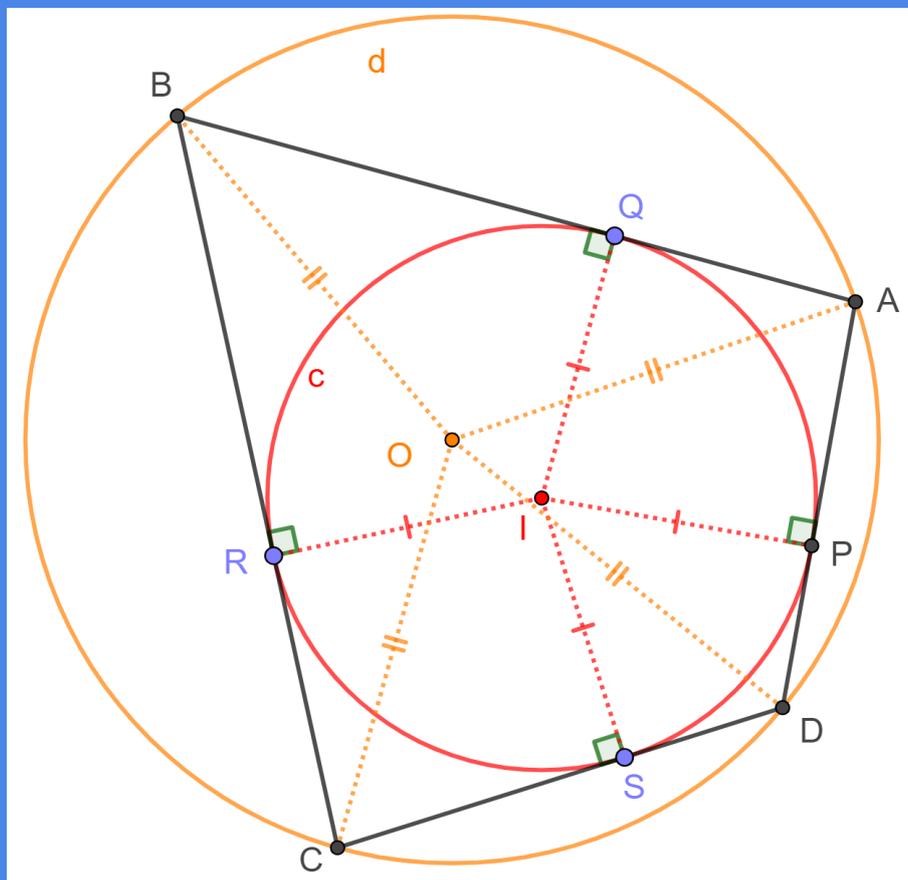


Quadriláteros inscritivos, circunscritivos e bicêntricos: problemas olímpicos



Juan López Linares

JUAN LÓPEZ LINARES

**Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicêntricos: problemas
olímpicos**

DOI: 10.11606/9786587023342

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2023

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-Reitora: Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

Diretor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Vice-Diretor: Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

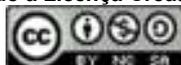
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da
Universidade de São Paulo

L864q	López Linares, Juan <i>Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicêntricos: problemas olímpicos</i> / Juan López Linares. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2023. 72 p. ISBN 978-65-87023-34-2 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023342 1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino médio. 6. Formação de professores. I. Título.
-------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



Dedico este livro a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores e Estudantes do curso de Geometria Olímpica com GeoGebra que motivaram a escrita deste livro eletrônico.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

AUTOR

Prof. Associado JUAN LÓPEZ LINARES: <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Quando adolescente participava como estudante de um grupo de treinamento para olimpíadas de Física. Embora tivesse sucessos nas competições desta disciplina, nas olimpíadas de Matemática não tinha resultados espetaculares. Sempre sentiu falta de um grupo de treinamento em Matemática. Essa experiência extracurricular determinou seu futuro profissional e motivou sua linha de trabalho hoje.

Professor Associado do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores e estudantes de alto rendimento.

Na área de Ensino de Matemática Olímpica, publicou 18 artigos, 15 livros eletrônicos (e-book), um capítulo de livro, uma dissertação de mestrado e uma tese de livre docência. Textos completos e gratuitos podem ser encontrados [aqui](#). Também disponibilizou mais de 750 vídeo aulas. Adicionalmente, no site do [GeoGebra](#) estão disponíveis mais de 1000 construções geométricas interativas. Foi selecionado como Embaixador do GeoGebra no período 2022-2024.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProFMat) pela UFSCar em 2019 e Livre Docente na área de Ensino de Matemática Olímpica na FZEA USP em 2022.

Título

Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicêtricos: problemas olímpicos

Prefácio

Para todo triângulo pode ser construída uma circunferência inscrita e uma circunscrita. O mesmo não acontece para todo quadrilátero. Quando pode ser construída uma circunferência circunscrita, o quadrilátero é chamado de inscritível ou cíclico. Se for possível construir uma circunferência inscrita o quadrilátero é chamado de circunscritível ou tangencial. E nos casos que podem ser construídas as duas circunferências o quadrilátero denomina-se bicêntrico. O entendimento de cada um destes casos ajuda muito na resolução de problemas de olimpíadas. Este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 47 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. A discussão é organizada em três capítulos: Fundamentos; Construções, exercícios e desafios; Problemas de olimpíadas internacionais. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mão na massa.

