 0,096 & -0,072 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -0,128 & 0,096 & \cdot & 0,128 & -0,096 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0,096 & -0,072 & \cdot & -0,096 & 0,072 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Nessa matriz indica-se com pontos os valores nulos, para facilitar a leitura dos valores não nulos.

É imediato perceber que isto corresponde a ter escrito a expressão matricial, para o elemento VI,

$$\begin{bmatrix} T1 & -T2 & -T1 & T2 \\ -T2 & T3 & T2 & -T3 \\ -T1 & T2 & T1 & -T2 \\ T2 & -T3 & -T2 & T3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ V_5 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_5}^s \\ f_{v_5}^s \\ f_{u_3}^s \\ f_{v_3}^s \end{Bmatrix}$$

na forma expandida (com permuta de suas submatrizes 2 x 2, sem alterações numéricas)

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0,128 & -0,096 & \cdot & -0,128 & 0,096 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -0,096 & 0,072 & \cdot & 0,096 & -0,072 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -0,128 & 0,096 & \cdot & 0,128 & -0,096 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0,096 & -0,072 & \cdot & -0,096 & 0,072 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{u_3}^s \\ f_{v_3}^s \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{u_5}^s \\ f_{v_5}^s \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

que, por sua vez, pode ser entendida como resultante da minimização da energia potencial total do subdomínio VI, isolado, mas com nós inicial igual a 5 e final igual a 3, dentro do contexto da estrutura completa.

b) imaginar que a estrutura será “montada” peça por peça; no exemplo analisado, uma barra de treliça de cada vez.

c) simultaneamente, a cada barra de treliça acrescentada, acrescenta-se também a contribuição da sua matriz de rigidez expandida preenchendo posições no “espaço base” 12 x 12 da matriz de rigidez da estrutura, fazendo-se a acumulação com valores pré-existentis, de outras barras.

Como decorrência do somatório das matrizes (expandidas) de rigidez dos subdomínios para compor a matriz K de rigidez da estrutura resulta:

$$\begin{bmatrix} Q & \cdot & -Q & \cdot \\ \cdot & S & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -S & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -Q & \cdot & QQ+T1 & -T2 & -Q & \cdot & -T1 & T2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -T2 & S+T3 & \cdot & \cdot & T2 & -T3 & \cdot & \cdot & -S & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -Q & \cdot & Q+T1 & -T2 & \cdot & \cdot & -T1 & T2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -T2 & T3 & \cdot & \cdot & T2 & -T3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -T1 & T2 & \cdot & \cdot & Q+T1 & -T2 & -Q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -S & T2 & -T3 & \cdot & \cdot & -T2 & 2S+T3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2S \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -T1 & T2 & -Q & \cdot & Q+T1+T1 & -T2-T2 & -T1 & T2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -S & T2 & -T3 & \cdot & \cdot & -T2-T2 & S+T3+T3 & T2 & -T3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -T1 & T2 & T1 & -T2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2S & T2 & -T3 & -T2 & S+T3 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

ou, sob forma mais compacta

$$K = \begin{bmatrix} Q & \cdot & -Q & \cdot \\ \cdot & S & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -S & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -Q & \cdot & QQT1 & -T2 & -Q & \cdot & -T1 & T2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -T2 & ST3 & \cdot & \cdot & T2 & -T3 & \cdot & \cdot & -S & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -Q & \cdot & QT1 & -T2 & \cdot & \cdot & -T1 & T2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -T2 & T3 & \cdot & \cdot & T2 & -T3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -T1 & T2 & \cdot & \cdot & QT1 & -T2 & -Q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -S & T2 & -T3 & \cdot & \cdot & -T2 & SST3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -SS & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -T1 & T2 & -Q & \cdot & QT1T1 & -T2T2 & -T1 & T2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -S & T2 & -T3 & \cdot & \cdot & -T2T2 & ST3T3 & T2 & -T3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -T1 & T2 & T1 & -T2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -SS & T2 & -T3 & -T2 & ST3 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

onde

$$QQT1 = Q + Q + T1 = EA(0,25 + 0,25 + 0,128) = 0,628 EA$$

$$QT1 = Q + T1 = EA(0,25 + 0,128) = 0,378 EA$$

$$2S = S + S = SS = EA\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} EA = 0,6666.. EA$$

$$QT1T1 = Q + T1 + T1 = EA(0,25 + 0,128 + 0,128) = 0,506 EA$$

$$T2T2 = T2 + T2 = EA(0,096 + 0,096) = 0,192 EA$$

$$ST3T3 = S + T3 + T3 = EA\left(\frac{1}{3} + 0,072 + 0,072\right) = \frac{1,432}{3} EA = 0,4777.. EA$$

$$ST3 = S + T3 = EA\left(\frac{1}{3} + 0,072\right) = \frac{1,216}{3} EA = 0,4053.. EA$$

$$SST3 = S + S + T3 = EA\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0,072\right) = 0,7386.. EA$$

Quanto ao vetor de carregamento há apenas a força P no nó 3 na direção de Y, portanto trabalhando com V_3 , que ocupa a posição da sexta linha no vetor de forças nodais, indicado a seguir sob forma transposta (t).

$$F^{n,t} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ P \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$$

As condições cinemáticas de contorno são:

$$U_1 = U_6 = V_6 = 0$$

Então, eliminando-se as linhas e colunas 1, 11 e 12, da matriz de rigidez e as linhas 1, 11 e 12 do vetor de carregamento, correspondentes aos deslocamentos nulos nas direções dos vínculos, e substituindo-se os valores numéricos, fica-se com o seguinte sistema de equações lineares:

$$EA \begin{bmatrix} 1/3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1/3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0,628 & -0,096 & -0,25 & \cdot & -0,128 & 0,096 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -0,096 & 0,4053.. & \cdot & \cdot & 0,096 & -0,072 & \cdot & -1/3 & \cdot \\ \cdot & -0,25 & \cdot & 0,378 & -0,096 & \cdot & \cdot & -0,128 & 0,096 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -0,096 & 0,072 & \cdot & \cdot & 0,096 & -0,072 & \cdot \\ \cdot & -0,128 & 0,096 & \cdot & \cdot & 0,378 & -0,096 & -0,25 & \cdot & \cdot \\ -1/3 & 0,096 & -0,072 & \cdot & \cdot & -0,096 & 0,7386.. & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -0,128 & 0,096 & -0,25 & \cdot & 0,506 & -0,192 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1/3 & 0,096 & -0,072 & \cdot & \cdot & -0,192 & 0,4777.. & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$KD^n = F^n \quad (2.42)$$

O resultado para os deslocamentos desse sistema é

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \end{Bmatrix} = \frac{P}{EA} \begin{Bmatrix} -7,594 \times 10^{-16} \\ 5,333 \\ 10,5 \\ 10,667 \\ 42,0 \\ -2,542 \\ -7,594 \times 10^{-16} \\ -2,542 \\ 10,5 \end{Bmatrix}$$

Com isso as forças normais serão

$$N_I = \frac{U_2}{4} = 1,333 \frac{P}{EA}$$

$$N_{II} = \frac{U_3 - U_2}{4} = \frac{10,667 - 5,333}{4} = 1,333 \frac{P}{EA}$$

$$N_{III} = \frac{V_4 - V_1}{3} = \frac{(-7,594 + 7,594) \cdot 10^{-16}}{3} \frac{P}{EA} = 0$$

$$N_{IV} = \frac{(U_2 - U_4) \cos \phi + (V_2 - V_4) \sin \phi}{5} = \frac{(5,333 + 2,542)0,8 + (10,5 + 7,594 \times 10^{-16})(-0,6)}{5} \frac{P}{EA} = 0$$

$$N_V = \frac{V_5 - V_2}{3} = \frac{10,5 - 10,5}{3} \frac{P}{EA} = 0$$

$$N_{VI} = \frac{(U_3 - U_5)0,8 + (V_3 - V_5)(-0,6)}{5} = \frac{(10,667 + 2,542)0,8 + (42,0 - 10,5)(-0,6)}{5} \frac{P}{EA} = -1,667 \frac{P}{EA}$$

$$N_{VII} = \frac{U_5 - U_4}{4} = \frac{-2,542 + 2,542}{4} \frac{P}{EA} = 0$$

$$N_{VIII} = \frac{V_6 - V_4}{3} = \frac{0 - 0}{3} \frac{P}{EA} = 0$$

$$N_{IX} = \frac{(U_5 - U_6)0,8 + (U_5 - U_6)(-0,6)}{5} = \frac{(-2,542 + 0,0)0,8 + (10,5 - 0,0)(-0,6)}{5} \frac{P}{EA} = -1,667 \frac{P}{EA}$$

Para conferir, o leitor interessado pode também recalcular esses valores com a aplicação da estática no plano.

Comentários

Observe-se que o procedimento é bastante vantajoso quando se tiver um problema em que devam ser experimentadas várias alternativas de arranjo das barras da treliça. Para cada alternativa, bastará fazer as modificações correspondentes na matriz de rigidez e vetor de carregamento, ou, tendo-se programa para computador, reprocessar com alterações dos dados.

Também há facilidade para considerar estrutura com maior número de barras ou de apoios. Mesmo que a estrutura seja hiperestática, o procedimento é o mesmo, resolvendo-se, diretamente, o problema com a montagem do sistema de equações correspondente.

Como sugestão de exercício pode ser considerado o caso em que se adicione um apoio fixo no nó 5. O que seria preciso acrescentar na solução anterior?

Outra observação importante diz respeito ao que se deverá fazer para poder considerar, por exemplo, um apoio móvel na direção das barras inclinadas IX e VI no nó 5. Portanto, a condição de contorno cinemática que deverá ser imposta será expressa com a imposição de deslocamento nulo apenas na direção ortogonal à dos eixos das barras inclinadas. Então, será necessário que os parâmetros nodais no nó 5 estejam, respectivamente, na direção dos eixos das barras inclinadas e na direção ortogonal à ela. Isto requer que as barras V, VII e IX tenham os parâmetros locais do segundo nó (5, global) nas direções mencionadas e que a barra VI tenha os parâmetros nodais do seu primeiro nó (5 global) também considerados nas direções acima descritas. Quer dizer, haverá necessidade de fazer as operações de transformação das matrizes de rigidez e de forças nodais desses subdomínios, com emprego das matrizes de rotação **R**.

A Fig. 2.20 mostra uma outra estrutura, internamente hiperestática, para ser resolvida como exercício sugerido.

2.2.3.2 TR2 - Sugestão de exercício:

Para a estrutura da Fig. 2.20 determinar qual o grau de hiperestaticidade. Determinar os deslocamentos do nó 1 e as forças nas barras da treliça, com o método da energia. O produto EA é o mesmo para todas as barras.

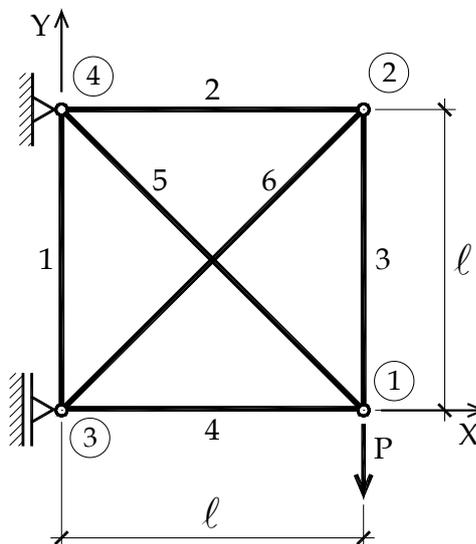


Figura 2.20 – Treliça internamente redundante

Respostas:

Deslocamentos do nó 1:

$$U_1 = -0,604 \frac{PL}{EA}$$

$$V_1 = -2,311 \frac{PL}{EA}$$

Forças nas barras:

$$P\{0,396; 0,396; 0,396; -0,604; 0,854; -0,561\}$$

2.3 VIGAS

2.3.1 Introdução

Aborda-se agora o cálculo de soluções aproximadas para elementos estruturais submetidos à flexão. Nesses elementos, os carregamentos externos (forças transversais ao longo do eixo x da viga ou momentos concentrados em pontos desse eixo x) provocam deslocamentos transversais $v(x)$, na direção do eixo coordenado y , impondo curvatura no eixo da peça. Se x for horizontal positivo para a direita e y positivo para baixo, o terceiro eixo z será positivo se dirigido para o lado de trás do plano do papel. Definidas as orientações dos eixos de referência ficam estabelecidos os sentidos positivos das componentes de deslocamentos lineares $u(x)$, $v(x)$ e da rotação $v' = dv/dx$, positiva se no sentido dextrorso. Considere-se o caso, mais simples, de um elemento estrutural como o da Fig. 2.21, de vão ℓ , seção transversal constante, material com módulo de elasticidade E e momento de segunda ordem J .

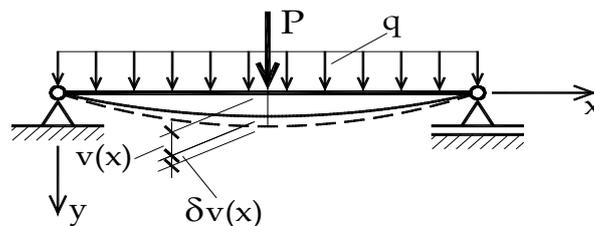


Figura 2.21 – Deslocamentos transversais e sua variação

Originalmente pode parecer que se tenha um problema bidimensional. Todavia, conforme os ensinamentos da Resistência dos Materiais, para elementos estruturais alongados, ou barras, em que a altura d esteja compreendida no intervalo $0,33\ell > d > 0,10\ell$, sabe-se que é razoável admitir que, ocorrida a flexão, as seções transversais planas permanecem planas e ortogonais ao eixo fletido. Com isso o problema bidimensional pode ser reduzido a uma dimensão apenas e a solução facilitada.

É a hipótese cinemática para as peças fletidas

$$u = -y \frac{dv}{dx} = -yv' \quad (2.43)$$

anteriormente apresentada.

Definida a hipótese cinemática é possível escrever a expressão da energia de deformação do elemento estrutural em função dos deslocamentos, isto é

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV$$

Da expressão (2.43) resulta

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = -y \frac{dv'}{dx} = -yv''$$

Com a lei de Hooke

$$\sigma = \epsilon E = -Eyv''$$

Logo

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V (-Eyv'')(-yv'')dV = \frac{1}{2} \int_0^\ell E(v'')^2 \left(\int_A y^2 dydz \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell EJ(v'')^2 dx \quad (2.44)$$

Quanto ao potencial das ações externas, a expressão geral poderá contemplar a contribuição de forças transversais concentradas P_i , e/ou distribuídas q_i , em trechos, e momentos externos concentrados \bar{M}_i .

Relembra-se que essas forças e momentos terão valores positivos quando seus sentidos coincidirem com os sentidos positivos dos eixos y para as forças e z no caso dos momentos.

Então, no caso de ações com sentidos positivos, trabalhando-se com os respectivos deslocamentos positivos, também definidos pelos sentidos dos eixos, tem-se:

$$\Omega = - \sum P_i v(x_i) - \int_{x_a}^{x_b} q(x)v(x)dx - \sum \bar{M}_i \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x_i} \quad (2.45)$$

Resulta então para a energia total

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell EJ(v'')^2 dx - \sum P_i v(x_i) - \int_{x_a}^{x_b} q(x)v(x)dx - \sum \bar{M}_i \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x_i} \quad (2.46)$$

onde x_a e x_b indicam o início e o final do carregamento $q(x)$ de um subdomínio. Se existirem vários subdomínios, bastará repetir para cada um o que está indicado em (2.46), considerando ℓ como comprimento do subdomínio e levando em conta os carregamentos que lhe correspondem, fazendo-se o somatório, conforme já realizado com exemplos de tirantes.

A expressão (2.46), agora, somente depende de $v(x)$ e suas derivadas. Com a adoção de funções de aproximação para essa função os problemas podem ser resolvidos.

Novamente apresenta-se a observação de que quando existirem regiões com carregamentos distribuídos diferentes, ou várias forças concentradas, será conveniente adotar função de aproximação distinta para cada trecho com forças distribuídas e para trechos entre as forças concentradas. Esse critério orienta então a escolha dos diversos subdomínios a considerar para resolver o problema. Posteriormente, supõe-se que quando o tema estiver suficientemente desenvolvido, estas observações ficarão esclarecidas a contento.

No caso de estruturas bi e tridimensionais, a discretização deverá ser sempre com uso de muitos subdomínios, principalmente nas regiões mais carregadas, ou onde se esperar concentrações de tensões.

2.3.2 Exemplos

Assim como foi feito para o caso dos tirantes, também para as vigas o tema será abordado, inicialmente, com emprego de polinômios de aproximação descritos por meio de parâmetros generalizados e válidos para o domínio completo do elemento estrutural.

Posteriormente uma série de outros exemplos será apresentada com emprego de parâmetros nodais, para o domínio completo ou para subdomínios.

2.3.2.1 Parâmetros generalizados e uma função de aproximação para o domínio completo

2.3.2.1.1 VIG Viga prismática em balanço com força concentrada na extremidade livre, com polinômio de 2º grau

Este é um caso bastante simples. O polinômio de menor grau, que pode ser admitido como função de aproximação para o problema de flexão, é o do segundo grau, porque a função de aproximação a adotar deve permitir o aparecimento de curvatura (aproximada pela segunda derivada na teoria mais simples de flexão).

Polinômios de grau menor do que o segundo teriam derivada segunda nula!

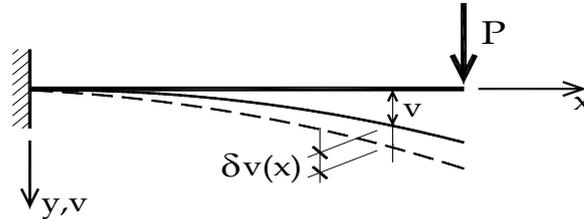


Figura 2.22 – Viga em balanço

Então, adotando-se um polinômio de aproximação para todo o domínio da viga

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

As condições cinemáticas de contorno são, neste caso,

$$v(0) = \alpha_0 = 0$$

$$v'(0) = \alpha_1 = 0$$

Então

$$v(x) = \alpha_2 x^2$$

$$\Pi = \frac{EJ}{2} \int_0^\ell (v'')^2 dx - P \alpha_2 \ell^2 = \frac{EJ}{2} \int_0^\ell 4\alpha_2^2 dx - P \alpha_2 \ell^2 = 2EJ\alpha_2^2 \ell - P \alpha_2 \ell^2$$

Logo

$$d\Pi = (4EJ \alpha_2 \ell - P \ell^2) d\alpha_2 = 0$$

donde

$$\alpha_2 = \frac{P\ell}{4EJ}$$

$$v(x) = \frac{P\ell}{4EJ} x^2$$

Calculando-se valores de interesse, para avaliar a qualidade do resultado:

$$v_{m\acute{a}x} = v(\ell) = \frac{P\ell^3}{4EJ}$$

Esforços solicitantes:

$$M(x) = -EJv''(x) = \frac{-P\ell}{2}$$

$$Q(x) = -EJv''' = 0!$$

Observação: Para as forças cortantes utiliza-se usualmente a letra V . Mas, nesta publicação, será utilizada a letra Q para não provocar confusão com os deslocamentos referidos aos sistemas globais, indicados com V .

$$\Pi = \frac{\Omega}{2} = -\frac{P^2\ell^3}{4EJ}$$

Pela solução encontrada verifica-se que as condições mecânicas de contorno

$$M(\ell) = 0 \quad \text{e} \quad Q(\ell) = P$$

não estão obedecidas e, por sua vez, o valor da flecha máxima é bem menor do que o valor exato $(P\ell^3)/3EJ$, conhecido, da Resistência dos Materiais, neste caso.

Já foi comentado anteriormente que é necessário, então, prosseguir-se utilizando funções de aproximação de maior grau, para poder comparar os valores de interesse de cada uma das aproximações e chegar à aproximação satisfatória. Também, conforme anteriormente salientado, poderia ser mantido o grau do polinômio e subdividir-se a viga em mais subdomínios. Por enquanto, utilizar-se-á um polinômio de maior grau, para todo o domínio da estrutura.

2.3.2.1.2 V2G Viga prismática em balanço; força concentrada na extremidade livre, de acordo com a figura anterior, com polinômio de 3º grau

A função de aproximação tem a expressão

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3$$

As condições de contorno cinemáticas são

$$v(0) = \alpha_0 = 0$$

$$v'(0) = \alpha_1 = 0$$

Logo

$$v(x) = \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3$$

$$v''(x) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3x$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{EJ}{2} \int_0^{\ell} (v'')^2 dx - P(\alpha_2\ell^2 + \alpha_3\ell^3) = \\ &= \frac{EJ}{2} \int_0^{\ell} (4\alpha_2^2 + 24\alpha_2\alpha_3x + 36\alpha_3^2x^2) dx - P(\alpha_2\ell^2 + \alpha_3\ell^3) = \\ &= \frac{EJ}{2} (4\alpha_2^2\ell + 12\alpha_2\alpha_3\ell^2 + 12\alpha_3^2\ell^3) - P(\alpha_2\ell^2 + \alpha_3\ell^3) \end{aligned}$$

As derivadas, em relação a α_2 e α_3 , igualadas a zero, são

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} = \frac{EJ}{2} (8\alpha_2\ell + 12\alpha_3\ell^2) - P\ell^2 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_3} = \frac{EJ}{2} (12\alpha_2\ell^2 + 24\alpha_3\ell^3) - P\ell^3 = 0$$

Esse sistema de equações lineares algébricas pode ser indicado sob forma matricial

$$\frac{EJ}{\ell} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \ell \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

cuja solução é dada por:

$$\alpha_2 = \frac{P\ell}{2EJ}$$

$$\alpha_3 = \frac{-P}{6EJ}$$

e, assim, a função de aproximação fica dada por:

$$v(x) = \frac{P\ell}{2EJ} x^2 - \frac{P}{6EJ} x^3$$

Os esforços solicitantes internos são:

$$M(x) = -EJv'' = -P(\ell - x)$$

$$Q = -EJv''' = +P$$

e a energia total

$$\Pi = -\frac{P^2 \ell^3}{6EJ}$$

Com esta aproximação de terceiro grau, nota-se que as condições de contorno mecânicas em $x = \ell$ estão satisfeitas exatamente. Isso é indicativo de que, quanto aos deslocamentos, a aproximação também deve ser de excelente qualidade, tendo-se em vista comentários anteriores afirmando que os deslocamentos obtidos em sequências de soluções, com graus crescentes das funções de aproximação, convergem mais rapidamente do que os valores dos esforços, pois estes dependem de derivadas daquelas funções.

Quanto a Π , o último valor encontrado é menor do que o anterior. Neste caso, como a solução determinada com o polinômio cúbico coincide com a solução exata, o valor acima é o mínimo absoluto da energia potencial total neste caso.

Comentário:

Assim como já observado em ocasiões anteriores, novamente pode-se identificar a generalização da “equação da mola”, citada várias vezes e que surgirá novamente nos casos analisados posteriormente. No sistema de equações algébricas (2.47) do problema agora resolvido tem-se uma matriz de coeficientes numéricos, de ordem (2 x 2) que pré multiplica um vetor (1 x 2) de deslocamentos generalizados e o resultado dessa multiplicação é igualado ao vetor (1 x 2) de forças do segundo membro. Apenas para conferir, nesse caso, o produto de cada linha da matriz quadrada pelo vetor de deslocamentos generalizados tem dimensão de força, como se espera, pois cada linha representa uma equação de equilíbrio.

Conforme é sabido, a chamada “equação da mola” tem por expressão

$$k \cdot d = f$$

onde f é força que provoca um deslocamento d e k , como se sabe, é chamada rigidez da mola.

Por essa equação simples pode-se ver que uma definição, também simples, para a rigidez, é:

rigidez k é a força f necessária para produzir, ou manter, um deslocamento $d = 1$.

Por extensão, a equação matricial, proveniente da análise aproximada da viga em balanço, revela o produto de uma matriz de rigidez por um vetor de deslocamentos e igualado a um vetor de forças.

A ordem da matriz de rigidez generalizada, neste caso, é (2×2) porque já foram previamente aplicadas as condições de contorno cinemáticas no engastamento.

2.3.2.1.3 V3G Viga em balanço com força P na extremidade livre, de acordo com a Fig. 2.22, com polinômio de grau n

Este exemplo serve para demonstrar que não há necessidade de acrescentar-se outro monômio de grau superior a 3, porque no exemplo anterior já foi obtida a solução coincidente com a solução exata. Análise semelhante foi apresentada no estudo anterior sobre tirantes!

Então, e apesar das conclusões definitivas emergentes do exemplo anterior, analisa-se o que ocorreria no caso da viga em balanço com o emprego de um polinômio cúbico acrescido de um monômio de grau genérico de grau maior do que 3, e já obediente às condições cinemáticas de contorno, isto é

$$v(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_n x^n$$

Isto leva a

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell EJ [2\alpha_2 + 6\alpha_3 x + n(n-1)\alpha_n x^{n-2}]^2 dx - P(\alpha_2 \ell^2 + \alpha_3 \ell^3 + \alpha_n \ell^n)$$

Calculando-se as derivadas de Π antes de integrar, pois isto envolve menor volume algébrico, tem-se

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{2} \int_0^\ell 2EJ [2\alpha_2 + 6\alpha_3 x + n(n-1)\alpha_n x^{n-2}] 2 dx - P\ell^2 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{2} \int_0^\ell 2EJ [2\alpha_2 + 6\alpha_3 x + n(n-1)\alpha_n x^{n-2}] 6x dx - P\ell^3 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_n} = \frac{1}{2} \int_0^\ell 2EJ [2\alpha_2 + 6\alpha_3 x + n(n-1)\alpha_n x^{n-2}] n(n-1)x^{n-2} dx - P\ell^n = 0$$

Resulta, pois, o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2n \\ 6 & 12 & 6(n-1) \\ 2n & 6(n-1) & \frac{n^2(n-1)^2}{2n-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \ell \\ \alpha_n \ell^{n-2} \end{Bmatrix} = \frac{P\ell}{EJ} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

cuja solução é

$$\alpha_2 = \frac{P\ell}{2EJ} \quad \alpha_3 = \frac{-P}{6EJ} \quad \alpha_n = 0$$

Isto evidencia que o acréscimo de um termo na solução do exemplo anterior em nada a modificou.

Portanto, como conclusão geral, pensando-se em subdomínios, já se pode catalogar que o polinômio de terceiro grau aproxima bem a descrição do comportamento de trechos de vigas entre forças concentradas e sem força distribuída. Aproveita-se esta conclusão para resolver o caso seguinte.

2.3.2.2 Parâmetros generalizados e subdivisão em subdomínios

2.3.2.2.1 V4G Viga simplesmente apoiada, com força concentrada no meio do vão ℓ , com aproximação descrita por um polinômio de terceiro grau para cada metade da estrutura

No capítulo anterior sobre tirantes, no exemplo 2.1.2.1.5 **T5G**, mostrou-se que, no caso de carregamento por força concentrada no interior do subdomínio, a adoção de uma única função de aproximação para o domínio todo não leva a solução boa, porque não há possibilidade de captar a descontinuidade de derivada primeira (naquele caso) no ponto de aplicação da força externa. Mostrou-se, em 2.1.2.2.1 **T6G**, que há a necessidade de se adotar duas funções de aproximação (lineares naquele caso), que devem ser compatibilizadas no ponto de aplicação da força externa.

No exemplo agora proposto ocorreria a mesma situação com a descontinuidade da derivada terceira. Portanto, adota-se um polinômio de terceiro grau para cada metade do domínio da viga.

Posteriormente este mesmo exemplo será analisado com parâmetros nodais, para comparação. Vide **V13N**.

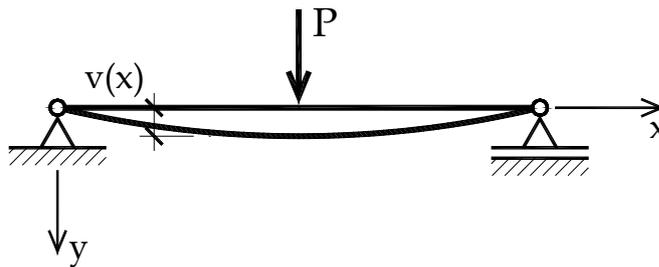


Figura 2.23 – Viga simplesmente apoiada subdividida em 2 subdomínios

Seja, para a primeira metade da viga, a aproximação

$$v_I = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

e para a segunda

$$v_{II} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$$

Para aliviar o trabalho algébrico, eliminando-se vários dos parâmetros generalizados incógnitos, serão impostas as condições, explicitadas abaixo, referentes às cinemáticas de contorno essenciais, às condições de continuidade na abscissa do meio do vão, à igualdade de momentos fletores no meio do vão e também às condições mecânicas de contorno relativas à nulidade dos momentos fletores nas extremidades (embora a imposição destas condições de contorno mecânicas não seja obrigatória, conforme já observado anteriormente):

$$v_I(0) = 0$$

$$v_{II}(\ell) = 0$$

$$v_I(\ell/2) = v_{II}(\ell/2)$$

$$v'_I(\ell/2) = v'_{II}(\ell/2)$$

$$v''_I(0) = 0$$

$$v''_{II}(\ell) = 0$$

$$v''_I(\ell/2) = v''_{II}(\ell/2)$$

Explicitando-se essas imposições, obtém-se o seguinte sistema de equações, relacionando os

parâmetros generalizados, tendo-se escolhido o α_3 como parâmetro independente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 8 & 4\ell & 2\ell^2 & -8 & -4\ell & -2\ell^2 & -\ell^3 \\ 0 & 4 & 4\ell & 0 & -4 & -4\ell & -3\ell^2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6\ell \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & -3\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \alpha_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ell^3 \\ -3\ell^2 \\ 0 \\ 0 \\ -3\ell \end{Bmatrix}$$

A solução deste sistema, levada nas expressões das funções de aproximação de cada metade da viga, conduz a

$$v_I = \alpha_3(x^3 - 6\ell^2 x/8)$$

$$v_{II} = \alpha_3(2\ell^3/8 - 18\ell^2 x/8 + 3\ell x^2 - x^3)$$

Então, a energia total fica expressa por

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\ell/2} EJ(6\alpha_3 x)^2 dx + \int_{\ell/2}^{\ell} EJ(\alpha_3(6\ell - 6x))^2 \right] - P \left[\alpha_3 \left(\frac{\ell^3}{8} - \frac{6\ell^3}{16} \right) \right]$$

Integrando-se, derivando-se em relação a α_3 e igualando-se a zero, resulta

$$\alpha_3 = \frac{-P}{12EJ}$$

Com isto, os deslocamentos em cada metade da viga serão

$$v_I = \frac{P}{12EJ} \left(\frac{6}{8} \ell^2 x - x^3 \right)$$

$$v_{II} = \frac{P}{12EJ} \left(\frac{18}{8} \ell^2 x - \frac{2}{8} \ell^3 - 3\ell x^2 + x^3 \right)$$

Disso decorrem os seguintes resultados de interesse

$$M_I = -EJv_I'' = \frac{P}{2} x$$

$$Q_I = -EJv_I''' = \frac{P}{2}$$

$$M_{II} = -EJv_{II}'' = \frac{P}{2} (\ell - x)$$

$$Q_{II} = -EJv_{II}''' = \frac{-P}{2}$$

$$\Pi = -P^2 \ell^3 / 96EJ$$

Essa solução é igual à exata, que se obtém por via analítica.

Sugerindo-se exercício, aborde-se o mesmo problema com uma única função de aproximação dada por único polinômio de terceiro grau para todo o domínio da viga, neste exemplo de força externa concentrada no meio do vão (ou em qualquer outro ponto do interior do vão). Não se conseguirá capturar a descontinuidade da força cortante no meio do vão, conforme ilustrado pela solução acima com emprego de duas aproximações cúbicas para cada metade da viga. Quer dizer, a

solução será péssima, ou imprestável.

Omitiu-se a apresentação da álgebra envolvida na solução do sistema de 7 equações acima, que seria trabalhosa se executada manualmente.

Conforme será comentado, posteriormente, a solução do mesmo problema com a consideração de parâmetros nodais elimina parte desse trabalho algébrico. Vide **V13N**.

2.3.2.3 Parâmetros nodais e uma função de aproximação para o domínio completo

2.3.2.3.1 V5N Viga em balanço com força concentrada P e momento externo \bar{M} negativo (anti-horário, ou sinistrorso) ambos aplicados na extremidade livre, com polinômio de aproximação de 3º grau, para todo o domínio.

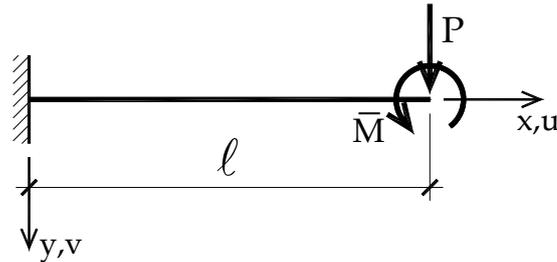


Figura 2.24 – Viga em balanço; polinômio cúbico

Resolve-se o problema empregando-se novamente o procedimento que conduzirá à generalização e sistematização da aplicação do método da energia.

Trata-se de aplicar o método tomando-se o elemento estrutural, ou subdomínio genérico, ainda não vinculado. Somente depois de obtido o relacionamento final entre os deslocamentos nodais e as forças nodais correspondentes (para cada tipo de carregamento sobre o elemento) é que a vinculação será imposta, para resolver uma viga particular.

Inicialmente, deduz-se, para um subdomínio genérico, a descrição da função de aproximação com participação dos parâmetros nodais, a partir da sua descrição inicial em termos de parâmetros generalizados. Também para facilitar o trabalho algébrico e de integrações será utilizada a coordenada adimensional $\xi = x/\ell$.

Como consequência disto, mas também novamente visando-se apenas a sistematização do método e para facilitar a álgebra, passar-se-á, provisoriamente, de parâmetros generalizados α_i para parâmetros chamados nodais *iniciais* $\bar{v}^{n,t}$, relacionados com a descrição da função de aproximação por meio da coordenada adimensional ξ . Neste ponto destaca-se que na expressão da energia Π comparecem derivadas da função deslocamento em relação à coordenada dimensional x - a ordem da derivada dependerá do tipo de elemento estrutural em análise. Mas, por razões práticas, tem interesse obter os resultados descritos em função de parâmetros nodais *finais*, chamados $v^{n,t}$. Todos esses procedimentos serão detalhados a seguir e são de aplicação geral, para qualquer outro tipo de elemento estrutural e aproximação adotada.

Portanto, diante do anunciado, o ponto de partida sempre é a expressão dependente de parâmetros generalizados α_k :

$$v(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3$$

Serão necessárias as derivadas

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\ell} \frac{dv}{d\xi} = \frac{1}{\ell} (\alpha_1 + 2\alpha_2\xi + 3\alpha_3\xi^2) = \frac{1}{\ell} \bar{v}' \quad (2.48)$$

$$v'' = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{\ell^2} \frac{d^2v}{d\xi^2} = \frac{1}{\ell^2} (2\alpha_2 + 6\alpha_3\xi) = \frac{1}{\ell^2} \bar{v}''$$

Observe-se que as derivadas em relação a x são indicadas com v' e v'' enquanto que as referidas a ξ são indicadas com \bar{v}' e \bar{v}'' respectivamente.

Pode-se, pois, trabalhar com as expressões em coordenadas homogêneas e oportunamente fazer a transformação dessas expressões para referi-las à coordenada x .

Seja definido o vetor de parâmetros nodais *iniciais* no elemento de comprimento $\xi = 1$, com dois nós i e j , um em cada extremidade:

$$\bar{\mathbf{v}}^{n,t} = \{v_i \ \bar{v}'_i \ v_j \ \bar{v}'_j\} \quad (2.49)$$

Conforme já comentado anteriormente, são quatro os parâmetros nodais porque, sendo cúbico o polinômio de aproximação, quatro são os monômios que o descrevem na expressão inicial.

O vetor de parâmetros nodais *finais* , para uso posterior, é definido por

$$\mathbf{v}^{n,t} = \{v_i \ v'_i \ v_j \ v'_j\}$$

onde, conforme Fig. 2.25,

$$v'_i = \theta_i$$

$$v'_j = \theta_j$$

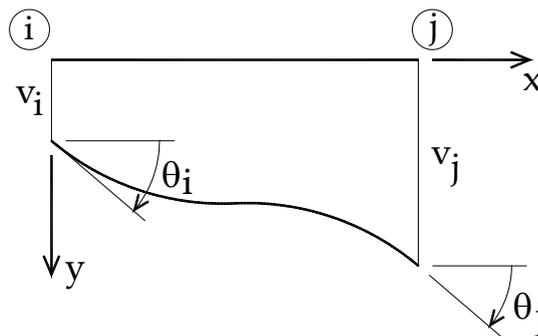


Figura 2.25 – polinômio cúbico; parâmetros nodais finais

Forme-se o vetor de parâmetros nodais *iniciais* a partir da expressão inicial de $v(\xi)$ e sua primeira derivada, levando-se em conta o $\bar{\mathbf{v}}^n$ anteriormente definido:

$$v_i = v(0) = \alpha_0$$

$$\bar{v}'_i = \bar{v}'(0) = \alpha_1$$

$$v_j = v(1) = v_i + \bar{v}'_i + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\bar{v}'_j = \bar{v}'(1) = \bar{v}'_i + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$$

Com as duas últimas expressões obtém-se

$$\alpha_2 = -3v_i - 2\bar{v}'_i + 3v_j - \bar{v}'_j$$

$$\alpha_3 = 2v_i + \bar{v}'_i - 2v_j + \bar{v}'_j$$

Substituindo-se na expressão original de $v(\xi)$ resulta

$$v(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_i + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\bar{v}'_i + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_j + (-\xi^2 + \xi^3)\bar{v}'_j \quad (2.50)$$

que pode também ser indicada como

$$v(\xi) = \varphi_1(\xi)v_i + \varphi_2(\xi)\bar{v}'_i + \varphi_3(\xi)v_j + \varphi_4(\xi)\bar{v}'_j$$

Observação importante, em contraposição ao que ocorre com os parâmetros generalizados, é que todos os parâmetros nodais que foram denominados iniciais têm a mesma dimensão de comprimento, enquanto que as funções de forma φ_i são adimensionais.

A primeira e a segunda derivadas em relação à variável adimensional são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{v}' &= (-6\xi + 6\xi^2)v_i + (1 - 4\xi + 3\xi^2)\bar{v}'_i + (6\xi - 6\xi^2)v_j + (-2\xi + 3\xi^2)\bar{v}'_j \\ \bar{v}'' &= (-6 + 12\xi)v_i + (-4 + 6\xi)\bar{v}'_i + (6 - 12\xi)v_j + (-2 + 6\xi)\bar{v}'_j \end{aligned} \quad (2.51)$$

Nestas duas últimas expressões estão presentes entre parênteses as derivadas primeira e segunda das funções $\varphi_i(\xi)$ da última expressão de $v(\xi)$.

Para ter a expressão de Π forma-se, em primeira etapa, a expressão da energia de deformação

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EJ \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 EJ \left(\frac{1}{\ell^2} \frac{d^2v}{d\xi^2} \right)^2 \ell d\xi = \frac{EJ}{2\ell^3} \int_0^1 (\bar{v}'')^2 d\xi$$

para EJ constante (viga prismática).

Para simplificar a escrituração faça-se $EJ/2\ell^3 = C$.

Também a derivação de \mathcal{U} será feita em relação a cada parâmetro nodal inicial, preparando-se as parcelas de cálculo que comparecerão na etapa final de imposição de $d\Pi = 0$.

Notando-se que a expressão de $(\bar{v}'')^2$ será bastante longa, nesses casos é preferível derivar \mathcal{U} antes de integrá-la.

As derivadas de \mathcal{U} , antes da integração, terão expressões sob as formas

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_i} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' (-6 + 12\xi) d\xi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{v}'_i} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' (-4 + 6\xi) d\xi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_j} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' (6 - 12\xi) d\xi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{v}'_j} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' (-2 + 6\xi) d\xi$$

Efetuando-se os produtos e integrando-se, obtém-se o seguinte resultado, com a utilização de linguagem matricial apenas para condensá-lo, isto é:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_i} = 2C \{ 12 \quad 6 \quad -12 \quad 6 \} \bar{v}^n$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{v}'_i} = 2C \{ 6 \quad 4 \quad -6 \quad 2 \} \bar{v}^n$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_j} = 2C \{ -12 \quad -6 \quad 12 \quad -6 \} \bar{v}^n$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{v}'_j} = 2C \{6 \quad 2 \quad -6 \quad 4\} \bar{v}^n$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial v_i} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}'_i} \\ \frac{\partial u}{\partial v_j} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}'_j} \end{Bmatrix} = 2C \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \bar{v}'_i \\ v_j \\ \bar{v}'_j \end{Bmatrix}$$

No segundo membro, o produto de $2C$ pela matriz numérica quadrada pode ser indicado com

$$\bar{k} = 2C \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

cujo nome é matriz de rigidez do subdomínio em relação (ou associada) aos parâmetros nodais *iniciais*.

Deve-se lembrar contudo que ela foi obtida com as derivações em relação aos parâmetros nodais *iniciais* da energia de deformação, esta também dependente desses parâmetros. Mas, o interesse final é obter-se medidas de deslocamentos e rotações em relação aos parâmetros *finais*.

Então, se forem realizadas as derivações parciais em relação aos parâmetros *finais* tem-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial v_i} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}'_i} \\ \frac{\partial u}{\partial v_j} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}'_j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial v_i} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}'_i} \frac{\partial \bar{v}'_i}{\partial v_i} \\ \frac{\partial u}{\partial v_j} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}'_j} \frac{\partial \bar{v}'_j}{\partial v_j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial v_i} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}'_i} \ell \\ \frac{\partial u}{\partial v_j} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}'_j} \ell \end{Bmatrix} = 2C \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6\ell & 4\ell & -6\ell & 2\ell \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6\ell & 2\ell & -6\ell & 4\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \bar{v}'_i \\ v_j \\ \bar{v}'_j \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

Portanto, a segunda e a quarta linhas foram multiplicadas por ℓ .

Por outro lado, no vetor de parâmetros *iniciais* pode-se substituir \bar{v}'_i por $\ell v'_i$ e \bar{v}'_j por $\ell v'_j$, conforme (2.48), ou, então multiplicar a segunda e a quarta colunas da matriz numérica por ℓ e substituir $\bar{v}^{n,t}$ por $v^{n,t}$. É o que se prefere fazer, ficando-se finalmente com tudo referido aos parâmetros *finais* e sob a forma

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial v_i} \\ \frac{\partial u}{\partial v'_i} \\ \frac{\partial u}{\partial v_j} \\ \frac{\partial u}{\partial v'_j} \end{Bmatrix} = 2C \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix}$$

Pode-se indicar com \mathbf{k} a matriz de rigidez referente aos parâmetros nodais *finais*:

$$\mathbf{k} = \frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Quanto ao potencial das ações externas na extremidade da direita tem-se

$$\Omega = -Pv_j - (-\bar{M})v'_j$$

As derivadas parciais de Ω são

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v_i} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v'_i} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v_j} = -P$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v'_j} = \bar{M}$$

Logo, após somar as derivadas parciais de U e Ω em relação a cada parâmetro nodal final e igualá-las a zero resultará, para este exemplo

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ -\bar{M} \end{Bmatrix}$$

Isso pode ser finalmente indicado como

$$\mathbf{k}\mathbf{v}^n = \mathbf{f}^n$$

Impondo-se as condições de contorno cinemáticas $v_i = 0$ e $v'_i = 0$ tem-se

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & -6\ell \\ -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ -\bar{M} \end{Bmatrix}$$

que tem como solução

$$v_j = \frac{P\ell^3}{3EJ} - \frac{\bar{M}\ell^2}{2EJ}$$

$$v'_j = \frac{P\ell^2}{2EJ} - \frac{\bar{M}\ell}{EJ}$$

coincidente com a solução analítica.

2.3.2.3.2 V6N Viga simplesmente apoiada com força q distribuída constante e polinômio de 2º grau para todo o domínio com dois nós de extremidade i, j e um no centro m

Sendo a função de aproximação de segundo grau, há 3 parâmetros generalizados ou nodais a considerar.

Considerando-se os parâmetros nodais v_i, v_m e v_j da segunda figura acima, aproveita-se a expressão quadrática de $u(x)$ do exemplo **T2N**, 2.1.2.3.2, nela substituindo-se $u(x)$ por $v(x)$

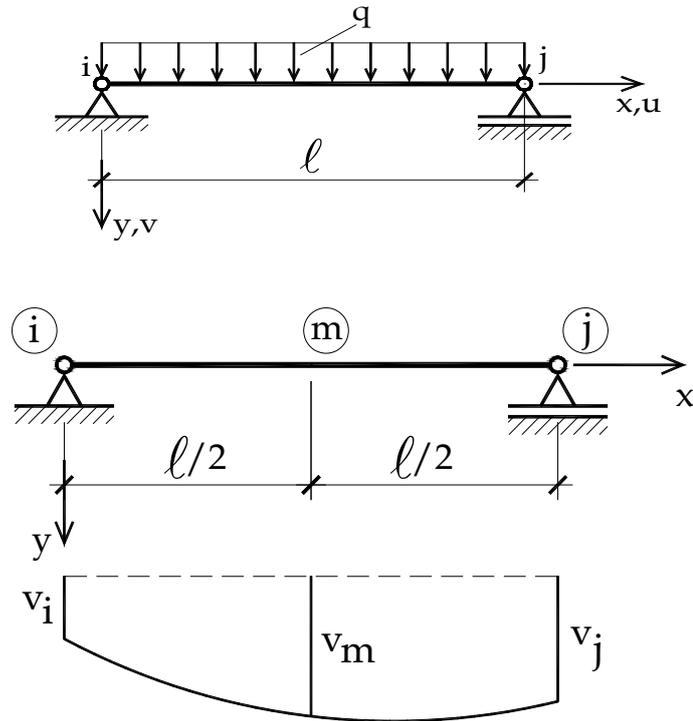


Figura 2.26 – Polinômio de 2º grau; parâmetros nodais.

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x}{\ell} + 2\frac{x^2}{\ell^2}\right)v_i + 4\left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2}\right)v_m + \left(\frac{-x}{\ell} + \frac{2x^2}{\ell^2}\right)v_j$$

e impondo-se as condições de contorno cinemáticas

$$v_i = v_j = 0$$

para obter-se

$$v(x) = 4\left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2}\right)v_m = 4(\xi - \xi^2)v_m$$

Então

$$\frac{dv}{dx} = v' = 4\frac{1}{\ell}(1 - 2\xi)v_m$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v'' = 4\frac{1}{\ell^2}(-2)v_m = \frac{-8}{\ell^2}v_m$$

Portanto, a energia potencial total e sua derivada igualada a zero serão

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^1 EJ \left(\frac{-8}{\ell^2}v_m\right)^2 \ell d\xi - q \int_0^1 4(\xi - \xi^2)v_m \ell d\xi$$

$$= \frac{EJ}{2\ell^3} 64v_m^2 - 4q\ell \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)v_m = \frac{32EJ}{\ell^3}v_m^2 - \frac{2}{3}q\ell v_m$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_m} = \frac{64EJ}{\ell^3} v_m - \frac{2}{3} q \ell = 0$$

donde

$$v_m = \frac{q \ell^4}{96EJ} = \frac{4q \ell^4}{384EJ} \quad (\text{o valor correto é } \frac{5q \ell^4}{384EJ})$$

A elástica aproximada é, portanto,

$$v(x) = 4 \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right) v_m = (\xi - \xi^2) \frac{q \ell^4}{24EJ}$$

Em decorrência tem-se

$$M = -EJv'' = -EJ(-2) \frac{q \ell^2}{24EJ} = \frac{q \ell^2}{12}$$

$$Q = -EJv'''(0) = 0$$

$$\Pi = \frac{-q^2 \ell^5}{288EJ}$$

É evidente que os valores obtidos não são uma boa aproximação para a real situação da viga em foco. Portanto, passa-se ao cálculo seguinte, em que para a mesma viga se admite polinômio de aproximação de 3º grau. É oportuno observar que neste exemplo, por conta da inexistência de derivadas de $v(x)$ como parâmetros nodais, não houve necessidade de aplicar alguns dos detalhes apresentados no exemplo **V5N**.

2.3.2.3.3 V7N Viga simplesmente apoiada com força distribuída constante e polinômio de aproximação de 3º grau

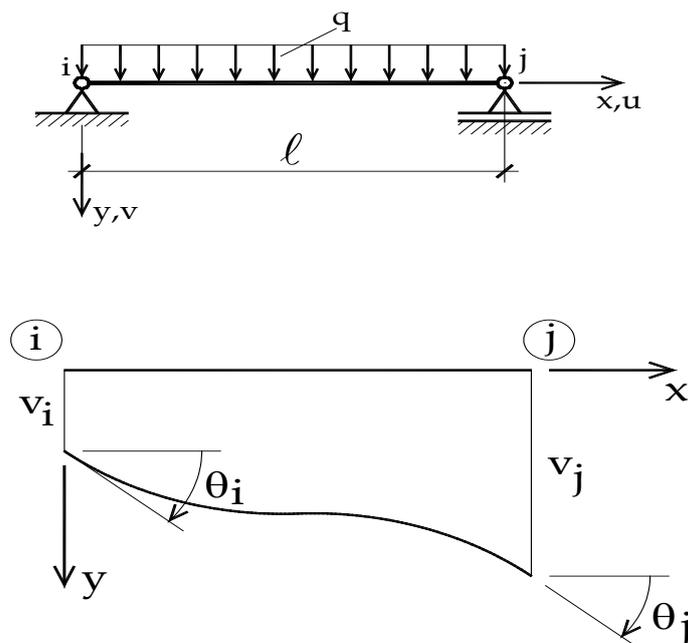


Figura 2.27 – Polinômio de 3º grau

Para este caso a energia potencial total tem a forma

$$\Pi = \frac{EJ}{2} \int_0^\ell (v'')^2 dx - \int_0^\ell qv(x) dx$$

Como a função de aproximação é polinômio de terceiro grau, a parcela correspondente à minimização de \mathcal{U} é idêntica à do exemplo 2.3.2.3.1 **V5N** (2.53), lembrando-se que ela é relativa ao vetor de parâmetros nodais *finais*.

A diferença em relação ao caso **V5N** reside no tipo de carregamento e na vinculação da viga. O potencial da força distribuída será, usando-se a expressão (2.50) para os deslocamentos,

$$\begin{aligned} \Omega &= - \int_0^\ell qv(x) dx = - \int_0^1 qv(\xi) \ell d\xi = \\ &= -q \int_0^1 [(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_i + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\bar{v}'_i + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_j + (-\xi^2 + \xi^3)\bar{v}'_j] \ell d\xi = \\ &= -q\ell \left[\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\right)v_i + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)\bar{v}'_i + \left(1 - \frac{1}{2}\right)v_j + \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{4}\right)\bar{v}'_j \right] = \\ &= -q\ell \left[\frac{1}{2}v_i + \frac{1}{12}\bar{v}'_i + \frac{1}{2}v_j + \frac{-1}{12}\bar{v}'_j \right] \end{aligned}$$

Lembrando-se que

$$\bar{v}' = \ell v'$$

$$\Omega = -q\ell \left[\frac{1}{2}v_i + \frac{\ell}{12}v'_i + \frac{1}{2}v_j + \frac{-\ell}{12}v'_j \right]$$

Então a derivação em relação a cada parâmetro nodal *final* dará:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v_i} = \frac{-q\ell}{2}; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v'_i} = \frac{-q\ell^2}{12}; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v_j} = \frac{-q\ell}{2}; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v'_j} = \frac{q\ell^2}{12}$$

Portanto, reunindo-se as parcelas decorrentes da minimização de Π ter-se-á:

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = q\ell \begin{Bmatrix} 1/2 \\ \ell/12 \\ 1/2 \\ -\ell/12 \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

No exemplo proposto, as condições cinemáticas de contorno são

$$v_i = v_j = 0$$

Portanto fica-se com

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 4\ell^2 & 2\ell^2 \\ 2\ell^2 & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_i \\ v'_j \end{Bmatrix} = q\ell \begin{Bmatrix} \ell/12 \\ -\ell/12 \end{Bmatrix}$$

cuja solução é

$$\begin{Bmatrix} v'_i \\ v'_j \end{Bmatrix} = \frac{q\ell^3}{24EJ} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Com isto a expressão dos deslocamentos será dada pela substituição simultânea de $v_i = v_j = 0$, $\bar{v}'_i = \ell v'_i$ e $\bar{v}'_j = \ell v'_j$ em

$$v(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_i + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)v'_i + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_j + (-\xi^2 + \xi^3)v'_j$$

obtendo-se

$$v(\xi) = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\ell v'_i + (-\xi^2 + \xi^3)\ell v'_j$$

$$v(\xi) = \frac{q\ell^4}{24EJ} [(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) - (-\xi^2 + \xi^3)] = \frac{q\ell^4}{24EJ} (\xi - \xi^2)$$

Note-se que a solução não contém o monômio cúbico! Portanto, a solução é idêntica ao do problema anterior e, também, não confere com a solução exata. Se o monômio do terceiro grau estivesse presente, pode-se verificar que as rotações em pontos simétricos em relação ao meio do vão não seriam iguais e de sinais contrários!

2.3.2.3.4 V8N Viga simplesmente apoiada com força distribuída constante e polinômio de aproximação de 4º grau

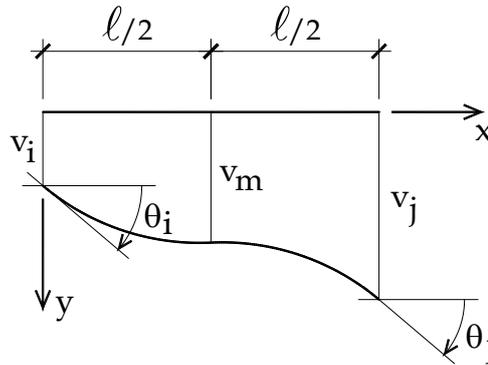


Figura 2.28 - Parâmetros nodais finais: v e v' nas extremidades e v_m no centro

Para resolver este caso, como alternativa em relação ao que foi aplicado em 2.3.2.3.1 **V5N**, a solução considerará diretamente os parâmetros nodais finais, conforme a Fig. 2.28, indicados por

$$\mathbf{v}^{n,t} = \{v_i \quad v'_i \quad v_m \quad v_j \quad v'_j\}$$

onde

$$\theta_i = v'_i$$

$$\theta_j = v'_j$$

Do mesmo modo que foi detalhado em exemplos anteriores, partindo-se da expressão do polinômio de aproximação dependente de parâmetros generalizados e com a escolha dos parâmetros nodais da Fig. 2.28, pode-se obter a expressão da função de aproximação dependente desses parâmetros nodais finais; isto é, iniciando-se com

$$v(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3 + \alpha_4\xi^4$$

obtém-se

$$v(\xi) = (1 - 11\xi^2 + 18\xi^3 - 8\xi^4)v_i + (\xi - 4\xi^2 + 5\xi^3 - 2\xi^4)\ell v'_i + \\ + (16\xi^2 - 32\xi^3 + 16\xi^4)v_m + (-5\xi^2 + 14\xi^3 - 8\xi^4)v_j + (\xi^2 - 3\xi^3 + 2\xi^4)\ell v'_j$$

Essa expressão pode ser indicada, de forma mais compacta, para uso posterior, como

$$v(\xi) = \varphi_1(\xi)v_i + \varphi_2(\xi)\ell v'_i + \varphi_3(\xi)v_m + \varphi_4(\xi)v_j + \varphi_5(\xi)\ell v'_j \quad (2.55)$$

Calculando-se a segunda derivada em relação a ξ tem-se:

$$\bar{v}'' = \frac{d^2v}{d\xi^2} = (-22 + 108\xi - 96\xi^2)v_i + (-8 + 30\xi - 24\xi^2)\ell v'_i + \\ + (32 - 192\xi + 192\xi^2)v_m + (-10 + 84\xi - 96\xi^2)v_j + (2 - 18\xi + 24\xi^2)\ell v'_j$$

Então

$$\mathcal{U} = \frac{EJ}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\ell^2} \bar{v}''^2 \right]^2 \ell d\xi = \frac{EJ}{2\ell^3} \int_0^1 (\bar{v}'')^2 d\xi = C \int_0^1 (\bar{v}'')^2 d\xi$$

Aqui não será repetido o procedimento mais longo adotado em exemplo anterior 2.3.2.3.1, **V5N**. Alternativamente, o cálculo das derivadas de \mathcal{U} será feito diretamente em relação a cada parâmetro nodal *final*, preparando-se as parcelas de cálculo que comparecerão na etapa final de imposição de $d\Pi = 0$.

Já observou-se que, tendo-se em vista que a expressão de $(\bar{v}'')^2$ será bastante longa, nesses casos, é preferível derivar a expressão de U antes de integrá-la, obtendo-se

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_i} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' (-22 + 108\xi - 96\xi^2) d\xi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v'_i} = 2C\ell \int_0^1 \bar{v}'' (-8 + 30\xi - 24\xi^2) d\xi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_m} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' (32 - 192\xi + 192\xi^2) d\xi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_j} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' (-10 + 84\xi - 96\xi^2) d\xi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v'_j} = 2C\ell \int_0^1 \bar{v}'' (2 - 18\xi + 24\xi^2) d\xi$$

Substituindo-se a expressão de \bar{v}'' , efetuando-se os produtos, integrando-se e reunindo-se em matrizes tem-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_i} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v'_i} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_m} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_j} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v'_j} \end{Bmatrix} = 2C \begin{bmatrix} 63,2 & 18,8\ell & -102,4 & 39,2 & -6,8\ell \\ 18,8\ell & 7,2\ell^2 & -25,6\ell & 6,8\ell & -1,2\ell^2 \\ -102,4 & -25,6\ell & 204,8 & -102,4 & 25,6\ell \\ 39,2 & 6,8\ell & -102,4 & 63,2 & -18,8\ell \\ -6,8\ell & -1,2\ell^2 & 25,6\ell & -18,8\ell & 7,2\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_m \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

Quanto ao potencial do carregamento externo, tem-se, aproveitando-se a expressão de

$v(\xi)$ dada por (2.55)

$$v(\xi) = \varphi_1(\xi)v_i + \varphi_2(\xi)\ell v'_i + \varphi_3(\xi)v_m + \varphi_4(\xi)v_j + \varphi_5(\xi)\ell v'_j$$

$$\Omega = -\int_0^1 q v(\xi)\ell d\xi = q\ell \int_0^1 [\varphi_1(\xi)v_i + \varphi_2(\xi)\ell v'_i + \varphi_3(\xi)v_m + \varphi_4(\xi)v_j + \varphi_5(\xi)\ell v'_j] d\xi$$

Derivando-se em relação aos parâmetros nodais *finais*, antes de integrar, e reunindo em matrizes, tem-se

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial v_i} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v'_i} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_m} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_j} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v'_j} \end{pmatrix} = -q\ell \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1 d\xi \\ \ell \int_0^1 \varphi_2 d\xi \\ \int_0^1 \varphi_3 d\xi \\ \int_0^1 \varphi_4 d\xi \\ \ell \int_0^1 \varphi_5 d\xi \end{pmatrix} = \frac{-q\ell}{60} \begin{pmatrix} 14 \\ \ell \\ 32 \\ 14 \\ -\ell \end{pmatrix}$$

Portanto, ao impor a nulidade de cada derivada de Π em relação aos parâmetros nodais *finais* obtém-se para o conjunto (derivadas de \mathcal{U} e de Ω somadas e igualadas a zero)

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 63,2 & 18,8\ell & -102,4 & 39,2 & -6,8\ell \\ 18,8\ell & 7,2\ell^2 & -25,6\ell & 6,8\ell & -1,2\ell^2 \\ -102,4 & -25,6\ell & 204,8 & -102,4 & 25,6\ell \\ 39,2 & 6,8\ell & -102,4 & 63,2 & -18,8\ell \\ -6,8\ell & -1,2\ell^2 & 25,6\ell & -18,8\ell & 7,2\ell^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_m \\ v_j \\ v'_j \end{pmatrix} = \frac{q\ell}{60} \begin{pmatrix} 14 \\ \ell \\ 32 \\ 14 \\ -\ell \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Impondo-se as condições de contorno cinemáticas

$$v_i = v_j = 0$$

fica-se com

$$\begin{bmatrix} 7,2\ell^2 & -25,6\ell & -1,2\ell^2 \\ -25,6\ell & 204,8 & 25,6\ell \\ -1,2\ell^2 & 25,6\ell & 7,2\ell^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v'_i \\ v_m \\ v'_j \end{pmatrix} = \frac{q\ell^4}{60EJ} \begin{pmatrix} \ell \\ 32 \\ -\ell \end{pmatrix}$$

cuja solução é

$$v'_i = -v'_j = \frac{16}{384} \frac{q\ell^3}{EJ}$$

e

$$v_m = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EJ}$$

Pode-se verificar que esta solução coincide com a analítica exata.

De fato, utilizando-se o resultado obtido, os esforços solicitantes na viga serão obtidos com derivadas da expressão

$$v(\xi) = (\xi - 4\xi^2 + 5\xi^3 - 2\xi^4)\ell v'_i + (16\xi^2 - 32\xi^3 + 16\xi^4)v_m + (\xi^2 - 3\xi^3 + 2\xi^4)v'_j$$

$$\begin{aligned}
 M(\xi) &= -EJ \frac{1}{\ell^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2} = \frac{-EJ}{\ell^2} [(-8 + 30\xi - 24\xi^2)\ell v'_i + (32 - 192\xi + 192\xi^2)v_m + \\
 &+ (2 - 18\xi + 24\xi^2)\ell v'_j] = \\
 &= \frac{-EJ}{\ell^2} \left[(-8 + 30\xi - 24\xi^2)\ell \frac{16}{384} \frac{q\ell^3}{EJ} + (32 - 192\xi + 192\xi^2) \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EJ} + \right. \\
 &\left. - (2 - 18\xi + 24\xi^2)\ell \frac{16}{384} \frac{q\ell^3}{EJ} \right] = \frac{q\ell^2}{384} (192\xi - 192\xi^2)
 \end{aligned}$$

Conferindo-se o valor no meio do vão ($x = \ell/2$; $\xi = 0,5$)

$$M(\ell/2) = \frac{q\ell^2}{384} (96 - 48) = \frac{q\ell^2}{8}$$

e a variação é parabólica (coincidindo com o andamento exato do momento fletor).
Quanto à força cortante, tem-se

$$\begin{aligned}
 Q(\xi) &= -EJ \frac{1}{\ell^3} \frac{d^3 v}{d\xi^3} = -\frac{EJ}{\ell^3} \left[(30 - 48\xi)\ell \frac{16}{384} \frac{q\ell^3}{EJ} + (-192 + 384\xi) \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EJ} + \right. \\
 &\left. + (18 - 48\xi)\ell \frac{16}{384} \frac{q\ell^3}{EJ} \right]
 \end{aligned}$$

$$Q(\xi) = \frac{q\ell}{384} (192 - 384\xi)$$

Verificando-se:

$$\text{Nos apoios: } Q(0) = \frac{q\ell}{2} = -Q(1)$$

$$\text{No centro do vão: } Q(0,5) = 0$$

que são os valores exatos.

Exercício: Calcular a expressão da energia potencial total.

Exercício: Aplicar ao caso de viga engastada à esquerda e apoiada à direita com força distribuída q em todo o vão.

Então para trechos de viga onde exista carregamento uniforme, pode-se usar este subdomínio com o polinômio de aproximação de quarto grau para compor a estrutura em discretização. Todavia, como ficará claro posteriormente, há um subdomínio com aproximação de 5º grau, com condensação estática da matriz de rigidez, que será ainda mais adequado para resolver esse caso e, também, o de força distribuída linearmente ou sem carregamento no seu interior.

Também no caso de subdomínio uniformemente carregado e ações concentradas P e \bar{M} , nas suas extremidades, o uso deste subdomínio produzirá resultados exatos.

2.3.2.3.5 V9N Viga simplesmente apoiada, com força distribuída constante e polinômio de aproximação de 5º grau (parâmetros nodais: função, primeira e segunda derivadas)

Procedendo-se de maneira análoga à do exemplo anterior, parte-se de

$$v(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_4 \xi^4 + \alpha_5 \xi^5$$

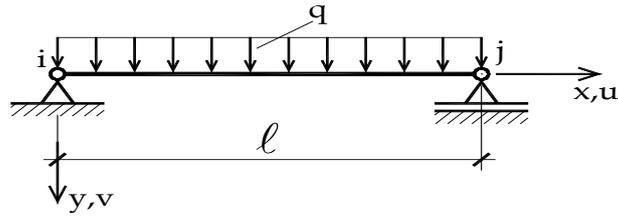


Figura 2.29 – polinômio de 5º grau: v, v' e v''

$$v(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_4 \xi^4 + \alpha_5 \xi^5$$

e definindo-se o vetor de parâmetros nodais *iniciais*

$$\bar{v}^{n,t} = \{v_i \quad \bar{v}'_i \quad \bar{v}''_i \quad v_j \quad \bar{v}'_j \quad \bar{v}''_j\},$$

obtem-se

$$\begin{aligned} v(\xi) = & (1 - 10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5)v_i + (\xi - 6\xi^3 + 8\xi^4 - 3\xi^5)\bar{v}'_i + \\ & +(0,5\xi^2 - 1,5\xi^3 + 1,5\xi^4 - 0,5\xi^5)\bar{v}''_i + (10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5)v_j + \\ & +(-4\xi^3 + 7\xi^4 - 3\xi^5)\bar{v}'_j + (0,5\xi^3 - \xi^4 + 0,5\xi^5)\bar{v}''_j \end{aligned}$$

que pode ser indicado, de forma mais compacta, para uso posterior, como

$$v(\xi) = \varphi_1(\xi)v_i + \varphi_2(\xi)\bar{v}'_i + \varphi_3(\xi)\bar{v}''_i + \varphi_4(\xi)v_j + \varphi_5(\xi)\bar{v}'_j + \varphi_6(\xi)\bar{v}''_j \quad (2.58)$$

Por conseguinte

$$\begin{aligned} \bar{v}'' = \frac{d^2v}{d\xi^2} = & (-60\xi + 180\xi^2 - 120\xi^3)v_i + (-36\xi + 96\xi^2 - 60\xi^3)\bar{v}'_i \\ & +(1 - 9\xi + 18\xi^2 - 10\xi^3)\bar{v}''_i + \\ & (60\xi - 180\xi^2 + 120\xi^3)v_j + (-24\xi + 84\xi^2 - 60\xi^3)\bar{v}'_j + (3\xi - 12\xi^2 + 10\xi^3)\bar{v}''_j \end{aligned}$$

$$\mathcal{U} = \frac{EJ}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\ell^2} \bar{v}'' \right]^2 \ell d\xi = \frac{EJ}{2\ell^3} \int_0^1 (\bar{v}'')^2 d\xi = C \int_0^1 (\bar{v}'')^2 d\xi$$

$$\Omega = - \int_0^1 qv \ell d\xi \quad (2.59)$$

Repetindo-se o procedimento adotado em exemplo anterior (**V5M**), também se faça, separadamente, o cálculo das derivadas de \mathcal{U} em relação a cada parâmetro nodal *inicial*, para preparar as parcelas do cálculo que comparecerão na etapa final de imposição de $d\Pi = 0$.

Derivando a expressão de \mathcal{U} antes de integrá-la, tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial v_i} = 2C \int_0^1 \bar{v}''(-60\xi + 180\xi^2 - 120\xi^3)d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{v}'_i} = 2C \int_0^1 \bar{v}''(-36\xi + 96\xi^2 - 60\xi^3)d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{v}''_i} = 2C \int_0^1 \bar{v}''(1 - 9\xi + 18\xi^2 - 10\xi^3)d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial v_j} = 2C \int_0^1 \bar{v}''(60\xi - 180\xi^2 + 120\xi^3)d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{v}'_j} = 2C \int_0^1 \bar{v}''(-24\xi + 84\xi^2 - 60\xi^3)d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{v}''_j} = 2C \int_0^1 \bar{v}''(3\xi - 12\xi^2 + 10\xi^3)d\xi$$

Integrando-se e reunindo-se em matrizes tem-se

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial v_i} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}'_i} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}''_i} \\ \frac{\partial u}{\partial v_j} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}'_j} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}''_j} \end{pmatrix} = \frac{2C}{7} \begin{bmatrix} 120,0 & 60,0 & 3,0 & -120,0 & 60,0 & -3,0 \\ 60,0 & 38,4 & 2,2 & -60,0 & 21,6 & -0,8 \\ 3,0 & 2,2 & 0,6 & -3,0 & 0,8 & 0,1 \\ -120,0 & -60,0 & -3,0 & 120,0 & -60,0 & 3,0 \\ 60,0 & 21,6 & 0,8 & -60,0 & 38,4 & -2,2 \\ -3,0 & -0,8 & 0,1 & 3,0 & -2,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ \bar{v}'_i \\ \bar{v}''_i \\ v_j \\ \bar{v}'_j \\ \bar{v}''_j \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Assim como foi feito no caso **V5N** a expressão acima poderia ser modificada para se obter as derivadas de U em relação a um vetor de parâmetros nodais finais, definido abaixo. Todavia, para mostrar procedimento alternativo, mostra-se que a solução pode prosseguir com a utilização dos parâmetros nodais iniciais e, somente no final, passa-se para os parâmetros nodais finais, porque se trata de aplicação a uma estrutura simples, com apenas um subdomínio. Este assunto será retomado ao final do presente caso, para mostrar a expressão (2.60) modificada para aplicação genérica a estrutura onde exista conexão direta entre vários subdomínios com comprimentos diferentes.

O vetor de parâmetros nodais finais é definido por

$$\mathbf{v}^{n,t} = \{v_i \quad v'_i \quad v''_i \quad v_j \quad v'_j \quad v''_j\}$$

Quanto ao potencial do carregamento, a substituição de $v(\xi)$ em (2.59), seguida da derivação, antes de integrar, em relação aos parâmetros nodais *iniciais*, resulta em (reunindo matrizes)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial v_i} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{v}'_i} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{v}''_i} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_j} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{v}'_j} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{v}''_j} \end{pmatrix} = -q\ell \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1 d\xi \\ \int_0^1 \varphi_2 d\xi \\ \int_0^1 \varphi_3 d\xi \\ \int_0^1 \varphi_4 d\xi \\ \int_0^1 \varphi_5 d\xi \\ \int_0^1 \varphi_6 d\xi \end{pmatrix} = \frac{-q\ell}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 0,6 \\ 0,05 \\ 3 \\ -0,6 \\ 0,05 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

Desse modo, a imposição de valor estacionário para Π , isto é

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial v_i} dv_i + \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{v}'_i} d\bar{v}'_i + \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{v}''_i} d\bar{v}''_i + \frac{\partial \Pi}{\partial v_j} dv_j + \frac{\partial \Pi}{\partial v'_j} dv'_j + \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{v}''_j} d\bar{v}''_j = 0$$

corresponde a igualar o segundo membro de (2.60) ao oposto (-1) de (2.61) isto é

$$\frac{2C}{7} \begin{bmatrix} 120,0 & 60,0 & 3,0 & -120,0 & 60,0 & -3,0 \\ 60,0 & 38,4 & 2,2 & -60,0 & 21,6 & -0,8 \\ 3,0 & 2,2 & 0,6 & -3,0 & 0,8 & 0,1 \\ -120,0 & -60,0 & -3,0 & 120,0 & -60,0 & 3,0 \\ 60,0 & 21,6 & 0,8 & -60,0 & 38,4 & -2,2 \\ -3,0 & -0,8 & 0,1 & 3,0 & -2,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \bar{v}'_i \\ \bar{v}''_i \\ v_j \\ \bar{v}'_j \\ \bar{v}''_j \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{6} \begin{Bmatrix} 3 \\ 0,6 \\ 0,05 \\ 3 \\ -0,6 \\ 0,05 \end{Bmatrix}$$

Observe-se que não há a presença explícita do vão ℓ na matriz de rigidez. Como se trata de resolver uma viga com apenas um subdomínio, pode-se prosseguir até o final com essa mesma matriz de rigidez. Aplicando-se este resultado ao problema em foco de uma viga simplesmente apoiada, com q uniforme em todo o domínio, resultará, após a aplicação das condições de contorno cinemáticas $v_i = v_j = 0$:

$$\frac{2C}{7} \begin{bmatrix} 38,4 & 2,2 & 21,6 & -0,8 \\ 2,2 & 0,6 & 0,8 & 0,1 \\ 21,6 & 0,8 & 38,4 & -2,2 \\ -0,8 & 0,1 & -2,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}'_i \\ \bar{v}''_i \\ \bar{v}'_j \\ \bar{v}''_j \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{6} \begin{Bmatrix} 0,6 \\ 0,05 \\ -0,6 \\ 0,05 \end{Bmatrix}$$

cuja solução é

$$\bar{v}'_i = -\bar{v}'_j = \frac{q\ell}{48C} = \frac{q\ell}{24 \times 2C} = \frac{q\ell \ell^3}{24 EJ} ; \quad \bar{v}''_i = \bar{v}''_j = 0$$

Com os valores das rotações *iniciais* \bar{v}'_i e \bar{v}'_j , para calcular os valores dos parâmetros nodais *finais* v'_i e v'_j bastará fazer

$$v'_i = \frac{\bar{v}'_i}{\ell} = \frac{q\ell^3}{24EJ} = -v'_j$$

Quanto a $v(\xi)$ tem-se:

$$v = (\xi - 6\xi^3 + 8\xi^4 - 3\xi^5) \frac{q\ell}{48C} - (-4\xi^3 + 7\xi^4 - 3\xi^5) \frac{q\ell}{48C} = (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) \frac{q\ell}{48C}$$

Observe-se que o polinômio da solução não contém o termo de 5º grau, o que significa que a solução anterior, com polinômio de aproximação de 4º grau, já era coincidente com a analítica!

Verificando-se o valor no meio do vão

$$v(0,5) = \left(\frac{1}{2} - 2\frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) \frac{q\ell}{48C} = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EJ}$$

que é o valor exato da solução analítica.

Se os deslocamentos são tão bem aproximados é claro que os esforços solicitantes também o serão.

Observar também que a própria solução já mostrou obediência à duas das condições mecânicas de contorno, isto é

$$M(0) = -EJ\bar{v}_i'' = 0$$

$$M(1) = -EJ\bar{v}_j'' = 0$$

Quanto às forças cortantes, sendo

$$v' = \frac{1}{\ell}(1 - 6\xi^2 + 4\xi^3)$$

$$v'' = \frac{1}{\ell^2}(-12\xi + 12\xi^2)$$

$$v''' = \frac{1}{\ell^3}(-12 + 24\xi) \frac{q\ell}{48C}$$

tem-se

$$Q(0) = -EJv'''(0) = -EJ \frac{-12}{\ell^3} \frac{q\ell}{48} \frac{2\ell^3}{EJ} = \frac{q\ell}{2}$$

$$Q(1) = -EJv'''(1) = -EJ \frac{12}{\ell^3} \frac{q\ell}{48} \frac{2\ell^3}{EJ} = -\frac{q\ell}{2}$$

que são respostas exatas e, também, condições mecânicas de contorno!

Generalização do relacionamento forças/deslocamentos com emprego de parâmetros nodais com dimensão.

Conforme adiantado, note-se que no caso em que existam subdomínios conectados por nós comuns, e com comprimentos diferentes, será necessário utilizar relacionamento entre forças e deslocamentos nodais não adimensionais. Portanto, na minimização do potencial total as derivações devem ser feitas em relação a esses parâmetros, já denominados parâmetros nodais *finais* .

Seja, como ponto de partida, (2.58), dependente de parâmetros *iniciais*

$$v(\xi) = \varphi_1(\xi)v_i + \varphi_2(\xi)\bar{v}_i' + \varphi_3(\xi)\bar{v}_i'' + \varphi_4(\xi)v_j + \varphi_5(\xi)\bar{v}_j' + \varphi_6(\xi)\bar{v}_j'' \quad (2.58)$$

onde $\xi = x/\ell$.

A sua derivada segunda, aqui repetida, resulta:

$$\begin{aligned} \bar{v}'' = \frac{d^2v}{d\xi^2} = & (-60\xi + 180\xi^2 - 120\xi^3)v_i + (-36\xi + 96\xi^2 - 60\xi^3)\bar{v}_i' + (1 - 9\xi + 18\xi^2 - 10\xi^3)\bar{v}_i'' + \\ & + (60\xi - 180\xi^2 + 120\xi^3)v_j + (-24\xi + 84\xi^2 - 60\xi^3)\bar{v}_j' + (3\xi - 12\xi^2 + 10\xi^3)\bar{v}_j'' \end{aligned} \quad (2.59)$$

Sendo

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{\bar{v}'}{\ell} \quad \text{ou} \quad \bar{v}' = \ell v'$$

$$v'' = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right) = \frac{1}{\ell} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\ell} \frac{dv}{dx} \right) = \frac{1}{\ell^2} \frac{d^2v}{d\xi^2} = \frac{\bar{v}''}{\ell^2} \quad \text{ou} \quad \bar{v}'' = \ell^2 v''$$

a substituição em $\bar{v}''(\xi)$ fornece

$$\begin{aligned} \bar{v}'' = \frac{d^2v}{d\xi^2} = & (-60\xi + 180\xi^2 - 120\xi^3)v_i + (-36\xi + 96\xi^2 - 60\xi^3)\ell v_i' + \\ & + (1 - 9\xi + 18\xi^2 - 10\xi^3)\ell^2 v_i'' + \end{aligned}$$

$$+(60\xi - 180\xi^2 + 120\xi^3)v_j + (-24\xi + 84\xi^2 - 60\xi^3)\ell v_j' + (3\xi - 12\xi^2 + 10\xi^3)\ell^2 v_j''$$

Sabe-se que

$$\mathcal{U} = \frac{EJ}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\ell^2} \bar{v}'' \right]^2 \ell d\xi = \frac{EJ}{2\ell^3} \int_0^1 (\bar{v}'')^2 d\xi = C \int_0^1 (\bar{v}'')^2 d\xi$$

na qual a segunda derivada está em função de parâmetros nodais *finais*, conforme expressão anterior.

Pode-se calcular as derivadas de \mathcal{U} antes da integração e diretamente em relação aos parâmetros *finais*, obtendo-se

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_i} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{v}''} \frac{\partial \bar{v}''}{\partial v_i} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} d\xi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_i'} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{v}''} \frac{\partial \bar{v}''}{\partial v_i'} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi^2} \ell \right) d\xi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_i''} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{v}''} \frac{\partial \bar{v}''}{\partial v_i''} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \xi^2} \ell^2 \right) d\xi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_j} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{v}''} \frac{\partial \bar{v}''}{\partial v_j} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial \xi^2} d\xi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_j'} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{v}''} \frac{\partial \bar{v}''}{\partial v_j'} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' \left(\frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial \xi^2} \ell \right) d\xi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_j''} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{v}''} \frac{\partial \bar{v}''}{\partial v_j''} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' \left(\frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial \xi^2} \ell^2 \right) d\xi$$

Efetuando-se os produtos, integrando-se e reunindo-se em matrizes tem-se

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_i} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_i'} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_i''} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_j} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_j'} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_j''} \end{pmatrix} = \frac{2C}{7} \begin{bmatrix} 120,0 & 60,0\ell & 3,0\ell^2 & -120,0 & 60,0\ell & -3,0\ell^2 \\ 60,0\ell & 38,4\ell^2 & 2,2\ell^3 & -60,0\ell & 21,6\ell^2 & -0,8\ell^3 \\ 3,0\ell^2 & 2,2\ell^3 & 0,6\ell^4 & -3,0\ell^2 & 0,8\ell^3 & 0,1\ell^4 \\ -120,0 & -60,0\ell & -3,0\ell^2 & 120,0 & -60,0\ell & 3,0\ell^2 \\ 60,0\ell & 21,6\ell^2 & 0,8\ell^3 & -60,0\ell & 38,4\ell^2 & -2,2\ell^3 \\ -3,0\ell^2 & -0,8\ell^3 & 0,1\ell^4 & 3,0\ell^2 & -2,2\ell^3 & 0,6\ell^4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ v_i' \\ v_i'' \\ v_j \\ v_j' \\ v_j'' \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

Quanto ao vetor de forças nodais equivalentes, sendo

$$\Omega = - \int_0^1 qv\ell d\xi \quad (2.63)$$

e

$$v(\xi) = \varphi_1(\xi)v_i + \varphi_2(\xi)\ell v_i' + \varphi_3(\xi)\ell^2 v_i'' + \varphi_4(\xi)v_j + \varphi_5(\xi)\ell v_j' + \varphi_6(\xi)\ell^2 v_j'' \quad (2.64)$$

resulta

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial v_i} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_i'} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_i''} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_j} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_j'} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_j''} \end{pmatrix} = -q\ell \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1 d\xi \\ \int_0^1 \varphi_2 \ell d\xi \\ \int_0^1 \varphi_3 \ell^2 d\xi \\ \int_0^1 \varphi_4 d\xi \\ \int_0^1 \varphi_5 \ell d\xi \\ \int_0^1 \varphi_6 \ell^2 d\xi \end{pmatrix} = \frac{-q\ell}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 0,6\ell \\ 0,05\ell^2 \\ 3 \\ -0,6\ell \\ 0,05\ell^2 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Igualando-se o segundo membro de (2.62) ao oposto de (2.65), tem-se

$$\frac{EJ}{7} \begin{bmatrix} 120,0 & 60,0\ell & 3,0\ell^2 & -120,0 & 60,0\ell & -3,0\ell^2 \\ 60,0\ell & 38,4\ell^2 & 2,2\ell^3 & -60,0\ell & 21,6\ell^2 & -0,8\ell^3 \\ 3,0\ell^2 & 2,2\ell^3 & 0,6\ell^4 & -3,0\ell^2 & 0,8\ell^3 & 0,1\ell^4 \\ -120,0 & -60,0\ell & -3,0\ell^2 & 120,0 & -60,0\ell & 3,0\ell^2 \\ 60,0\ell & 21,6\ell^2 & 0,8\ell^3 & -60,0\ell & 38,4\ell^2 & -2,2\ell^3 \\ -3,0\ell^2 & -0,8\ell^3 & 0,1\ell^4 & 3,0\ell^2 & -2,2\ell^3 & 0,6\ell^4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ v_i' \\ v_i'' \\ v_j \\ v_j' \\ v_j'' \end{pmatrix} = \frac{q\ell^4}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 0,6\ell \\ 0,05\ell^2 \\ 3 \\ -0,6\ell \\ 0,05\ell^2 \end{pmatrix}$$

Testando-se com viga simplesmente apoiada e carregamento uniforme, depois da imposição das condições de contorno cinemáticas, fica-se apenas com

$$\begin{bmatrix} 38,4 & 2,2 & 21,6 & -0,8 \\ 2,2 & 0,6 & 0,8 & 0,1 \\ 21,6 & 0,8 & 38,4 & -2,2 \\ -0,8 & 0,1 & -2,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_i' \\ \ell v_i'' \\ v_j' \\ \ell v_j'' \end{pmatrix} = \frac{7q\ell^3}{6EJ} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,05 \\ -0,6 \\ 0,05 \end{pmatrix}$$

Esse sistema tem como solução

$$\begin{pmatrix} v_i' \\ \ell v_i'' \\ v_j' \\ \ell v_j'' \end{pmatrix} = \frac{q\ell^3}{24EJ} \begin{pmatrix} 1 \\ B \\ -1 \\ B \end{pmatrix}$$

que são valores exatos para esse problema, pois o valor B é numericamente da ordem de 1.10^{-17} , isto é, nulo, como deve ser a condição mecânica de contorno nos dois apoios!

Exercício:

Verificar as duas outras condições mecânicas de contorno, referentes à força cortante, que têm os valores exatos abaixo indicados, conforme sabido

$$Q(0) = -EJv'''(0) = \frac{q\ell}{2}$$

$$Q(1) = -EJv'''(1) = \frac{-q\ell}{2}$$

Determinar as expressões de $M(x)$, $Q(x)$ e desenhar os diagramas correspondentes.

Determinar a expressão da energia potencial total Π e compará-la com a do exemplo **V8N**.

2.3.2.3.6 V10N Viga simplesmente apoiada; força externa linearmente variável; função de aproximação de 5º grau, sem derivadas segundas; 3 nós

Observa-se que em casos de vigas que tenham momentos concentrados externos, não será adequado empregar o modelo do subdomínio anterior, que tem derivadas segundas como

parâmetros nodais de extremidade, pois a descontinuidade de momento fletor não será captada.

Deduz-se então uma nova versão do subdomínio de viga com função de aproximação ainda de 5º grau, porém com três nós cujos parâmetros nodais são escolhidos como os valores da função v e da sua primeira derivada v' . Há nós em cada extremidade i e j e um no meio m do comprimento do subdomínio.

Portanto o vetor de parâmetros nodais *iniciais* é definido a seguir

$$\bar{v}^{nt} = \{v_i \quad \bar{v}'_i \quad v_m \quad \bar{v}'_m \quad v_j \quad \bar{v}'_j\}$$

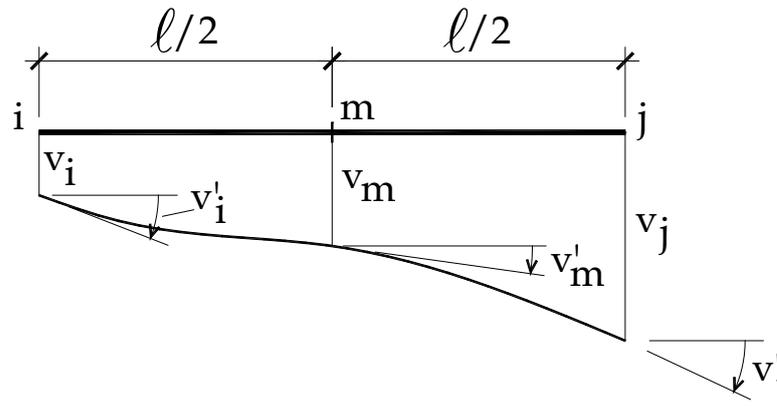


Figura 2.30 - Função de aproximação de 5º grau, três nós com v e v'

Como carregamento será considerada a força linearmente variável, tendo-se em vista que o polinômio de 5º grau é solução exata para esse caso de carregamento.