Palavras-chave: Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

Lista de Figuras

2.1	Construção do Arco Capaz no semiplano superior do segmento AB . Versão interativa aqui	14
2.2	Guia para a ida da Proposição 1. Versão interativa aqui	15
2.3	Guia para a volta da Proposição 1. Versão interativa aqui	16
2.4	Guia para a ida da Proposição 2. Versão interativa aqui	17
2.5	Guia para a volta da Proposição 2. Versão interativa aqui	18
2.6	Guia para o Teorema 3. Versão interativa aqui	19
2.7	Guia para a Definição 2 e o Teorema 4. Versão interativa aqui	20
2.8	Guia para o Teorema 5. Versão interativa aqui	22
2.9	Guia para a Definição 3. Versão interativa aqui	23
2.10	Guia para a Proposição 6. Versão interativa aqui	24
2.11	Exemplo com triângulos e circunferências do grande teorema de Poncelet. Versão interativa aqui	25
2.12	Exemplo com triângulos, circunferência e parábola do grande teorema de Poncelet. Versão interativa aqui	26
2.13	Exemplo com triângulos, elipse e circunferência do grande teorema de Poncelet. Versão interativa aqui	27
2.14	Exemplo com triângulos, elipse e hipérbole do grande teorema de Poncelet. Versão interativa aqui	28
3.1	Guia para a construção de quadrilátero bicêntrico. Versão interativa aqui	30
3.2	A Pipa reta $ABCD$ é um quadrilátero bicêntrico. Versão interativa aqui	31
3.3	Trapézio equilátero bicêntrico $ABCD$ de lados não paralelos e altura iguais as médias aritmética e geométrica das bases. Versão interativa aqui	32
3.4	Uma construção geométrica inicial para o Problema 1. Versão interativa aqui	33
3.5	Uma construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui	34
3.6	Uma construção geométrica inicial para o Problema 2. Versão interativa aqui	35
3.7	Construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa aqui	36

3.8	Uma construção geométrica inicial para a ida do Problema 3. Versão interativa aqui	37
3.9	Construção geométrica para a ida do Problema 3. Versão interativa aqui	38
3.10	Uma construção geométrica inicial para a recíproca do Problema 3. Versão interativa aqui	39
3.11	Construção geométrica para a recíproca do Problema 3. Versão interativa aqui	40
3.12	Uma construção geométrica inicial do Problema 4. Versão interativa aqui	41
3.13	Construção geométrica do Problema 4. Versão interativa aqui	42
3.14	Uma construção geométrica inicial do Problema 5. Versão interativa aqui	43
3.15	Construção geométrica do Problema 5. Versão interativa aqui	44
3.16	Uma construção geométrica inicial do Problema 6. Versão interativa aqui	45
3.17	Construção geométrica do Problema 6. Versão interativa aqui	46
3.18	Construção inicial. Mapeando os segmentos AB e CD pelo uso da Semelhança Espiral. Versão interativa aqui	47
3.19	Mapeando os segmentos AB e CD pelo uso da Semelhança Espiral. Versão interativa aqui	48
4.1	Uma construção geométrica inicial para o Problema 8. Versão interativa aqui	50
4.2	Construção geométrica da resolução do Problema 8. Versão interativa aqui	51
4.3	Construção geométrica inicial para o Problema 9. Versão interativa aqui	52
4.4	Construção geométrica para o Problema 9. Versão interativa aqui	53
4.5	Construção geométrica inicial para o Problema 10. Versão interativa aqui	54
4.6	Construção geométrica para o Problema 10. Versão interativa aqui	55
4.7	Construção geométrica inicial para o Problema 11. Versão interativa aqui	56
4.8	Construção geométrica para o Problema 11. Versão interativa aqui	58
4.9	Uma construção geométrica inicial para o Problema 12. Versão interativa aqui	59
4.10	Guia para a resolução do Problema 12. Versão interativa aqui	60
4.11	Uma construção geométrica inicial para o Problema 13. Versão interativa aqui	61
4.12	Construção geométrica da resolução do Problema 13. Versão interativa aqui	62
4.13	Construção geométrica possível para o Problema 14. Versão interativa aqui	63
4.14	Caso de igualdade na desigualdade do problema. Versão interativa aqui	64