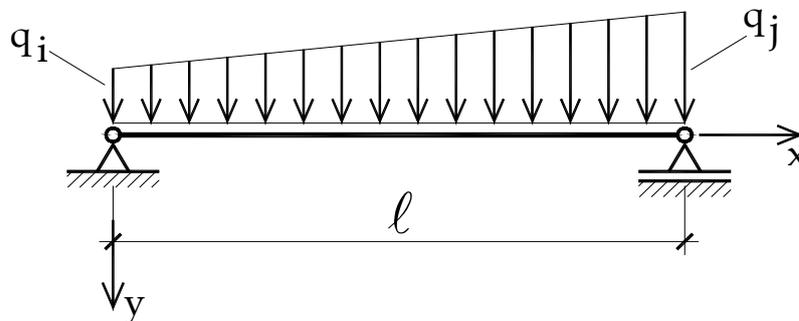


Figura 2.31 - Carregamento linearmente variável

A função de aproximação tem a expressão

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_4 \xi^4 + \alpha_5 \xi^5 \quad (2.66)$$

e sua primeira derivada é

$$\bar{v}' = \alpha_1 + 2\alpha_2 \xi + 3\alpha_3 \xi^2 + 4\alpha_4 \xi^3 + 5\alpha_5 \xi^4 .$$

Particularizando-as para os pontos nodais forma-se o vetor

$$\bar{v}^n = \begin{Bmatrix} v_i \\ \bar{v}'_i \\ v_m \\ \bar{v}'_m \\ v_j \\ \bar{v}'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,25 & 0,125 & 0,0625 & 0,03125 \\ 0 & 1 & 1 & 0,75 & 0,5 & 0,3125 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{Bmatrix}$$

de onde resulta

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -23 & -6 & 16 & -8 & 7 & -1 \\ 66 & 13 & -32 & 32 & -34 & 5 \\ -68 & -12 & 16 & -40 & 52 & -8 \\ 24 & 4 & 0 & 16 & -24 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \bar{v}'_i \\ v_m \\ \bar{v}'_m \\ v_j \\ \bar{v}'_j \end{Bmatrix}$$

A substituição em (2.66) e o rearranjo resultam em

$$\begin{aligned} v = & (1 - 23\xi^2 + 66\xi^3 - 68\xi^4 + 24\xi^5)v_i + (\xi - 6\xi^2 + 13\xi^3 - 12\xi^4 + 4\xi^5)\bar{v}'_i + \\ & +(16\xi^2 - 32\xi^3 + 16\xi^4)v_m + (-8\xi^2 + 32\xi^3 - 40\xi^4 + 16\xi^5)\bar{v}'_m + \\ & +(7\xi^2 - 34\xi^3 + 52\xi^4 - 24\xi^5)v_j + (-\xi^2 + 5\xi^3 - 8\xi^4 + 4\xi^5)\bar{v}'_j \end{aligned}$$

que pode ser indicada, de forma mais compacta, para uso posterior, como

$$v(\xi) = \varphi_1(\xi)v_i + \varphi_2(\xi)\bar{v}'_i + \varphi_3(\xi)v_m + \varphi_4(\xi)\bar{v}'_m + \varphi_5(\xi)v_j + \varphi_6(\xi)\bar{v}'_j \quad (2.67)$$

A primeira derivada em relação a ξ , em função de parâmetros nodais *finais* , é

$$\begin{aligned} \bar{v}' = & (-46\xi + 198\xi^2 - 272\xi^3 + 120\xi^4)v_i + (1 - 12\xi + 39\xi^2 - 48\xi^3 + 20\xi^4)\ell v'_i + \\ & +(32\xi - 96\xi^2 + 64\xi^3)v_m + (-16\xi + 96\xi^2 - 160\xi^3 + 80\xi^4)\ell v'_m + \\ & +(14\xi - 102\xi^2 + 208\xi^3 - 120\xi^4)v_j + (-2\xi + 15\xi^2 - 32\xi^3 + 20\xi^4)\ell v'_j \end{aligned}$$

e a segunda derivada

$$\begin{aligned} \bar{v}'' = & (-46 + 396\xi - 816\xi^2 + 480\xi^3)v_i + (-12 + 78\xi - 144\xi^2 + 80\xi^3)\ell v''_i + \\ & +(32 - 192\xi + 192\xi^2)v_m + (-16 + 192\xi - 480\xi^2 + 320\xi^3)\ell v''_m + \\ & +(14 - 204\xi + 624\xi^2 - 480\xi^3)v_j + (-2 + 30\xi - 96\xi^2 + 80\xi^3)\ell v''_j \end{aligned}$$

Então

$$\mathcal{U} = \frac{EJ}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\ell^2} \bar{v}''^2 \right]^2 \ell d\xi = \frac{EJ}{2\ell^3} \int_0^1 (\bar{v}'')^2 d\xi = C \int_0^1 (\bar{v}'')^2 d\xi$$

onde $C = EJ/2\ell^3$.

Repetindo-se o procedimento adotado em exemplo anterior (**V5N**), também se faça o cálculo das derivadas de \mathcal{U} em relação a cada parâmetro nodal *final* , para preparar as parcelas do cálculo que comparecerão na etapa final de imposição de $d\Pi = 0$.

Tendo-se em vista que a expressão de $(\bar{v}'')^2$ é bastante longa, nesse caso, é preferível derivar a expressão de \mathcal{U} antes de integrá-la. As derivadas de \mathcal{U} , antes da integração, terão expressões sob as formas seguintes

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_i} = 2C \int_0^1 \bar{v}'' (-46 + 396\xi - 816\xi^2 + 480\xi^3) d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial v'_i} = 2C\ell \int_0^1 \bar{v}''(-12 + 78\xi - 144\xi^2 + 80\xi^3)d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial v_m} = 2C \int_0^1 \bar{v}''(32 - 192\xi + 192\xi^2)d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial v'_m} = 2C\ell \int_0^1 \bar{v}''(-16 + 192\xi - 480\xi^2 + 320\xi^3)d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial v_j} = 2C \int_0^1 \bar{v}''(14 - 204\xi + 624\xi^2 - 480\xi^3)d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial v'_j} = 2C\ell \int_0^1 \bar{v}''(-2 + 30\xi - 96\xi^2 + 80\xi^3)d\xi$$

Fazendo-se as multiplicações, integrando-se e reunindo-se em matrizes tem-se

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial v_i} \\ \frac{\partial u}{\partial v'_i} \\ \frac{\partial u}{\partial v_m} \\ \frac{\partial u}{\partial v'_m} \\ \frac{\partial u}{\partial v_j} \\ \frac{\partial u}{\partial v'_j} \end{pmatrix} = \frac{2C}{35} \begin{bmatrix} 5092 & 1138\ell & -3584 & 1920\ell & -1508 & 242\ell \\ 1138\ell & 332\ell^2 & -896\ell & 320\ell^2 & -242\ell & 38\ell^2 \\ -3584 & -896\ell & 7168 & 0 & -3584 & 896\ell \\ 1920\ell & 320\ell^2 & 0 & 1280\ell^2 & -1920\ell & 320\ell^2 \\ -1508 & -242\ell & -3584 & -1920\ell & 5092 & -1138\ell \\ 242\ell & 38\ell^2 & 896\ell & 320\ell^2 & -1138\ell & 332\ell^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_m \\ v'_m \\ v_j \\ v'_j \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

Fazendo-se agora o cálculo do potencial do carregamento externo, tem-se que a força linearmente distribuída no comprimento do subdomínio pode ser escrita sob a forma seguinte, dependente dos valores q_i e q_j nos pontos nodais das extremidades do subdomínio

$$q = q_i(1 - \xi) + q_j\xi = q_i + (q_j - q_i)\xi$$

Então

$$\Omega = - \int_0^1 q \cdot v \ell d\xi =$$

$$= - \int_0^1 \{q_i(1 - \xi) + q_j\xi\} \cdot \{\varphi_1(\xi)v_i + \varphi_2(\xi)\ell v'_i + \varphi_3(\xi)v_m +$$

$$\varphi_4(\xi)\ell v'_m + \varphi_5(\xi)v_j + \varphi_6(\xi)\ell v'_j\} \ell d\xi$$

As derivadas, antes da integração, são expressas por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial v_i} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v'_i} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_m} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v'_m} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_j} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v'_j} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \int_0^1 \{q_i(1 - \xi) + q_j\xi\} \varphi_1(\xi) \ell d\xi \\ \ell \int_0^1 \{q_i(1 - \xi) + q_j\xi\} \varphi_2(\xi) \ell d\xi \\ \int_0^1 \{q_i(1 - \xi) + q_j\xi\} \varphi_3(\xi) \ell d\xi \\ \ell \int_0^1 \{q_i(1 - \xi) + q_j\xi\} \varphi_4(\xi) \ell d\xi \\ \int_0^1 \{q_i(1 - \xi) + q_j\xi\} \varphi_5(\xi) \ell d\xi \\ \ell \int_0^1 \{q_i(1 - \xi) + q_j\xi\} \varphi_6(\xi) \ell d\xi \end{pmatrix}$$

Realizando-se a integração tem-se

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial v_i} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_i'} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_m} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_m'} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_j} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_j'} \end{pmatrix} = -\frac{\ell}{420} \begin{pmatrix} 79q_i + 19q_j \\ (5q_i + 2q_j)\ell \\ 112q_i + 112q_j \\ (-8q_i + 8q_j)\ell \\ 19q_i + 79q_j \\ (-2q_i - 5q_j)\ell \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Finalmente, a aplicação do princípio da mínima energia potencial $\delta \Pi_p = 0$, implica em fazer-se a soma de (2.68) com (2.69) e igualá-la a zero, ou escrever-se

$$\frac{2C}{35} \begin{bmatrix} 5092 & 1138\ell & -3584 & 1920\ell & -1508 & 242\ell \\ 1138\ell & 332\ell^2 & -896\ell & 320\ell^2 & -242\ell & 38\ell^2 \\ -3584 & -896\ell & 7168 & 0 & -3584 & 896\ell \\ 1920\ell & 320\ell^2 & 0 & 1280\ell^2 & -1920\ell & 320\ell^2 \\ -1508 & -242\ell & -3584 & -1920\ell & 5092 & -1138\ell \\ 242\ell & 38\ell^2 & 896\ell & 320\ell^2 & -1138\ell & 332\ell^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ v_i' \\ v_m \\ v_m' \\ v_j \\ v_j' \end{pmatrix} = \frac{\ell}{420} \begin{pmatrix} 79q_i + 19q_j \\ (5q_i + 2q_j)\ell \\ 112q_i + 112q_j \\ (-8q_i + 8q_j)\ell \\ 19q_i + 79q_j \\ (-2q_i - 5q_j)\ell \end{pmatrix} \quad (2.70 a)$$

ou

$$kv^n = f^n \quad (2.70 b)$$

A dedução realizada permitirá resolver o caso da força linearmente variável,

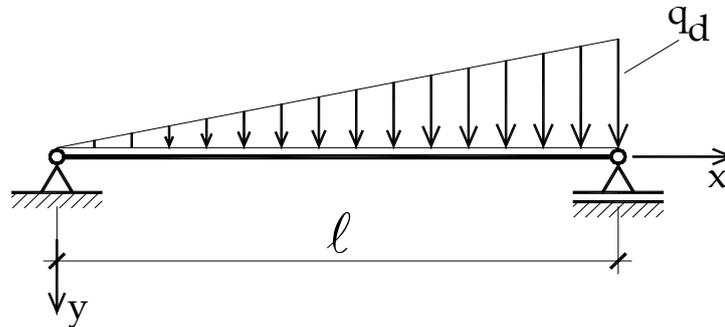


Figura 2.32 - Carregamento triangular e função de 5º grau; v e v' em três pontos nodais

com q_i e q_j quaisquer, portanto valendo também para o caso de “carregamento triangular” da viga simplesmente apoiada da Fig. 2.32 Esse problema foi resolvido anteriormente com o subdomínio no qual a descrição da função de aproximação de 5º grau foi feita com outro conjunto de parâmetros nodais (derivadas segundas incluídas).

Antes, porém, para verificação de caso mais simples, aplique-se ao caso de viga simplesmente apoiada com carregamento uniforme $q_i = q_j = q$

$$\frac{2C}{35} \begin{bmatrix} 5092 & 1138\ell & -3584 & 1920\ell & -1508 & 242\ell \\ 1138\ell & 332\ell^2 & -896\ell & 320\ell^2 & -242\ell & 38\ell^2 \\ -3584 & -896\ell & 7168 & 0 & -3584 & 896\ell \\ 1920\ell & 320\ell^2 & 0 & 1280\ell^2 & -1920\ell & 320\ell^2 \\ -1508 & -242\ell & -3584 & -1920\ell & 5092 & -1138\ell \\ 242\ell & 38\ell^2 & 896\ell & 320\ell^2 & -1138\ell & 332\ell^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ v_i' \\ v_m \\ v_m' \\ v_j \\ v_j' \end{pmatrix} = \frac{q\ell}{420} \begin{pmatrix} 98 \\ 7\ell \\ 224 \\ 0 \\ 98 \\ -7\ell \end{pmatrix}$$

Com a condição de contorno $v_i = v_j = 0$, aplicada com o procedimento que modifica as matrizes de rigidez e de forças nodais, sem eliminação das linhas e colunas dos parâmetros conhecidos, fica-se com a expressão abaixo.

Conforme já explicado anteriormente, note-se que o procedimento de aplicação das condições de contorno anula os coeficientes das linhas e colunas da matriz de rigidez relativas ao parâmetro conhecido (nulo, neste caso), com exceção do coeficiente localizado na diagonal da matriz, onde o valor original é substituído pelo valor unitário. No vetor das forças nodais anula-se o valor da linha correspondente ao parâmetro conhecido.

$$\frac{2C}{35} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 332\ell^2 & -896\ell & 320\ell^2 & 0 & 38\ell^2 \\ 0 & -896\ell & 7168 & 0 & 0 & 896\ell \\ 0 & 320\ell^2 & 0 & 1280\ell^2 & 0 & 320\ell^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 38\ell^2 & 896\ell & 320\ell^2 & 0 & 332\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_i' \\ v_m \\ v_m' \\ v_j \\ v_j' \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{420} \begin{Bmatrix} 0 \\ 7\ell \\ 224 \\ 0 \\ 0 \\ -7\ell \end{Bmatrix}$$

ou, fazendo-se

$$K = \frac{q\ell}{420} \frac{35}{2C} = \frac{q\ell}{420} \frac{35}{\frac{EJ}{\ell^3}} = \frac{q\ell^4}{12EJ}$$

resulta

$$\begin{bmatrix} 332\ell^2 & -896\ell & 320\ell^2 & 38\ell^2 \\ -896\ell & 7168 & 0 & 896\ell \\ 320\ell^2 & 0 & 1280\ell^2 & 320\ell^2 \\ 38\ell^2 & 896\ell & 320\ell^2 & 332\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i' \\ v_m \\ v_m' \\ v_j' \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} 7\ell \\ 224 \\ 0 \\ -7\ell \end{Bmatrix}$$

cuja solução é

$$\begin{Bmatrix} v_i' \\ v_m \\ v_m' \\ v_j' \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,15625 \\ B \\ -0,5 \end{Bmatrix}$$

onde B é da ordem de $1 \cdot 10^{-17}$, quer dizer, é nulo.

Conferindo-se o valor da flecha no meio do vão com a resposta analítica, sabe-se que

$$v_m = \frac{5q\ell^4}{384EJ} = 0,15625 \frac{q\ell^4}{12EJ}$$

portanto a resposta está correta.

Aplicando-se (2.70 a) ao caso de carregamento triangular com $q_i = 0$ e $q_j = q_d$ em uma viga simplesmente apoiada, tem-se

$$\frac{2C}{35} \begin{bmatrix} 5092 & 1138\ell & -3584 & 1920\ell & -1508 & 242\ell \\ 1138\ell & 332\ell^2 & -896\ell & 320\ell^2 & -242\ell & 38\ell^2 \\ -3584 & -896\ell & 7168 & 0 & -3584 & 896\ell \\ 1920\ell & 320\ell^2 & 0 & 1280\ell^2 & -1920\ell & 320\ell^2 \\ -1508 & -242\ell & -3584 & -1920\ell & 5092 & -1138\ell \\ 242\ell & 38\ell^2 & 896\ell & 320\ell^2 & -1138\ell & 332\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_i' \\ v_m \\ v_m' \\ v_j \\ v_j' \end{Bmatrix} = \frac{q_d\ell}{420} \begin{Bmatrix} 19 \\ 2\ell \\ 112 \\ 8\ell \\ 79 \\ -5\ell \end{Bmatrix}$$

Com a condição de contorno $v_i = v_j = 0$ resulta

$$\frac{2C}{35} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 332\ell^2 & -896\ell & 320\ell^2 & 0 & 38\ell^2 \\ 0 & -896\ell & 7168 & 0 & 0 & 896\ell \\ 0 & 320\ell^2 & 0 & 1280\ell^2 & 0 & 320\ell^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 38\ell^2 & 896\ell & 320\ell^2 & 0 & 332\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_m \\ v'_m \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \frac{q_d \ell}{420} \begin{Bmatrix} 19 \\ 2\ell \\ 112 \\ 8\ell \\ 79 \\ -5\ell \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 332\ell^2 & -896\ell & 320\ell^2 & 38\ell^2 \\ -896\ell & 7168 & 0 & 896\ell \\ 320\ell^2 & 0 & 1280\ell^2 & 320\ell^2 \\ 38\ell^2 & 896\ell & 320\ell^2 & 332\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_i \\ v_m \\ v'_m \\ v'_j \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} 2\ell \\ 112 \\ 8\ell \\ -5\ell \end{Bmatrix}$$

onde

$$K = \frac{35q_d \ell}{2C \times 420} = \frac{q_d \ell}{24C} = \frac{q_d \ell^4}{12EJ}$$

A solução do sistema fica sob a forma

$$\begin{Bmatrix} v'_i \\ v_m \\ v'_m \\ v'_j \end{Bmatrix} = \frac{q_d \ell^4}{12EJ} \begin{Bmatrix} \frac{7}{30\ell} \\ \frac{5}{64} \\ \frac{7}{480\ell} \\ \frac{-4}{15\ell} \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

Com a resposta analítica podem ser verificados os valores acima. Determinar os esforços solicitantes $M(x)$ e $Q(x)$ e v_{\max} .

2.3.2.3.7 V11N Subdomínio de viga com função de aproximação de 5º grau, sem derivadas segundas, com condensação estática, e força externa linearmente variável

No item 2.3.2.3.6 foi deduzida a relação (2.70 a) entre os 6 parâmetros nodais e forças equivalentes, referentes ao subdomínio com função de 5º grau. A ordenação dos parâmetros nodais, lá escolhidos, é

$$\mathbf{v}^{nt} = \{v_i \quad v'_i \quad v_m \quad v'_m \quad v_j \quad v'_j\}$$

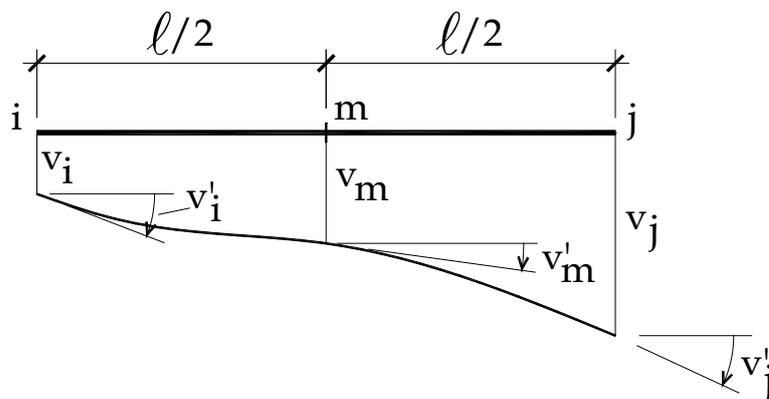


Figura 2.33 – Polinômio de 5º grau, sem derivadas segundas nodais

Neste item, aquele relacionamento (2.70 a) será reescrito tomando-se nova ordenação para os parâmetros nodais.

Seja o vetor de parâmetros nodais $\mathbf{v}_{ac}^{n,t}$, que será chamado vetor a condensar, com os parâmetros relativos ao nó interno colocados em primeiro lugar

$$\mathbf{v}_{ac}^{n,t} = \{v_m \ v'_m \ v_i \ v'_i \ v_j \ v'_j\} = \{v_m \ \theta_m \ v_i \ \theta_i \ v_j \ \theta_j\} \quad (2.72)$$

onde, para facilitar a escrituração posterior, fez-se $\theta = v'$.

Então, simbolicamente, o relacionamento entre deslocamentos nodais e respectivas forças nodais equivalentes pode ser expresso por

$$\begin{bmatrix} k_{v_m v_m} & k_{v_m \theta_m} & k_{v_m v_i} & k_{v_m \theta_i} & k_{v_m v_j} & k_{v_m \theta_j} \\ k_{\theta_m v_m} & k_{\theta_m \theta_m} & k_{\theta_m v_i} & k_{\theta_m \theta_i} & k_{\theta_m v_j} & k_{\theta_m \theta_j} \\ k_{v_i v_m} & k_{v_i \theta_m} & k_{v_i v_i} & k_{v_i \theta_i} & k_{v_i v_j} & k_{v_i \theta_j} \\ k_{\theta_i v_m} & k_{\theta_i \theta_m} & k_{\theta_i v_i} & k_{\theta_i \theta_i} & k_{\theta_i v_j} & k_{\theta_i \theta_j} \\ k_{v_j v_m} & k_{v_j \theta_m} & k_{v_j v_i} & k_{v_j \theta_i} & k_{v_j v_j} & k_{v_j \theta_j} \\ k_{\theta_j v_m} & k_{\theta_j \theta_m} & k_{\theta_j v_i} & k_{\theta_j \theta_i} & k_{\theta_j v_j} & k_{\theta_j \theta_j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_m \\ \theta_m \\ v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{v_m} \\ f_{\theta_m} \\ f_{v_i} \\ f_{\theta_i} \\ f_{v_j} \\ f_{\theta_j} \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

ou

$$\mathbf{k}_{ac} \mathbf{v}_{ac}^n = \mathbf{f}_{ac}^n$$

Os dois parâmetros do nó interno m somente influenciam, diretamente, as equações de equilíbrio nas direções dos outros quatro parâmetros, dos dois nós de extremidade, do próprio subdomínio. Portanto, nas equações acima, é possível realizar o que se denomina “condensação estática”.

Em resumo, o que se faz é obter v_m em função dos outros 5 parâmetros na primeira das equações (2.73) e substituir seu valor nas demais 5 equações. Em seguida, na segunda equação modificada pela substituição de v_m , obtém-se o valor de θ_m em função dos quatro parâmetros restantes, substituindo-se esse valor nas quatro últimas equações. Note-se que os valores do segundo membro também ficam envolvidos nessas operações.

Essas operações algébricas correspondem a levar a influência das variáveis do nó interno para as variáveis de nós de extremidade. Conforme salientado, a influência direta das variáveis internas somente ocorre no âmbito de cada subdomínio.

Novamente, para facilitar a escrituração, indica-se de maneira mais compacta o relacionamento (2.73) acima, conforme a expressão seguinte

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{mm} & \mathbf{k}_{mi} & \mathbf{k}_{mj} \\ \mathbf{k}_{im} & \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ij} \\ \mathbf{k}_{jm} & \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_m \\ \mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

onde cada elemento dessas matrizes indica submatrizes (2 x 2 ou 2 x 1) de (2.73), por exemplo:

$$\mathbf{k}_{mi} = \begin{bmatrix} k_{v_m v_i} & k_{v_m \theta_i} \\ k_{\theta_m v_i} & k_{\theta_m \theta_i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_m = \begin{Bmatrix} f_{v_m} \\ f_{\theta_m} \end{Bmatrix}$$

Da forma mais compacta (2.74), das equações de equilíbrio, a primeira equação escrita de

forma explícita é

$$\mathbf{k}_{mm}\mathbf{d}_m + \mathbf{k}_{mi}\mathbf{d}_i + \mathbf{k}_{mj}\mathbf{d}_j = \mathbf{f}_m$$

Então, pode-se obter

$$\mathbf{d}_m = \mathbf{k}_{mm}^{-1} \{ \mathbf{f}_m - \mathbf{k}_{mi}\mathbf{d}_i - \mathbf{k}_{mj}\mathbf{d}_j \} \quad (2.75)$$

Levando-se nas duas últimas equações, resulta

$$\mathbf{k}_{im} [\mathbf{k}_{mm}^{-1} \{ \mathbf{f}_m - \mathbf{k}_{mi}\mathbf{d}_i - \mathbf{k}_{mj}\mathbf{d}_j \}] + \mathbf{k}_{ii}\mathbf{d}_i + \mathbf{k}_{ij}\mathbf{d}_j = \mathbf{f}_i$$

$$\mathbf{k}_{jm} [\mathbf{k}_{mm}^{-1} \{ \mathbf{f}_m - \mathbf{k}_{mi}\mathbf{d}_i - \mathbf{k}_{mj}\mathbf{d}_j \}] + \mathbf{k}_{ji}\mathbf{d}_i + \mathbf{k}_{jj}\mathbf{d}_j = \mathbf{f}_j$$

que dependem somente dos parâmetros dos nós de extremidade.

Essas equações podem ser reunidas em uma equação matricial sob a forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} - \mathbf{k}_{im}\mathbf{k}_{mm}^{-1}\mathbf{k}_{mi} & \mathbf{k}_{ij} - \mathbf{k}_{im}\mathbf{k}_{mm}^{-1}\mathbf{k}_{mj} \\ \mathbf{k}_{ji} - \mathbf{k}_{jm}\mathbf{k}_{mm}^{-1}\mathbf{k}_{mi} & \mathbf{k}_{jj} - \mathbf{k}_{jm}\mathbf{k}_{mm}^{-1}\mathbf{k}_{mj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i - \mathbf{k}_{im}\mathbf{k}_{mm}^{-1}\mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_j - \mathbf{k}_{jm}\mathbf{k}_{mm}^{-1}\mathbf{f}_m \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii}^+ & \mathbf{k}_{ij}^+ \\ \mathbf{k}_{ji}^+ & \mathbf{k}_{jj}^+ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^+ \\ \mathbf{f}_j^+ \end{Bmatrix}$$

onde as submatrizes com o “expoente” (+) têm significado imediato pela comparação das duas últimas equações matriciais.

Sob forma compacta pode-se escrever

$$\mathbf{k}^+ \mathbf{d}^+ = \mathbf{f}^+$$

onde as matrizes com expoente (+) são denominadas matrizes condensadas.

O relacionamento original entre deslocamentos e forças nodais, com $C = EJ/2\ell^3$, obtido em 2.3.2.3.6, (2.70 a), tem a expressão

$$\frac{2C}{35} \begin{bmatrix} 5092 & 1138\ell & -3584 & 1920\ell & -1508 & 242\ell \\ 1138\ell & 332\ell^2 & -896\ell & 320\ell^2 & -242\ell & 38\ell^2 \\ -3584 & -896\ell & 7168 & 0 & -3584 & 896\ell \\ 1920\ell & 320\ell^2 & 0 & 1280\ell^2 & -1920\ell & 320\ell^2 \\ -1508 & -242\ell & -3584 & -1920\ell & 5092 & -1138\ell \\ 242\ell & 38\ell^2 & 896\ell & 320\ell^2 & -1138\ell & 332\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_i' \\ v_m \\ v_m' \\ v_j \\ v_j' \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{420} \begin{Bmatrix} 79q_i + 19q_j \\ (5q_i + 2q_j)\ell \\ 112q_i + 112q_j \\ (-8q_i + 8q_j)\ell \\ 19q_i + 79q_j \\ (-2q_i - 5q_j)\ell \end{Bmatrix}$$

Fazendo-se o rearranjo de maneira que os parâmetros nodais do nó interno fiquem em primeiro lugar tem-se

$$\frac{2C}{35} \begin{bmatrix} 7168 & 0 & -3584 & -896\ell & -3584 & 896\ell \\ 0 & 1280\ell^2 & 1920\ell & 320\ell^2 & -1920\ell & 320\ell^2 \\ -3584 & 1920\ell & 5092 & 1138\ell & -1508 & 242\ell \\ -896\ell & 320\ell^2 & 1138\ell & 332\ell^2 & -242\ell & 38\ell^2 \\ -3584 & -1920\ell & -1508 & -242\ell & 5092 & -1138\ell \\ 896\ell & 320\ell^2 & 242\ell & 38\ell^2 & -1138\ell & 332\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_m \\ v_m' \\ v_i \\ v_i' \\ v_j \\ v_j' \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{420} \begin{Bmatrix} 112q_i + 112q_j \\ (-8q_i + 8q_j)\ell \\ 79q_i + 19q_j \\ (5q_i + 2q_j)\ell \\ 19q_i + 79q_j \\ (-2q_i - 5q_j)\ell \end{Bmatrix}$$

Então as submatrizes 2 x 2, necessárias para efetuar as operações de condensação, são, a menos do fator 2C/35

$$k_{ii} = \begin{bmatrix} 5092 & 1138\ell \\ 1138\ell & 332\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$k_{jj} = \begin{bmatrix} 5092 & -1138\ell \\ -1138\ell & 332\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} -1508 & 242\ell \\ -242\ell & 38\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$k_{ji} = \begin{bmatrix} -1508 & -242\ell \\ 242\ell & 38\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$k_{im} = \begin{bmatrix} -3584 & 1920\ell \\ -896\ell & 320\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$k_{mi} = \begin{bmatrix} -3584 & -896\ell \\ 1920\ell & 320\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$k_{mm} = \begin{bmatrix} 7168 & 0 \\ 0 & 1280\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$k_{mj} = \begin{bmatrix} -3584 & 896\ell \\ -1920\ell & 320\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$k_{jm} = \begin{bmatrix} -3584 & -1920\ell \\ 896\ell & 320\ell^2 \end{bmatrix}$$

Dai resultam

$$\begin{aligned} k_{ii}^+ &= \begin{bmatrix} 5092 & 1138\ell \\ 1138\ell & 332\ell^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3584 & 1920\ell \\ -896\ell & 320\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{7168} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1280\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3584 & -896\ell \\ 1920\ell & 320\ell^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 420 & 210\ell \\ 210\ell & 140\ell^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$k_{ij}^+ = \begin{bmatrix} -1508 & 242\ell \\ -242\ell & 38\ell^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3584 & 1920\ell \\ -896\ell & 320\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{7168} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1280\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3584 & 896\ell \\ -1920\ell & 320\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -420 & 210\ell \\ -210\ell & 70\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$k_{ji}^+ = \begin{bmatrix} -420 & -210\ell \\ 210\ell & 70\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_{jj}^+ &= \begin{bmatrix} 5092 & -1138\ell \\ -1138\ell & 332\ell^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3584 & -1920\ell \\ 896\ell & 320\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{7168} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1280\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3584 & 896\ell \\ -1920\ell & 320\ell^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 420 & -210\ell \\ -210\ell & 140\ell^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_i^+ &= \left\{ \frac{\ell}{420} \begin{Bmatrix} 79q_i + 19q_j \\ (5q_i + 2q_j)\ell \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -3584 & -896\ell \\ -896\ell & 320\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{7168} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1280\ell^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 112q_i + 112q_j \\ (-8q_i + 8q_j)\ell \end{Bmatrix} \right\} = \\ &= \frac{\ell}{3360} \begin{Bmatrix} (1176q_i + 504q_j) \\ (168q_i + 112q_j)\ell \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{420} \begin{Bmatrix} (147q_i + 63q_j) \\ (21q_i + 14q_j)\ell \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_j^+ = \frac{\ell}{420} \begin{Bmatrix} (63q_i + 147q_j) \\ -(14q_i + 21q_j)\ell \end{Bmatrix}$$

Portanto, agregando-se agora o fator $2C/35$ que fora cancelado, para simplificar a escrituração das operações, tem-se

$$\frac{2C}{35} \begin{bmatrix} 420 & 210\ell & -420 & 210\ell \\ 210\ell & 140\ell^2 & -210\ell & 70\ell^2 \\ -420 & -210\ell & 420 & -210\ell \\ 210\ell & 70\ell^2 & -210\ell & 140\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_i' \\ v_j \\ v_j' \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{420} \begin{Bmatrix} 147q_i + 636q_j \\ (21q_i + 14q_j)\ell \\ 63q_i + 147q_j \\ -(14q_i + 21q_j)\ell \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

que é a forma expandida de $\mathbf{k}^+ \mathbf{d}^+ = \mathbf{f}^+$

Testando-se com viga simplesmente apoiada e força q constante resulta, depois de aplicar as condições de contorno,

$$\frac{2C}{35} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 140\ell^2 & 0 & 70\ell^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 70\ell^2 & 0 & 140\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_i' \\ v_j \\ v_j' \end{Bmatrix} = \frac{\ell q}{420} \begin{Bmatrix} 0 \\ 35\ell \\ 0 \\ -35\ell \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 140 & 70 \\ 70 & 140 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i' \\ v_j' \end{Bmatrix} = \frac{35q}{840C} \begin{Bmatrix} 35 \\ -35 \end{Bmatrix}$$

e, com $C = EJ/2\ell^3$, ($24C = 12EJ/\ell^3$)

$$\begin{Bmatrix} v_i' \\ v_j' \end{Bmatrix} = \frac{35q}{840C} \begin{Bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{Bmatrix} = \frac{q}{24C} \begin{Bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell^3}{12EJ} \begin{Bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell^3}{24EJ} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

que são resultados exatos.

Indica-se agora, como curiosidade prática, a formalização das etapas das operações de reordenamento dos parâmetros nodais; em outras palavras, como passar-se de (2.70a) para (2.73).

No item 2.3.2.3.6 o relacionamento entre deslocamentos nodais e forças nodais equivalentes foi deduzido considerando-se a seguinte sequência para os parâmetros nodais

$$\mathbf{v}^{nt} = \{v_i \quad v_i' \quad v_m \quad v_m' \quad v_j \quad v_j'\} \quad (2.77)$$

O detalhamento do procedimento formalizado para reordenar as matrizes de rigidez e de forças nodais equivalentes, para passar de parâmetros \mathbf{v}^n para \mathbf{v}_{ac}^n , emprega uma matriz auxiliar \mathbf{A} .

Os vetores de parâmetros nodais (2.77) e (2.72) podem ser relacionados conforme abaixo

$$\mathbf{v}^n = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_i' \\ v_m \\ v_m' \\ v_j \\ v_j' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_m \\ v_m' \\ v_i \\ v_i' \\ v_j \\ v_j' \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{v}_{ac}^n \quad (2.78)$$

O relacionamento original entre forças e deslocamentos é (2.70 b)

$$\mathbf{k}\mathbf{v}^n = \mathbf{f}^n$$

Pré-multiplicando-se membro a membro por \mathbf{v}^{nt}

$$\mathbf{v}^{nt}\mathbf{k}\mathbf{v}^n = \mathbf{v}^{nt}\mathbf{f}^n$$

Com (2.78)

$$\mathbf{v}_{ac}^{nt}\mathbf{A}^t\mathbf{k}\mathbf{A}\mathbf{v}_{ac}^n = \mathbf{v}_{ac}^{nt}\mathbf{A}^t\mathbf{f}^n$$

Logo, pode-se definir

$$\mathbf{k}_{ac} = \mathbf{A}^t\mathbf{k}\mathbf{A} \quad (2.79)$$

$$\mathbf{f}_{ac}^n = \mathbf{A}^t\mathbf{f}^n$$

Aplicando-se ao caso presente, tem-se, a menos da constante $2C/35$

$$\mathbf{k}_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5092 & 1138\ell & -3584 & 1920\ell & -1508 & 242\ell \\ 1138\ell & 332\ell^2 & -896\ell & 320\ell^2 & -242\ell & 38\ell^2 \\ -3584 & -896\ell & 7168 & 0 & -3584 & 896\ell \\ 1920\ell & 320\ell^2 & 0 & 1280\ell^2 & -1920\ell & 320\ell^2 \\ -1508 & -242\ell & -3584 & -1920\ell & 5092 & -1138\ell \\ 242\ell & 38\ell^2 & 896\ell & 320\ell^2 & -1138\ell & 332\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{k}_{ac} = \begin{bmatrix} 7168 & 0 & -3584 & -896\ell & -3584 & 896\ell \\ 0 & 1280\ell^2 & 1920\ell & 320\ell^2 & -1920\ell & 320\ell^2 \\ -3584 & 1920\ell & 5092 & 1138\ell & -1508 & 242\ell \\ -896\ell & 320\ell^2 & 1138\ell & 332\ell^2 & -242\ell & 38\ell^2 \\ -3584 & -1920\ell & -1508 & -242\ell & 5092 & -1138\ell \\ 896\ell & 320\ell^2 & 242\ell & 38\ell^2 & -1138\ell & 332\ell^2 \end{bmatrix}$$

que é o primeiro membro explícito da (2.73).

Para o vetor de forças, a menos da constante $\ell/420$, tem-se

$$\mathbf{f}_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 79q_i + 19q_j \\ 5q_i + 2q_j \\ 112q_i + 112q_j \\ -8q_i + 8q_j \\ 19q_i + 79q_j \\ -2q_i - 5q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112q_i + 112q_j \\ -8q_i + 8q_j \\ 79q_i + 19q_j \\ 5q_i + 2q_j \\ 19q_i + 79q_j \\ -2q_i - 5q_j \end{bmatrix}$$

que é o segundo membro explícito de (2.73).

Testando-se o resultado (2.76), abaixo repetido, em viga simplesmente apoiada, com força triangular $(0, q)$, tem-se

$$\frac{2C}{35} \begin{bmatrix} 420 & 210\ell & -420 & 210\ell \\ 210\ell & 140\ell^2 & -210\ell & 70\ell^2 \\ -420 & -210\ell & 420 & -210\ell \\ 210\ell & 70\ell^2 & -210\ell & 140\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_i' \\ v_j \\ v_j' \end{bmatrix} = \frac{\ell}{420} \begin{bmatrix} 147q_i + 636q_j \\ (21q_i + 14q_j)\ell \\ 63q_i + 147q_j \\ -(14q_i + 21q_j)\ell \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Particularizando-se e impondo-se as condições cinemáticas de contorno, resulta

$$\frac{2C}{35} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 140\ell^2 & 0 & 70\ell^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 70\ell^2 & 0 & 140\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{420} \begin{Bmatrix} 0 \\ (14q_j)\ell \\ 0 \\ -(+21q_j)\ell \end{Bmatrix}$$

ou

$$\frac{2C}{35} \begin{bmatrix} 140\ell^2 & 70\ell^2 \\ 70\ell^2 & 140\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_i \\ v'_j \end{Bmatrix} = \frac{q\ell^2}{420} \begin{Bmatrix} 14 \\ -21 \end{Bmatrix}$$

cuja solução é

$$\begin{Bmatrix} v'_i \\ v'_j \end{Bmatrix} = \frac{q\ell^3}{360EJ} \begin{Bmatrix} 7 \\ -8 \end{Bmatrix}$$

coincidente com as respostas exatas!

2.3.2.3.8 V12N Viga simplesmente apoiada, força concentrada central e um polinômio cúbico

Trata-se de viga simplesmente apoiada com força concentrada no meio do vão e polinômio único de 3º grau no vão, da Fig. 2.34.

Conforme já salientado anteriormente, neste caso, em que há ação externa dada por força concentrada no interior do domínio do elemento estrutural, a adoção de uma única função de aproximação para o domínio todo não levará a solução adequada, por causa da impossibilidade de se captar a descontinuidade de derivada terceira que ocorre.

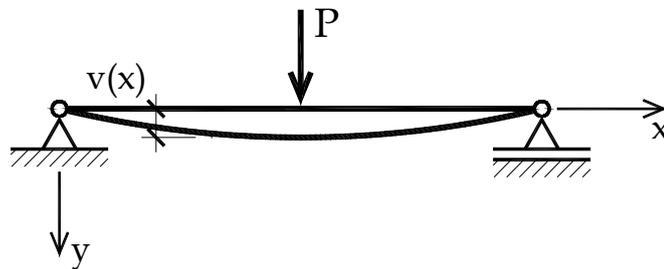


Figura 2.34 – Um polinômio para todo o domínio

Aproveitando-se, parcialmente, os resultados do exemplo **V5N**, tem-se

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{v_i} \\ f_{v'_i} \\ f_{v_j} \\ f_{v'_j} \end{Bmatrix} \quad (2.80)$$

onde as forças nodais equivalentes à ação de P no centro do vão, que figuram no segundo membro, devem ser avaliadas.

A expressão do potencial do carregamento deste caso é

$$\Omega = -Pv(0,5)$$

Quanto a $v(\xi)$ já se sabe que em função de parâmetros nodais *iniciais*, tem-se

$$v(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_i + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\bar{v}'_i + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_j + (-\xi^2 + \xi^3)\bar{v}'_j$$

ou, passando-se para parâmetros nodais *finais*,

$$v(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_i + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\ell v'_i + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_j + (-\xi^2 + \xi^3)\ell v'_j$$

Então

$$v(0,5) = \frac{1}{2}v_i + \frac{1}{8}\ell v'_i + \frac{1}{2}v_j + \frac{-1}{8}\ell v'_j$$

Logo

$$\Omega = -P \left(\frac{1}{2}v_i + \frac{1}{8}\ell v'_i + \frac{1}{2}v_j + \frac{-1}{8}\ell v'_j \right)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v_i} = \frac{-P}{2}; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v'_i} = \frac{-P\ell}{8}; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v_j} = \frac{-P}{2}; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v'_j} = \frac{P\ell}{8}$$

Considerando-se as condições de contorno cinemáticas $v_i = v_j = 0$ a equação (2.80) fica sob a forma

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 4\ell^2 & 2\ell^2 \\ 2\ell^2 & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_i \\ v'_j \end{Bmatrix} = \frac{P\ell}{8} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

cuja solução é

$$\begin{Bmatrix} v'_i \\ v'_j \end{Bmatrix} = \frac{P\ell^2}{16EJ} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Logo

$$v(\xi) = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\ell \frac{P\ell^2}{16EJ} - (-\xi^2 + \xi^3)\ell \frac{P\ell^2}{16EJ}$$

$$v(\xi) = (\xi - \xi^2) \frac{P\ell^3}{16EJ}$$

Note-se que o monômio cúbico resultou ausente!

Com isto, os esforços solicitantes ficam expressos por

$$M(x) = -EJv'' = -EJ \frac{1}{\ell^2} \bar{v}'' = -EJ \frac{1}{\ell^2} (-2) \left(\frac{P\ell^3}{16EJ} \right) = \frac{P\ell}{8}$$

$$Q(x) = -EJv''' = 0$$

Estas últimas expressões mostram claramente que as condições mecânicas de contorno não ficaram obedecidas, pois os valores corretos dos momentos fletores nos apoios são:

$$M(0) = M(\ell) = 0$$

e para as forças cortantes

$$Q(0) = -Q(\ell) = \frac{P}{2}$$

Logo, não é uma boa função de aproximação, se for admitida para o domínio completo de todo o vão da viga. Compare essa situação com aquela de bons resultados para a viga em balanço com força P na extremidade livre.

Além disso, sabe-se que neste caso existe uma descontinuidade na terceira derivada (que dita o andamento da força cortante ao longo do elemento estrutural). E a solução encontrada foi incapaz de captar essa singularidade.

Diante disto, resolve-se o mesmo caso de viga, porém adotando-se aproximações por polinômios cúbicos independentes para cada trecho de comprimento $\ell/2$, conforme detalhado no exemplo seguinte.

2.3.2.4 Parâmetros nodais e subdivisão em subdomínios

2.3.2.4.1 V13N Viga Simplesmente apoiada; força concentrada central e dois polinômios cúbicos

Viga simplesmente apoiada com força P concentrada no centro do vão e com dois polinômios de aproximação de 3º grau, um para cada metade da viga.

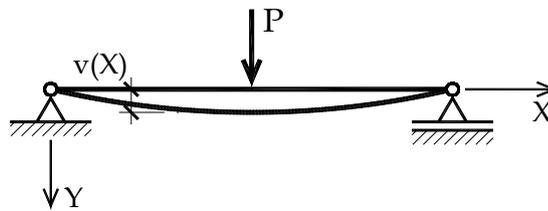


Figura 2.35 – Dois subdomínios com polinômio de 3º grau

Agora utiliza-se ainda polinômio de aproximação de 3º grau, porém adotando-se um polinômio para cada metade da viga. Este exemplo foi resolvido anteriormente (2.3.2.2.1) **V4G**, com parâmetros generalizados.

Indique-se o vão da viga com L e o comprimento de cada subdomínio com ℓ ou, neste caso,

$$L = 2\ell$$

Na estrutura discretizada em dois subdomínios existem 3 nós na numeração global, designados com os números 1, 2 e 3, da esquerda para a direita.

Particularizando-se, então, a expressão (2.80) para cada subdomínio tem-se, respectivamente, com deslocamentos nodais já referidos à estrutura com três nós,

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_1' \\ V_2 \\ V_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{v_1}^I \\ f_{v_1'}^I \\ f_{v_2}^I \\ f_{v_2'}^I \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_2' \\ V_3 \\ V_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{v_2}^{II} \\ f_{v_2'}^{II} \\ f_{v_3}^{II} \\ f_{v_3'}^{II} \end{Bmatrix} \quad (2.82)$$

Conforme já explicado anteriormente, quando se utilizam parâmetros nodais, a imposição de

compatibilidade de deslocamentos e rotações, em nós comuns a subdomínios adjacentes, é realizada diretamente porque no nó de conexão dos subdomínios, para compor a estrutura, os parâmetros nodais globais são coincidentes na numeração global da estrutura.

Ao que foi descrito corresponde, portanto, que o vetor de todos os parâmetros nodais, referidos ao sistema global, dessa estrutura está descrito por

$$\mathbf{V}^{n,t} = \{V_1 \quad V'_1 \quad V_2 \quad V'_2 \quad V_3 \quad V'_3\}$$

Seguindo-se procedimento detalhado no caso dos tirantes, pode-se verificar que as duas equações matriciais (2.81) e (2.82) podem ser escritas sob as formas seguintes (expandidas), sem alterar o significado original

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell & 0 & 0 \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell & 0 & 0 \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V'_1 \\ V_2 \\ V'_2 \\ V_3 \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{v_1}^I \\ f_{v'_1}^I \\ f_{v_2}^I \\ f_{v'_2}^I \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 0 & 0 & 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 0 & 0 & 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V'_1 \\ V_2 \\ V'_2 \\ V_3 \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{v_2}^{II} \\ f_{v'_2}^{II} \\ f_{v_3}^{II} \\ f_{v'_3}^{II} \end{Bmatrix}$$

Logo, para obter a equação matricial para a estrutura deve-se somar membro a membro essas duas equações matriciais, resultando em:

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell & 0 & 0 \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6\ell & 12 + 12 & -6\ell + 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell + 6\ell & 4\ell^2 + 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 0 & 0 & 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V'_1 \\ V_2 \\ V'_2 \\ V_3 \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{v_1}^I \\ f_{v'_1}^I \\ f_{v_2}^I + f_{v_2}^{II} \\ f_{v'_2}^I + f_{v'_2}^{II} \\ f_{v_3}^{II} \\ f_{v'_3}^{II} \end{Bmatrix}$$

Isto poderia ser obtido escrevendo-se a expressão completa de Π para a viga com os dois subdomínios e, em seguida, efetuando-se as derivações de Π em relação a cada um dos 6 parâmetros nodais dessa estrutura.

Particulariza-se o vetor de parâmetros nodais para o carregamento da viga pela força concentrada para baixo no centro do vão, que é o local do parâmetro V_2 do nó 2 e aplicam-se as condições cinemáticas de contorno, $V_1 = V_3 = 0$, com o procedimento já apresentado em 2.3.2.3.6, **V10N**, resultando

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & -6\ell & 12 + 12 & -6\ell + 6\ell & 0 & 6\ell \\ 0 & 2\ell^2 & -6\ell + 6\ell & 4\ell^2 + 4\ell^2 & 0 & 2\ell^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6\ell & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6\ell & 2\ell^2 & 0 & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V'_1 \\ V_2 \\ V'_2 \\ V_3 \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

A solução, em função do vão L da viga, é

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_1' \\ V_2 \\ V_2' \\ V_3 \\ V_3' \end{Bmatrix} = \frac{PL^2}{16EJ} \begin{Bmatrix} 0,0 \\ 1,0 \\ \frac{L}{3} \\ 0,0 \\ 0,0 \\ -1,0 \end{Bmatrix}$$

Esse resultado coincide com a resposta analítica e confirma comentários anteriores.

2.3.2.4.2 V14N Viga contínua de dois tramos iguais, com carregamentos uniformes q no tramo esquerdo e αq no tramo direito

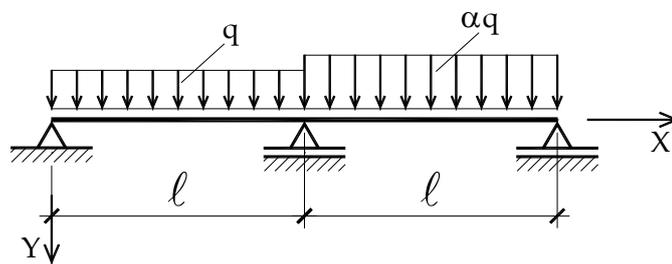


Figura 2.36 – Dois subdomínios com polinômios de 5º grau; v , v' e v''

Tendo-se em vista que não há momento externo concentrado, aplica-se o desenvolvimento feito para o subdomínio considerado na primeira parte do item em 2.3.2.3.5 para resolver o presente caso de viga contínua. Também salienta-se que, como os vãos são iguais, pode-se utilizar os parâmetros nodais (derivadas primeira e segunda), indicados com traço sobre as letras correspondentes! Utiliza-se um subdomínio para cada tramo, e já considerando a numeração global dos 3 nós da estrutura.

Cada subdomínio terá o relacionamento entre deslocamentos e forças nodais equivalentes de acordo com as expressões seguintes, que somente diferem nos vetores de deslocamentos e nos segundos membros, neste caso: (vide (2.60) em 2.3.2.3.5, para os primeiros membros).

$$\frac{2c}{7} \begin{bmatrix} 120,0 & 60,0 & 3,0 & -120,0 & 60,0 & -3,0 \\ 60,0 & 38,4 & 2,2 & -60,0 & 21,6 & -0,8 \\ 3,0 & 2,2 & 0,6 & -3,0 & 0,8 & 0,1 \\ -120,0 & -60,0 & -3,0 & 120,0 & -60,0 & 3,0 \\ 60,0 & 21,6 & 0,8 & -60,0 & 38,4 & -2,2 \\ -3,0 & -0,8 & 0,1 & 3,0 & -2,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \bar{V}_1' \\ \bar{V}_1'' \\ V_2 \\ \bar{V}_2' \\ \bar{V}_2'' \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{6} \begin{Bmatrix} 3 \\ 0,6 \\ 0,05 \\ 3 \\ -0,6 \\ 0,05 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{2c}{7} \begin{bmatrix} 120,0 & 60,0 & 3,0 & -120,0 & 60,0 & -3,0 \\ 60,0 & 38,4 & 2,2 & -60,0 & 21,6 & -0,8 \\ 3,0 & 2,2 & 0,6 & -3,0 & 0,8 & 0,1 \\ -120,0 & -60,0 & -3,0 & 120,0 & -60,0 & 3,0 \\ 60,0 & 21,6 & 0,8 & -60,0 & 38,4 & -2,2 \\ -3,0 & -0,8 & 0,1 & 3,0 & -2,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ \bar{V}_2' \\ \bar{V}_2'' \\ V_3 \\ \bar{V}_3' \\ \bar{V}_3'' \end{Bmatrix} = \frac{\alpha q\ell}{6} \begin{Bmatrix} 3 \\ 0,6 \\ 0,05 \\ 3 \\ -0,6 \\ 0,05 \end{Bmatrix}$$

Expandindo-se cada uma delas para a ordem das matrizes de rigidez e de forças nodais da estrutura completa (9×9 e 9×1 , respectivamente) e fazendo a superposição tem-se

$$\frac{2C}{7} \begin{bmatrix} 120 & 60 & 3 & -120 & 60 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 60 & 38,4 & 2,2 & -60 & 21,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2,2 & 0,6 & -3 & 0,8 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ -120 & -60 & -3 & 240 & 0 & 6 & -120 & 60 & -3 \\ 60 & 21,6 & 0,8 & 0 & 76,8 & 0 & -60 & 21,6 & -0,8 \\ -3 & -0,8 & 0,1 & 6 & 0 & 1,2 & -3 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & -120 & -60 & -3 & 120 & -60 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 21,6 & 0,8 & -60 & 38,4 & -2,2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -0,8 & 0,1 & 3 & -2,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \bar{V}'_1 \\ \bar{V}''_1 \\ V_2 \\ \bar{V}'_2 \\ \bar{V}''_2 \\ V_3 \\ \bar{V}'_3 \\ \bar{V}''_3 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{q\ell}{6} \begin{Bmatrix} 3 \\ 0,6 \\ 0,05 \\ 3(1+\alpha) \\ -0,6(1-\alpha) \\ 0,05(1+\alpha) \\ 3\alpha \\ -0,6\alpha \\ 0,05\alpha \end{Bmatrix}$$

Aplicando-se as condições de contorno

$$V_1 = V_2 = V_3 = 0$$

conforme o procedimento correspondente que substitui por valor nulo todos os coeficientes das linhas e colunas 1, 4 e 7 da matriz de rigidez do primeiro membro, colocando valor unitário nas interseções das linhas e colunas de mesmo número e anulando, no vetor do segundo membro, os valores das linhas 1, 4 e 7, tem-se

$$\frac{2C}{7} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 38,4 & 2,2 & 0 & 21,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,2 & 0,6 & 0 & 0,8 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21,6 & 0,8 & 0 & 76,8 & 0 & 0 & 21,6 & -0,8 \\ 0 & -0,8 & 0,1 & 0 & 0 & 1,2 & 0 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21,6 & 0,8 & 0 & 38,4 & -2,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0,1 & 0 & -2,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \bar{V}'_1 \\ \bar{V}''_1 \\ V_2 \\ \bar{V}'_2 \\ \bar{V}''_2 \\ V_3 \\ \bar{V}'_3 \\ \bar{V}''_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,6 \\ 0,05 \\ 0 \\ -0,6(1-\alpha) \\ 0,05(1+\alpha) \\ 0 \\ -0,6\alpha \\ 0,05\alpha \end{Bmatrix}$$

ou, ficando apenas com o que interessa, tem-se

$$\begin{bmatrix} 38,4 & 2,2 & 21,6 & -0,8 & 0 & 0 \\ 2,2 & 0,6 & 0,8 & 0,1 & 0 & 0 \\ 21,6 & 0,8 & 76,8 & 0 & 21,6 & -0,8 \\ -0,8 & 0,1 & 0 & 1,2 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0 & 21,6 & 0,8 & 38,4 & -2,2 \\ 0 & 0 & -0,8 & 0,1 & -2,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}'_1 \\ \bar{V}''_1 \\ \bar{V}'_2 \\ \bar{V}''_2 \\ \bar{V}'_3 \\ \bar{V}''_3 \end{Bmatrix} = \frac{7q\ell}{6 \times 2C} \begin{Bmatrix} 0,6 \\ 0,05 \\ -0,6(1-\alpha) \\ 0,05(1+\alpha) \\ -0,6\alpha \\ 0,05\alpha \end{Bmatrix}$$

Fazendo-se

$$K = \frac{7q\ell}{6 \times 2C}$$

e resolvendo-se o sistema obtém-se

$$\begin{Bmatrix} \bar{V}_1' \\ \bar{V}_1'' \\ \bar{V}_2' \\ \bar{V}_2'' \\ \bar{V}_3' \\ \bar{V}_3'' \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} 0,267857 - 0,00892857 \alpha \\ (-1,73472 + 2,08167 \alpha)10^{-17} \\ -0,0178571 + 0,0178571 \alpha \\ 0,0535714 (1 + \alpha) \\ 0,00892857 - 0,0267857 \alpha \\ (1,47029 - 2,5205 \alpha)10^{-17} \end{Bmatrix}$$

Observe-se que duas das condições mecânicas de contorno estão satisfeitas, porque

$$\bar{V}_1'' = \bar{V}_3'' = 0 \quad (\text{valores da ordem de } 1 \cdot 10^{-17}!)$$

Sabe-se, com a estática clássica, que o momento fletor no apoio interno é

$$M(\ell) = \frac{-q\ell^2}{16}(1+\alpha)$$

De fato, pela resposta acima, tem-se

$$\begin{aligned} M(\ell) &= -EJV_2'' = -EJ \frac{1}{\ell^2} \bar{V}_2'' = -EJ \frac{1}{\ell^2} K(0,0535714)(1 + \alpha) = \\ &= -EJ \frac{1}{\ell^2} \frac{7q\ell}{6EJ} \ell^3 (0,0535714)(1 + \alpha) = -0,0625 q\ell^2 (1 + \alpha) = \frac{-q\ell^2}{16} (1 + \alpha) \end{aligned}$$

As outras condições de contorno mecânicas podem ser verificadas com facilidade.

Particularizando-se o resultado, para $\alpha = 1$ (carregamento igual nos dois tramos) tem-se

$$M(\ell) = \frac{-q\ell^2}{8}$$

enquanto para $\alpha = 0$ (apenas um tramo carregado) resultará

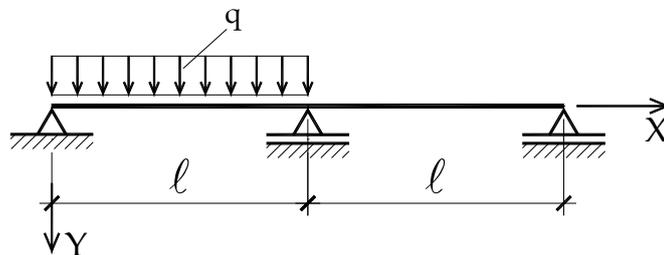


Figura 2.37 - Dois subdomínios com polinômios de 5º grau; v , v' e v''

$$M(\ell) = \frac{-q\ell^2}{16}$$

e, assim, outros valores de interesse poderão ser encontrados para elástica, momentos fletores e forças cortantes. Sugere-se completar esses cálculos e fazer os diagramas correspondentes, como exercícios.

2.3.2.4.3 V15N Viga contínua; força uniforme e momento concentrado no apoio interno, 2P4, (2P5 sem derivadas segundas ou 2P5 com condensação estática)

Este caso, no que se refere ao carregamento distribuído, é particularização do anterior com $\alpha = 1$. Todavia, a presença do momento concentrado recomenda a utilização de funções de aproximação que não incluam a segunda derivada como parâmetro nodal.

Lembra-se que, no caso anterior, (2.3.2.4.2), a descrição da função de aproximação de 5º grau foi feita com uso de valores nodais para v , v' e v'' na extremidade.

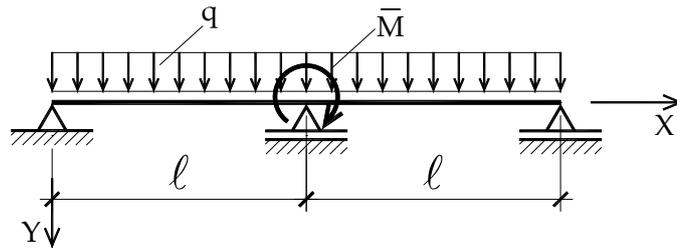


Figura 2.38 – Viga contínua; polinômio de 4º grau

A viga é contínua, com dois tramos iguais, sob carregamento uniforme q e momento externo concentrado \bar{M} de sentido horário aplicado no apoio interno. Será necessário subdividir a estrutura em dois subdomínios iguais, numerando-se os nós (sobre os apoios) sequencialmente de 1 a 3, da esquerda para a direita. Serão então apenas dois subdomínios porque já se tem três tipos de aproximações preparadas.

Conforme estudo de casos anteriores, percebe-se que:

- quanto ao efeito do carregamento distribuído, um polinômio de aproximação de 5º grau seria adequado e com a vantagem de obter diretamente o valor da segunda derivada de v no apoio interno e, portanto, permitir o cálculo direto do momento fletor nesse ponto.
- todavia, com o momento externo concentrado no apoio interno, sabe-se que haverá descontinuidade de momento fletor nesse apoio. Então a aproximação por polinômio de 5º grau como sugerido em a) não será adequada.
- entretanto, o subdomínio com polinômio de aproximação de 5º grau, com 3 nós, sem derivadas segundas como parâmetros nodais poderia ser utilizado.
- tendo-se em vista que um polinômio de aproximação de 4º grau resolve exatamente os casos de força externa distribuída uniformemente, pode-se utilizar essa aproximação com o conjunto de parâmetros nodais empregados no item 2.3.2.3.4 **V8N**, porque não está presente o parâmetro nodal da derivada segunda de v .
- Este caso pode também ser resolvido com o elemento com aproximação de 5º grau, que foi condensado estaticamente; é o caso c) com condensação estática.
- Observa-se que, se houvesse variação linear da força distribuída, deveria ser usado o modelo que utilizou a função de aproximação descrita por polinômio de 5º grau com três nós e parâmetros nodais v, v' em cada um, tanto com condensação estática, como sem ela.

Sugestão de exercício: Com base nos itens a) a f) fazer análise crítica visando escolher outra alternativa, diferente da adotada a seguir nesta publicação (d), que conduza a um menor número de incógnitas no sistema final de equações a resolver.

Tendo-se escolhido, portanto, a aproximação de 4º grau, alternativa d) acima, para os deslocamentos transversais $v(x)$, tratado em (2.3.2.3.4), **V8N**, tem-se para o subdomínio da esquerda e apenas o carregamento distribuído q :

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 63,2 & 18,8\ell & -102,4 & 39,2 & -6,8\ell \\ 18,8\ell & 7,2\ell^2 & -25,6\ell & 6,8\ell & -1,2\ell^2 \\ -102,4 & -25,6\ell & 204,8 & -102,4 & 25,6\ell \\ 39,2 & 6,8\ell & -102,4 & 63,2 & -18,8\ell \\ -6,8\ell & -1,2\ell^2 & 25,6\ell & -18,8\ell & 7,2\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_1' \\ V_{me} \\ V_2 \\ V_2' \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{60} \begin{Bmatrix} 14 \\ \ell \\ 32 \\ 14 \\ -\ell \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

Da mesma forma, para o subdomínio da direita e o carregamento distribuído:

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 63,2 & 18,8\ell & -102,4 & 39,2 & -6,8\ell \\ 18,8\ell & 7,2\ell^2 & -25,6\ell & 6,8\ell & -1,2\ell^2 \\ -102,4 & -25,6\ell & 204,8 & -102,4 & 25,6\ell \\ 39,2 & 6,8\ell & -102,4 & 63,2 & -18,8\ell \\ -6,8\ell & -1,2\ell^2 & 25,6\ell & -18,8\ell & 7,2\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ V'_2 \\ V_{md} \\ V_3 \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{60} \begin{Bmatrix} 14 \\ \ell \\ 32 \\ 14 \\ -\ell \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

onde os índices *me* e *md* indicam os pontos médios dos subdomínios da esquerda e da direita, respectivamente. Nas duas equações matriciais os parâmetros nodais foram indicados com letras maiúsculas para fazer referência à estrutura.

O momento externo \bar{M} é aplicado diretamente no vetor de forças nodais equivalentes da estrutura na posição correspondente a V'_2 .

Fazendo-se a montagem do sistema de equações da estrutura desvinculada, tem-se

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 63,2 & 18,8\ell & -102,4 & 39,2 & -6,8\ell & 0 & 0 & 0 \\ 18,8\ell & 7,2\ell^2 & -25,6\ell & 6,8\ell & -1,2\ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ -102,4 & -25,6\ell & 204,8 & -102,4 & 25,6\ell & 0 & 0 & 0 \\ 39,2 & 6,8\ell & -102,4 & 126,4 & 0 & -102,4 & 39,2 & -6,8\ell \\ -6,8\ell & -1,2\ell^2 & 25,6\ell & 0 & 14,4\ell^2 & -25,6\ell & 6,8\ell & -1,2\ell^2 \\ 0 & 0 & 0 & -102,4 & -25,6\ell & 204,8 & -102,4 & 25,6\ell \\ 0 & 0 & 0 & 39,2 & 6,8\ell & -102,4 & 63,2 & -18,8\ell \\ 0 & 0 & 0 & -6,8\ell & -1,2\ell^2 & 25,6\ell & -18,8\ell & 7,2\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V'_1 \\ V_{me} \\ V_2 \\ V'_2 \\ V_{md} \\ V_3 \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{60} \begin{Bmatrix} 14 \\ \ell \\ 32 \\ 28 \\ 0 \\ 32 \\ 14 \\ -\ell \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{M} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Introduzindo-se as condições de contorno cinemáticas, $V_1 = V_2 = V_3 = 0$, fica-se com

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7,2\ell^2 & -25,6\ell & 0 & -1,2\ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25,6\ell & 204,8 & 0 & 25,6\ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2\ell^2 & 25,6\ell & 0 & 14,4\ell^2 & -25,6\ell & 0 & -1,2\ell^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -25,6\ell & 204,8 & 0 & 25,6\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,2\ell^2 & 25,6\ell & 0 & 7,2\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V'_1 \\ V_{me} \\ V_2 \\ V'_2 \\ V_{md} \\ V_3 \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{60} \begin{Bmatrix} 0 \\ \ell \\ 32 \\ 0 \\ 0 \\ 32 \\ 0 \\ -\ell \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{M} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Então, resulta o sistema nos parâmetros livres

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 7,2\ell^2 & -25,6\ell & -1,2\ell^2 & 0 & 0 \\ -25,6\ell & 204,8 & 25,6\ell & 0 & 0 \\ -1,2\ell^2 & 25,6\ell & 14,4\ell^2 & -25,6\ell & -1,2\ell^2 \\ 0 & 0 & -25,6\ell & 204,8 & 25,6\ell \\ 0 & 0 & -1,2\ell^2 & 25,6\ell & 7,2\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V'_1 \\ V_{me} \\ V'_2 \\ V_{md} \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{60} \begin{Bmatrix} \ell \\ 32 \\ 0 \\ 32 \\ -\ell \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou, para simplificar, pode-se fazer

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 7,2\ell & -25,6\ell & -1,2\ell & 0 & 0 \\ -25,6 & 204,8 & 25,6 & 0 & 0 \\ -1,2\ell & 25,6\ell & 14,4\ell & -25,6\ell & -1,2\ell \\ 0 & 0 & -25,6 & 204,8 & 25,6 \\ 0 & 0 & -1,2\ell & 25,6\ell & 7,2\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V'_1\ell \\ V_{me} \\ V'_2\ell \\ V_{md} \\ V'_3\ell \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{60} \begin{Bmatrix} \ell \\ 32 \\ 0 \\ 32 \\ -\ell \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 7,2 & -25,6 & -1,2 & 0 & 0 \\ -25,6 & 204,8 & 25,6 & 0 & 0 \\ -1,2 & 25,6 & 14,4 & -25,6 & -1,2 \\ 0 & 0 & -25,6 & 204,8 & 25,6 \\ 0 & 0 & -1,2 & 25,6 & 7,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V'_1\ell \\ V_{me} \\ V'_2\ell \\ V_{md} \\ V'_3\ell \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{60} \begin{Bmatrix} 1 \\ 32 \\ 0 \\ 32 \\ -1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}/\ell \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Fazendo-se $2C = \frac{EJ}{\ell^3}$

tem-se

$$\begin{bmatrix} 7,2 & -25,6 & -1,2 & 0 & 0 \\ -25,6 & 204,8 & 25,6 & 0 & 0 \\ -1,2 & 25,6 & 14,4 & -25,6 & -1,2 \\ 0 & 0 & -25,6 & 204,8 & 25,6 \\ 0 & 0 & -1,2 & 25,6 & 7,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V'_1 \ell \\ V_{me} \\ V'_2 \ell \\ V_{md} \\ V'_3 \ell \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{120C} \begin{Bmatrix} 1 \\ 32 \\ 0 \\ 32 \\ -1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2C} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}/\ell \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que, com

$$K = \frac{q\ell}{120C} \quad \text{e} \quad R = \frac{\bar{M}}{2C\ell}$$

fica sob a forma

$$\begin{bmatrix} 7,2 & -25,6 & -1,2 & 0 & 0 \\ -25,6 & 204,8 & 25,6 & 0 & 0 \\ -1,2 & 25,6 & 14,4 & -25,6 & -1,2 \\ 0 & 0 & -25,6 & 204,8 & 25,6 \\ 0 & 0 & -1,2 & 25,6 & 7,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V'_1 \ell \\ V_{me} \\ V'_2 \ell \\ V_{md} \\ V'_3 \ell \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} 1 \\ 32 \\ 0 \\ 32 \\ -1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cuja solução é

$$\begin{Bmatrix} V'_1 \ell \\ V_{me} \\ V'_2 \ell \\ V_{md} \\ V'_3 \ell \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{120C} \begin{Bmatrix} 1,25 \\ 0,3125 \\ -8,88 \times 10^{-16} \\ 0,3125 \\ -1,25 \end{Bmatrix} + \frac{\bar{M}}{2C\ell} \begin{Bmatrix} -0,0833333 \\ -0,03125 \\ 0,166667 \\ 0,03125 \\ -0,0833333 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} V'_1 \ell \\ V_{me} \\ V'_2 \ell \\ V_{md} \\ V'_3 \ell \end{Bmatrix} = \frac{q}{120C} \begin{Bmatrix} 1,25\ell \\ 0,3125\ell \\ 0 \\ 0,3125\ell \\ -1,25\ell \end{Bmatrix} + \frac{\bar{M}}{2C\ell^2} \begin{Bmatrix} -0,0833333\ell \\ -0,03125\ell \\ 0,166667\ell \\ 0,03125\ell \\ -0,0833333\ell \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} V'_1 \\ V_{me} \\ V'_2 \\ V_{md} \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \frac{q}{120C} \begin{Bmatrix} 1,25 \\ 0,3125\ell \\ 0 \\ 0,3125\ell \\ -1,25 \end{Bmatrix} + \frac{\bar{M}}{2C\ell^2} \begin{Bmatrix} -0,0833333 \\ -0,03125\ell \\ 0,166667 \\ 0,03125\ell \\ -0,0833333 \end{Bmatrix} ; \quad \left(\frac{q}{60 \cdot 2C} = \frac{q\ell^3}{60EJ} \right)$$

ou, finalmente

$$\begin{Bmatrix} V'_1 \\ V_{me} \\ V'_2 \\ V_{md} \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 1/48 \\ \ell/192 \\ 0 \\ \ell/192 \\ -1/48 \end{Bmatrix} + \frac{\bar{M}\ell}{EJ} \begin{Bmatrix} -1/12 \\ -\ell/32 \\ 1/6 \\ \ell/32 \\ -1/12 \end{Bmatrix}$$

Procurando-se conferir com resultados anteriores, o momento fletor será avaliado com a expressão obtida para pontos importantes do interior da viga.

Aproveita-se a expressão já deduzida para a variação da segunda derivada da função $v(\xi)$ (de 2.3.2.3.4) reproduzida a seguir, (que ainda não está afetada pelas condições de contorno do problema agora tratado), para cada tramo, isto é

$$\begin{aligned}\bar{v}'' = \frac{d^2v}{d\xi^2} = & (-22 + 108\xi - 96\xi^2)v_i + (-8 + 30\xi - 24\xi^2)\bar{v}'_i + \\ & + (32 - 192\xi + 192\xi^2)v_m + (-10 + 84\xi - 96\xi^2)v_j + (2 - 18\xi + 24\xi^2)\bar{v}'_j\end{aligned}$$

Cálculo de valores do momento:

a) Para o primeiro tramo T1:

T1q) somente força distribuída

Impondo-se condição de contorno $v_i = V_1 = v_j = V_2 = 0$ na segunda derivada acima, tem-se, com $\bar{v}'_i = \bar{V}'_1$, $\bar{v}'_j = \bar{V}'_2$ e $v_m = V_{me}$

$$\bar{v}''(0) = (-8)\bar{V}'_1 + (32)V_{me} + (2)\bar{V}'_2 = \frac{q\ell^3}{EJ} \left[-8\frac{\ell}{48} + 32\frac{\ell}{192} \right] = 0 = \ell^2 V_1''$$

$$\begin{aligned}\bar{v}''(1) &= (-8 + 30 - 24)\bar{V}'_1 + (32 - 192 + 192)V_{me} + (2 - 18 + 24)\bar{V}'_2 = \\ &= -2\bar{V}'_1 + 32V_{me} + 8\bar{V}'_2 = -2\ell V'_1 + 32V_{me} + 8\ell V'_2 =\end{aligned}$$

$$= \frac{q\ell^3}{EJ} \left[\frac{-2\ell}{48} + \frac{32\ell}{192} + 0 \right] = \frac{q\ell^4}{192EJ} [-8 + 32] = \frac{24q\ell^4}{192EJ} = \frac{q\ell^4}{8EJ} = \ell^2 V_2''$$

Portanto o momento fletor será:

$$\text{No apoio esquerdo: } MT1q(0) = -EJV_1'' = 0$$

$$\text{No apoio interno (à esquerda): } MT1q(\ell)^- = -EJV_2'' = -\frac{q\ell^2}{8}$$

T1 \bar{M}) somente momento concentrado

$$\bar{v}''(0) = (-8)\bar{V}'_1 + (32)V_{me} + (2)\bar{V}'_2 = \frac{\bar{M}\ell}{EJ} \left[-8\frac{-\ell}{12} + 32\frac{-\ell}{32} + \frac{2\ell}{6} \right] = 0 = \ell^2 V_1''$$

$$\bar{v}''(1) = -2\ell V'_1 + 32V_{me} + 8\ell V'_2 = \frac{\bar{M}\ell}{EJ} \left[-2\frac{-\ell}{12} + 32\frac{-\ell}{32} + 8\frac{\ell}{6} \right] = \frac{\bar{M}\ell^2}{2EJ} = \ell^2 V_2''$$

Portanto

$$\text{No apoio esquerdo: } MT1\bar{M}(0) = -EJ V_1'' = 0$$

$$\text{No apoio interno (à esquerda): } MT1\bar{M}(\ell)^- = -EJ V_2'' = \frac{-\bar{M}}{2}$$

b) Para o segundo tramo T2:

T2q) somente força distribuída

Impondo-se condição de contorno $v_i = V_2 = v_j = V_3 = 0$, na expressão local da segunda derivada, tem-se, com $\bar{v}'_i = \bar{V}'_2$, $\bar{v}'_j = \bar{V}'_3$ e $v_m = V_{md}$

$$\bar{v}''(0) = (-8)\bar{V}'_2 + (32)V_{md} + (2)\bar{V}'_3 = \frac{q\ell^3}{EJ} \left[0 + 32\frac{\ell}{192} - 2\frac{\ell}{48} \right] = \frac{q\ell^4}{8EJ} = \ell^2 V_2''$$

$$\bar{v}''(1) = -2\ell V'_2 + 32v_{md} + 8\ell V'_3 = \frac{\bar{M}\ell}{EJ} \left[-2\ell \left(\frac{-1}{6} \right) + 32\frac{-\ell}{32} + 8\frac{\ell}{12} \right] = 0 = \ell^2 V_3''$$

Portanto

$$\begin{aligned} \text{No apoio interno (à direita):} \quad & MT2q(\ell)^+ = -EJ V_2'' = -EJ \frac{q\ell^2}{8EJ} = -\frac{q\ell^2}{8} \\ \text{No apoio direito:} \quad & MT2q(2\ell) = -EJ V_3'' = 0 \end{aligned}$$

$T2\bar{M}$) somente momento concentrado

$$\bar{v}''(0) = (-8)\bar{V}_2' + 32V_{md} + 2\bar{V}_3' = \frac{\bar{M}\ell}{EJ} \left[-8\frac{\ell}{6} + 32\frac{\ell}{32} + 2\frac{-\ell}{12} \right] = \frac{-\bar{M}\ell}{EJ} \frac{\ell}{2} = \ell^2 V_2''$$

$$\bar{v}''(1) = -2\ell V_2' + 32v_{md} + 8\ell V_3' = \frac{\bar{M}\ell}{EJ} \left[(-2)\frac{\ell}{6} + (32)\frac{\ell}{32} + (8)\frac{-\ell}{12} \right] = 0 = \ell^2 V_3''$$

$$\begin{aligned} \text{No apoio interno (à direita):} \quad & MT2\bar{M}(\ell)^+ = -EJ V_2'' = -EJ \frac{-\bar{M}}{2EJ} = \frac{\bar{M}}{2} \\ \text{No apoio direito:} \quad & MT2\bar{M}(2\ell) = -EJ V_3'' = 0 \end{aligned}$$

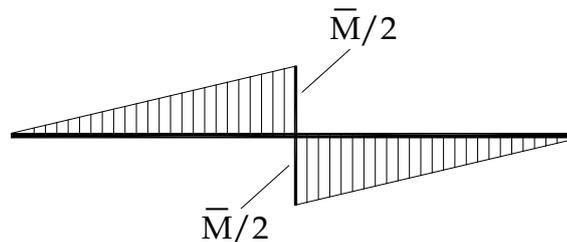


Figura 2.39 – Momentos fletores devidos ao momento concentrado

A Fig. 2.39 mostra o diagrama de momentos fletores devidos ao momento externo concentrado \bar{M} .

Sugestão de exercício: Determinar o andamento do diagrama de forças cortantes, com utilização da derivada terceira.

2.3.2.4.4 V16N Exercício proposto:

Resolver o caso da viga simplesmente apoiada com força distribuída constante e polinômio de aproximação de 3º grau, sucessivamente, com 1, 2, 4, etc. subdomínios e examinar o andamento dos valores obtidos para $v(x=0,5)$, $M(0)$, $M(\ell)$, $Q(0)$, $Q(\ell)$ e Π . É claro que será necessário utilizar programa de computador para resolver os sistemas de equações correspondentes aos casos com maior número de subdomínios.

Sugestão: Montar manualmente cada sistema, seguindo os procedimentos detalhados nesta publicação, ou seja, utilizar as matrizes de rigidez e de forças nodais equivalentes (já disponíveis neste texto (2.54)) de um subdomínio genérico e particularizá-las, em cada discretização considerada, para formar as matrizes de rigidez e de forças nodais da estrutura composta.

É exercício semelhante ao que se detalhou em **T5N** para tirante.

2.3.2.4.5 V17N Viga contínua, de dois tramos, com variação de seção, carregamento composto por forças concentradas em um tramo e distribuída no outro

A viga contínua tem dois tramos, Fig. 2.40, conforme Weaver e Gere, 1965, é engastada/apoiada/engastada, com variação de seção, forças concentradas no tramo da esquerda e distribuída no tramo da direita.

Uma escolha para a discretização e as funções de aproximação pode ser: polinômios cúbicos (**V5N**) em cada um dos 4 trechos entre forças concentradas e polinômio de quarto grau (**V8N**) no tramo com força distribuída. Desse modo existirão 5 subdomínios e nós no engastamento esquerdo (1), nos pontos de aplicação de força concentrada (2, 3 e 4), no apoio central (5), no ponto central do tramo da direita (6) e no engastamento da direita (7).

Lembra-se que nesse caso haverá dois parâmetros nodais em cada um dos nós, com exceção do nó do centro do tramo direito, onde somente o deslocamento transversal é parâmetro. O total de

parâmetros nodais é, portanto, igual a 13, antes da imposição das condições de contorno cinemáticas.

O vetor de parâmetros nodais da estrutura é definido segundo a sequência

$$V^{nt} = \{V_1 \quad V'_1 \quad V_2 \quad V'_2 \quad V_3 \quad V'_3 \quad V_4 \quad V'_4 \quad V_5 \quad V'_5 \quad V_6 \quad V_7 \quad V'_7\}$$

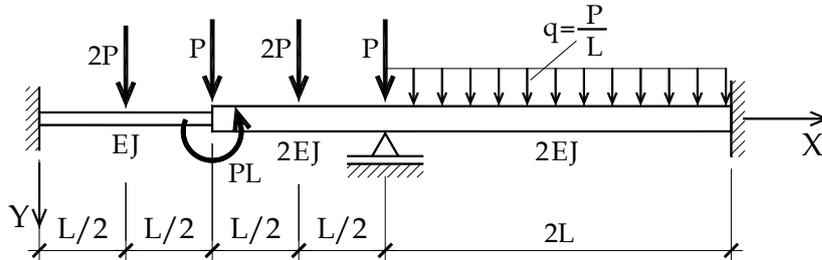


Figura 2.40 – Viga contínua com variação de seção; carregamento composto

Para os trechos entre forças concentradas e para trecho com força distribuída tem-se, respectivamente, com referência aos parâmetros locais:

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v'_1 \\ v_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{v_1} \\ f_{v'_1} \\ f_{v_2} \\ f_{v'_2} \end{Bmatrix} \tag{2.81}$$

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 63,2 & 18,8\ell & -102,4 & 39,2 & -6,8\ell \\ 18,8\ell & 7,2\ell^2 & -25,6\ell & 6,8\ell & -1,2\ell^2 \\ -102,4 & -25,6\ell & 204,8 & -102,4 & 25,6\ell \\ 39,2 & 6,8\ell & -102,4 & 63,2 & -18,8\ell \\ -6,8\ell & -1,2\ell^2 & 25,6\ell & -18,8\ell & 7,2\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v'_1 \\ v_m \\ v_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{60} \begin{Bmatrix} 14 \\ \ell \\ 32 \\ 14 \\ -\ell \end{Bmatrix} \tag{2.57}$$

onde ℓ e I são valores genéricos, de cada subdomínio, que devem ser substituídos conforme a Tabela 2.1 (vide Fig. 2.40).

Tabela 2.1

Subdomínio	ℓ	ℓ^3	$1/\ell^3$	I	EI/ℓ^3
1	$L/2$	$L^3/8$	$8/L^3$	J	$8EJ/L^3$
2	$L/2$	$L^3/8$	$8/L^3$	J	$8EJ/L^3$
3	$L/2$	$L^3/8$	$8/L^3$	$2J$	$16EJ/L^3$
4	$L/2$	$L^3/8$	$8/L^3$	$2J$	$16EJ/L^3$
5	$2L$	$8L^3$	$1/8L^3$	$2J$	$EJ/4L^3$

As matrizes de rigidez dos subdomínios, conforme resultados de exemplos anteriores, são mostradas em seguida, expandidas para a ordem 13 x 13 da matriz de rigidez da estrutura de acordo com os dados de cada subdomínio.

Note-se que valores nulos também estão indicados com “0” ou “ponto”, para facilitar a leitura.

Passa-se agora à formação do vetor de forças (segundo membro do sistema de equações). No vão da esquerda não há força distribuída; portanto, o segundo membro de (2.81) dos quatro subdomínios desse vão são todos nulos. Nesse vão têm-se as forças concentradas $2P$ nos nós 2 e 4 e as forças P nos nós 3 e 5. A essa parte do carregamento correspondem forças nas direções das incógnitas globais V_2 , V_4 , V_3 e V_5 , respectivamente. Tendo-se em vista que V_5 já foi eliminada por condição de contorno, bastará lembrar-se que a reação vertical no apoio intermediário deverá considerar essa força P , que não figurará no sistema de equações, pois não contribui para o potencial das forças da estrutura. Além disso há o momento externo $\bar{M} = PL$, (no sentido anti-horário) que pode ser inserido, com o sinal negativo, na direção do parâmetro V_3' . Finalmente, a força uniforme do segundo tramo, contribuirá de acordo com a expressão do segundo membro vista em 2.3.2.3.4 **V8N**, ou seja, com uso de (2.57)

$$\frac{q\ell}{60} \begin{Bmatrix} 14 \\ \ell \\ 32 \\ 14 \\ -\ell \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} V_5 \\ V_5' \\ V_6 \\ V_7 \\ V_7' \end{Bmatrix}$$

que corresponde aos parâmetros nodais *locais do subdomínio*, visto em 2.3.2.3.4, ordenados segundo o vetor

$$\begin{Bmatrix} v_i = 0 \\ v_i' \\ v_m \\ v_j = 0 \\ v_j' = 0 \end{Bmatrix}$$

no qual, por conta das condições de contorno da estrutura, já estão indicados os valores prescritos como nulos. Portanto, do vetor local de forças nodais, somente haverá contribuições provenientes das suas linhas 2 e 3, correspondentes a v_i' e v_m , para o vetor de forças nodais da estrutura, isto é

$$\frac{q\ell}{60} \begin{Bmatrix} \ell \\ 32 \end{Bmatrix}$$

que irão para as duas últimas posições do vetor de forças da estrutura, correspondentes aos parâmetros V_5' e V_6 , lembrando-se que $\ell = 2L$ e $q = P/L$

Portanto, o vetor de forças nodais estará constituído, indicando-se separadamente a contribuição de cada tipo de carregamento, para facilitar a compreensão. Também está indicado, ao lado, o vetor de incógnitas para conferir a correspondência entre forças nodais e os deslocamentos da estrutura.

$$\begin{Bmatrix} 2P \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 2P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{M} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{q2L}{60} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2L \\ 32 \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_2' \\ V_3 \\ V_3' \\ V_4 \\ V_4' \\ V_5' \\ V_6 \end{Bmatrix}$$

Tendo-se em vista que $q = P/L$ e $\bar{M} = PL$, tem-se

$$P \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + P \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{P}{60} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4L \\ 64 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -L \\ 2 \\ 0 \\ 4L/60 \\ 64/60 \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_2' \\ V_3 \\ V_3' \\ V_4 \\ V_4' \\ V_5 \\ V_6 \end{Bmatrix}$$

Finalmente o sistema de equações a resolver será

$$\frac{16EJ}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & 1,5L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & -1,5L & 0,25L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -1,5L & 18 & 1,5L & -12 & 3L & 0 & 0 \\ 1,5L & 0,25L^2 & 1,5L & 1,5L^2 & -3L & 0,5L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -3L & 24 & 0 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 3L & 0,5L^2 & 0 & 2L^2 & 0,5L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0,5L^2 & 1,45L^2 & -0,8L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8L & 3,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_2' \\ V_3 \\ V_3' \\ V_4 \\ V_4' \\ V_5 \\ V_6 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -L \\ 2 \\ 0 \\ 4L/60 \\ 64/60 \end{Bmatrix}$$

e mudando-se as incógnitas derivadas primeiras, multiplicando-as por L , ao mesmo tempo que na matriz de rigidez se divide a coluna correspondente também por L , para não alterar o sistema, fica-se com

$$\frac{16EJ}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & -1,5L & 0,25L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -1,5 & 18 & 1,5 & -12 & 3 & 0 & 0 \\ 1,5L & 0,25L & 1,5L & 1,5L & -3L & 0,5L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -3 & 24 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3L & 0,5L & 0 & 2L & 0,5L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0,5L & 1,45L & -0,8L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 3,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_2'L \\ V_3 \\ V_3'L \\ V_4 \\ V_4'L \\ V_5'L \\ V_6 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -L \\ 2 \\ 0 \\ 4L/60 \\ 64/60 \end{Bmatrix}$$

Simplificação adicional pode ser feita, dividindo-se por L as equações 2, 4, 6 e 7, para obter-se

$$\frac{16EJ}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -1,5 & 18 & 1,5 & -12 & 3 & 0 & 0 \\ 1,5 & 0,25 & 1,5 & 1,5 & -3 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -3 & 24 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0,5 & 0 & 2 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0,5 & 1,45 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 3,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_2'L \\ V_3 \\ V_3'L \\ V_4 \\ V_4'L \\ V_5'L \\ V_6 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 4/60 \\ 64/60 \end{Bmatrix}$$

Fazendo-se

$$K = \frac{PL^3}{16EJ}$$

pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -1,5 & 18 & 1,5 & -12 & 3 & 0 & 0 \\ 1,5 & 0,25 & 1,5 & 1,5 & -3 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -3 & 24 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0,5 & 0 & 2 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0,5 & 1,45 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 3,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_2'L \\ V_3 \\ V_3'L \\ V_4 \\ V_4'L \\ V_5'L \\ V_6 \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 4/60 \\ 64/60 \end{Bmatrix}$$

A resposta é

$$\begin{Bmatrix} V_2 \\ V_2'L \\ V_3 \\ V_3'L \\ V_4 \\ V_4'L \\ V_5'L \\ V_6 \end{Bmatrix} = \frac{PL^2}{EJ} \begin{Bmatrix} 0,0913525L \\ 0,22767875 \\ 0,13161375L \\ -0,121031875 \\ 0,066426875L \\ -0,14608125 \\ -0,084325625 \\ -0,000248015625L \end{Bmatrix}$$

Comparando-se com os resultados de Weaver e Gere, 1965, tem-se concordância, conforme pode ser notado nos vetores de deslocamentos (transpostos) indicados a seguir. Observa-se que Weaver resolveu o problema com a técnica da “análise matricial de estruturas”, considerando incógnitas apenas nos nós 3 e 5 da Fig. 2.40. É por esse motivo que não foram comparados os valores aqui obtidos para os nós 2, 4 e 6. Os deslocamentos desses nós estão indicados com x nos vetores (transpostos) abaixo.

Conforme Weaver:

$$\frac{PL^2}{3024EJ} \{x \quad x \quad v_3 = 398L \quad v_3' = -366 \quad x \quad x \quad 0 \quad v_5' = -255 \quad x\}$$

Neste trabalho:

$$= \frac{PL^2}{EJ} \{x \quad x \quad 0,13161376L \quad -0,12103175 \quad x \quad x \quad 0 \quad -0,084325397 \quad x\}$$

2.4 ESTRUTURA COMPOSTA

2.4.1 EC1 Subdomínio com flexão/compressão e subdomínio com ação axial; carregamento simples

Apresenta-se um exemplo de estrutura composta por um elemento horizontal e uma escora inclinada, conectados por meio de uma articulação perfeita, conforme a Fig. 2.41, formada pelos subdomínios I e II. É um exemplo interessante porque, pela presença da escora inclinada, mostra a necessidade de acrescentar a ação axial no elemento horizontal de viga. É claro que, pelo equilíbrio do nó 2, também se evidencia a ação horizontal sobre a viga. Nesse caso ter-se-á um subdomínio já chamado *barra de pórtico* (subdomínio I da figura).

Sejam X, Y os eixos do sistema de referência global para a estrutura composta.

O carregamento resume-se na força concentrada no nó 2. Portanto, diante da vinculação, da conexão entre os elementos, da orientação dos seus eixos e do carregamento, nota-se que no subdomínio I ocorrerá flexão (e algo mais, como se verá no decorrer do desenvolvimento da solução) e no subdomínio II haverá solicitação axial.

Então, para o subdomínio I, pode-se usar uma função de aproximação $v(x)$ cúbica e para o subdomínio II, sob ação axial, uma função de aproximação $u(x)$ linear, onde x é eixo local, distinto, em cada subdomínio.

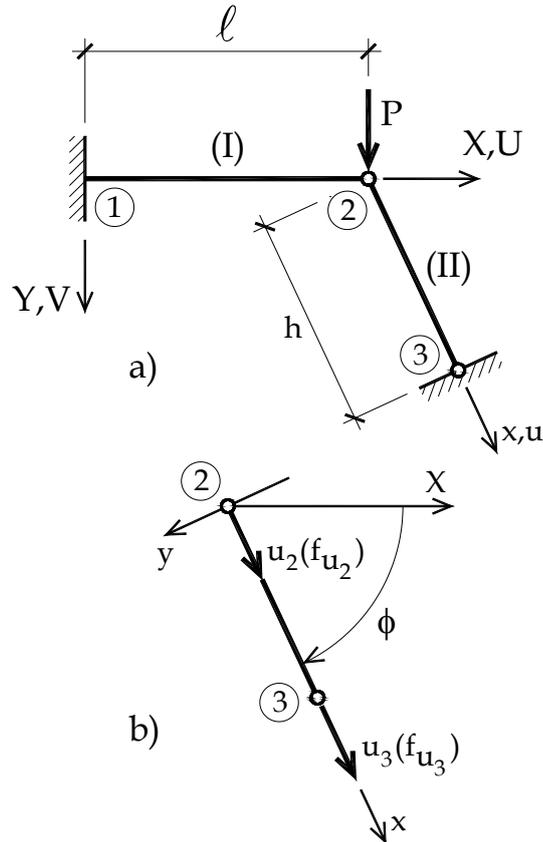


Figura 2.41 – Estrutura composta

Para o elemento estrutural II, barra de treliça, referido ao sistema local x, y , sabe-se que a parcela de energia potencial é calculada de acordo com a expressão

$$\Pi_{II} = \frac{1}{2} \int_0^h EA_{II} \left(\frac{u_3 - u_2}{h} \right)^2 dx - f_{u_2} \cdot u_2 - f_{u_3} \cdot u_3 \quad (2.84)$$

Com a imposição de $d\Pi_{II} = 0$, e considerando-se os parâmetros locais, obtém-se, como anteriormente, a relação forças/deslocamentos:

$$\frac{EA_{II}}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_2} \\ f_{u_3} \end{Bmatrix} \quad (2.85)$$

Mas isto precisaria de um primeiro cálculo adaptativo, pois ao considerar-se o nó de número 2 da estrutura haverá a conexão desta barra de treliça com a viga. De acordo com o que foi visto em (2.3.2.3.1 **VSN Balanço cúbico**), a viga tem nesse nó um de seus parâmetros nodais v_2 na direção de Y (global e coincidente com seu eixo transversal y local) e a barra de treliça tem parâmetro local u_2 na direção do seu eixo local x , não alinhado com o eixo da viga. Não seria correto considerar-se soma de rigidezes relativas a deslocamentos em direções diferentes. Note-se que a componente de deslocamento na direção ortogonal ao eixo da escora não participa do equilíbrio dessa escora.

De acordo com o que já foi feito no caso de estruturas em treliça, escolhe-se um sistema de referência único em cada nó (ou válido para todos os nós da estrutura) e a ele são referidos todos os deslocamentos da análise. Seja X, Y , neste caso, esse sistema de referência global. Então, para qualquer ponto de barra do tipo do subdomínio II, tem-se, conforme abordado em 2.2.2 para a análise de treliças:

$$u = U \cdot \cos\phi + V \cdot \sin\phi$$

Em um nó i genérico e utilizando-se nomenclatura mais compacta para coseno e seno:

$$u_i = U_i \cdot c + V_i \cdot s$$

Então, utilizando-se esse relacionamento, a expressão (2.84) integrada pode ser reescrita sob a forma

$$\begin{aligned} \Pi_{II} &= \frac{EA_{II}}{2h} (u_3 - u_2)^2 - f_{u_2} \cdot u_2 - f_{u_3} \cdot u_3 = \\ &= \frac{EA_{II}}{2h} [(U_3c + V_3s) - (U_2c + V_2s)]^2 - f_{u_2} (U_2c + V_2s) - f_{u_3} (U_3c + V_3s) \end{aligned}$$

Logo, a derivação da energia Π_{II} , feita em relação aos parâmetros globais, dará:

$$\frac{\partial \Pi_{II}}{\partial U_2} = \frac{EA_{II}}{h} [(U_3c + V_3s) - U_2c - V_2s](-c) - cf_{u_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_{II}}{\partial V_2} = \frac{EA_{II}}{h} [(U_3c + V_3s) - U_2c - V_2s](-s) - sf_{u_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_{II}}{\partial U_3} = \frac{EA_{II}}{h} [(U_3c + V_3s) - U_2c - V_2s](+c) - cf_{u_3} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_{II}}{\partial V_3} = \frac{EA_{II}}{h} [(U_3c + V_3s) - U_2c - V_2s](+s) - sf_{u_3} = 0$$

Com notação matricial, fazendo-se $k_{TII} = \frac{EA_{II}}{h}$

$$k_{TII} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{U_2}^{II} \\ f_{V_2}^{II} \\ f_{U_3}^{II} \\ f_{V_3}^{II} \end{Bmatrix} \quad (2.86)$$

onde, no segundo membro, já se indica com índice superior II as componentes de forças nodais equivalentes a ações ao longo da barra de treliça (quando existentes), referidas ao sistema global.

Quanto à viga (subdomínio I), considerando-se por ora a solitação por flexão, quando se utiliza função de aproximação dada por polinômio de terceiro grau e com ações externas apenas nos nós das extremidades (2.3.2.3.1 **V5N** *Balanço cúbico*) sabe-se que, utilizando referência local, tem-se

$$k_F \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_2 \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{v_1}^I \\ f_{v_1'}^I \\ f_{v_2}^I \\ f_{v_2'}^I \end{Bmatrix} \quad (2.87 a)$$

onde $k_F = EJ/\ell^3$.

Tendo-se em vista que os sistemas local da viga e o global têm direções paralelas e sentidos coincidentes, pode-se reescrevê-la como

$$k_F \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_1' \\ V_2 \\ V_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{V_1}^I \\ f_{V_1'}^I \\ f_{V_2}^I \\ f_{V_2'}^I \end{Bmatrix} \quad (2.87 \text{ b})$$

Agora, no nó 2, comum à viga e a barra de treliça, o deslocamento segundo Y (V_2) deverá ser o mesmo, quando os dois subdomínios se conectarem. Mas a expressão (2.86) mostra que no nó 2 há a outra componente de deslocamento U_2 . Quando os subdomínios se conectarem a viga também será afetada por essa componente.

Então, neste ponto, nota-se que uma segunda complementação deve ser feita sobre (2.87 b), pois, por causa da presença da barra inclinada, o equilíbrio da articulação 2, na direção horizontal, deve contar com uma força horizontal entre a viga e essa articulação. Então, a viga estará também submetida a sollicitação axial.

Em teoria de primeira ordem (deslocamentos e rotações pequenas) pode-se fazer a superposição dos estados de deformação provocados pela força axial e pela flexão.

Então, para o subdomínio I assim considerado, deve-se usar o seguinte vetor de parâmetros nodais, já expresso em relação aos eixos globais

$$\mathbf{d}_I^{nt} = \{U_1 \quad V_1 \quad V_1' \quad U_2 \quad V_2 \quad V_2'\}$$

onde, para generalizar, além de U_2 , previu-se também a presença de U_1 , no subdomínio sem vinculações.

Tudo isso implica escrever-se, para o subdomínio I, usando-se (2.86) com $c = 1$ e $s = 0$, superposta à (2.87 b), a expressão

$$\begin{bmatrix} k_{TI} & 0 & 0 & -k_{TI} & 0 & 0 \\ 0 & 12k_F & 6k_F\ell & 0 & -12k_F & 6k_F\ell \\ 0 & 6k_F\ell & 4k_F\ell^2 & 0 & -6k_F\ell & 2k_F\ell^2 \\ -k_{TI} & 0 & 0 & k_{TI} & 0 & 0 \\ 0 & -12k_F & -6k_F\ell & 0 & 12k_F & -6k_F\ell \\ 0 & 6k_F\ell & 2k_F\ell^2 & 0 & -6k_F\ell & 4k_F\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ V_1' \\ U_2 \\ V_2 \\ V_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{U_1}^I \\ f_{V_1}^I \\ f_{V_1'}^I \\ f_{U_2}^I \\ f_{V_2}^I \\ f_{V_2'}^I \end{Bmatrix}$$

onde $k_{TI} = \frac{EA}{\ell}$ e A é a área da seção transversal da viga.

Seja definido o vetor de parâmetros globais da estrutura

$$\mathbf{D}^{nt} = \{U_1 \quad V_1 \quad V_1' \quad U_2 \quad V_2 \quad V_2' \quad U_3 \quad V_3\}$$

Expandindo-se as matrizes do subdomínio I para a ordem 8×8 , para preparação visando a composição da matriz de rigidez e de forças nodais da estrutura, tem-se

$$\begin{bmatrix} k_{TI} & 0 & 0 & -k_{TI} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 12k_F & 6k_F\ell & 0 & -12k_F & 6k_F\ell & \cdot & \cdot \\ 0 & 6k_F\ell & 4k_F\ell^2 & 0 & -6k_F\ell & 2k_F\ell^2 & \cdot & \cdot \\ -k_{TI} & 0 & 0 & k_{TI} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & -12k_F & -6k_F\ell & 0 & 12k_F & -6k_F\ell & \cdot & \cdot \\ 0 & 6k_F\ell & 2k_F\ell^2 & 0 & -6k_F\ell & 4k_F\ell^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ V_1' \\ U_2 \\ V_2 \\ V_2' \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{U_1}^I \\ f_{V_1}^I \\ f_{V_1'}^I \\ f_{U_2}^I \\ f_{V_2}^I \\ f_{V_2'}^I \\ f_{U_3}^I \\ f_{V_3}^I \end{Bmatrix} \quad (2.88)$$

Para a barra inclinada (subdomínio II, de treliça), usando-se a expressão (2.86) e expandindo-a para a ordem 8×8 , tem-se

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & k_{TII}c^2 & k_{TII}cs & 0 & -k_{TII}c^2 & -k_{TII}cs & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & k_{TII}cs & k_{TII}s^2 & 0 & -k_{TII}cs & -k_{TII}s^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -k_{TII}c^2 & -k_{TII}cs & 0 & k_{TII}c^2 & k_{TII}cs & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -k_{TII}cs & -k_{TII}s^2 & 0 & k_{TII}cs & k_{TII}s^2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ V_1' \\ U_2 \\ V_2 \\ V_2' \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{U_2}^{II} \\ f_{V_2}^{II} \\ 0 \\ f_{U_3}^{II} \\ f_{V_3}^{II} \end{Bmatrix}$$

e, com a superposição, tem-se a expressão final relativa à estrutura completa. Note-se que os valores relativos às posições não ocupadas por coeficientes das matrizes anteriores são preenchidos por valores nulos (pontos nas duas matrizes anteriores).

$$\begin{bmatrix} k_{TI} & 0 & 0 & -k_{TI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12k_F & 6k_F\ell & 0 & -12k_F & 6k_F\ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6k_F\ell & 4k_F\ell^2 & 0 & -6k_F\ell & 2k_F\ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{TI} & 0 & 0 & k_{TI} + k_{TII}c^2 & k_{TII}cs & 0 & -k_{TII}c^2 & -k_{TII}cs & -k_{TII}s^2 \\ 0 & -12k_F & -6k_F\ell & k_{TII}cs & 12k_F + k_{TII}s^2 & -6k_F\ell & -k_{TII}cs & -k_{TII}s^2 & 0 \\ 0 & 6k_F\ell & 2k_F\ell^2 & 0 & -6k_F\ell & 4k_F\ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{TII}c^2 & -k_{TII}cs & 0 & k_{TII}c^2 & k_{TII}cs & k_{TII}s^2 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{TII}cs & -k_{TII}s^2 & 0 & k_{TII}cs & k_{TII}s^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ V_1' \\ U_2 \\ V_2 \\ V_2' \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{U_1}^I \\ f_{V_1}^I \\ f_{V_1'}^I \\ f_{U_2}^I + f_{U_2}^{II} \\ f_{V_2}^I + f_{V_2}^{II} \\ f_{V_2'}^I + f_{V_2'}^{II} \\ f_{U_3}^{II} \\ f_{V_3}^{II} \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

Impondo-se em (2.89) as condições de contorno

$$U_1 = V_1 = 0; \quad V_1' = 0 \quad e \quad U_3 = V_3 = 0$$

resulta

$$\begin{bmatrix} k_{TI} + k_{TII}c^2 & k_{TII}cs & 0 \\ k_{TII}cs & 12k_F + k_{TII}s^2 & -6k_F\ell \\ 0 & -6k_F\ell & 4k_F\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cuja solução é

$$U_2 = \frac{-Pk_{TII}cs}{(3k_Fk_{TI} + 3k_Fk_{TII}c^2 + k_{TI}k_{TII}s^2)}$$

$$V_2 = \frac{Pk_{TI} + Pk_{TII}c^2}{(3k_Fk_{TI} + 3k_Fk_{TII}c^2 + k_{TI}k_{TII}s^2)}$$

$$V_2' = \frac{3P(k_{TI} + k_{TII}c^2)}{2\ell(3k_Fk_{TI} + 3k_Fk_{TII}c^2 + k_{TI}k_{TII}s^2)}$$

Aproveite-se para testar o resultado, particularizando-se a solução para compará-la com resultados conhecidos:

a) Se não existir a barra de treliça, tem-se apenas a viga em balanço. A isto corresponderá $k_{TII} = 0$.

Resultam

$$U_2 = 0$$

$$V_2 = \frac{P\ell^3}{3EJ}$$

$$V_2' = \frac{P\ell^2}{2EJ}$$

Essas são respostas corretas.

b) Se a rigidez da barra de treliça for muito grande: $k_{TII} \rightarrow \infty$ e $\phi = \pi/2$. A isto corresponde uma viga engastada à esquerda e com apoio móvel (na horizontal) à direita. A força externa P será diretamente absorvida pelo apoio da direita, isto é pela barra de treliça. Portanto não ocorrem deslocamentos no nó 2. E, com isto, a viga também não se deformará!

$$U_2 = 0$$

$$V_2 = \frac{0}{k_{TII}} = 0$$

$$V_2' = 0$$

c) se $0 < \phi < \pi/2$ e $k_{TII} = \infty$ (isto é, apoio móvel inclinado em 2!)

$$U_2 = \frac{-P\ell^3 cs}{3EJc^2 + EA_I\ell^2 s^2}$$

$$V_2 = \frac{P\ell^3 c^2}{3EJc^2 + EA_I\ell^2 s^2}$$

$$V_2' = \frac{3P\ell^2 c^2}{2E(3Jc^2 + A_I\ell^2 s^2)}$$

d) Se $\phi = 0$, as duas barras estarão alinhadas, sendo $c = 1$ e $s = 0$.

Então

$$U_2 = \frac{0}{3k_F(T_I + k_{TII})} = 0$$

$$V_2 = \frac{P(k_{TII} + k_{TII})}{3k_F(k_{TII} + k_{TII})} = \frac{P}{3k_F} = \frac{P\ell^3}{3EJ}$$

quer dizer, somente a viga suporta a força P , (porque a barra de treliça é bi-articulada e com força P perpendicular ao seu eixo horizontal) e

$$V_2' = \frac{3P(k_{TII} + k_{TII})}{2\ell(3k_F k_{TII} + 3F k_{TII})} = \frac{P\ell^2}{2EJ}$$

o que é coerente com conclusão anterior.

Cálculo dos esforços solicitantes para $\phi = \pi/2$ e $h = \ell$.

Nesse caso, sendo $\cos\phi = 0$ e $\sin\phi = 1$, tem-se

$$U_2 = 0$$

$$V_2 = \frac{Pk_{TII}}{(3k_F k_{TII} + k_{TII} k_{TII})} = \frac{P}{(3k_F + k_{TII})} = \frac{P}{E\left(\frac{3J}{\ell^3} + \frac{A_{II}}{\ell}\right)} = \frac{P\ell^3}{3EJ\left(1 + \frac{A_{II}\ell^2}{3J}\right)}$$

$$V_2' = \frac{3Pk_{TII}}{2\ell(3k_F k_{TII} + k_{TII} k_{TII})} = \frac{3P}{2\ell(3k_F + k_{TII})} = \frac{3P}{2E\ell\left(\frac{3J}{\ell^3} + \frac{A_{II}}{\ell}\right)} = \frac{P\ell^2}{2EJ\left(1 + \frac{A_{II}\ell^2}{3J}\right)}$$

Para a barra de treliça a força axial será

$$N = \sigma A_{II} = \varepsilon E A_{II} = \frac{V_2}{\ell} E A_{II} = \frac{1}{\ell} \frac{P \ell^3}{3 E J \left(1 + \frac{A_{II} \ell^2}{3 J}\right)} E A_{II} = \frac{P A_{II} \ell^2}{3 J + A_{II} \ell^2}$$

Quanto à viga tem-se:

$$M = -EJv'' = -EJ\{6 - 12\xi \quad \ell(-2 + 6\xi)\} \left\{ \frac{V_2}{V_2'} \right\} \frac{1}{\ell^2}$$

Então

$$M(0) = -EJ\{6 \quad -2\ell\} \left\{ \frac{V_2}{V_2'} \right\} \frac{1}{\ell^2} = -EJ(6V_2 - 2\ell V_2') \frac{1}{\ell^2} = \frac{-P\ell}{1 + \frac{A_{II}\ell^2}{3J}}$$

$$M(1) = -EJ\{-6 \quad 4\ell\} \left\{ \frac{V_2}{V_2'} \right\} \frac{1}{\ell^2} = EJ(6V_2 - 4\ell V_2') \frac{1}{\ell^2} = 0$$

$$Q = -EJv''' = -EJ\{-12 \quad 6\ell\} \left\{ \frac{V_2}{V_2'} \right\} \frac{1}{\ell^3} = \frac{P}{1 + \frac{A_{II}\ell^2}{3J}}$$

Os resultados acima podem ser conferidos com a solução pela estática clássica.

Comentário final: Observe-se que a introdução de outras barras de treliça, que se liguem ao nó 2, e que tenham a outra extremidade fixa, não aumenta o número de incógnitas.

2.4.2 Generalização do elemento de pórtico (exato) Subdomínio de pórtico

Em edifícios usuais de múltiplos pavimentos são utilizados com frequência painéis estruturais formados por vigas e pilares que são denominados pórticos. Os elementos componentes desses pórticos estarão submetidos a esforços de flexão e axiais.

No que diz respeito à flexão, alguns subdomínios anteriormente analisados podem ser utilizados.

Nos pórticos, analisados com discretização da sua estrutura em subdomínios, é usual considerar os pontos de encontro de vigas e pilares como nós. Além desses, no caso de carregamento concentrado (força ou momento), adota-se a escolha de nós nos pontos de sua aplicação. Conforme já esclarecido, esse tipo de carregamento será incluído diretamente com componentes nas direções dos parâmetros referidos aos eixos globais.

Se, entre os nós escolhidos, existir carregamento distribuído linearmente variável, ou constante, para a flexão escolhe-se o subdomínio apresentado no item anterior 2.3.2.3.7 **V11N** com função de aproximação de 5º grau, sem derivadas segundas, com condensação estática.

Se não existir carregamento distribuído, entre os nós escolhidos, pode-se adotar (para a flexão) o subdomínio com função de aproximação cúbica com dois nós locais de extremidade. Esse elemento acopla-se com o subdomínio, de 2.3.2.3.7, com função de aproximação de 5º grau com condensação estática, porque ele também terá os mesmos dois parâmetros nodais de extremidade.

Em resumo, no tocante ao tipo de elemento, aquele que contém v e v' como parâmetros nodais de extremidade pode ser empregado em todos os casos, entre as forças concentradas. Nos trechos onde houver força distribuída linearmente, deve-se recuperar, após a solução, os parâmetros v_m e v'_m para cálculo da elástica entre os nós de extremidade e para o cálculo dos esforços solicitantes.

Como é usual, em teoria de primeira ordem, a ação axial é acrescentada ao subdomínio com uso de função de aproximação que permite variação linear do deslocamento local axial (portanto coerente com situação de subdomínio que tenha ações concentradas de extremidade).

Como anteriormente, os parâmetros nodais referidos a eixos globais serão indicados com letras maiúsculas. Os parâmetros locais continuarão indicados com letras minúsculas.

Desse modo, para eixos de referência locais x, y , a matriz de rigidez de um elemento de pórtico, cujo eixo está inclinado de ϕ (dextrorso positivo) em relação ao eixo global X , será obtida a partir da expressão (2.76) de 2.3.2.3.7 e com a expressão (2.35) do item 2.2.2, conforme a seguir indicado.

Para barra fletida, com aproximação de 5º grau, e com condensação estática, encontrou-se o seguinte relacionamento (eixos locais) (2.76)

$$\frac{EJ}{35\ell^3} \begin{bmatrix} 420 & 210\ell & -420 & 210\ell \\ 210\ell & 140\ell^2 & -210\ell & 70\ell^2 \\ -420 & -210\ell & 420 & -210\ell \\ 210\ell & 70\ell^2 & -210\ell & 140\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{420} \begin{Bmatrix} 147q_i + 63q_j \\ (21q_i + 14q_j)\ell \\ 63q_i + 147q_j \\ -(14q_i + 21q_j)\ell \end{Bmatrix} \quad (2.90)$$

ou

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v'_i \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{420} \begin{Bmatrix} 147q_i + 63q_j \\ (21q_i + 14q_j)\ell \\ 63q_i + 147q_j \\ -(14q_i + 21q_j)\ell \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{v_i} \\ f_{v'_i} \\ f_{v_j} \\ f_{v'_j} \end{Bmatrix} \quad (2.91)$$

MAS ESSA MATRIZ DE RIGIDEZ É A MATRIZ QUE RESULTOU COM APROXIMAÇÃO CÚBICA! conforme (2.53) de 2.3.2.3.1 **V5N**.

Quanto à solitação axial nessa barra tem-se (eixos locais), conforme explicado anteriormente

$$\frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_i} \\ 0 \\ f_{u_j} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.92)$$

Sejam

$$k_F = \frac{EJ}{\ell^3} \quad \text{e} \quad k_T = \frac{EA}{\ell}$$

Define-se um novo vetor de parâmetros nodais para o subdomínio de pórtico, referido aos eixos X, Y, Z , orientados conforme já adotado em exemplos anteriores isto é, X horizontal, da esquerda para a direita, Y vertical, de cima para baixo e Z entrando na direção perpendicular ao plano dos outros dois eixos, onde sp indica subdomínio de pórtico.

$$\mathbf{D}_{sp}^{nt} = \{U_i \quad V_i \quad V'_i \quad U_j \quad V_j \quad V'_j\}$$

Em relação ao sistema referencial local pode-se combinar as duas equações anteriores, (2.91) da flexão e (2.92) da solitação axial da viga, da seguinte forma, tendo-se em vista o vetor de parâmetros globais acima definido

$$\begin{bmatrix} k_T & 0 & 0 & -k_T & 0 & 0 \\ 0 & 12k_F & 6k_F\ell & 0 & -12k_F & 6k_F\ell \\ 0 & 6k_F\ell & 4k_F\ell^2 & 0 & -6k_F\ell & 2k_F\ell^2 \\ -k_T & 0 & 0 & k_T & 0 & 0 \\ 0 & -12k_F & -6k_F\ell & 0 & 12k_F & -6k_F\ell \\ 0 & 6k_F\ell & 2k_F\ell^2 & 0 & -6k_F\ell & 4k_F\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ v'_i \\ u_j \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_i} \\ f_{v_i} \\ f_{v'_i} \\ f_{u_j} \\ f_{v_j} \\ f_{v'_j} \end{Bmatrix} \quad (2.93)$$

ou

$$\mathbf{k}_{sp} \mathbf{d}_{sp}^n = \mathbf{f}_{sp}^n$$

Sabendo-se que a relação entre parâmetros nodais globais e locais é

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix}$$

na qual pode ser inserida a igualdade de rotação (quer referida ao sistema local quer ao global), pode-se escrever, mantendo-se as mesmas denominações \mathbf{d}_{sp}^n e \mathbf{D}_{sp}^n para os vetores de deslocamentos

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ v'_i \\ u_j \\ v_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ V'_i \\ U_j \\ V_j \\ V'_j \end{Bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{d}_{sp}^n = \mathbf{R} \mathbf{D}_{sp}^n$$

Conforme já mostrado anteriormente, pode-se calcular tanto a matriz de rigidez quanto a matriz de forças nodais equivalentes, do subdomínio de pórtico, referidas ao sistema global, com as transformações

$$\mathbf{K}_{sp} = \mathbf{R}^t \mathbf{k}_{sp} \mathbf{R}$$

$$\mathbf{F}_{sp}^n = \mathbf{R}^t \mathbf{f}_{sp}^n$$

obtendo-se

$$\mathbf{K}_{sp} = \begin{bmatrix} k_T c^2 + 12k_F s^2 & (k_T - 12k_F)cs & -6k_F \ell s & -(c^2 k_T + 12k_F s^2) & -(k_T - 12k_F)cs & -6k_F \ell s \\ & k_T s^2 + 12k_F c^2 & 6k_F \ell c & -(k_T - 12k_F)cs & -(k_T s^2 + 12k_F c^2) & 6k_F \ell c \\ & & 4k_F \ell^2 & 6k_F \ell s & -6k_F \ell c & 2k_F \ell^2 \\ & & & k_T c^2 + 12k_F s^2 & (k_T - 12k_F)cs & 6k_F \ell s \\ & & & & k_T s^2 + 12k_F c^2 & -6k_F \ell c \\ & & & & & 4k_F \ell^2 \end{bmatrix} \quad (2.94 \text{ a})$$

e

$$\begin{Bmatrix} F_{U_i} \\ F_{V_i} \\ F_{V'_i} \\ F_{U_j} \\ F_{V_j} \\ F_{V'_j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_i} c - f_{v_i} s \\ f_{u_i} s + f_{v_i} c \\ f_{v'_i} \\ f_{u_j} c - f_{v_j} s \\ f_{u_j} s + f_{v_j} c \\ f_{v'_j} \end{Bmatrix} \quad (2.94 \text{ b})$$

É preciso recordar que o vetor de forças nodais, no que diz respeito à flexão, já foi afetado pela condensação estática que considerou força linearmente distribuída em todo o subdomínio!

2.4.3 Exercício sugerido Tentar resolver, sem consultar a solução abaixo

Seja a estrutura da Fig. 2.42 na qual consideram-se 3 nós; no engastamento, no ponto de aplicação da força externa e no apoio fixo inferior. Eles serão numerados sequencialmente, da esquerda para a direita.

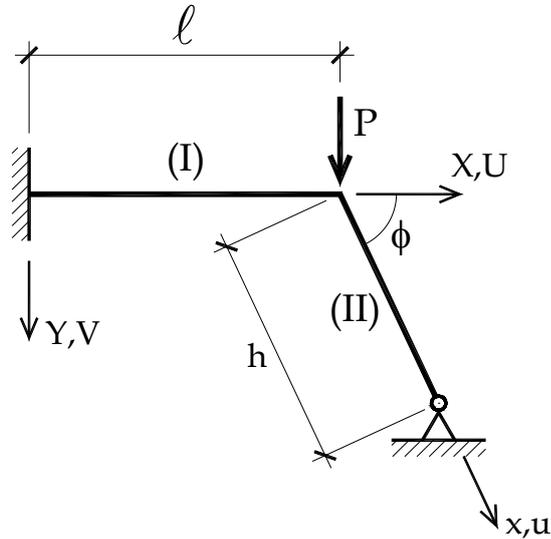


Figura 2.42 – Pórtico 1 – Carregamento simples

Note-se neste exercício que a barra (inclinada) de treliça, do exemplo anterior, foi substituída por uma barra de pórtico, apoiada na extremidade inferior. A estrutura fica então sem a articulação no ponto de aplicação da força P ; será um “meio-pórtico”, engastado/articulado, com uma barra horizontal e outra inclinada. Considerar seções transversais e momentos de segunda ordem respectivamente iguais a A_I, A_{II} e J_I, J_{II} .

Conforme visto em 2.4.2 o subdomínio genérico de pórtico apresenta o seguinte relacionamento entre deslocamentos e forças nodais

$$\begin{bmatrix}
 k_T c^2 + 12k_F s^2 & (k_T - 12k_F)cs & -6k_F \ell s & -(c^2 k_T + 12k_F s^2) & -(k_T - 12k_F)cs & -6k_F \ell s \\
 & k_T s^2 + 12k_F c^2 & 6k_F \ell c & -(k_T - 12k_F)cs & -(k_T s^2 + 12k_F c^2) & 6k_F \ell c \\
 & & 4k_F \ell^2 & 6k_F \ell s & -6k_F \ell c & 2k_F \ell^2 \\
 & & & k_T c^2 + 12k_F s^2 & (k_T - 12k_F)cs & 6k_F \ell s \\
 & & & & k_T s^2 + 12k_F c^2 & -6k_F \ell c \\
 & & & & & 4k_F \ell^2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 u_i \\
 v_i \\
 v'_i \\
 u_j \\
 v_j \\
 v'_j
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 f_{u_i} \\
 f_{v_i} \\
 f_{v'_i} \\
 f_{u_j} \\
 f_{v_j} \\
 f_{v'_j}
 \end{Bmatrix}$$

simétrica

onde $k_T = \frac{EA}{\ell}$ e $k_F = \frac{EJ}{\ell^3}$.

Apenas para abreviar as expressões, adotam-se os valores: $\phi = 30^\circ$, $h = \ell$, e $E = 1 \cdot 10^4$, $J = 1 \cdot 10^3$, $\ell = 100$, $A = 10$ para as duas barras da Fig. 2.42.

Particularizando-se a expressão anterior para os subdomínios I e II, de acordo com os dados acima e com auxílio da Tabela 2.2 tem-se

Tabela 2.2

Sub	Nó inicial	Nó final	Área	J	ℓ	$\cos\phi$	$\sen\phi$	k_F	k_T
I	1	2	10	1000	100	1,0	0	10	1000
II	2	3	10	1000	100	$\sqrt{3}/2$	0,5	10	1000

Então

$$k_I = \begin{bmatrix} 1000 & \cdot & \cdot & -1000 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 120 & 6000 & \cdot & -120 & 6000 \\ \cdot & \cdot & 400000 & \cdot & -6000 & 200000 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1000 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \text{simétrica} & \cdot & \cdot & 120 & -6000 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 400000 \end{bmatrix}$$

e

$$k_{II} = \begin{bmatrix} 780 & 381,051 & -3000 & -780 & -381,051 & -3000 \\ \cdot & 340 & 5196,15 & -381,051 & -340 & 5196,15 \\ \cdot & \cdot & 400000 & 3000 & -5196,15 & 200000 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 780 & 381,051 & 3000 \\ \cdot & \text{simétrica} & \cdot & \cdot & 340 & -5196,15 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 400000 \end{bmatrix}$$

A superposição de k_I e k_{II} produz K , matriz de rigidez do pórtico

$$K = \begin{bmatrix} 1000 & \cdot & \cdot & -1000 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 120 & 6000 & \cdot & -120 & 6000 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 400000 & \cdot & -6000 & 200000 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1780 & 381,051 & -3000 & -780 & -381,051 & -3000 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 460 & -803,85 & -381,051 & -340 & 5196,15 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 800000 & 3000 & -5196,15 & 200000 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 780 & 381,051 & 3000 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \text{simétrica} & \cdot & \cdot & 340 & -5196,15 \\ \cdot & 400000 \end{bmatrix}$$

Introduzindo-se as condições de contorno $U_1 = V_1 = U_3 = V_3 = 0$ e $V'_1 = 0$, e aplicando-se a força P na direção de V_2 , tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1780 & 381,051 & -3000 & 0 & 0 & -3000 \\ 0 & 0 & 0 & 381,051 & 460 & -803,85 & 0 & 0 & 5196,15 \\ 0 & 0 & 0 & -3000 & -803,85 & 800000 & 0 & 0 & 200000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3000 & 5196,15 & 200000 & 0 & 0 & 400000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ V'_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ V'_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou, de forma compacta, relativa apenas aos parâmetros livres

$$\begin{bmatrix} 1780 & 381,051 & -3000 & -3000 \\ 381,051 & 460 & -803,85 & 5196,15 \\ -3000 & -803,85 & 800000 & 200000 \\ -3000 & 5196,15 & 200000 & 400000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V'_2 \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cuja solução é

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V'_2 \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.000843678 \\ 0.00358599 \\ 0.0000156196 \\ -0.0000607207 \end{Bmatrix} P = \begin{Bmatrix} -8.437 \times 10^{-4} \\ 35.86 \times 10^{-4} \\ 0.1562 \times 10^{-4} \\ -0.6072 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} P$$

Sugere-se também como exercício a determinação dos esforços solicitantes (diagramas) e as reações de apoio.

Nota-se que o elemento a utilizar é o cúbico com dois nós de extremidade, considerado no item 2.3.2.3.1.

2.4.4 Subdomínios com flexão e ação axial; carregamento composto; Pórtico

Trata-se de exemplo semelhante ao exercício proposto em 2.4.2, porém com vinculação diferente no apoio inferior e carregamento composto por força uniforme, forças concentradas e momento concentrado, proposto por Gere e Weaver (1965) e apresentado na Fig. 2.43.

Os dados são: $E = 10.000$ $L = 100$ $J = 1000$ $P = 10$ $A = 10$

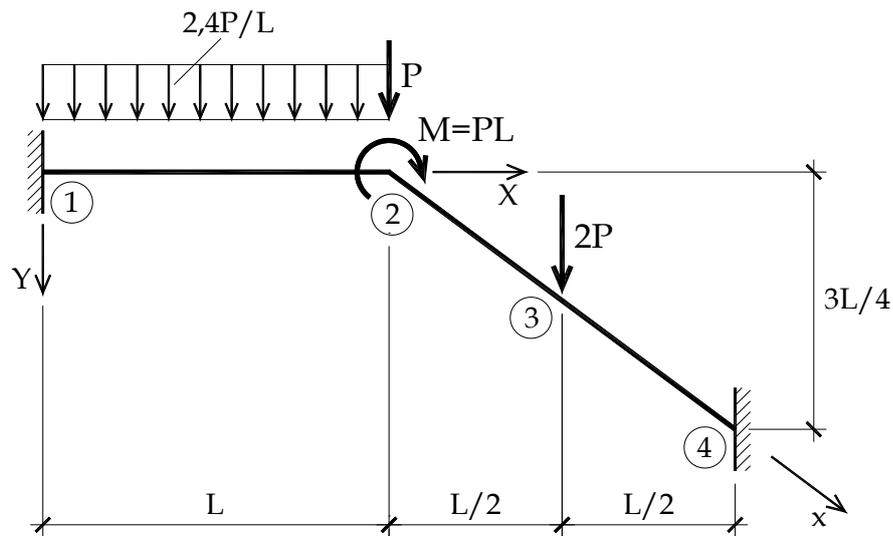


Figura 2.43 – Pórtico 2

Para resolver utilizam-se 3 subdomínios (1-2; 2-3 e 3-4) de tipos empregados em 2.4.2. O subdomínio I, no tocante à flexão, tem matriz de rigidez e de forças nodais equivalentes condensadas a partir de elemento original com variação de quinto grau para $v(x)$ e os subdomínios II e III têm matriz de rigidez do elemento proveniente da aproximação com polinômio cúbico. Vide observação esclarecedora sobre isto logo a seguir.

Os subdomínios empregados em 2.4.2 utilizaram os resultados deduzidos para o *elemento de pórtico*, admitindo-se deslocamentos transversais de flexão descritos por polinômio completo de 5º grau, parâmetros nodais em 3 nós e *condensação estática*. Resultou um elemento para flexão com v e v' em cada nó nas extremidades. Adicionando-se a variação linear de deslocamentos axiais, haverá um parâmetro local u em cada extremidade. Conforme visto, os parâmetros nodais locais finais são, portanto, 3 em cada nó de extremidade, nas direções do eixo (u), da transversal ao eixo (v) e a rotação (v') segundo z . Essa rotação é a derivada de v em relação à coordenada x . *Este elemento de pórtico, obtido com a condensação estática da matriz de rigidez original à flexão, resultante da adoção de função de aproximação dada por polinômio de 5º grau, tem a mesma matriz de rigidez oriunda da aproximação cúbica. Nota-se, entretanto, que ao adotar o elemento que é proveniente da condensação estática, sobre o elemento de 5º grau, tem-se a possibilidade de encontrar a solução exata para o caso de carregamento com força linearmente distribuída $q(x)$ ao longo de todo o elemento, como ocorre com o subdomínio I. Após a solução, deverão ser recuperados os valores nodais v_m e v'_m , necessários para o cálculo do andamento dos esforços solicitantes de flexão em cada subdomínio! No caso do carregamento citado, os momentos fletores terão andamento cúbico.*

Neste ponto, conclui-se que para o cálculo de pórticos pode-se adotar como elementos “universais” o elemento cúbico original para trechos entre forças e momentos concentrados e o elemento de quinto grau (que tem a mesma matriz de rigidez, após a condensação estática) para trechos onde existir carregamento linearmente distribuído.

Para a matriz de rigidez referida ao sistema global encontrou-se em 2.4.2

$$k_{sp} = \begin{bmatrix} k_T c^2 + 12k_F s^2 & (k_T - 12k_F)cs & -6k_F \ell s & -(c^2 k_T + 12k_F s^2) & -(k_T - 12k_F)cs & -6k_F \ell s \\ \cdot & k_T s^2 + 12k_F c^2 & 6k_F \ell c & -(k_T - 12k_F)cs & -(k_T s^2 + 12k_F c^2) & 6k_F \ell c \\ \cdot & \cdot & 4k_F \ell^2 & 6k_F \ell s & -6k_F \ell c & 2k_F \ell^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & k_T c^2 + 12k_F s^2 & (k_T - 12k_F)cs & 6k_F \ell s \\ \cdot & \text{simétrica} & \cdot & \cdot & k_T s^2 + 12k_F c^2 & -6k_F \ell c \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4k_F \ell^2 \end{bmatrix}$$

e para o vetor de forças nodais equivalentes, também referido ao sistema global e relacionado aos

nós i e j , resultou

$$\begin{Bmatrix} F_{U_i} \\ F_{V_i} \\ F_{V_i'} \\ F_{U_j} \\ F_{V_j} \\ F_{V_j'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_i}c - f_{v_i}s \\ f_{u_i}s + f_{v_i}c \\ f_{v_i'} \\ f_{u_j}c - f_{v_j}s \\ f_{u_j}s + f_{v_j}c \\ f_{v_j'} \end{Bmatrix}$$

onde as forças nodais referidas a eixos locais $f_{u_i}, f_{v_i}, f_{v_i'}, f_{v_j'}$ são provenientes dos carregamentos ao longo dos subdomínios. Na estrutura analisada, somente haverá contribuição proveniente do carregamento distribuído sobre o subdomínio horizontal (I). As forças concentradas serão aplicadas diretamente nas direções dos parâmetros nodais, somando-as ao que existir proveniente do carregamento distribuído.

A Tab. 2.3 reúne informação sobre os 3 subdomínios da estrutura em foco.

Tabela 2.3

Sub	Nó inicial	Nó final	Área	J	ℓ	$\cos\phi$	$\sin\phi$	k_F	k_T
I	1	2	10	1000	100	1,0	0	10	1000
II	2	3	10	1000	62,5	0,8	0,6	40,96	1600
III	3	4	10	1000	62,5	0,8	0,6	40,96	1600

Então, as matrizes de rigidez dos elementos referidas aos eixos globais X, Y serão

Subdomínio I – barra horizontal

$$\mathbf{k}_I = \begin{bmatrix} k_{TI} & \cdot & \cdot & -k_{TI} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 12k_{FI} & 6\ell k_{FI} & \cdot & -12k_{FI} & 6\ell k_{FI} \\ \cdot & \cdot & 4k_{FI}\ell^2 & \cdot & -6\ell k_{FI} & 2k_{FI}\ell^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & k_{TI} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \text{simétrica} & \cdot & \cdot & 12k_{FI} & -6\ell k_{FI} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4k_{FI}\ell^2 \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{k}_I = \begin{bmatrix} 1000 & \cdot & \cdot & -1000 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 120 & 6000 & \cdot & -120 & 6000 \\ \cdot & \cdot & 400000 & \cdot & -6000 & 200000 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1000 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \text{simétrica} & \cdot & \cdot & 120 & -6000 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 400000 \end{bmatrix}$$

Para as barras inclinadas II e III

$$\mathbf{k}_{II} = \mathbf{k}_{III} = \begin{bmatrix} 1200,9472 & 532,0704 & -9216 & -1200,9472 & -532,0704 & -9216 \\ \cdot & 890,5728 & 12288 & -532,0704 & -890,5728 & 12288 \\ \cdot & \cdot & 640000 & 9216 & -12288 & 320000 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1200,9472 & 532,0704 & 9216 \\ \cdot & \text{simétrica} & \cdot & \cdot & 890,5728 & -12288 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 640000 \end{bmatrix}$$

Seguindo-se os procedimentos várias vezes utilizados para montagem da matriz de rigidez da estrutura, com a contribuição de cada uma das matrizes dos três subdomínios, o que é simples neste caso, pois os nós da estrutura estão numerados sequencialmente, preparam-se as matrizes expandidas para a ordem da matriz de rigidez da estrutura (12 x 12), indicando-se apenas a metade superior de cada uma, dada a simetria. Portanto

no qual

$$f_{u_1} = f_{u_2} = 0$$

Com $c = 1$ e $s = 0$, da Tab. 2.3, resulta

$$\begin{Bmatrix} F_{U_1} \\ F_{V_1} \\ F_{V'_1} \\ F_{U_2} \\ F_{V_2} \\ F_{V'_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{v_1}c \\ f_{v'_1} \\ 0 \\ f_{v_2}c \\ f_{v'_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{v_1} \\ f_{v'_1} \\ 0 \\ f_{v_2} \\ f_{v'_2} \end{Bmatrix}$$

e, conforme expressões (2.91) do item 2.4.2

$$\begin{Bmatrix} f_{v_1} \\ f_{v'_1} \\ f_{v_2} \\ f_{v'_2} \end{Bmatrix} = \frac{L}{420} \begin{Bmatrix} 147q_1 + 63q_2 \\ (21q_1 + 14q_2)L \\ 63q_1 + 147q_2 \\ -(14q_1 + 21q_2)L \end{Bmatrix}$$

$$\text{e } q_1 = q_2 = q = \frac{2,4P}{L}$$

$$\frac{2,4P}{420} \begin{Bmatrix} 147 + 63 \\ (21 + 14)L \\ 63 + 147 \\ -(14 + 21)L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{v_1} \\ f_{v'_1} \\ f_{v_2} \\ f_{v'_2} \end{Bmatrix} = \frac{2,4P}{420} \begin{Bmatrix} 210 \\ 3500 \\ 210 \\ -3500 \end{Bmatrix} = 2,4P \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 100/12 \\ 0,5 \\ -100/12 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 1,2 \\ 20 \\ 1,2 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

Logo, tem-se a contribuição do subdomínio I alojada no vetor (12 x 1) de forças da estrutura

$$\begin{Bmatrix} F_{U_1} \\ F_{V_1} \\ F_{V'_1} \\ F_{U_2} \\ F_{V_2} \\ F_{V'_2} \\ F_{U_3} \\ F_{V_3} \\ F_{V'_3} \\ F_{U_4} \\ F_{V_4} \\ F_{V'_4} \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,2 \\ 20 \\ 0 \\ 1,2 \\ -20 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

Acrescentando-se as ações concentradas nos nós, forças e momentos externos, tem-se, com $P = 10$

$$\begin{Bmatrix} F_{U_1} \\ F_{V_1} \\ F_{V'_1} \\ F_{U_2} \\ F_{V_2} \\ F_{V'_2} \\ F_{U_3} \\ F_{V_3} \\ F_{V'_3} \\ F_{U_4} \\ F_{V_4} \\ F_{V'_4} \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,2 \\ 20 \\ 0 \\ 1,2 \\ -20 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} + P \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 100 \\ 0 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \\ 200 \\ 0 \\ 22 \\ 800 \\ 0 \\ 20 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

Diante das condições de contorno, o vetor de forças nodais da estrutura, relativo apenas aos parâmetros livres e correspondente à matriz de rigidez acima, ficará somente com os valores dos nós globais 2 e 3.

Isto é

$$\begin{Bmatrix} F_{U_2} \\ F_{V_2} \\ F_{V'_2} \\ F_{U_3} \\ F_{V_3} \\ F_{V'_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 22 \\ 800 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resulta o sistema de equações nos parâmetros livres

$$\begin{bmatrix} 2200,9472 & 532,0704 & -9216 & -1200,9472 & -532,0704 & -9216 \\ \cdot & 1010,5728 & 6288 & -532,0704 & -890,5728 & 12288 \\ \cdot & \cdot & 1040000 & 9216 & -12288 & 320000 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2401,8944 & 1064,1408 & 0 \\ \cdot & \textit{simétrica} & \cdot & \cdot & 1781,1456 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1280000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V'_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 22 \\ 800 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cuja solução é

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V'_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ V'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,020261 \\ 0,099360 \\ 0,001798 \\ -0,033748 \\ 0,087420 \\ -0,0015491 \end{Bmatrix} \quad (2.95)$$

Os 3 primeiros valores de deslocamentos, correspondentes ao nó global 2, coincidem com aqueles calculados por Weaver. Esse autor resolveu o problema com uso da “análise matricial de estruturas”, considerando apenas dois subdomínios interligados no nó 2 desta publicação.

Com os valores de deslocamentos encontrados, os esforços solicitantes são calculados em cada subdomínio, com as expressões das derivadas das funções de aproximação, utilizadas para descrever esses deslocamentos. Tem-se, então:

a) Subdomínio I

Os eixos locais e globais são coincidentes neste subdomínio. Do vetor (2.95) coletam-se os deslocamentos dos nós de extremidade referidos aos eixos globais X, Y

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ V'_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,020261 \\ 0,099360 \\ 0,0017976 \end{pmatrix}$$

Tendo-se em vista que neste subdomínio atua força distribuída e, portanto, utilizou-se condensação estática da matriz de rigidez original, oriunda de função de aproximação de 5º grau, deve-se recuperar os deslocamentos locais v_m e v'_m do ponto médio do eixo do subdomínio, pois esses valores figuram nas expressões das derivadas necessárias para calcular os esforços solicitantes.

Recorda-se que, no item 2.3.2.3.7, para simplificar a escrita, as submatrizes 2 x 2, que participam do cálculo da matriz de rigidez condensada, não foram multiplicadas pelo fator

$$\frac{2C}{35} = \frac{EJ}{35\ell^3} = \frac{10}{35}$$

Sabendo-se que os deslocamentos do ponto médio são calculados com

$$\mathbf{d}_m = \mathbf{k}_{mm}^{-1} \{ \mathbf{f}_m - \mathbf{k}_{mi} \mathbf{d}_i - \mathbf{k}_{mj} \mathbf{d}_j \} \quad (2.75)$$

deve-se tomar o cuidado de modificar essa expressão adequadamente, porque, embora o citado fator não influencie os 2 produtos $\mathbf{k}_{mm}^{-1} \mathbf{k}_{mi}$ e $\mathbf{k}_{mm}^{-1} \mathbf{k}_{mj}$ ele influencia o produto $\mathbf{k}_{mm}^{-1} \mathbf{f}_m$, que deve ser dividido pelo fator, por causa da inversa de \mathbf{k}_{mm} .

Então, de acordo com (2.75), os deslocamentos do ponto médio do subdomínio I são calculados com (lembrando-se que $q_i = q_j = q = 2,4P/L$)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_m \\ v'_m \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{7168} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1280\ell^2} \end{bmatrix} \left\{ \frac{35\ell}{420 \times 10} \begin{pmatrix} 112q_i + 112q_j \\ (-8q_i + 8q_j)\ell \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -3584 & -896\ell \\ 1920\ell & 320\ell^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} -3584 & 896\ell \\ -1920\ell & 320\ell^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0,099360 \\ 0,0017976 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{7168} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12800000} \end{bmatrix} \left\{ \frac{2,4P}{420} \times 3,5 \begin{pmatrix} 224 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -3584 & 89600 \\ -192000 & 3200000 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0,099360 \\ 0,0017976 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{7168} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12800000} \end{bmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 44,8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -195,041 \\ -13324,8 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{7168} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12800000} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 239,841 \\ 13324,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,033460 \\ 0,001041 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sabe-se, de exercício anterior, (2.3.2.3.6), que, quanto à flexão

$$v'' = \frac{1}{\ell^2} \{ (-46 + 396\xi - 816\xi^2 + 480\xi^3) v_i + (-12 + 78\xi - 144\xi^2 + 80\xi^3) \ell v'_i +$$

$$+(32 - 192\xi + 192\xi^2)v_m + (-16 + 192\xi - 480\xi^2 + 320\xi^3)\ell v'_m + \\ +(14 - 204\xi + 624\xi^2 - 480\xi^3)v_j + (-2 + 30\xi - 96\xi^2 + 80\xi^3)\ell v'_j\}$$

Substituindo-se os valores dos deslocamentos nodais tem-se

$$v'' = \frac{1}{\ell^2} \{(32 - 192\xi + 192\xi^2)0,033460 + (-16 + 192\xi - 480\xi^2 + 320\xi^3)0,001041\ell + \\ +(14 - 204\xi + 624\xi^2 - 480\xi^3)0,099360 + (-2 + 30\xi - 96\xi^2 + 80\xi^3)0,0017976\ell\}$$

Como $\ell = 100$, tem-se

$$v'' = \frac{1}{\ell^2} \{(32 - 192\xi + 192\xi^2)0,033460 + (-16 + 192\xi - 480\xi^2 + 320\xi^3)0,1041 + \\ +(14 - 204\xi + 624\xi^2 - 480\xi^3)0,099360 + (-2 + 30\xi - 96\xi^2 + 80\xi^3)0,17976\}$$

isto é

$$v'' = \frac{1}{\ell^2} \{0,43664 - 1,31376\xi + 1,2\xi^2\}$$

Como se nota, a segunda derivada é quadrática, como esperado para o tipo de carregamento, embora a função de aproximação seja de 5º grau!.

Então

$$v''(0) = \frac{1}{1 \times 10^4} 0,43664$$

$$v''(0,5) = \frac{1}{1 \times 10^4} 0,07977$$

$$v''(1) = \frac{1}{1 \times 10^4} 0,32288$$

E os valores de momento fletor são

$$M(0) = -EJv''(0) = \frac{-1 \times 10^7}{1 \times 10^4} 0,43664 = -436,64$$

$$M(0,5) = -EJv''(0,5) = \frac{-1 \times 10^7}{1 \times 10^4} 0,07977 = -79,77$$

$$M(1) = -EJv''(1) = \frac{-1 \times 10^7}{1 \times 10^4} 0,32288 = -322,88$$

Força cortante

$$v''' = \frac{1}{\ell^3} \{-1,31376 + 2,4\xi\}$$

$$v'''(0) = \frac{1}{1 \times 10^6} \{-1,31376\}$$

$$v'''(0,5) = \frac{1}{1 \times 10^6} \{-1,31376 + 1,2\} = \frac{1}{1 \times 10^6} (-0,11376)$$

$$v'''(1) = \frac{1}{1 \times 10^6} \{-1,31376 + 2,4\} = \frac{1}{1 \times 10^6} (1,08624)$$

Então

$$Q(0) = -EJv'''(0) = -\frac{10^7}{10^6}(-1,31376) = 13,1376$$

$$Q(0,5) = -EJv'''(0,5) = -\frac{10^7}{10^6}(-0,11376) = 1,1376$$

$$Q(1) = -EJv'''(1) = -\frac{10^7}{10^6}(1,08624) = -10,8624$$

Força axial

$$N_1 = EA \frac{U_2}{L} = 1000 \times (-0,020260768653150504) = -20,26$$

Os valores obtidos coincidem com aqueles calculados por Weaver.

b) Subdomínio II

Coletando-se do vetor (2.95) os deslocamentos dos nós de extremidade, referidos aos eixos globais X, Y , tem-se

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_2' \\ U_3 \\ V_3 \\ V_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,020261 \\ 0,099360 \\ 0,0017976 \\ -0,033748 \\ 0,087420 \\ -0,0015491 \end{Bmatrix}$$

Transformando-os para o sistema de referência local x, y do subdomínio II, com o eixo x orientado do nó 2 global para o nó 3 global, e inclinado de ϕ no sentido horário, a partir do eixo X , tem-se, para os deslocamentos dos nós de extremidade i, j , indicando-se, abreviadamente $\cos\phi = c = 0,8$ e $\sin\phi = s = 0,6$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ v_i' \\ u_j \\ v_j \\ v_j' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,020261 \\ 0,099360 \\ 0,0017976 \\ -0,033748 \\ 0,087420 \\ -0,0015491 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0434072 \\ 0,0916446 \\ 0,0017976 \\ 0,0254536 \\ 0,0901848 \\ -0,0015491 \end{Bmatrix} \quad (2.96)$$

Para este subdomínio e o seguinte a função de aproximação é cúbica. Então, a segunda derivada tem a expressão, já obtida anteriormente, (2.51) de (2.3.2.3.1)

$$v'' = \frac{1}{\ell^2} \{(-6 + 12\xi)v_i + (-4 + 6\xi)\ell v_i' + (6 - 12\xi)v_j + (-2 + 6\xi)\ell v_j'\}$$

Substituindo-se os valores dos deslocamentos nodais e de $\ell = 62,5$ tem-se

$$v'' = \frac{1}{\ell^2} \{(-6 + 12\xi)0,0916446 + (-4 + 6\xi)0,11235 + (6 - 12\xi)0,0901848 +\} \\ + (-2 + 6\xi)(-0,09681875)\}$$

ou

$$v'' = \frac{1}{\ell^2} \{-0,2645213 + 0,1107051\xi\}$$

Portanto, com $\ell = (5/8)100 = 62,5$

$$v''(0) = \frac{1}{3906,25} \{-0,2645213\}$$

$$v''(0,5) = \frac{1}{3906,25} \{-0,20916875\}$$

$$v''(1) = \frac{1}{3906,25} \{-0,1538162\}$$

Então, os momentos fletores são

$$M(0) = -EJv''(0) = -1x10^7 \frac{(-0,2645213)}{3906,25} = 677,174528$$

$$M(0,5) = -1x10^7 \frac{(-0,20916875)}{3906,25} = 535,472$$

$$M(1) = -EJv''(1) = -1x10^7 \frac{(-0,1538162)}{3906,25} = 393,769472$$

Força cortante

$$v''' = \frac{1}{\ell^3} \{0,1107051\}$$

$$Q(0) = -EJv'''(0) = \frac{-1x10^7}{244140,625} \{0,1107051\} = -4,534480896 = Q(1)$$

Força axial

$$N_{II} = \frac{EA}{\ell} (u_3 - u_2) = \frac{10^5}{62,5} \{(0,0254536) - (0,0434072)\} = -28,72576$$

c) Subdomínio III

Coletando-se os valores dos deslocamentos nodais já referidos ao sistema local (2.96) tem-se (nós 3 e 4)

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ v'_i \\ u_j \\ v_j \\ v'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0254536 \\ 0,0901848 \\ -0,0015491 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculando-se a segunda derivada, tem-se

$$v'' = \frac{1}{\ell^2} \{(-6 + 12\xi)0,0901848 + (-4 + 6\xi)(-0,09681875)\}$$

$$= \frac{1}{3906,25} \{-0,1538338 + 0,5013051\xi\}$$

Portanto

$$v''(0) = \frac{1}{3906,25} \{-0,1538338\}$$

$$v''(1) = \frac{1}{3906,25} \{-0,1538338 + 0,5013051\} = \frac{0,3474713}{3906,25} = 0,0000889526528$$

Logo, os momentos fletores nas extremidades valem, respectivamente,

$$M(0) = -EJv''(0) = -1 \cdot 10^7 v''(0) = -(-0,0000393814528) \times 10^7 = 393,81$$

valor que coincide praticamente com $M(1)$ do Subdomínio II e

$$M(1) = -EJ(0,0000889526528) = -1 \cdot 10^7 (0,0000889526528) = -889,52$$

A força cortante, constante no trecho, será obtida com a terceira derivada

$$v''' = \frac{1}{\ell^3} (0,5013051)$$

$$Q = -EJv''' = \frac{-EJ}{\ell^3} (0,5013051) = \frac{-10^7}{244140,625} 0,5013051 = 20,53$$

E a força axial, também constante no trecho, será calculada com

$$N_{III} = \frac{EA}{\ell} (u_4 - u_3) = \frac{10^5}{62,5} \{(0,0) - (0,0254536)\} = -40,72576$$

Como exercício sugere-se a construção dos diagramas de esforços solicitantes. Novamente, os valores coincidem com aqueles de Weaver.

2.5 PILARES

2.5.1 Introdução

Quanto aos pilares, serão procuradas soluções aproximadas para a elástica $v(x)$ que apareceria se ocorresse a perda de estabilidade da posição inicial de eixo reto para uma posição “flambada”. Com esse procedimento poderão ser encontrados valores de carregamento crítico.

Desse modo, os problemas aqui tratados seguirão os mesmos procedimentos apresentados no caso das vigas. Conforme é conhecido, no caso da análise da flambagem, chega-se à determinação do valor crítico do carregamento do pilar, ficando indeterminada a grandeza da elástica que se formaria!

2.5.2 Exemplos

2.5.2.1 Parâmetros generalizados e uma função de aproximação para o domínio completo

2.5.2.1.1 P1G Pilar apoiado/apoiado; força concentrada no topo; com polinômio de 2º grau

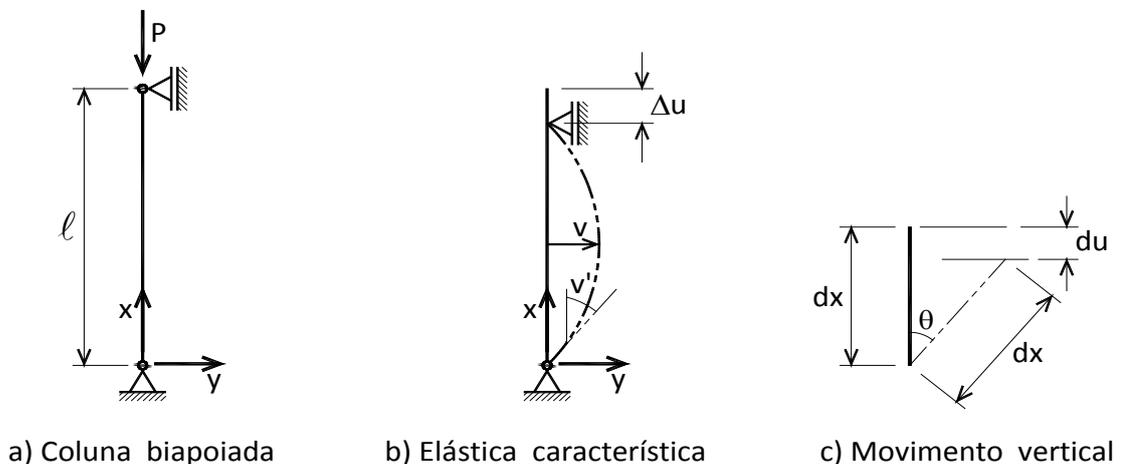


Figura 2.44 – Caso simples de flambagem

Seja a estrutura da Fig. 2.44. Conforme é conhecido, a partir de certo nível de sollicitação por compressão uma barra de eixo retilíneo pode passar a ocupar uma outra configuração, com eixo curvo. É o problema da flambagem. Enquanto a sollicitação axial permanecer menor do que um valor limite ou crítico, dependente do material da barra, de suas características geométricas e de vinculação, a configuração de equilíbrio estável é a retilínea original. Ultrapassado esse valor crítico da sollicitação, a barra apresentará uma passagem para outra configuração de eixo curvo, fletido. Diz-se que ocorreu a flambagem da barra. Deve ser destacado que ao ocorrer essa mudança de configuração a barra já sofrera todas as deformações exclusivas devidas à força axial.

Suponham-se as situações imediatamente antes da passagem para a posição encurvada e, em seguida, aquela da barra logo após a fuga para a posição curva. Nessa transição, os pontos sobre o eixo inicialmente reto da barra passarão para níveis abaixo das posições originais sobre o eixo reto. Isto ocorre por causa das rotações ao longo do comprimento. Logo, se, como no caso da Fig. 2.44, o apoio inferior for fixo, resulta que a extremidade superior da barra desceu Δu por conta da ocorrência da flexão.

Tendo-se identificado que aqui há também um caso de flexão, pode-se procurar expressão aproximada para a elástica exibida na flambagem.

A energia de deformação interna terá a expressão conhecida, como nos casos de flexão anteriormente apresentados, dada por

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EJ(v'')^2 \quad (2.97)$$

Como carregamento externo tem-se apenas a força axial P na extremidade superior e, portanto, o potencial correspondente será calculado como

$$\Omega = -(-P)(-\Delta u) \quad (2.98)$$

Pela Fig. 2.44c vê-se que um elemento infinitesimal dx da coluna na posição inicial (vertical) ocupa uma posição inclinada na configuração deformada. Estando válidas as hipóteses da ocorrência de pequenos deslocamentos e pequenas rotações tem-se que o ângulo entre os segmentos dx original e o girado é a própria derivada da deformada transversal $v(x)$, pois

$$v' = tg\theta = sen\theta = \theta \quad (2.99)$$

Por outro lado, pela geometria da figura pode-se escrever que

$$du = dx(1 - \cos\theta) \quad (2.100)$$

ou

$$du = dx \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] = dx \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.101)$$

e, finalmente, tendo-se em vista (2.99)

$$du = \frac{(v')^2}{2} dx \quad (2.102)$$

Pois bem, com uma integração, pode-se obter o abaixamento de qualquer ponto distante x da origem, isto é

$$\Delta u(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (v')^2 dx \quad (2.103)$$

Esta expressão será útil para resolver os exemplos com força distribuída no domínio.

Em particular, para o módulo do abaixamento da extremidade superior, ponto de aplicação da força externa P

$$\Delta u = \Delta u(\ell) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (v')^2 dx \quad (2.104)$$

Tudo está preparado para procurar soluções aproximadas para o primeiro exemplo.

Admita-se o polinômio de aproximação de segundo grau, com parâmetros generalizados, obediente às condições cinemáticas de contorno $v(0) = v(\ell) = 0$

$$v = \alpha_2(x^2 - \ell x) \quad (2.105)$$

Logo

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[\int_0^\ell EJ(2\alpha_2)^2 dx - P \int_0^\ell [(2x - \ell)\alpha_2]^2 dx \right] \quad (2.106)$$

Deste modo, integrando-se resulta

$$\Pi = 2\alpha_2^2 EJ\ell - P \frac{\alpha_2^2 \ell^3}{6}$$

Derivando-se em relação a α_2 e igualando-se a zero, resultará

$$\left(4EJ\ell - P \frac{\ell^3}{3} \right) \alpha_2 = 0$$

É uma equação homogênea que, para ter solução não trivial ($\alpha_2 \neq 0$), conduz a

$$P = \frac{12EJ}{\ell^2} = P_c$$

Sabe-se que a solução analítica para este caso é dada por

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \cong \frac{9,87EJ}{\ell^2} \quad (2.107)$$

Diante disto constata-se que o valor aproximado obtido é maior do que o analítico (21%).

Cabe, então, uma observação geral sobre característica de soluções aproximadas para os problemas de instabilidade. As funções de aproximação, dependendo do seu grau, no caso de polinômios algébricos, não conseguem descrever os movimentos que as estruturas realmente apresentarão. Isso equivale a dizer que o emprego dessas funções de aproximação corresponde a introduzir vínculos adicionais na estrutura que está em análise. Dizendo-se de outro modo, a estrutura em análise, sendo obrigada a apresentar deformação imposta pela função de aproximação, comporta-se como sendo mais rígida do que a real. É por esse motivo que, nos casos de estudo de estruturas que apresentaram equilíbrio estável, os deslocamentos aproximados resultaram menores do que os reais.

Agora, com os casos de estruturas que podem apresentar instabilidade, por serem mais rígidas, quando obrigadas a deformar-se segundo a aproximação admitida, apresentarão valores maiores do que os reais para as forças críticas, como aconteceu neste primeiro exemplo.

Outra observação interessante diz respeito à variação da energia potencial total com o valor de P . Primeiramente, note que o valor de Π anula-se para $P = P_c$. Então Π tem sempre valor positivo para $P < P_c$ e valor negativo para $P > P_c$. De fato, no caso de $P < P_c$ a energia de deformação é maior do que o potencial da força externa. Tratando-se de um problema estável, a estrutura não aceita uma situação flambada, contrariamente ao que ocorre no caso do equilíbrio instável quando a estrutura não retorna à posição de eixo reto.

2.5.2.1.2 P2G Pilar apoiado/apoiado; P no topo; v do 3º grau

Admitindo-se agora como solução aproximada um polinômio de 3º grau, obediente às condições cinemáticas de contorno, isto é,

$$v = \alpha_2(x^2 - \ell x) + \alpha_3(x^3 - \ell^2 x)$$

tem-se

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[\int_0^\ell EJ(2\alpha_2 + 6\alpha_3 x)^2 dx - P \int_0^\ell [\alpha_2(2x - \ell) + \alpha_3(3x^2 - \ell^2)]^2 dx \right]$$

A condição de estacionariedade para Π implica em

$$\begin{bmatrix} \frac{P\ell^3}{3} - 4EJ\ell & \frac{P\ell^4}{2} - 6EJ\ell^2 \\ \frac{P\ell^4}{2} - 6EJ\ell^2 & \frac{8P\ell^5}{10} - 12EJ\ell^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cuja solução não trivial é obtida igualando-se a zero o determinante dos coeficientes do sistema de equações expressa por: (registra-se, porém, que houve um segundo valor de força crítica)

$$P_1 = 12EJ/\ell^2 \quad (2.108)$$

$$P_2 = 60EJ/\ell^2 \quad (2.109)$$

Como o valor que nos interessa é o menor dentre os dois acima, nota-se que não houve melhoria em relação à solução anterior (2.107) com função de aproximação de 2º grau.

2.5.2.1.3 P3G Pilar apoiado/apoiado; P no topo; v de 4º grau e obediente também às condições mecânicas de contorno.

Para reduzir o trabalho de cálculo, sobre o polinômio de aproximação de quarto grau faz-se a imposição das condições cinemáticas de contorno e também (embora não obrigatória) a imposição das condições mecânicas (momento nulo) nas extremidades.

Resultará

$$v = \alpha_4(x^4 - 2\ell x^3 + \ell^3 x)$$

Tem-se, então

$$\Pi = \frac{EJ}{2} \alpha_4^2 \int_0^\ell (12x^2 - 12\ell x)^2 dx - \frac{P}{2} \alpha_4^2 \int_0^\ell (4x^3 - 6\ell x^2 + \ell^3)^2 dx$$

$$\Pi = \frac{12}{5} EJ \alpha_4^2 \ell^5 - \frac{17}{70} P \alpha_4^2 \ell^7$$

A condição de estacionariedade é

$$\frac{d\Pi}{d\alpha_4} = \left(\frac{24}{5} EJ \ell^5 - \frac{34}{70} P \ell^7 \right) \alpha_4 = 0$$

Portanto

$$P = \frac{24}{5} \frac{x}{34} \frac{70 EJ}{\ell^2} = 9,88 \frac{EJ}{\ell^2} \quad (2.110)$$

que é praticamente coincidente com o valor analítico, exato (9,87).

2.5.2.1.4 P4G Pilar apoiado/apoiado; com força distribuída no comprimento; polinômio de 2º grau

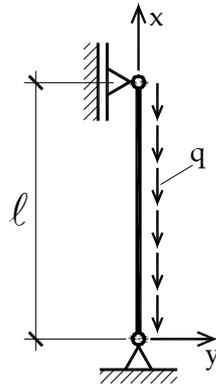


Figura 2.45 – Ação de força distribuída

Iniciando-se com adoção de função de aproximação de 2º grau, tem-se

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

Impondo-se as condições cinemáticas de contorno

$$v(0) = \alpha_0 = 0$$

$$v(\ell) = \alpha_1 \ell + \alpha_2 \ell^2 = 0$$

resultarão

$$v = \alpha_2(x^2 - \ell x); \quad v' = \alpha_2(2x - \ell); \quad v'' = 2\alpha_2 .$$

Portanto

$$\Pi = \frac{EJ}{2} \int_0^\ell 4\alpha_2^2 dx - \frac{q}{2} \int_0^\ell \int_0^x \alpha_2^2 (2x - \ell)^2 dx dx$$

Nessa expressão utiliza-se, na integral interna do segundo termo (potencial da força distribuída), aquilo que foi denominado $\Delta u(x)$ quando foi calculado o abaixamento de um ponto distante x do apoio inferior devido à ocorrência das rotações da elástica na posição flambada. Vide (2.103) em **P1G**.

A condição de estacionariedade conduz a

$$\frac{d\Pi}{d\alpha_2} = \left(4EJ\ell - \frac{q\ell^4}{12} \right) \alpha_2 = 0$$

donde o valor de força crítica resulta como

$$q = \frac{24EJ}{\ell^3} = q_c \quad (2.111)$$

2.5.2.1.5 P5G Pilar apoiado/apoiado; força distribuída no comprimento; polinômio de 3º grau

Conforme utilizada em exemplos anteriores, a função de aproximação, já obediente às condições cinemáticas de contorno, tem a forma

$$v = \alpha_2(x^2 - \ell x) + \alpha_3(x^3 - \ell^2 x)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} \left[\int_0^\ell EJ(2\alpha_2 + 6\alpha_3 x)^2 dx - q \int_0^\ell \int_0^x [\alpha_2(2x - \ell) + \alpha_3(3x^2 - \ell^2)]^2 dx dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[EJ(4\alpha_2^2 + 12\alpha_2\alpha_3\ell^2 + 12\alpha_2^2\ell^3) - q \left(\alpha_2^2 \frac{\ell^4}{6} + 13\alpha_2\alpha_3 \frac{\ell^5}{30} + 3\alpha_3^2 \frac{\ell^6}{10} \right) \right]\end{aligned}$$

A condição de estacionariedade será imposta com

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} = 8\alpha_2\ell + 12\alpha_3\ell^2 - \frac{q}{EJ} \left(\frac{2}{6}\alpha_2\ell^4 + 13\alpha_3 \frac{\ell^5}{30} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_3} = 12\alpha_2\ell^2 + 24\alpha_3\ell^3 - \frac{q}{EJ} \left(13\alpha_2\ell^5 + 6\alpha_3 \frac{\ell^6}{10} \right) = 0$$

Faça-se

$$\lambda = \frac{q\ell^3}{EJ}$$

Então as equações acima ficam sob a forma

$$\begin{bmatrix} 8 - \frac{\lambda}{3} & 12\ell - \frac{13}{30}\lambda\ell \\ 12 - \frac{13}{30}\lambda & 24\ell - \frac{6}{10}\lambda\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para obter a solução não trivial, o determinante dos coeficientes do sistema deve ser igualado a zero, fornecendo

$$11\lambda^2 - 2160\lambda + 43200 = 0$$

cujas raízes são

$$\lambda_1 = 173,76$$

$$\lambda_2 = 22,60$$

Portanto

$$q = q_c = 22,60 \frac{EJ}{\ell^3} \quad (2.112)$$

Este é um valor um pouco menor do que o anterior (2.111). Prosseguindo, passa-se para o polinômio de 4º grau.

2.5.2.1.6 P6G Pilar apoiado/apoiado; força distribuída no comprimento; polinômio de 4º grau

Considere-se agora um polinômio de 4º grau. Novamente, para reduzir o trabalho de cálculo, sobre ele se faz a imposição das condições cinemáticas de contorno e também (embora não obrigatória) a imposição das condições mecânicas (momento nulo) nas extremidades. Conforme já feito em problema anterior, **P3G**, resultará

$$v = \alpha_4(x^4 - 2\ell x^3 + \ell^3 x)$$

Donde

$$v' = \alpha_4(4x^3 - 6\ell x^2 + \ell^3)$$

$$v'' = \alpha_4(12x^2 - 12\ell x)$$

Portanto

$$\Pi = EJ \frac{144}{60} \alpha_4^2 \ell^5 - \frac{81,6}{672} q \alpha_4^2 \ell^8$$

Então

$$\frac{d\Pi}{d\alpha_4} = \frac{288}{60} EJ \alpha_4 \ell^5 - \frac{163,2}{672} q \alpha_4 \ell^8 = 0$$

Disso resulta

$$q = 19,76 \frac{EJ}{\ell^3} = q_c \quad (2.113)$$

que é, por sua vez, menor do que o resultado anterior (2.112).

2.5.2.1.7 P7G Pilar apoiado/apoiado; força distribuída no comprimento; polinômio 5º grau

Seja o mesmo caso de pilar apoiado/apoiado para cuja elástica de flambagem adota-se função de aproximação dada por polinômio de 5º grau em coordenadas homogêneas $\xi = x/\ell$

$$v(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_4 \xi^4 + \alpha_5 \xi^5$$

sobre o qual são impostas, como no caso anterior, tanto as condições cinemáticas de contorno quanto as mecânicas nas extremidades (momento nulo). Como exercício, o leitor interessado pode efetuar as passagens omitidas para chegar-se à expressão seguinte

$$v = \alpha_4(\xi - 2\xi^3 + \xi^4) + \frac{\alpha_5}{3}(7\xi - 10\xi^3 + 3\xi^5)$$

Então

$$\frac{dv}{d\xi} = \alpha_4(1 - 6\xi^2 + 4\xi^3) + \frac{\alpha_5}{3}(7 - 30\xi^2 + 15\xi^4)$$

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} = \alpha_4(-12\xi + 12\xi^2) + \alpha_5(-20\xi + 20\xi^3)$$

Portanto

$$\Pi = \frac{EJ}{2} \int_0^1 [12\alpha_4(-\xi + \xi^2) + 20\alpha_5(-\xi + \xi^3)]^2 \frac{1}{\ell^4} \ell d\xi +$$

$$-\frac{q}{2} \int_0^1 \int_0^\xi \left[\alpha_4(1 - 6\xi^2 + 4\xi^3) + \frac{\alpha_5}{3}(7 - 30\xi^2 + 15\xi^4) \right]^2 \frac{1}{\ell^2} \ell d\xi \ell d\xi$$

Após extenso cálculo algébrico chega-se a

$$\Pi = \frac{EJ}{2\ell^3} \left(\frac{144}{30} \alpha_4^2 + 24\alpha_4\alpha_5 + \frac{3200}{105} \alpha_5^2 \right) - \frac{q}{2} (0,24286\alpha_4^2 + 1,17936\alpha_4\alpha_5 + 1,43651\alpha_5^2)$$

Fazendo-se novamente

$$\lambda = \frac{q\ell^3}{EJ}$$

a imposição da condição de estacionariedade resulta em

$$\begin{bmatrix} 9,6 - 0,48572 \lambda & 24 - 1,17936 \lambda \\ 24 - 1,17936 \lambda & 60,95283 - 2,87302 \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para ter solução não trivial

$$0,00468 \lambda^2 - 0,57772 \lambda + 9,14717 = 0$$

As raízes desta equação são

$$\lambda_1 = 104,79$$

$$\lambda_2 = 18,65$$

Como o q crítico deve ser o menor valor, resulta

$$q = \frac{18,65EJ}{\ell^3} = q_c \quad (2.114)$$

Processamentos com programas computacionais de elementos finitos mostram que esse valor está muito próximo do valor crítico correto.

2.5.2.1.8 P8G Pilar engastado/livre; força concentrada no topo; com aproximação de 2º grau.

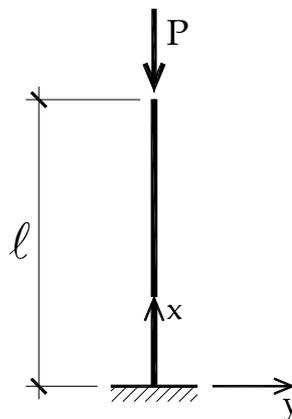


Figura 2.46 – Pilar engastado/livre

A função de aproximação

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

sobre a qual são impostas as condições cinemáticas de contorno (na base)

$$v(0) = 0 = \alpha_0$$

$$v'(0) = 0 = \alpha_1$$

fica sob a forma

$$v(x) = \alpha_2 x^2$$

Então

$$\Pi = \frac{EJ}{2} \int_0^\ell 4\alpha_2^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^\ell 4\alpha_2^2 x^2 dx = 2EJ\alpha_2^2 \ell - \frac{2}{3} P\alpha_2^2 \ell^3$$

Portanto, com

$$\frac{d\Pi}{d\alpha_2} = 4EJ\alpha_2 \ell - \frac{4}{3} P\alpha_2 \ell^3 = 0$$

tem-se

$$P = \frac{3EJ}{\ell^2} \quad (2.115)$$

que é maior do que o resultado analítico $2,467EJ/\ell^2$.

2.5.2.1.9 P9G Pilar engastado/livre; força concentrada no topo; aproximação de 3º grau.

Passando-se para o terceiro grau, a função de aproximação obediente às condições de contorno cinemáticas (essenciais) e também à condição mecânica de contorno no topo $v'' = 0$ é

$$v = \alpha_3(x^3 - 3\ell x^2)$$

Logo

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{EJ}{2} \int_0^\ell \alpha_3^2 (6x - 6\ell)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^\ell \alpha_3^2 (3x^2 - 6\ell x)^2 dx = \\ &= 6EJ\alpha_3^2 \ell^3 - 2,4P\alpha_3^2 \ell^5 \end{aligned}$$

Então

$$\frac{d\Pi}{d\alpha_3} = 12EJ\ell^3 \alpha_3 - 4,8P\alpha_3 \ell^5 = 0$$

Donde

$$P = 2,5 \frac{EJ}{\ell^2} \quad (2.116)$$

valor bastante próximo do resultado analítico exato.

2.5.2.1.10 P10G Pilar engastado/livre; força concentrada no topo; aproximação de 4º grau.

A função de aproximação, em coordenadas homogêneas é

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_4 \xi^4$$

Impondo-se as condições de contorno cinemáticas

$$v(0) = \alpha_0 = 0$$

$$\frac{dv}{dx}(0) = v'(0) = \frac{1}{\ell} \frac{dv}{d\xi}(0) = \frac{1}{\ell} \alpha_1 = 0$$

Impondo-se também a condição decorrente da condição mecânica de contorno em $\xi = 1$

$$\frac{d^2v}{dx^2}(1) = v''(1) = \frac{1}{\ell^2} \frac{d^2v}{d\xi^2}(1) = \frac{1}{\ell^2} (2\alpha_2 + 6\alpha_3 + 12\alpha_4) = 0$$

resulta

$$\alpha_2 = -3\alpha_3 - 6\alpha_4$$

e fica-se com

$$v = \alpha_3(\xi^3 - 3\xi^2) + \alpha_4(\xi^4 - 6\xi^2)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{EJ}{2} \int_0^1 \frac{1}{\ell^4} [\alpha_3(6\xi - 6) + \alpha_4(12\xi^2 - 12)]^2 \ell d\xi + \\ &- \frac{P}{2} \int_0^1 \frac{1}{\ell^2} [\alpha_3(3\xi^2 - 6\xi) + \alpha_4(4\xi^3 - 12\xi)]^2 \ell d\xi \end{aligned}$$

Integrando-se

$$\Pi = \frac{EJ}{2\ell^3} (12\alpha_3^2 + 60\alpha_3\alpha_4 + 76,8\alpha_4^2) - \frac{P}{2\ell} (4,8\alpha_3^2 + 24,4\alpha_3\alpha_4 + 31,086\alpha_4^2)$$

Derivando-se e igualando-se a zero, tem-se

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_3} = \frac{EJ}{2\ell^3} (24\alpha_3 + 60\alpha_4) - \frac{P}{2\ell} (9,6\alpha_3 + 24,4\alpha_4) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_4} = \frac{EJ}{2\ell^3} (60\alpha_3 + 153,6\alpha_4) - \frac{P}{2\ell} (24,4\alpha_3 + 62,17) = 0$$

Fazendo-se $C = P\ell^2/EJ$ e usando-se notação matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} 24 - 9,6C & 60 - 24,4C \\ 60 - 24,4C & 153,6 - 62,17C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cuja solução não trivial existirá se o determinante da matriz do primeiro membro for nula, isto é

$$1,47C^2 - 38,6C + 86,4 = 0$$

cuja menor raiz é

$$C = 2,47$$

Portanto

$$\frac{P\ell^2}{EJ} = 2,47$$

donde

$$P = 2,47 \frac{EJ}{\ell^2} \tag{2.117}$$

que é coincidente com a resposta exata.

2.5.2.1.11 P11G Pilar engastado/livre; força distribuída; polinômio de 3º grau

A função de aproximação é

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3$$

Impondo-se as condições de contorno cinemáticas

$$v(0) = \alpha_0 = 0$$

$$\frac{dv}{dx}(0) = v'(0) = \frac{1}{\ell} \frac{dv}{d\xi}(0) = \frac{1}{\ell} \alpha_1 = 0$$

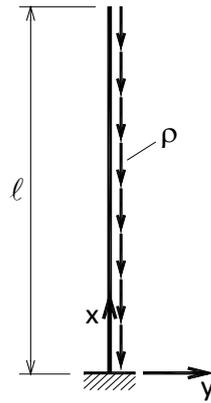


Figura 2.47 – Ação de força distribuída

Portanto

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{EJ}{2} \int_0^1 \frac{1}{\ell^4} [2\alpha_2 + 6\alpha_3 \xi]^2 \ell d\xi - \frac{\rho}{2} \int_0^1 \int_0^\xi \frac{1}{\ell^2} (2\alpha_2 \xi + 3\alpha_3 \xi^2)^2 \ell d\xi \ell d\xi \\ &= \frac{EJ}{2\ell^3} \left(4\alpha_2^2 + 24\alpha_2\alpha_3 \frac{1}{2} + 36\alpha_3^2 \frac{1}{3} \right) - \frac{\rho}{2} \left(\frac{4}{3} \alpha_2^2 \frac{1}{4} + 12\alpha_2\alpha_3 \frac{1}{20} + \frac{9}{5} \alpha_3^2 \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{EJ}{\ell^3} (2\alpha_2^2 + 6\alpha_2\alpha_3 + 6\alpha_3^2) - \rho \left(\frac{1}{6} \alpha_2^2 + 3\alpha_2\alpha_3 \frac{1}{10} + \frac{9}{60} \alpha_3^2 \right) \end{aligned}$$

Derivando-se e igualando-se a zero, tem-se

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} = \frac{EJ}{\ell^3} (4\alpha_2 + 6\alpha_3) - \rho \left(\frac{\alpha_2}{3} + \frac{3\alpha_3}{10} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_3} = \frac{EJ}{\ell^3} (6\alpha_2 + 12\alpha_3) - \rho \left(\frac{3\alpha_2}{10} + \frac{9\alpha_3}{30} \right) = 0$$

ou

$$(120\alpha_2 + 180\alpha_3) - \frac{\rho \ell^3}{EJ} (10\alpha_2 + 9\alpha_3) = 0$$

$$(180\alpha_2 + 360\alpha_3) - \frac{\rho \ell^3}{EJ} (9\alpha_2 + 9\alpha_3) = 0$$

Fazendo-se $C = \rho \ell^3 / EJ$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 120 - 10C & 180 - 9C \\ 180 - 9C & 360 - 9C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que terá raiz real se o determinante da matriz quadrada for nulo, isto é

$$9C^2 - 1440C + 10800 = 0$$

cujas raízes são:

$$C_1 = 152,11 \quad \text{e} \quad C_2 = 7,89$$

Portanto

$$\frac{\rho \ell^3}{EJ} = 7,89$$

donde

$$\rho = 7,89 \frac{EJ}{\ell^3}$$

que é valor muito próximo do valor exato

$$\rho = 7,83 \frac{EJ}{\ell^3} \quad (2.118)$$

2.5.2.1.12 P12G Pilar engastado/livre; força distribuída; polinômio de 4º grau

A função de aproximação é

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_4 \xi^4$$

Impondo-se apenas as condições de contorno essenciais (cinemáticas)

$$v(0) = \alpha_0 = 0$$

$$\frac{dv}{dx}(0) = v'(0) = \frac{1}{\ell} \frac{dv}{d\xi}(0) = \frac{1}{\ell} \alpha_1 = 0$$

a expressão da energia potencial total será

$$\Pi = \frac{EJ}{2} \int_0^1 \frac{1}{\ell^4} [2\alpha_2 + 6\alpha_3 \xi + 12\alpha_4 \xi^2]^2 \ell d\xi - \frac{\rho}{2} \int_0^1 \int_0^\xi \frac{1}{\ell^2} (2\alpha_2 \xi + 3\alpha_3 \xi^2 + 4\alpha_4 \xi^3)^2 \ell d\xi \ell d\xi$$

Integrando-se resulta

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{EJ}{2\ell^3} (4\alpha_2^2 + 12\alpha_2\alpha_3 + 16\alpha_2\alpha_4 + 12\alpha_3^2 + 36\alpha_3\alpha_4 + 28,8\alpha_4^2) + \\ & - \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{3} \alpha_2^2 + \frac{3}{5} \alpha_2\alpha_3 + \frac{16}{30} \alpha_2\alpha_4 + \frac{9}{30} \alpha_3^2 + \frac{4}{7} \alpha_3\alpha_4 + \frac{16}{56} \alpha_4^2 \right) \end{aligned}$$

As derivadas, igualadas a zero, serão dadas por

$$2 \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} = 8\alpha_2 + 12\alpha_3 + 16\alpha_4 - C \left(2 \frac{\alpha_2}{3} + \frac{3\alpha_3}{5} + \frac{8\alpha_4}{15} \right) = 0$$

$$2 \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_3} = 12\alpha_2 + 24\alpha_3 + 36\alpha_4 - C \left(\frac{3\alpha_2}{5} + \frac{18\alpha_3}{30} + \frac{4\alpha_4}{7} \right) = 0$$

$$2 \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_4} = 16\alpha_2 + 36\alpha_3 + 57,6\alpha_4 - C \left(\frac{8\alpha_2}{15} + \frac{4\alpha_3}{7} + \frac{32\alpha_4}{56} \right) = 0$$

onde novamente

$$C = \frac{\rho \ell^3}{EJ}$$

ou, multiplicando-se, respectivamente, as equações por (15), (35) e (56) tem-se

$$\begin{bmatrix} 120 - 10C & 180 - 9C & 240 - 8C \\ 420 - 21C & 840 - 21C & 1260 - 20C \\ 896 - 29,8667C & 2016 - 32C & 3225,6 - 32C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que terá raízes não triviais se o determinante 3 x 3 for nulo, isto é

$$6,4004C^3 - 5273,71C^2 + 327937,0C - 2257920 = 0$$

cuja menor raiz é

$$C = 7,8723$$

Portanto

$$\rho = 7,8723 \frac{EJ}{\ell^3} \quad (2.119)$$

que é um valor ainda mais próximo do exato, já indicado acima.

Exercícios: Como exercícios podem ser sugeridos todos os casos de pilares abordados anteriormente e refeitos com a utilização de parâmetros nodais.

2.5.2.2 – Parâmetros generalizados e subdivisão em subdomínios com funções correspondentes

2.5.2.2.1 P13G Pilar apoiado/apoiado; com variação de seção; duas aproximações cúbicas independentes.

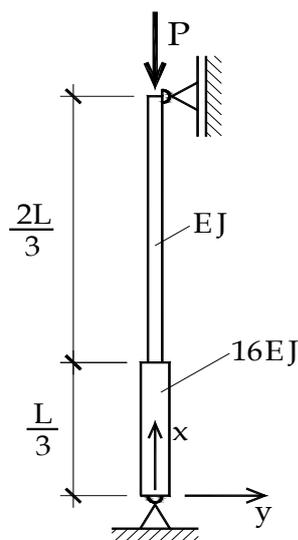


Figura 2.48 – Pilar com Variação de seção

Nesta coluna o produto de inércia do terço inferior do comprimento é 16 vezes o produto de

inércia do restante da altura.

Como existe uma variação brusca da seção transversal, deve-se prever que o uso de uma única função de aproximação para o domínio completo da barra não conduza a resultado de boa qualidade. Deve-se, então, utilizar uma aproximação independente para cada trecho do pilar, por exemplo de 3º grau.

Sobre os dois polinômios de aproximação serão impostas as condições cinemáticas de contorno, além das condições de continuidade de deslocamentos e de rotação no ponto de transição entre os dois subdomínios e, também, embora não obrigatórias, as condições mecânicas cabíveis no contorno e mais a igualdade de momentos fletores naquele mesmo ponto. Com isto, sobre os 8 parâmetros incógnitos das expressões originais dos dois polinômios, serão impostas 7 condições. Restará, portanto, apenas um parâmetro livre. Todos os outros parâmetros serão expressos em função do parâmetro livre.

Sejam considerados os subdomínios *I* e *II* na parte inferior e superior do pilar, respectivamente. É conveniente utilizar coordenadas homogêneas para expressar as funções de aproximação, pois isso simplificará o cálculo preliminar envolvendo as imposições de condições de contorno e continuidades referidas acima.

Então

$$v_I = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

$$v_{II} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$$

Impondo-se as condições de contorno, continuidade, etc., já referidas, tem-se

$$v_I(0) = 0$$

$$v_I''(0) = 0$$

$$v_I(L/3) = v_{II}(L/3)$$

$$16EJv_I''(L/3) = EJv_{II}''(L/3)$$

$$v_{II}(L) = 0$$

$$v_I'(L/3) = v_{II}'(L/3)$$

$$v_{II}''(L) = 0$$

As duas primeiras fornecem, imediatamente,

$$\alpha_0 = 0$$

$$\alpha_2 = 0$$

Reunindo-se todas as restantes sob forma matricial resulta

$$\begin{bmatrix} L/3 & L^3/27 & -1 & -L/3 & -L^2/9 & -L^3/27 \\ 0 & 32L & 0 & 0 & -2 & -2L \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 1 & L^2/3 & 0 & -1 & -2L/3 & -L^2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tem-se, portanto, cinco equações condicionantes sobre os seis parâmetros. Apenas um deles será livre. Escolhendo-se β_3 como a incógnita independente tem-se

$$\begin{bmatrix} 9L & L^3 & -27 & -9L & -3L^2 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 0 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \beta_3 \begin{Bmatrix} L^3 \\ 2L \\ -L^3 \\ L^2 \\ -6L \end{Bmatrix}$$

que, resolvida, fornece

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \beta_3 \begin{Bmatrix} 0,625L^2 \\ -0,125 \\ -0,25L^3 \\ 2,25L^2 \\ -3,00L \end{Bmatrix}$$

Portanto

$$v_I = (0,625L^2x - 0,125x^3)\beta_3$$

$$v_{II} = (-0,25L^3 + 2,25L^2x - 3,00\xi^2 + x^3)$$

Para trabalhar com números inteiros pode-se multiplicar cada uma dessas expressões por (-8) sem influir na resposta final, neste caso.

Então

$$v_I = (-5L^2x + x^3)\beta_3$$

$$v_{II} = (2L^3 - 18L^2x + 24Lx^2 - 8x^3)$$

Compondo-se a expressão da energia potencial total tem-se

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \left\{ 16 \int_0^{1/3} EJ \frac{1}{\ell^4} (6\beta_3x)^2 \ell d\xi + \int_{1/3}^1 EJ \frac{1}{\ell^4} (48L - 48x)^2 \ell d\xi \right\} + \\ & \frac{-P}{2} \left\{ \int_0^{1/3} \frac{1}{\ell^2} \beta_3^2 (-5L^2 + 3x^2)^2 \ell d\xi + \int_{1/3}^1 \frac{1}{\ell^2} \beta_3^2 (-18L^2 + 48Lx - 24x^2)^2 \ell d\xi \right\} \end{aligned}$$

Integrando-se

$$\Pi = 117,333 \frac{EJ}{\ell^3} \beta_3^2 - 18,696296 \frac{1}{\ell} \beta_3^2 \frac{P}{2}$$

Derivando-se e igualando-se a zero

$$P = 12,55 \frac{EJ}{\ell^2} \tag{2.120}$$

que é um valor um pouco acima (13%) do exato

$$P = 11,1 \frac{EJ}{\ell^2}$$

A adoção de dois polinômios de maior grau dará melhoria para a resposta.

3 PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

3.1 INTRODUÇÃO

No âmbito da teoria da elasticidade bidimensional estudam-se os casos de estado plano de tensões e de estado plano de deformações.

O estado plano de tensões pode ocorrer em elementos estruturais chamados de superfície ou laminares, pois têm pequena espessura em relação às demais dimensões, submetidos a ações que obedecem simetria em relação ao plano médio e, portanto, têm resultante contida nesse plano médio. É o caso típico das chapas (vigas-parede, por exemplo).

Observe-se que as vigas podem ser estudadas como caso particularizado, dentro do campo das chapas.

Além do estado plano de tensões, há também o estado plano de deformações, característico de estruturas alongadas (pequena seção transversal em relação ao comprimento na direção ortogonal à seção) e submetidas a carregamento constante ao longo do comprimento. Nesse caso, o que ocorre em uma seção transversal da estrutura alongada, distante das suas extremidades, será suficiente para caracterizar seu comportamento. A diferença entre o estado plano de tensão e o estado plano de deformações reside no relacionamento entre as deformações e as tensões.

Considerando-se que o problema bidimensional seja referido a um plano de coordenadas cartesianas x, y , as grandezas a determinar são:

a) as componentes de deslocamentos

$$u(x, y) \text{ e } v(x, y) \quad (3.1)$$

b) as componentes de deformações

$$\epsilon_x(x, y), \epsilon_y(x, y) \text{ e } \gamma_{xy}(x, y) \quad (3.2)$$

c) as componentes de tensões

$$\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y) \text{ e } \tau_{xy}(x, y) \quad (3.3)$$

3.1.1 Relações entre deslocamentos e deformações

Conforme a teoria de primeira ordem (pequenos deslocamentos e pequenas deformações), valem as seguintes relações entre as componentes de deslocamento e de deformações:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.6)$$

As componentes de deformação podem ser agrupadas em um vetor transposto

$$\boldsymbol{\epsilon}^t = \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}\} \quad (3.7)$$

Correspondentemente, pode-se definir o vetor das tensões

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\} \quad (3.8)$$

3.1.2 Relações entre deformações e tensões

Sabe-se que, para material elástico linear e isótropo, a relação entre deformações e tensões

(Lei de Hooke) é dada por

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal e ν é o coeficiente de Poisson.

3.2 CASO BIDIMENSIONAL DO ESTADO PLANO DE TENSÕES – CHAPAS

Da expressão da lei de Hooke pode-se calcular a relação inversa, que expressa tensões em função das deformações, isto é

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_{pt} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.10)$$

mantendo-se a letra $\boldsymbol{\varepsilon}$ para designar o vetor das três deformações planas e com \mathbf{D}_{pt} referindo-se a estado plano de tensões.

3.3 CASO BIDIMENSIONAL DO ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

Neste estado as seguintes deformações têm valores nulos

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0. \quad (3.11)$$

Da Lei de Hooke original (do caso tridimensional) pode-se extrair a relação seguinte

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Se $\varepsilon_z = 0$, decorre que

$$\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.13)$$

Substituindo-se nas duas primeiras de (3.12) tem-se

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & -(1+\nu)\nu \\ -(1+\nu)\nu & 1-\nu^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Então a relação inversa será expressa por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Sendo também, da última das (3.9),

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

resulta

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (3.16)$$

Reunindo-a com as duas outras da tensão normal (3.15) tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_{pd} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.17)$$

na qual \mathbf{D}_{pd} indica tratar-se de estado plano de deformações.

3.4 ESTADO PLANO DE TENSÕES – CHAPAS; MÉTODO DA ENERGIA

Aqui aborda-se a procura de soluções aproximadas apenas para o caso do estado plano de tensão.

Neste caso $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são as componentes do deslocamento de um ponto genérico da superfície média da chapa, onde se posicionam os eixos de referência.

Adota-se o processo dos deslocamentos, quer dizer considera-se essas duas componentes de deslocamento como incógnitas básicas.

O vetor contendo essas duas componentes é definido como

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Uma aproximação para essas componentes de deslocamento pode ser posta sob a forma:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}(x, y) & 0 \\ 0 & \mathbf{g}(x, y) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^n \\ \mathbf{v}^n \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{d}_s^n$$

Ficando-se restritos ao que ocorre com um subdomínio genérico, pode-se escrever a expressão da energia de deformação sob a forma

$$\mathcal{U}_s = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\varepsilon} dA \cdot e \quad (3.19)$$

onde e designa a espessura que pode, por conveniência, ser feita igual à unidade de comprimento; V indica volume e A a área do subdomínio.

Então a energia de deformação fica expressa por

$$\mathcal{U}_s = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{D}_{pd} \boldsymbol{\varepsilon} dA \quad (3.20)$$

Retomando-se as definições das componentes de deformações específicas, correspondentes às componentes de tensões não nulas, tem-se sob forma matricial

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (3.21)$$

Excetuado o peso próprio, as forças externas atuam somente na superfície externa de geratrizes paralelas ao eixo z , não têm componente segundo z e devem ser tais que as componentes p_x e p_y tenham sua resultante contida no plano x, y .

Suponha-se que o carregamento externo atue apenas sobre a superfície de um lado m genérico do subdomínio, com componentes p_x e p_y , por unidade de área da superfície lateral

carregada, segundo os eixos globais, reunidas no vetor

$$\mathbf{p}_m^t = \{p_x \quad p_y\} \quad (3.22)$$

Então, designando-se com S_σ a superfície carregada desse contorno, a contribuição desse carregamento, no lado genérico do subdomínio, para o potencial das forças externas será

$$\Omega_m = - \int_{S_\sigma} \mathbf{d}^t \mathbf{p}_m dS = - \mathbf{d}_s^{n,t} \int_{S_\sigma} \Phi^t \mathbf{p}_m dS = - \mathbf{d}_s^{n,t} \int_{\bar{x}} \Phi^t \mathbf{p}_m \cdot e d\bar{x} \quad (3.23)$$

onde, conforme anteriormente nomeada, e é a espessura, suposta constante e igual à unidade (poderia ser pouco variável) e \bar{x} é coordenada unidimensional ao longo do contorno da superfície média da chapa.

Havendo carregamento desse tipo em outros lados do subdomínio bastará fazer a superposição.

3.4.1 Subdomínios triangulares com aproximação de primeiro grau para $u(x,y)$ e $v(x,y)$

Seguindo-se o procedimento tantas vezes utilizado anteriormente, adote-se, por exemplo, aproximação para as componentes de deslocamento em um subdomínio genérico, suposto triangular, conforme a Fig. 3.1, cujos vértices são designados sequencialmente como i, j e k , percorrendo-se os lados no sentido sinistrorso a partir do nó i .

Se as aproximações para $u(x,y)$ e $v(x,y)$ forem lineares, esse será o subdomínio mais simples, dentre os que são utilizados para a análise de chapas. Ele é chamado de *CST* (*constant strain triangle*). Por ser o mais simples, será utilizado para detalhar todos os passos para chegar-se às expressões das matrizes de rigidez \mathbf{k} e de forças nodais equivalentes \mathbf{f} .

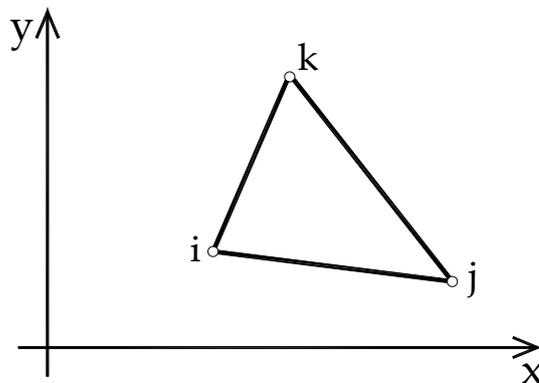


Figura 3.1 – Elemento CST

3.4.1.1 Parâmetros generalizados

As aproximações lineares, dependentes de parâmetros generalizados, são reunidas no vetor

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

As expressões das aproximações são semelhantes para u e v , diferenciando-se apenas quanto aos parâmetros generalizados α ou β .

Comentário

Recorda-se, imediatamente, que o emprego de parâmetros generalizados nas expressões das funções de aproximação, exigirá a imposição de continuidade dos deslocamentos (e derivadas, em certos casos), ao longo dos lados dos elementos adjacentes. É possível avaliar o enorme trabalho que isso acarretaria nos casos práticos, quando uma quantidade considerável de triângulos constituir a discretização da chapa a analisar. Para dar ideia sobre isso, imagine-se chapa composta apenas pelos elementos I e II da chapa do exemplo do item 3.4.1.2.6 Exemplo de aplicação.

Detalha-se apenas o que seria necessário fazer para a componente u . Particularizando-se a expressão de u , para os dois subdomínios tem-se

$$u_I = \alpha_0^I + \alpha_1^I x + \alpha_2^I y$$

$$u_{II} = \alpha_0^{II} + \alpha_1^{II} x + \alpha_2^{II} y$$

Conforme foi feito nos exemplos **V4G** e **P13G** (com pouco trabalho pois são casos unidimensionais), é necessário impor a continuidade de u no lado 2 – 5 da chapa da Fig. 3.3. Como a variação dessa componente de deslocamento foi admitida linear, pode-se conseguir isso no lado impondo-se continuidade nos nós 2 e 5.

Portanto

$$\alpha_0^I + \alpha_1^I x_2 + \alpha_2^I y_2 = \alpha_0^{II} + \alpha_1^{II} x_2 + \alpha_2^{II} y_2$$

e

$$\alpha_0^I + \alpha_1^I x_5 + \alpha_2^I y_5 = \alpha_0^{II} + \alpha_1^{II} x_5 + \alpha_2^{II} y_5$$

Do mesmo modo, equações semelhantes seriam escritas para a outra componente v , envolvendo os parâmetros β .

Para um número maior de subdomínios, como seria o caso de chapas de maiores dimensões, haveria numerosas equações desse tipo, que expressam dependência entre os parâmetros generalizados. Depois de escrever todas as equações necessárias, seriam escolhidos quais os parâmetros a considerar como independentes, para prosseguir na análise com a expressão de Π a ser derivada em relação aos parâmetros independentes, etc. É fácil perceber que o trabalho algébrico seria volumoso.

A formulação com a utilização de parâmetros nodais evitará esse trabalho de imposição explícita de continuidades de deslocamentos nos nós, conforme amplamente comentado anteriormente.

3.4.1.2 Parâmetros nodais

Retornando-se ao procedimento para converter a expressão original da componente u de deslocamento para outra equivalente, dependente de parâmetros nodais, particulariza-se aquela expressão de (3.24) para os nós i , j e k da Fig.3.1:

$$u_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i$$

$$u_j = \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j \quad (3.25 \text{ a,b,c})$$

$$u_k = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k$$

de onde se pode obter α_0 , α_1 e α_2 em função das coordenadas e dos parâmetros nodais, neste caso u_i , u_j e u_k :

O determinante do sistema de equações acima, em que as incógnitas eleitas são os α_i , é

$$\Delta = x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j) \quad (3.26)$$

Pode ser mostrado que o valor deste determinante é igual ao dobro da área A do triângulo.

As incógnitas terão as expressões

$$\alpha_0 = \frac{(x_j y_k - x_k y_j)u_i + (x_k y_i - x_i y_k)u_j + (x_i y_j - x_j y_i)u_k}{\Delta}$$

$$\alpha_1 = \frac{(y_j - y_k)u_i + (y_k - y_i)u_j + (y_i - y_j)u_k}{\Delta}$$

$$\alpha_2 = \frac{(x_k - x_j)u_i + (x_i - x_k)u_j + (x_j - x_i)u_k}{\Delta}$$

Desse modo tem-se

$$u = \frac{1}{\Delta} \{ [(x_j y_k - x_k y_j)u_i + (x_k y_i - x_i y_k)u_j + (x_i y_j - x_j y_i)u_k] + [(y_j - y_k)u_i + (y_k - y_i)u_j + (y_i - y_j)u_k]x + [(-x_j + x_k)u_i + (-x_k + x_i)u_j + (-x_i + x_j)u_k]y \} \quad (3.27)$$

ou, rearranjando-se de modo a ter os deslocamentos nodais em evidência,

$$u = \frac{1}{\Delta} \{ (a_i^0 + \omega_i x + \eta_i y)u_i + (a_j^0 + \omega_j x + \eta_j y)u_j + (a_k^0 + \omega_k x + \eta_k y)u_k \} \quad (3.28)$$

ou, sob forma mais compacta

$$u = \frac{1}{2A} \{ \varphi_i \quad \varphi_j \quad \varphi_k \} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{u}^n \quad (3.29)$$

Na expressão acima tem-se, por definição, que as parcelas do multiplicador de u_i , explícitas, são:

$$a_i^0 = x_j y_k - x_k y_j$$

$$\omega_i = y_j - y_k \quad (3.30 \text{ a,b,c})$$

$$\eta_i = -x_j + x_k$$

e, para os demais, basta fazer-se permutação cíclica dos índices i, j e k .

Para a outra componente de deslocamento tem-se, de modo semelhante,

$$v = \frac{1}{2A} \{ (a_i^0 + \omega_i x + \eta_i y)v_i + (a_j^0 + \omega_j x + \eta_j y)v_j + (a_k^0 + \omega_k x + \eta_k y)v_k \} = \frac{1}{2A} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{v}^n$$

Então

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^n \\ \mathbf{v}^n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{d}^n \quad (3.31)$$

3.4.1.2.1 Relações entre deslocamento e deformações

Para as componentes de deformação tem-se

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{u}^n \\ \boldsymbol{\varphi} \mathbf{v}^n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^n \\ \mathbf{v}^n \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_s^n \quad (3.32)$$

onde o fator $1/2A$ foi incorporado na matriz das derivadas, isto é

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Portanto

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} \omega_i u_i + \omega_j u_j + \omega_k u_k \\ \eta_i v_i + \eta_j v_j + \eta_k v_k \\ \eta_i u_i + \eta_j u_j + \eta_k u_k + \omega_i v_i + \omega_j v_j + \omega_k v_k \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

que pode ser escrita sob a forma

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} \omega_i & \omega_j & \omega_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_i & \eta_j & \eta_k \\ \eta_i & \eta_j & \eta_k & \omega_i & \omega_j & \omega_k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_s^n \quad (3.35)$$

Definindo-se

$$\boldsymbol{\omega} = \{\omega_i \quad \omega_j \quad \omega_k\}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \{\eta_i \quad \eta_j \quad \eta_k\}$$

(3.36 a,b)

pode-se escrever

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\eta} & \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^n \\ \mathbf{v}^n \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_s^n \quad (3.37)$$

3.4.1.2.2 Energia de deformação

Retornando-se à expressão (3.20) da energia de deformação do subdomínio

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathcal{D}_{pt} \boldsymbol{\varepsilon} dA \quad (3.20)$$

tem-se

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_s^{nt} \int_A \mathbf{B}^t \mathcal{D}_{pt} \mathbf{B} \mathbf{d}_s^n dA \quad (3.38)$$

3.4.1.2.3 Carregamento

Para adiantar algum detalhamento, necessário para preparar as deduções com forma adequada para codificação em programa para computador, trata-se agora da substituição das funções p_x e p_y , que representam as componentes reais das ações externas conhecidas, por funções de aproximação com forma conhecida e definidas em termos de valores nodais daquelas ações externas.

Por exemplo, admitindo-se que as forças externas conhecidas sobre um lado genérico do subdomínio triangular sejam descritas, ou aproximadas, no lado j, k , por polinômio linear, como se indica na Fig. 3.2, tem-se que (\bar{x} sobre o lado, com origem em j)

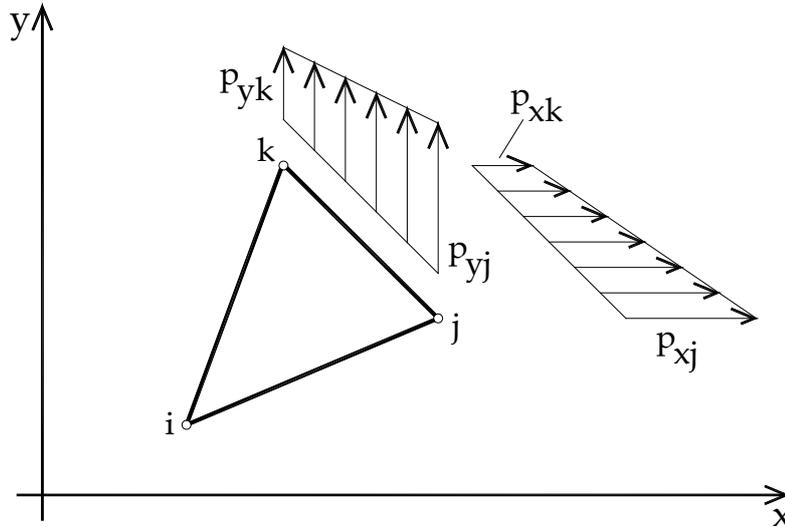


Figura 3.2 – Lado j-k carregado

$$\mathbf{p}_m = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - \bar{x}/\ell_{jk} & \bar{x}/\ell_{jk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \bar{x}/\ell_{jk} & \bar{x}/\ell_{jk} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{xj} \\ p_{yj} \\ p_{xk} \\ p_{yk} \end{Bmatrix} = \Phi_p \mathbf{p}_m^n \quad (3.39)$$

Havendo mais algum lado desse subdomínio submetido a forças externas bastará fazer superposição de efeitos.

3.4.1.2.4 Energia potencial total e sua minimização

Substituindo-se todas as expressões naquela da energia potencial total tem-se

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{d}_s^{nt} \int_A \mathbf{B}^t \mathcal{D}_{pt} \mathbf{B} \mathbf{d}_s^n dA - \mathbf{d}_s^{nt} \int_{S_\sigma} \Phi^t \Phi_p \mathbf{p}_m^n dS \quad (3.40)$$

Calculando-se a primeira variação (diferencial total) e igualando-a a zero:

$$\delta \Pi = \delta \mathbf{d}_s^{nt} \left\{ \int_A \mathbf{B}^t \mathcal{D}_{pt} \mathbf{B} \mathbf{d}_s^n dA - \int_{S_\sigma} \Phi^t \Phi_p \mathbf{p}_m^n d\bar{x} \right\} = 0 \quad (3.41)$$

e, como $\delta \mathbf{d}^n \neq 0$

$$\int_A \mathbf{B}^t \mathcal{D}_{pt} \mathbf{B} \mathbf{d}_s^n dA - \int_{S_\sigma} \Phi^t \Phi_p \mathbf{p}_m^n d\bar{x} = 0 \quad (3.42)$$

ou

$$\mathbf{k}_s \mathbf{d}_s^n = \mathbf{f}_m \quad (3.43)$$

onde

$$\mathbf{k}_s = \int_A \mathbf{B}^t \mathcal{D}_{pt} \mathbf{B} \, dA \quad (3.44)$$

e

$$\mathbf{f}_m = \int_{\bar{s}} \Phi^t \Phi_p \, d\bar{s} \, \mathbf{p}_m^n \quad (3.45)$$

Essas são, respectivamente, as matrizes de rigidez e de forças nodais equivalentes do subdomínio triangular de chapa com um lado m carregado.

3.4.1.2.5 Matrizes de rigidez e de forças nodais equivalentes

A expressão explícita da matriz de rigidez tem a forma abaixo:

$$\mathbf{k}_s = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} \omega_i^2 + \mu\eta_i^2 & \omega_i\omega_j + \mu\eta_i\eta_j & \omega_i\omega_k + \mu\eta_i\eta_k & v\omega_i\eta_i + \mu\omega_i\eta_i & v\omega_i\eta_j + \mu\omega_j\eta_i & v\omega_i\eta_k + \mu\omega_k\eta_i \\ \cdot & \omega_j^2 + \mu\eta_j^2 & \omega_j\omega_k + \mu\eta_j\eta_k & v\omega_j\eta_i + \mu\omega_i\eta_j & v\omega_j\eta_j + \mu\omega_j\eta_j & v\omega_j\eta_k + \mu\omega_k\eta_j \\ \cdot & \cdot & \omega_k^2 + \mu\eta_k^2 & v\omega_k\eta_i + \mu\omega_i\eta_k & v\omega_k\eta_j + \mu\omega_j\eta_k & v\omega_k\eta_k + \mu\omega_k\eta_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \eta_i^2 + \mu\omega_i^2 & \eta_i\eta_j + \mu\omega_i\omega_j & \eta_i\eta_k + \mu\omega_i\omega_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \eta_j^2 + \mu\omega_j^2 & \eta_j\eta_k + \mu\omega_j\omega_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \eta_k^2 + \mu\omega_k^2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

simétrica

Para o cálculo das forças nodais equivalentes, supondo-se ainda que o lado carregado seja $j - k$, como a integração deve ser feita sobre esse lado (S_σ), particularizam-se as funções contidas em Φ^t .

Resultará

$$\mathbf{u}_\sigma = \frac{1}{\Delta} \{ (a_j^0 + \omega_j x + \eta_j y) u_j + (a_k^0 + \omega_k x + \eta_k y) u_k \} = \frac{1}{2A} \{ \varphi_j \quad \varphi_k \} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_k \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

Exercício: Mostrar que de (3.28), (3.29) $\varphi_i = 0$ sobre o lado $j - k$ do subdomínio e por esse motivo não figura na expressão acima de \mathbf{u}_σ !

Ficará mais fácil, porém, escrever a variação dos deslocamentos ao longo do lado $j - k$ do mesmo modo que foi descrita a variação do carregamento sobre esse lado.

Quer dizer

$$\mathbf{u}_\sigma = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_\sigma = \begin{Bmatrix} 0 & 1 - \bar{x}/\ell_{jk} & \bar{x}/\ell_{jk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \bar{x}/\ell_{jk} & \bar{x}/\ell_{jk} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} = \Phi_{j-k} \mathbf{u}_\sigma^n \quad (3.48)$$

Desse modo a expressão substituta para o cálculo do vetor de forças nodais será

$$\mathbf{f}_m = \int_0^{\ell_{j-k}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 - \bar{x}/\ell_{jk} & 0 \\ \bar{x}/\ell_{jk} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 - \bar{x}/\ell_{jk} \\ 0 & \bar{x}/\ell_{jk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \bar{x}/\ell_{jk} & \bar{x}/\ell_{jk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \bar{x}/\ell_{jk} & \bar{x}/\ell_{jk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{xj} \\ p_{yj} \\ p_{xk} \\ p_{yk} \end{pmatrix} d\bar{x} \quad (3.49)$$

Efetuada-se os produtos e integrando-se, resulta:

$$\mathbf{f}_m = \frac{\ell_{jk}}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 2p_{xj} + p_{xk} \\ p_{xj} + 2p_{xk} \\ 0 \\ 2p_{yj} + p_{yk} \\ p_{yj} + 2p_{yk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{u_i} \\ p_{u_j} \\ p_{u_k} \\ p_{v_i} \\ p_{v_j} \\ p_{v_k} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Se fosse o caso de força externa *uniforme* sobre o lado $j - k$:

$$p_{xj} = p_{xk} = p_x$$

$$p_{yj} = p_{yk} = p_y$$

e, portanto:

$$\mathbf{f}_m = \frac{\ell_{jk}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ p_x \\ p_x \\ 0 \\ p_y \\ p_y \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

isto é, cada nó recebe metade da resultante externa sobre o lado. Observe-se que isto é correto apenas porque tanto o deslocamento quanto o carregamento têm variação linear ao longo do lado!

Então, todas as deduções estão completas para poder aplicar os resultados ao caso de um exemplo.

3.4.1.2.6 Exemplo de aplicação:

O exemplo corresponde a uma chapa auto-equilibrada de 40cm x 40cm e espessura $e = 0,1\text{cm}$. Dela, por conta das simetrias existentes, considera-se apenas o quadrante inferior-direito discretizado em 8 subdomínios triangulares, conforme a Fig. 3.3.

A chapa tem o nó 7 fixo, os nós 8 e 9 móveis segundo x e os nós 4 e 1 móveis segundo y , respectivamente, para respeitar as simetrias da chapa completa. O carregamento é com força distribuída $p = 2.000\text{kgf}/\text{cm}^2$, uniforme para baixo sobre a área lateral do contorno inferior. Conforme poderá ser verificado com deduções anteriores, para forças nodais equivalentes, esse carregamento corresponde a ter forças para baixo, respectivamente, de -1.000kgf nos nós 1 e 3 e de -2.000kgf em 2. O módulo de elasticidade é $E = 2 \times 10^6\text{kgf}/\text{cm}^2$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,1$.

Na figura os algarismos romanos dentro de retângulos identificam os subdomínios triangulares (*I a VIII*) e os algarismos arábicos adjacentes aos vértices designam números globais dos 9 nós.

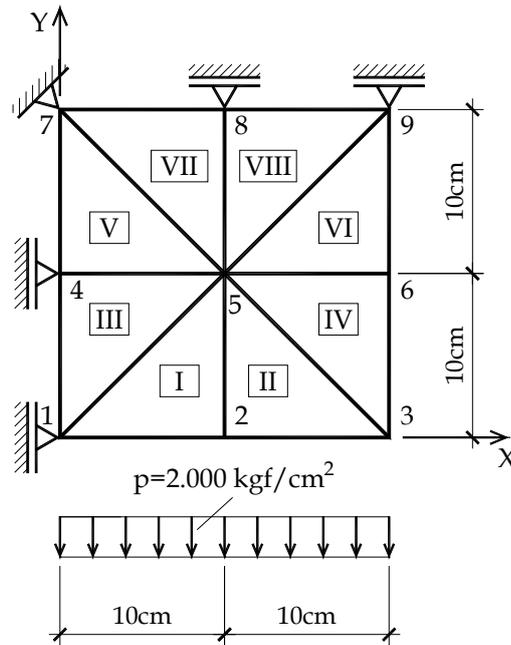


Figura 3.3 – Chapa com estado uniforme de tensão

a) Montagem da matriz de rigidez da estrutura

Para montar a matriz de rigidez da estrutura é necessário estabelecer a correspondência entre a sequência de numeração local – (i, j, k) dos nós de cada subdomínio - e a numeração global dos nós da estrutura. Isto significa definir qual a posição que cada subdomínio ocupará na estrutura.

A Tab. 3.1 resume essa correspondência local/global para os 8 elementos.

Tabela 3.1

Subdomínio	Nó i	Nó j	Nó k
1	1	2	5
2	2	3	5
3	1	5	4
4	3	6	5
5	4	5	7
6	5	6	9
7	5	8	7
8	5	9	8

Assim como essas informações definem a posição que cada subdomínio ocupará na estrutura, também indicarão as posições dos coeficientes de cada matriz de rigidez e de forças nodais dos subdomínios nas correspondentes matrizes da estrutura completa. Idem para formar o vetor de forças, quando se tiver lados carregados. Quando os carregamentos forem aplicados diretamente aos nós a montagem do vetor de forças da estrutura será feita diretamente.

Preliminarmente, para que a matriz de rigidez da estrutura tenha largura de banda menor, o que redundará em menor trabalho computacional, é necessário que o par de parâmetros U_i e V_i do nó genérico i da estrutura esteja em posições adjacentes no vetor de todos os parâmetros nodais. Quer dizer, enquanto ao nível do subdomínio a ordenação dos parâmetros nodais é

$$\mathbf{d}^{nt} = \{u_i \quad u_j \quad u_k \quad v_i \quad v_j \quad v_k\} \quad (3.52)$$

para a estrutura é conveniente utilizar o vetor de parâmetros nodais seguinte:

$$D^{nt} = \{D_1^t \quad D_2^t \quad . \quad . \quad D_i^t \quad .\} \tag{3.53}$$

onde

$$D_i^t = \{U_i \quad V_i\} \tag{3.54}$$

e U_i, V_i são as componentes do deslocamento do nó i da estrutura, segundo eixos globais X, Y .

Aplica-se, então a seguir, os resultados para a solução do problema proposto da chapa retangular.

Para efeito de demonstração didática, adota-se o procedimento explicativo já utilizado no caso do exemplo **V13N**.

Suponha que cada matriz de rigidez k , de cada subdomínio triangular, seja expandida, passando-se da ordem local (6 x 6) para a ordem (18 x 18) da matriz de rigidez K da estrutura.

Contribuição do subdomínio I

Então, de maneira simbólica, a matriz (3.46), particularizada para o subdomínio I , contribui nas posições correspondentes aos nós 1,2 e 5, indicadas por I no “gabarito” da matriz de rigidez da estrutura, mostrada abaixo com as suas 18 colunas e 14 das suas 18 linhas. As posições não preenchidas com I terão valores iniciais nulos, por ser este o primeiro subdomínio a contribuir para K . Apenas para facilitar a visualização, valores nulos estão substituídos pelo sinal “ponto”.

$$\begin{bmatrix} I & I & I & I & . & . & . & . & I & I & . & . & . & . & . & . & . & . \\ I & I & I & I & . & . & . & . & I & I & . & . & . & . & . & . & . & . \\ I & I & I & I & . & . & . & . & I & I & . & . & . & . & . & . & . & . \\ I & I & I & I & . & . & . & . & I & I & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ I & I & I & I & . & . & . & . & I & I & . & . & . & . & . & . & . & . \\ I & I & I & I & . & . & . & . & I & I & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

Outra contribuição para K , agora da matriz de rigidez expandida do subdomínio IV aparece a seguir, que tem os nós 3, 6 e 5. As posições em K onde há contribuição deste subdomínio estão indicadas com IV .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 2 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 3 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 4 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 5 & . & . & . & IV & IV & . & . & IV & IV & IV & IV & . & . & . & . & . & . \\ 6 & . & . & . & IV & IV & . & . & IV & IV & IV & IV & . & . & . & . & . & . \\ 7 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 8 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 9 & . & . & . & IV & IV & . & . & IVI & IVI & IV & IV & . & . & . & . & . & . \\ 10 & . & . & . & IV & IV & . & . & IVI & IVI & IV & IV & . & . & . & . & . & . \\ 11 & . & . & . & IV & IV & . & . & IV & IV & IV & IV & . & . & . & . & . & . \\ 12 & . & . & . & IV & IV & . & . & IV & IV & IV & IV & . & . & . & . & . & . \\ 13 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

Os algarismos arábicos não correspondem a contribuições de outros subdomínios para K .

Estão em posições ocupadas por valores nulos na matriz de rigidez expandida do subdomínio *IV*. Apenas servem como orientação para localização de linhas e colunas.

Também não estão mostrados outros valores anteriores dos coeficientes da matriz de rigidez, relativos a subdomínios já contribuintes para ***K***.

Note-se que os subdomínios *I* e *IV* têm o nó 5 em comum. Portanto haverá soma das contribuições nas posições 9,9; 9,10; 10,9 e 10,10 da matriz ***K*** de rigidez da estrutura. Estes elementos de ***K***, onde ocorrerão essas superposições, estão destacados com ***IVI*** em negrito. Com idêntico procedimento, as contribuições dos outros 6 subdomínios serão acrescentadas à matriz ***K*** de rigidez da estrutura. De forma semelhante monta-se a matriz ***Fⁿ*** de forças nodais da estrutura, a partir das matrizes de forças nodais de cada lado carregado.

Ficará então completo o sistema de equações

$$\mathbf{KD}^n = \mathbf{F}^n \quad (3.57)$$

Sobre ele devem ser impostas as condições de contorno, neste caso descritas por:

$$U_1 = U_4 = U_7 = V_7 = V_8 = V_9 = 0 \quad (3.58)$$

b) Solução do problema

Resolve-se o problema com programa de computador específico, que processará desde a formação das matrizes dos subdomínios, a formação das matrizes de rigidez ***K***, ***Fⁿ***, imposições das condições de contorno, obtendo-se os resultados dos deslocamentos nodais.

Deslocamentos (cm)

$$\begin{aligned} U_1 &= U_4 = U_7 = +0,000 \\ U_2 &= U_5 = U_8 = -0,001 \\ U_3 &= U_6 = U_9 = -0,002 \\ \\ V_7 &= V_8 = V_9 = +0,000 \\ V_4 &= V_5 = V_6 = -0,010 \\ V_1 &= V_2 = V_3 = -0,020 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Como curiosidade, menciona-se que, embora não se trate de uma “barra” com solicitação axial, a uniformidade da seção transversal, a vinculação e o carregamento, permitem obter o alongamento ΔL_y da chapa, na direção *y*, com o cálculo

$$\Delta L_y = \frac{NL}{EA} = \frac{2000 \times 20 \times 20}{2 \times 10^6 \times 1 \times 20} = 0,02 \text{ cm} \quad (3.60)$$

que coincide com os módulos dos deslocamentos V_1, V_2, V_3 .

Com a solução como problema bidimensional obtiveram-se também os encurtamentos *U* na direção *x*, ditados pelo coeficiente de Poisson $\nu = 0,1$.

c) Cálculo das deformações e tensões

Conforme já assinalado, a partir dos deslocamentos, o programa de computador calculará deformações específicas, tensões, etc. Aqui, como se trata de problema relativamente simples, faz-se a apresentação explícita e manual dos cálculos, para fins didáticos.

Para o cálculo das deformações utilizam-se as expressões (3.34) e (3.30 a,b,c), repetidas abaixo

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} \omega_i u_i + \omega_j u_j + \omega_k u_k \\ \eta_i v_i + \eta_j v_j + \eta_k v_k \\ \eta_i u_i + \eta_j u_j + \eta_k u_k + \omega_i v_i + \omega_j v_j + \omega_k v_k \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\omega_i = y_j - y_k$$

(3.30 a,b,c)

$$\eta_i = -x_j + x_k$$

Para sistematizar prepara-se a Tab. 3.2

Tabela 3.2

Subdomínio	Nós	x	y	ω	η	u	v	$\varepsilon_x \cdot 2A$	$\varepsilon_y \cdot 2A$	$\gamma_{xy} \cdot 2A$
I	1	0	0	-10	0	0,000	-0,020	-0,01	0,1	0,0
	2	10	0	10	-10	-0,001	-0,020			
	5	10	10	0	10	-0,001	-0,010			
II	2	10	0	-10	-10	-0,001	-0,020	-0,01	0,1	0,0
	3	20	0	10	0	-0,002	-0,020			
	5	10	10	0	10	-0,001	-0,010			
III	1	0	0	0	-10	0,000	-0,020	-0,01	0,1	0,0
	5	10	10	10	0	-0,001	-0,010			
	4	0	10	-10	10	0,000	-0,010			
IV	3	20	0	0	-10	-0,002	-0,020	-0,01	0,1	0,0
	6	20	10	10	10	-0,002	-0,010			
	5	10	10	-10	0	-0,001	-0,010			
V	4	0	10	-10	-10	0,000	-0,010	-0,01	0,1	0,0
	5	10	10	10	0	-0,001	-0,010			
	7	0	20	0	10	0,000	0,000			
VI	5	10	10	-10	0	-0,001	-0,010	-0,01	0,1	0,0
	6	20	10	10	-10	-0,002	-0,010			
	9	20	20	0	10	-0,002	0,000			
VII	5	10	10	0	-10	-0,001	-0,010	-0,01	0,1	0,0
	8	10	20	10	10	-0,001	0,000			
	7	0	20	-10	0	0,000	0,000			
VIII	5	10	10	0	-10	-0,001	-0,010	-0,01	0,1	0,0
	9	20	20	10	0	-0,002	0,000			
	8	10	20	-10	10	-0,001	0,000			

Em decorrência da variação linear admitida para as componentes dos deslocamentos, as deformações específicas serão constantes nos subdomínios!

A seguir calculam-se as tensões nos subdomínios, com

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{2 \times 10^6}{1-0,01} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

Dada a uniformidade da deformação, os valores abaixo ocorrerão em todos os subdomínios:

$$\sigma_x = \frac{2 \times 10^6}{0,99} (-0,01 + 0,1 \times 0,1) = 0,0$$

$$\sigma_y = \frac{2 \times 10^6}{0,99} \{0,1 \times (-0,01) + 0,1\} = 2000 \text{ kgf cm}^2$$

$$\tau_{xy} = 0$$

que correspondem à resposta exata para o problema. Isto ocorreu porque o exemplo considerado apresenta campos de tensões constantes em face da solicitação e vinculação apresentadas.

Desse modo, as deformações também são constantes em cada subdomínio. Em caso genérico, cada subdomínio teria deformações ε_x , ε_y e γ_{xy} . Por esse motivo, em um nó onde concorressem os vértices de m subdomínios triangulares haveria m valores diferentes para aquelas deformações. Para ter algo representativo, um valor médio poderia ser calculado para cada uma das três componentes nesse nó. Outra alternativa poderia ser a consideração de valores daquelas deformações nos centroides dos subdomínios.

Conforme o leitor interessado poderá constatar, em textos especializados sobre o método dos elementos finitos, podem ser utilizados subdomínios com funções de aproximação de ordem mais elevada que permita adotar, além dos valores dos deslocamentos nodais, valores das derivadas parciais das componentes de deslocamento nesses nós. Nesses casos, os valores das deformações nodais seriam obtidos diretamente e com valores únicos.

Observação: O exemplo apresentado utilizou sistemas de coordenadas locais (nos subdomínios) e globais com eixos de direções e sentidos coincidentes. Caso isto não ocorresse deveriam ser consideradas as adequadas transformações durante as deduções e as aplicações. Detalhes sobre isto podem ser encontrados em vários textos sobre o método dos elementos finitos, por exemplo em Rao, S.S., 1989.

3.4.2 Subdomínios triangulares com aproximação de grau superior

Em casos de chapas com geometria e carregamentos menos regulares será necessário fazer-se uma discretização em muitos subdomínios para obter tensões bem aproximadas.

Outra alternativa, preferível, será utilizar subdomínios com funções de aproximação de grau superior.

A seguir indica-se a figura de subdomínio com 6 nós (3 nos vértices e 3 nos centros dos lados). Este subdomínio é rotulado com a sigla *LST* (*Linear Strain Triangle*).

Para aproximar as componentes de deslocamento são utilizadas funções de segundo grau

$$\begin{aligned} u &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 \\ v &= \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2 \end{aligned} \quad (3.62)$$

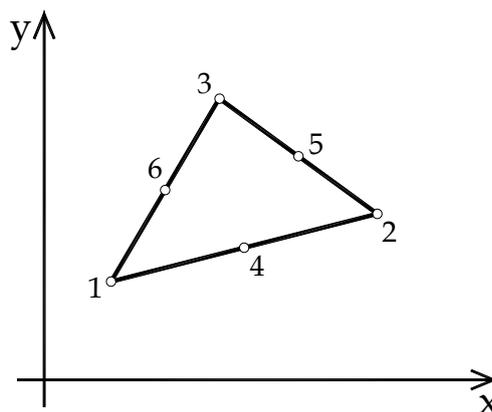


Figura 3.4 – Elemento LST

Analogamente ao que foi feito para o subdomínio com aproximações lineares pode-se definir o vetor de parâmetros nodais

$$\mathbf{d}_s^{nt} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6\} \quad (3.63)$$

e, com as expressões (3.62), particularizadas para os 6 nós do subdomínio, determinar os α_i, β_i em função dos u_i, v_i . Substituindo-os em (3.62), ter-se-á as expressões de u, v dependentes de parâmetros nodais. Seguindo-se o procedimento adotado para o subdomínio triangular com aproximações lineares, chega-se às matrizes k_s e f_m do subdomínio *LST*.

3.4.3 Subdomínios poligonais (quadrângulos, etc.)

Também é possível utilizar subdomínios com outras formas geométricas tais como retângulos, paralelogramos, quadrângulos, etc. com as funções de aproximação correspondentes.

Sobre isto também fica a sugestão de consulta a textos específicos para os leitores interessados.

3.5 FLEXÃO DE PLACAS

3.5.1 Introdução

Os elementos estruturais tratados em 3.4 - chamados de superfície ou laminares, pois têm pequena espessura em relação às demais dimensões e são simétricos em relação a um plano médio - também podem desempenhar a função de placas, quando submetidos a ações ortogonais ao seu plano médio. A espessura pode ser constante ou pouco variável. A laje é um caso particular de placa, constituída de material litóide e cujo plano médio é horizontal.

A consideração de certas hipóteses, mencionadas no item seguinte, permite definir um modelo cinemático simples para descrição do comportamento das placas. Chega-se a algo semelhante ao que já se utilizou para as vigas, bastando, no caso das placas, determinar a função $w(x, y)$ que expressará o estado de deslocamentos transversais, na direção z , dos pontos do plano médio admitido coincidente com o plano coordenado x, y .

Ao tratar o problema das placas, com um método numérico baseado na discretização da estrutura em subdomínios, será admitido, como feito anteriormente, que as hipóteses válidas para a estrutura também valham para o subdomínio. Desse modo, a placa representada pelo seu modelo, reduzido ao problema bidimensional do seu plano médio, será dividida em partes formadas por polígonos planos adequados, que permitam considerar particularidades do interior da placa ou do seu contorno (onde deslocamentos forem conhecidos). As formas de polígonos mais comumente empregadas são a triangular e a quadrangular (retângulo em particular).

3.5.2 Hipóteses

Somente serão considerados os casos de placas delgadas que estejam obedientes ao seguinte conjunto de hipóteses:

- a) o material é elástico e segue a lei de Hooke;
- b) a espessura d é pequena;
- c) as rotações das seções transversais e os deslocamentos transversais são pequenos;
- d) as componentes dos deslocamentos contidos no plano médio são desprezíveis;
- e) qualquer reta ortogonal ao plano médio mantém-se reta e ortogonal à superfície média;
- f) as tensões σ_z são desprezíveis.

A teoria correspondente a esse conjunto de hipóteses é usualmente conhecida como a das placas delgadas de Kirchhoff.

Pode-se ainda admitir, para o caso correspondente, que o material seja homogêneo e isótropo. Nesse caso tem-se a teoria das placas isótropas. Em caso mais geral tem-se a teoria das placas ortótropas.

3.5.3 Esforços solicitantes

Para as placas (assim como para outros elementos de superfície) é necessário definir esforços solicitantes por unidade de comprimento. Por exemplo, para o momento fletor, que em uma placa de concreto armado exigisse armadura correspondente na direção x , ter-se-ia, na seção transversal ortogonal ao eixo x :

$$m_x = \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_x \cdot 1 \cdot z \, dz \quad (3.64)$$

onde a força elemental $\sigma_x (1) dz$, correspondente a uma área de superfície elemental de largura unitária na direção y , trabalha com o braço z para produzir momento elemental $\sigma_x \cdot 1 \cdot z \, dz$ em relação ao eixo neutro situado na interseção do plano médio com o plano da seção transversal.

Os outros esforços serão definidos, de modo semelhante, por unidade de comprimento e todos estão mostrados na Fig. 3.5.

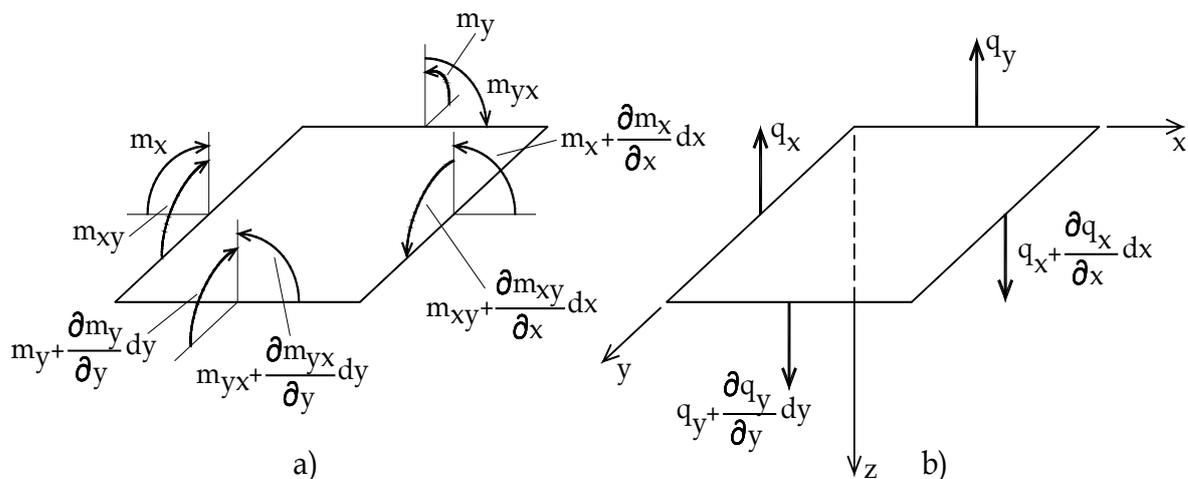


Figura 3.5 – Esforços solicitantes

3.5.4 Energia potencial total; esquema geral para o processo dos deslocamentos

A energia de deformação de cada subdomínio s é avaliada pela expressão já apresentada anteriormente

$$u_s = \int_V u_0 dV \quad (3.65)$$

com V indicando, como anteriormente, tratar-se do volume do subdomínio.

Sabe-se que

$$u_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.66)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^t = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\} \quad (3.67 \text{ a,b})$$

3.5.4.1 Estado de tensões em ponto genérico da placa

No caso das placas delgadas, com as hipóteses já feitas, resulta que:

$$\sigma_z = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (3.68)$$

É isto é válido para qualquer “lâmina” a uma distância y do plano médio e a ele paralela. Então, com uso da lei de Hooke resulta

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (3.69)$$

Portanto, para a citada lâmina a situação é análoga à de um estado plano de tensões.

Restam, então, σ_x, σ_y e τ_{xy} como tensões não nulas e $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e γ_{xy} como deformações correspondentes, cujos produtos contribuirão para \mathcal{U}_0 . Isso significa que em cada cota z pode-se considerar uma parte $dx dy$ da lâmina, (com altura dz), paralela ao plano médio, submetida a estado plano de tensões.

Mantendo-se ainda a nomenclatura que toma $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ como representantes dos vetores que conterão apenas as componentes não nulas de deformações e tensões, fica-se com

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\} \quad \boldsymbol{\sigma}^t = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\} \quad (3.70)$$

Com base na lei de Hooke, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{D}_{pt} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.72)$$

Mantendo-se nomenclatura anterior, pela teoria de pequenas deformações aqui admitida, tem-se que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \quad (3.73)$$

3.5.4.2 Modelo cinemático admitido para os deslocamentos da placa

Diante das hipóteses acima enumeradas é plausível que o campo de deslocamentos, que pode se instalar na placa, seguirá a hipótese cinemática análoga à que se admitiu para o estudo da flexão de vigas.

Então, no problema bidimensional, ter-se-á:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.74 \text{ a,b})$$

de onde resulta

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = -z \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} = -z \boldsymbol{\kappa}^t \quad (3.75)$$

onde $\boldsymbol{\kappa}$ é o vetor das curvaturas em um ponto genérico da superfície média.

3.5.4.3 Energia de deformação

Substituindo na expressão da energia de deformação do subdomínio (3.65), tem-se, considerando-se a integração iterada na espessura e na área da superfície,

$$\mathcal{U}_s = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \int_z -z \boldsymbol{\kappa}^t \mathcal{D}_{pt} \boldsymbol{\kappa}(-z) dz \right\} dA \quad (3.76)$$

Tendo-se em vista que para um ponto genérico x, y, z não ocorrem variações das entidades ao longo do eixo z , pode-se integrar segundo essa direção e obter-se

$$\mathcal{U}_s = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z^2 dz \right\} \boldsymbol{\kappa}^t \mathcal{D}_{pt} \boldsymbol{\kappa} dA \quad (3.77)$$

Fazendo-se cálculo intermediário

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z^2 dz = \frac{d^3}{12} \quad (3.78)$$

e incorporando-se esse escalar como multiplicador da matriz \mathcal{D}_{pt} de constantes elásticas em (3.71), (3.72), isto é, definindo-se

$$\mathcal{D}_b = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} = \mathcal{D}_b^* \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

tem-se

$$\mathcal{U}_s = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^t \mathcal{D}_b \boldsymbol{\kappa} dA \quad (3.80)$$

3.5.4.4 Potencial de carregamento externo

O potencial das forças externas, quando distribuídas e designadas por $p(x, y)$, será, por definição:

$$\Omega_s = - \int_A w^t p(x, y) dA \quad (3.81)$$

3.5.4.5 Energia potencial total

Portanto a energia potencial total do subdomínio fica sob a forma

$$\Pi = \mathcal{U} + \Omega = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^t \mathcal{D}_b \boldsymbol{\kappa} dA - \int_A w^t p(x, y) dA \quad (3.82)$$

3.5.4.6 Princípio da mínima energia potencial total

3.5.4.6.1 Solução analítica

O princípio da mínima energia potencial total estabelece que: “se a estrutura está em equilíbrio estável a primeira variação de Π será nula, isto é $\delta\Pi = 0$ (e $\delta^2\Pi \geq 0$)”.

Conforme já mencionado em capítulo anterior, a aplicação desse princípio, por meio analítico, requereria conhecimentos de Cálculo Variacional.

No caso obediente às hipóteses acima enumeradas em 3.5.3, o resultado a obter, impondo-se $\delta\Pi = 0$, será representado pela conhecida equação diferencial que rege o problema, conforme pode ser visto, por exemplo, em Timoshenko e Woinowski-Krieger (1964)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{\mathcal{D}_b^*} \quad (3.83)$$

e mais equações relativas a condições de contorno. Analogamente ao que já se comentou anteriormente, essa equação também pode ser deduzida pela via clássica da abordagem local.

Na equação (3.83) o escalar \mathcal{D}_b^* representa a rigidez da placa, conforme (3.79).

Pode ser mostrado que a solução analítica do problema corresponde a valor mínimo para Π .

3.5.4.6.2 Soluções aproximadas com subdomínios retangulares

Aborda-se a apresentação seguinte, com:

- a) a apresentação do detalhamento da aplicação do método da energia potencial total ao subdomínio retangular mais simples, que tem 12 parâmetros nodais e
- b) aplicação desse elemento ao caso de uma placa quadrada, para os casos de vinculação correspondentes a apoio simples em todo o contorno, engastamento perfeito em todo o contorno ou apoios somente nos cantos, com carregamentos constituídos por força uniforme em toda a placa ou força concentrada no centro da placa.

a) Detalhamento do emprego do elemento retangular com 12 parâmetros nodais

Assim como nos casos de elementos estruturais unidimensionais, o objeto de interesse, aqui, não é a obtenção da equação diferencial, uma vez que para ela, na maioria dos casos, não se terá solução analítica exata.

Então, volta ao foco a necessidade de obtenção de soluções aproximadas. É nesta etapa, então, que entra em jogo o esquema do método da energia (ou método dos elementos finitos).

De modo análogo ao que se emprega no método de Rayleigh-Ritz, porém adotando-se funções de aproximação no subdomínio (elemento finito), para a incógnita básica $w(x, y)$, forma-se a expressão aproximada da energia potencial total para cada subdomínio.

Assim como anteriormente, a função de aproximação estará expressa em termos de parâmetros incógnitos (generalizados ou nodais). Tendo-se em vista que Π será formado com derivadas segundas de $w(x, y)$ em \mathcal{U}_s e com o próprio $w(x, y)$ em Ω_s , trabalhando com o carregamento das forças transversais, conclui-se que Π se tornará função desses parâmetros incógnitos. Essa conclusão é aplicável tanto a Π_s quanto a Π pois

$$\Pi = \sum \Pi_s \quad (3.84)$$

Ficando restritos ao caso de um subdomínio, esses parâmetros incógnitos podem ser os parâmetros nodais *finais*, aqui designados como w^n .

O subdomínio retangular é bastante simples para poder ser utilizado na tarefa de descrever os passos da aplicação do método da energia ao problema das placas.

É claro que somente valores w_i nos 4 vértices não poderiam ser utilizados para, juntamente com funções de aproximação correspondentes, constituir uma aproximação para o subdomínio porque, se assim fosse a variação de $w(x, y)$, ela seria apenas linear e as derivadas segundas todas nulas! Essa função de aproximação não permitiria ocorrência de energia de deformação correspondente.

Desse modo, além dos w_i , outros parâmetros nodais devem ser acrescentados. As derivadas de $w(x, y)$ são candidatas. Se em um nó for escolhida a derivada de w em relação a x , para não introduzir preferências, a derivada em relação a y também deverá ser adotada. Com isto, tendo-se 4 nós, o número total de parâmetros nodais será 12.

Considerando-se os monômios em x, y de grau crescente, que sequencialmente figuram em um polinômio de grau 4, e mais um monômio de grau 6, fica-se com a situação abaixo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & x & & y \\
 & & & x^2 & & xy & & y^2 \\
 & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \\
 x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 \\
 & & & & & & & & & x^3y^3
 \end{array} \quad (3.85)$$

Até o terceiro grau completo tem-se 10 monômios. Faltam dois para ter o número

necessário, correspondente aos 12 parâmetros. Para manter simetria geométrica, tem-se três escolhas possíveis dentre pares de monômios de grau superior ao terceiro: $(x^4 \text{ e } y^4)$, $(x^3y \text{ e } xy^3)$ ou $(x^2y^2 \text{ e } x^3y^3)$.

Adota-se, para o que segue, a segunda dupla $(x^3y \text{ e } xy^3)$.

Tem-se, então, como ponto de partida, com parâmetros generalizados:

$$w = \boldsymbol{\varphi}(x, y)\boldsymbol{\alpha} \quad (3.86)$$

onde

$$\boldsymbol{\varphi}^t(x, y) = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad \cdot \quad \cdot \quad xy^3 \quad xy^3\} \text{ e } \boldsymbol{\alpha}^t = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \cdot \quad \cdot \quad \alpha_{12}\} \quad (3.87 \text{ a,b})$$

Conforme comentado anteriormente, para melhor sistematizar o procedimento, visando a necessária codificação em computador, é necessário passar-se para uso de parâmetros nodais que, neste caso podem ser, diante do que foi analisado,

$$\boldsymbol{w}^{nt} = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \theta_{y4}\} \quad (3.88)$$

onde

$$w_i = w(x_i, y_i) \quad \theta_{xi} = \frac{\partial w}{\partial y}(x_i, y_i) \quad \theta_{yi} = -\frac{\partial w}{\partial x}(x_i, y_i) \quad (3.89 \text{ a,b,c})$$

A particularização de (3.86) para a formação do vetor de parâmetros nodais dará

$$\boldsymbol{w}^n = \boldsymbol{G}\boldsymbol{\alpha} \quad (3.90)$$

de onde pode ser obtido

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{w}^n \quad (3.91)$$

e, portanto

$$w = \boldsymbol{\varphi}(x, y)\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{w}^n = \boldsymbol{G}\boldsymbol{w}^n \quad (3.92)$$

A partir daí, a formulação tantas vezes empregada nesta publicação pode ser aplicada para obter, com o princípio da mínima energia potencial, o relacionamento entre forças nodais e deslocamentos nodais, por meio da matriz de rigidez, isto é:

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{d}^n = \boldsymbol{f} \quad (3.93)$$

Ocorre, como é fácil observar-se, que a matriz \boldsymbol{G} e sua inversa dependem das coordenadas dos vértices do retângulo. Então cada subdomínio diferente exigiria o cálculo da inversa de \boldsymbol{G} , onerando o processamento.

Então, assim como foi feito em casos anteriores, pode-se passar a usar parâmetros nodais e coordenadas homogêneas no plano do subdomínio, conforme a Fig. 3.6 e explicações subsequentes.

Retome-se a expressão (3.86), agora com os monômios descritos por coordenadas homogêneas definidas por

$$\xi = \frac{x-x_c}{a} \quad \eta = \frac{y-y_c}{b} \quad (3.94 \text{ a,b})$$

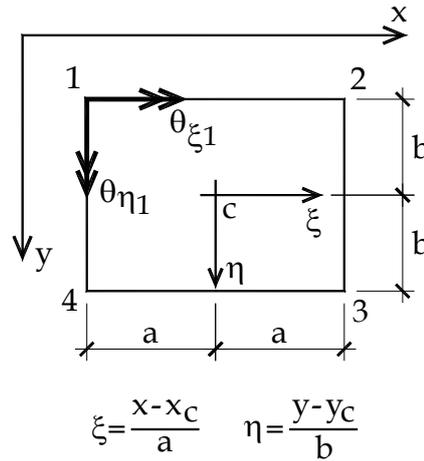


Figura 3.6 - Elemento retangular

onde x_c e y_c são coordenadas do centróide do retângulo.

Tem-se, então

$$w(\xi, \eta) = \boldsymbol{\varphi}(\xi, \eta) \boldsymbol{\alpha} \quad (3.86)$$

Defina-se o vetor de parâmetros nodais *iniciais* relativos às coordenadas homogêneas

$$\bar{\boldsymbol{w}}^{nt} = \{w_1 \quad \theta_{\xi 1} \quad \theta_{\eta 1} \quad w_2 \quad \theta_{\xi 2} \quad \theta_{\eta 2} \quad \dots \quad \theta_{\eta 4}\} \quad (3.95)$$

Agora, ao particularizar-se a expressão (3.86) para formar $\bar{\boldsymbol{w}}^n$, as dimensões dos lados do subdomínio retangular não estarão presentes, pois as coordenadas são adimensionais.

Tem-se, portanto

$$\bar{\boldsymbol{w}}^n = \bar{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.96)$$

o que significa que a matriz $\bar{\boldsymbol{G}}$ é numérica (não literal), pois as coordenadas homogêneas variam entre os limites $[-1, 1]$.

Então, apenas uma vez deverá ser invertida, para obter-se

$$\boldsymbol{\alpha} = \bar{\boldsymbol{G}}^{-1} \bar{\boldsymbol{w}}^n \quad (3.97)$$

portanto

$$w = \boldsymbol{\varphi}(\xi, \eta) \bar{\boldsymbol{G}}^{-1} \bar{\boldsymbol{w}}^n$$

Pretendendo-se passar a usar parâmetros nodais *finais* relativos a x, y

$$\boldsymbol{w}^{nt} = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \dots \quad \theta_{y4}\} \quad (3.98)$$

observe-se que

$$\theta_{xi} = \frac{\partial w}{\partial y}(x_i, y_i) = \frac{\partial w}{\partial \eta}(\xi_i, \eta_i) \frac{\partial \eta}{\partial y} = b^{-1} \theta_{\xi i} \quad (3.99)$$

$$\theta_{yi} = \frac{-\partial w}{\partial x}(x_i, y_i) = \frac{-\partial w}{\partial \xi}(\xi_i, \eta_i) \frac{\partial \xi}{\partial x} = a^{-1} \theta_{\eta i} \quad (3.100)$$

Pode-se, então, escrever o relacionamento entre os parâmetros nodais *iniciais* e *finais* mediante uso de uma matriz diagonal $\bar{\mathbf{G}}$, isto é

$$\bar{\mathbf{w}}^n = [1 \ b \ a \ 1 \ b \ a \ 1 \ b \ a \ 1 \ b \ a] \mathbf{w}^n \quad (3.101)$$

ou

$$\bar{\mathbf{w}}^n = \mathbf{Z} \mathbf{w}^n \quad (3.102)$$

onde \mathbf{Z} é a matriz diagonal presente em (3.101), de ordem 12 x 12, neste caso.

Então

$$w(\xi, \eta) = \boldsymbol{\varphi}(\xi, \eta) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{w}^n = \boldsymbol{\phi} \mathbf{w}^n \quad (3.103)$$

Essa expressão conterá uma combinação linear das funções de $\varphi(\xi, \eta)$, afetadas pelas dimensões a e b , de um subdomínio genérico, que levam em conta a geometria.

Fazendo-se as operações, resultam as doze funções contidas em $\boldsymbol{\phi}$ apresentadas a seguir em (3.104)

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -(-1 + \xi)(-1 + \eta)(-2 + \xi + \xi^2 + \eta + \eta^2)/8 \\ \phi_2 &= -b(\xi - 1)(\eta - 1)^2(\eta + 1)/8 \\ \phi_3 &= a(-1 + \xi)^2(1 + \xi)(-1 + \eta)/8 \\ \phi_4 &= (1 + \xi)(-1 + \eta)(-2 - \xi + \xi^2 + \eta + \eta^2)/8 \\ \phi_5 &= b(1 + \xi)(-1 + \eta)^2(1 + \eta)/8 \\ \phi_6 &= a(-1 + \xi)(1 + \xi)^2(-1 + \eta)/8 \\ \phi_7 &= -(1 + \xi)(1 + \eta)(-2 - \xi + \xi^2 - \eta + \eta^2)/8 \\ \phi_8 &= b(1 + \xi)(-1 + \eta)(1 + \eta)^2/8 \\ \phi_9 &= -a(-1 + \xi)(1 + \xi)^2(1 + \eta)/8 \\ \phi_{10} &= (-1 + \xi)(1 + \eta)(-2 + \xi + \xi^2 - \eta + \eta^2)/8 \\ \phi_{11} &= -b(-1 + \xi)(-1 + \eta)(1 + \eta)^2/8 \\ \phi_{12} &= -a(-1 + \xi)^2(1 + \xi)(1 + \eta)/8 \end{aligned} \quad (3.104)$$

Com estas funções de forma associadas aos parâmetros nodais \mathbf{w}^n pode-se formar o vetor de curvaturas $\boldsymbol{\kappa}$ e, com o tipo de carregamento atuante, calcular o potencial das forças externas.

Com isso, a energia potencial total pode ser formada, assim como sua primeira variação.

Seguindo-se os passos usuais de imposição do mínimo para a energia potencial total, chega-se à expressão do relacionamento entre os deslocamentos nodais e as forças nodais equivalentes, por meio da matriz de rigidez do subdomínio.

A seguir, apresenta-se apenas a expressão do vetor de forças nodais equivalentes ao caso de carregamento uniforme $p = p(\xi, \eta)$ sobre todo o subdomínio. Neste caso, com força externa constante sobre o subdomínio, o cálculo do potencial das forças externas exigirá apenas a integração iterada de cada uma das funções de forma na área do subdomínio, o que pode ser feito com facilidade.

Tem-se, então, o transposto do vetor de forças

$$f^t = \frac{pab}{3} \{3 \quad b \quad -a \quad 3 \quad b \quad a \quad 3 \quad -b \quad a \quad 3 \quad -b \quad -a\} \tag{3.105}$$

b) Aplicação à placa quadrada

Para ilustrar a aplicação do elemento finito retangular deste capítulo, será considerado o caso de placa quadrada, de vão L , sob a ação de força uniformemente distribuída em todo o domínio e sob força concentrada no centro. A placa poderá estar simplesmente apoiada, ou engastada em todo o contorno, ou apoiada em quatro colunas de canto.

Para o caso da rede mais simples, com 2×2 subdomínios quadrados, o cálculo poderia ser feito manualmente com pouco trabalho, lançando-se mão de considerações de dupla simetria. Assim fazendo-se, haveria apenas um subdomínio a considerar. No sistema de equações correspondentes, com a imposição de condições de contorno e decorrentes da simetria restariam poucas incógnitas livres. Esse cálculo manual pode ser sugerido como exercício para leitor interessado.

Todavia, para as redes subsequentes esse trabalho manual seria mais trabalhoso. Foi então empregado programa de computador específico para a solução numérica, cujos resultados estão nas tabelas seguintes, para dois casos de carregamento (uniforme em toda a placa e com força concentrada central) e três vinculações diferentes acima definidas.

Tabela 3.2
Placa quadrada totalmente subdividida
carregamento uniforme ($\nu = 0,3$)

Rede	nós	Simplesmente apoiada		Engastada	
		c_{ws}	c_{ms}	c_{we}	c_{me}
2x2	9	0,0050632	0,066018	0,0014796	0,046165
4x4	25	0,0043282	0,052169	0,0014033	0,027783
8x8	81	0,0040169	0,048040	0,0013039	0,024048
16x16	289	0,0040507	0,047912	0,0012752	0,023187
Timoshenko		0,004062	0,04789	0,00126	0,0231

$$w_{max} = \frac{(c_{ws} \text{ ou } c_{we})qL^4}{D_b^*} \qquad m_{max} = (c_{ms} \text{ ou } c_{me})qL^2$$

Tabela 3.3
Placa quadrada totalmente subdividida
Força concentrada no centro ($\nu = 0,3$)

Rede	nós	Simplesmente apoiada		Engastada	
		c_{ws}	c_{ms}	c_{we}	c_{me}
2x2	9	0,0137841	0,2282356	0,0059186	0,1846591
4x4	25	0,0123272	0,2954842	0,0061344	0,2439642
8x8	81	0,0116106	0,3647076	0,0058026	0,3131995
16x16	289	0,0116155	0,4375156	0,0056721	0,3843569
Timoshenko		0,01160	-	0,00560	-

$$w_{max} = \frac{(c_{ws} \text{ ou } c_{we})PL^2}{D_b^*} \qquad m_{max} = (c_{ms} \text{ ou } c_{me})P$$

Tabela 3.4
Placa quadrada totalmente subdividida
carregamento uniforme ($\nu = 0,3$)
Apoiada nos cantos

Rede	nós	Meio do lado		Centro da placa	
		c_{wL}	c_{mL}	c_{wc}	c_{mc}
2x2	9	0,0145342	0,1741479	0,0217898	0,1175188
4x4	25	0,0167704	0,1530460	0,0242957	0,1155326
8x8	81	0,0174881	0,1510348	0,0251778	0,1126989
16x16	289	0,0176813	0,1505938	0,0254214	0,1119565
Timoshenko		0,0170	0,14049	0,0249	0,1090

$$w_{max} = \frac{(c_{wL} \text{ ou } c_{wc})qL^4}{D_b^*} \quad m_{max} = (c_{ms} \text{ ou } c_{me})qL^2$$

Tabela 3.5
Placa quadrada totalmente subdividida
Força concentrada no centro ($\nu = 0,3$)
Apoiada nos cantos

Rede	nós	Meio do Lado		Centro da placa	
		c_{wL}	c_{mL}	c_{wc}	c_{mc}
2x2	9	0,0182148	0,2096379	0,0347041	0,2903620
4x4	25	0,0214593	0,1986987	0,0378162	0,3762874
8x8	81	0,0225340	0,2023024	0,0388261	0,4483472
16x16	289	0,0228167	0,2028681	0,0390712	0,5200372

$$w_{max} = \frac{(c_{wL} \text{ ou } c_{wc})PL^2}{D_b^*} \quad m_{max} = (c_{mL} \text{ ou } c_{mc})P$$

3.5.4.6.3 Soluções aproximadas com subdomínios triangulares

Além do subdomínio retangular, com doze parâmetros nodais, pode-se formular outros, tanto retangulares, com maior número de parâmetros nodais, bem como com contorno poligonal diferente.

Há interesse em utilizar subdomínios triangulares para casos de placas com perímetro formado por trechos não paralelos aos eixos cartesianos, ou com contorno poligonal irregular.

Ficando restritos a alguns casos de subdomínios triangulares, tem-se:

a) Subdomínio triangular mais simples

O subdomínio triangular mais simples é aquele que apresenta como parâmetros nodais o valor de w e das duas rotações θ_x e θ_y em cada vértice. Nesse caso a função de aproximação deverá conter nove monômios extraídos do polinômio completo. Assim como ocorria com o subdomínio retangular com nove parâmetros, este caso apresentará descontinuidade da derivada normal ao lado do triângulo. Esse fato terá consequências sobre o tipo de convergência dos resultados em relação à resposta correta.

Tendo-se em vista o caráter introdutório que se pretende atribuir a este capítulo, não será detalhado o desenvolvimento do cálculo para a obtenção das matrizes de rigidez e de forças nodais equivalentes.

O esquema a ser seguido é absolutamente análogo ao que foi apresentado para elemento retangular, adaptando-se as passagens ao caso particular do subdomínio triangular.

Deixa-se ao leitor interessado a incumbência de executar esse desenvolvimento, podendo ser útil, ou necessário, consultar algum texto básico da bibliografia, por exemplo, COOK (2002).

Nesse, e em outros textos, o leitor poderá encontrar maiores detalhes sobre o assunto, inclusive no que diz respeito à utilização de coordenadas homogêneas no triângulo, para maior facilidade de integração das funções que se fizerem presentes na expressão que conduz à matriz de

rigidez k .

Outra possibilidade reside na utilização de integração numérica.

b) Subdomínio triangular com polinômio completo de 5º grau

Como fecho para este item menciona-se a existência de subdomínio triangular associado, por exemplo, à função de aproximação descrita por polinômio completo de quinto grau em x, y ou (ξ, η) que permite a manutenção de continuidade da derivada de w na direção ortogonal ao lado do triângulo, o que leva à obtenção de respostas que podem convergir, monotonicamente por baixo, para o valor correto dos deslocamentos, quando forem obedecidos certos requisitos quanto à sequência das correspondentes redes de subdomínios. Esse elemento, denominado T18, foi utilizado na EESC, em versão incorporada à Dissertação de Mestrado do Eng. José Carlos Degaspere (1978).

A tabela 3.6 mostra resultados obtidos com a aplicação do subdomínio T18 ao caso de $\frac{1}{4}$ de placa quadrada simplesmente apoiada sob carregamento uniforme subdividido conforme Fig. 3.7.

Tabela 3.6

Rede	Graus de Liberdade	c_{wc}	c_{mc}	c_{mxya}
A1	24	0,004092	0,04889	0,03082
A2	54	0,004062	0,04791	0,03204
A3	96	0,004062	0,04789	0,03227
A4	150	0,004062	0,04789	0,03237
Exato	-	0,004062	0,04789	0,03246

$$w_{max} = c_{wc}pL^4 / D_b$$

$$m_{xc} = m_{yc} = c_{mc}pL^2$$

$$m_{xya} = c_{mxya}pL^2$$

c = centro da placa

a = canto da placa

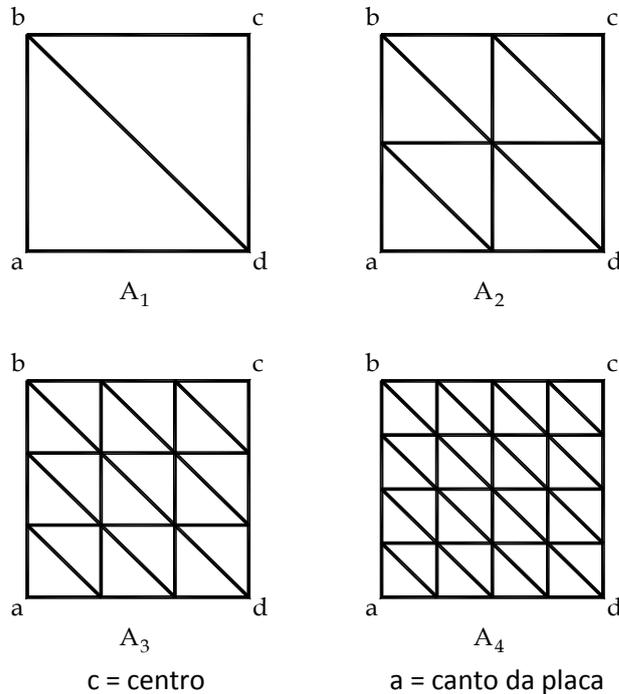


Figura 3.7 – Discretizações de $\frac{1}{4}$ da placa

4 ELEMENTOS ESTRUTURAIS TRIDIMENSIONAIS

4.1 INTRODUÇÃO

O caso mais geral dos subdomínios e funções de aproximação associadas para estruturas tridimensionais será abordado resumidamente neste capítulo.

À primeira vista poderia ser afirmado que este tipo de subdomínio é o que deveria ser empregado em qualquer análise estrutural que se pretendesse efetuar. Todavia, diante da constatação, lastreada nos ensinamentos da teoria da elasticidade, de que uma grande quantidade de estruturas pode ficar com seu comportamento muito bem definido somente com o estudo do que ocorre em seu eixo (caso das estruturas reticulares) ou em sua superfície média (caso das chapas, placas e cascas) é possível dispensar o uso de tratamento tridimensional, na maioria dos casos, daí resultando maior facilidade nas tarefas de formulação teórica, computacional, preparação de dados e interpretação de resultados. Evidentemente, conforme já salientado, ao estudar esses elementos estruturais reticulares e de superfície, que tenham uma ou duas de suas dimensões pequenas em relação às restantes, parte-se de certas hipóteses fundamentadas na teoria da elasticidade que já admitem “a priori” qual o tipo de comportamento cinemático da estrutura segundo as direções das dimensões de menor grandeza. É o caso das hipóteses da conservação das seções planas, em vigas, placas, cascas, da distribuição uniforme das tensões normais na largura das vigas e na espessura das chapas, do desprezo do pequeno valor da tensão normal à superfície média de placas e cascas, e assim por diante. É claro que, quando necessário, outras hipóteses diferentes serão admitidas para melhor modelar os casos não atendidos pelas teorias mais simplificadas. Por exemplo, é possível incluir o efeito das deformações angulares (distorções) em peças nas quais isso tem influência não desprezível, etc.

Quando, porém, tratar-se de estudar o comportamento de estrutura na qual nenhuma das dimensões seja pequena em relação às demais, ou na qual não haja respeito às hipóteses das teorias simplificadas, deve-se utilizar quase sempre o tratamento tridimensional, embora isto seja muito menos frequente, na prática.

Tendo-se em vista o caráter introdutório deste texto, apresenta-se a seguir apenas um roteiro do que seria feito no caso tridimensional, tendo-se em vista que, sob o aspecto geral da formação das matrizes de rigidez e de forças nodais equivalentes, muito do que se fez para o caso plano poderá ser seguido para se chegar à situação dos elementos tridimensionais.

4.1.1 Relações entre deslocamentos e deformações

As incógnitas básicas para a análise segundo a aplicação do princípio da mínima energia potencial total são as três componentes de deslocamentos

$$u(x, y, z) \quad v(x, y, z) \quad w(x, y, z) \quad (4.1)$$

no caso de qualquer forma geométrica do subdomínio.

Conforme já salientado, são utilizadas expressões das funções de aproximação em termos de parâmetros nodais, visando aplicações práticas via programa de computador.

Dependendo do tipo de subdomínio e do grau dos polinômios de aproximação, os parâmetros nodais podem ser apenas os valores das três componentes de deslocamento, ou, além delas, valores de suas derivadas parciais, como já fora empregado no caso de estruturas de barra ou de superfície.

As componentes de deformação são seis, definidas no caso da teoria linear como

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.2)$$

reunidos em vetor transposto

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\} \tag{4.3}$$

As tensões, também reunidas em vetor transposto são

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\} \tag{4.4}$$

4.1.2 Relações entre deformações e tensões

Da expressão da lei de Hooke, relacionando deformações com tensões, pode-se tirar o relacionamento inverso entre as tensões e deformações, expresso por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \textit{simétrica} & \cdot & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

Então, seguindo-se o procedimento usual, pode-se chegar ao relacionamento entre deslocamentos e forças nodais, com o concurso da matriz de rigidez do subdomínio.

4.2 FORMAS DE SUBDOMÍNIOS MAIS SIMPLES E FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO ASSOCIADAS

Um dos elementos mais simples é o tetraedro, cujas faces são quatro triângulos. Vide Fig. 4.1

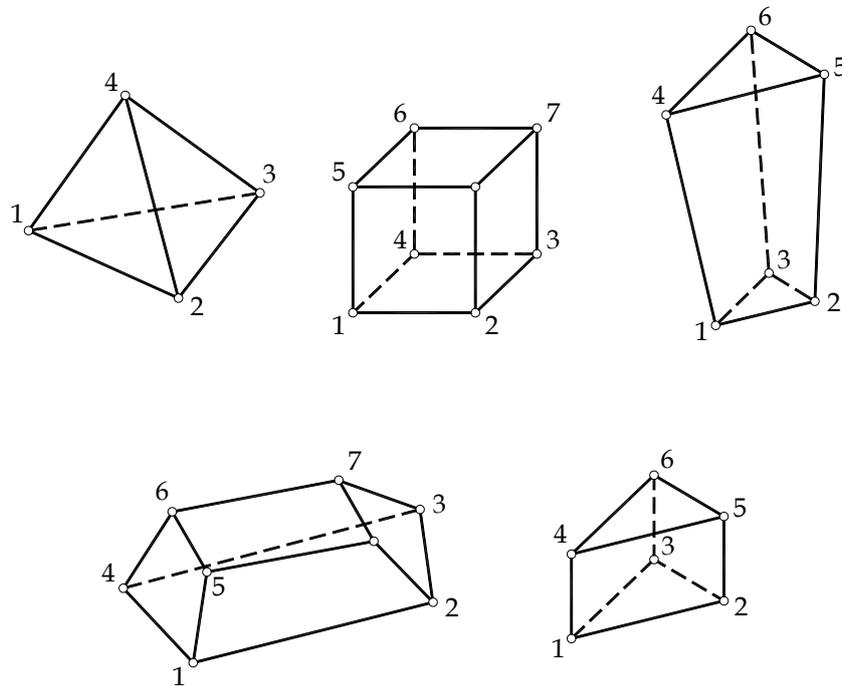


Figura 4.1 – Elementos tridimensionais

A aproximação mais simples a adotar é aquela que usa nós apenas nos 4 vértices do tetraedro e associa ao domínio desse sólido polinômios de primeiro grau para as três funções

$$u = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z$$

$$v = \beta_0 + \beta_1x + \beta_2y + \beta_3z \quad (4.6)$$

$$w = \varrho_0 + \varrho_1x + \varrho_2y + \varrho_3z$$

onde α_i, β_i e ϱ_i são parâmetros generalizados.

A partir desse ponto, seguindo-se o procedimento anteriormente detalhado para outros elementos estruturais pode-se examinar casos de estruturas tridimensionais.

Para aproximações com mais graus de liberdade pode-se usar tetraedros com os quatro nós de vértice e mais os seis nós de meio de aresta, associados a polinômios de segundo grau em x, y e z , e assim sucessivamente para graus mais elevados.

Além do tetraedro pode-se considerar, por exemplo, pentaedro ou hexaedro (reto ou oblíquo) indicados na Fig. 4.1.

É evidente que será muito recomendável a utilização da integração numérica, para obter a matriz de rigidez de um particular subdomínio.

Um exemplo de aplicação pode ser visto em RAO (1992) que analisa uma viga em balanço, tratada como estrutura tridimensional, considerando duas discretizações distintas: com $7 \times 2 \times 3$ hexaedros e depois considerando cada hexaedro subdividido em 5 tetraedros. A viga é solicitada por um momento externo concentrado aplicado na extremidade livre.

Dado o caráter desta publicação, deixa-se de apresentar detalhes pormenorizados sobre a formulação completa relativa aos subdomínios mencionados acima.

BIBLIOGRAFIA

- Bosshard, W. – An introduction to finite element technique, EESC, 1971
- Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.j – *Concepts and applications of finite element analysis*. 4th ed. John Wiley and Sons, Inc., 2002
- Courant, R. – Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bull. Am. Math. Soc. 49, pp1-23, 1943
- Degaspere, J.C – Aplicações do elemento finito T 18 para flexão de placas delgadas elástico-isótropas. EESC, 1978
- Laier, J.E., Barreiro, J.C., Savassi, W. – Complementos de Resistência dos Materiais. EESC-USP, 2012
- Langhaar, H.L – *Energy methods in applied mechanics* – Wiley & Sons, 1962
- Lord Rayleigh – *Theory of Sound*, 2nd edition, London, 1894 e 1896
- Proença, S.P. – Curso de Resistência dos Materiais – Volumes I e II, São Carlos, 2001
- Rao, S.S., – *The finite element method in engineering*. Pergamon Press, 1992
- Ritz, W. – Ueber eine neue Methode zur Loesung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik". J.Reine Angew. Math. Vol. 135 , 1908
- Savassi, W. – *Introdução ao método dos elementos finitos*. EESC-USP, 1996.
- Timoshenko, S.P., Gere, J.E. – *Mecânica dos materiais*. Vol. I e II. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1983
- Timoshenko, S.P., Krieger, W. – *Theory of Plates and Shells*. Mc Graw-Hill, 1964.
- Timoshenko, S.P., GOODIER, J.N. – *Teoria da elasticidade*. Rio de Janeiro. Editora Guanabara Dois, 1980
- Weaver Jr., W., Gere, J.M. – *Analysis of Framed Structures*. New York. Van Nostrand, 1965.