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	11
1.1	Organização, GeoGebra e publicações anteriores	11
2	Fundamentos	13
2.1	Construção do arco capaz	13
2.2	Quadrilátero inscrito ou cíclico	14
2.3	Teorema de Reim	18
2.4	Quadrilátero circunscrito ou tangencial	19
2.5	Quadrilátero bicêntrico	22
2.6	Caraterização de quadrilátero bicêntrico	23
2.7	Porismo ou grande teorema de Poncelet	25
3	Construções, exercícios e desafios	29
3.1	Construção de quadrilátero bicêntrico	29
3.2	Pipa reta é bicêntrica	30
3.3	Trapézio equilátero bicêntrico	31
3.4	Quadrilátero inscrito, bissetriz e triângulos isósceles.	32
3.4.1	Resolução do Problema 1	32
3.5	Quadrilátero inscrito, mediana de triângulo retângulo e congruências.	34
3.5.1	Resolução do Problema 2	34
3.6	Quadrilátero inscrito, mediana de triângulo retângulo e ângulos.	36
3.6.1	Resolução do Problema 3	36
3.7	Quadrilátero inscrito, bissetrizes e ângulos.	40
3.7.1	Resolução do Problema 4	40
3.8	Quadrilátero inscrito e ângulos em circunferências.	42
3.8.1	Resolução do Problema 5	42
3.9	Quadriláteros inscritíveis e quadrados.	44
3.9.1	Resolução do Problema 6	44

3.10	Quadriláteros inscritíveis, semelhança espiral, mapeando dois segmentos.	46
3.10.1	Resolução do Problema 7	46
4	Problemas de olimpíadas internacionais	49
4.1	Quadriláteros cíclicos, triângulo circunscrito e desigualdades. P4 IMO 1967. . .	49
4.1.1	Resolução do Problema 8	49
4.2	Eixo e centro radical, quadriláteros cíclicos, ângulos. P5 IMO 1985.	51
4.2.1	Resolução do Problema 9.	51
4.3	Potência de ponto relativo a circunferência, base média, semelhança. P2 IMO 2009.	53
4.3.1	Resolução do Problema 10.	53
4.4	Quadrilátero circunscritível, teorema de Pitot, incentro e ortocentro. P23 SL IMO 2009.	55
4.4.1	Resolução do Problema 11.	56
4.5	Ortocentro, quadrilátero inscritível e ângulos na circunferência. P3 NE IGO 2014.	58
4.5.1	Resolução do Problema 12	58
4.6	Quadriláteros cíclicos, ângulos na circunferência e triângulo isósceles. P1 NA IGO 2015.	61
4.6.1	Resolução do Problema 13	61
4.7	Reflexão, quadrilátero inscritível, projeção. P4 NI IGO 2017	62
4.7.1	Resolução do Problema 14	63
5	Referências Bibliográficas	66

Capítulo 1

Introdução

1.1 Organização, GeoGebra e publicações anteriores

Para todo triângulo pode ser construída uma circunferência inscrita e uma circunscrita. O mesmo não acontece para todo quadrilátero. Quando pode ser construída uma circunferência circunscrita o quadrilátero é chamado de inscritível ou cíclico. Se for possível construir uma circunferência inscrita o quadrilátero é chamado de circunscritível ou tangencial. E nos casos que podem ser construídas as duas circunferências o quadrilátero denomina-se bicêntrico. O entendimento de cada um destes casos ajuda muito na resolução de problemas de olimpíadas.

O livro faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O mesmo aconteceu na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma Moodle de Cultura e Extensão da USP. O texto conta com 47 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, links para os gráficos interativos são disponibilizados em páginas do [GeoGebra](#). Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube. A discussão é organizada em três capítulos: Fundamentos; Construções, exercícios e desafios; Problemas de olimpíadas internacionais. Mas sem a pretensão de esgotar os temas abordados.

O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contra partida, na versão impressa tradicional o aprendente precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma

resolução.

O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movimentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes. Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendizado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar e buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Bruno Holanda [3], do Prof. Rodrigo Pinheiro [38] e do Prof. Cícero Thiago [42]. Também serviram como referência os livros de Geometria [37], Geometria Analítica [1] e Matemática Discreta [36] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Nove livros eletrônicos gratuitos com as notas de aulas do curso Geometria Olímpica com GeoGebra estão disponíveis em [22], [23], [24], [18], [16], [12], [13], [5] e [7]. Também foram publicados quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [21], [8], [9] e [10]. Outros trabalhos da área de Matemática são [14], [25], [26], [27], [20], [28], [29], [4], [30], [32], [33], [34], [35], [39], [31], [40], [17], [19], [11], [41], [6] e [15].

Capítulo 2

Fundamentos

Para fins didáticos, este capítulo aborda alguns dos mais importantes fundamentos teóricos e construtivos que serão utilizados nos próximos. O leitor especialista na área pode pular para a discussão dos problemas olímpicos. Parte do conteúdo deste e-book está disponível em vídeos de [2020](#), [2021](#) e [2022](#).

2.1 Construção do arco capaz

Exercício 1. *Construir o Arco Capaz dado um segmento AB e um $\angle CDE = \alpha$. Isto é, encontrar os pontos do plano que são visto sob o mesmo ângulo α desde AB .*

Será construído a parte do Arco Capaz que fica acima da reta AB (Figura 2.1). A parte que fica abaixo é encontrada de maneira análoga.

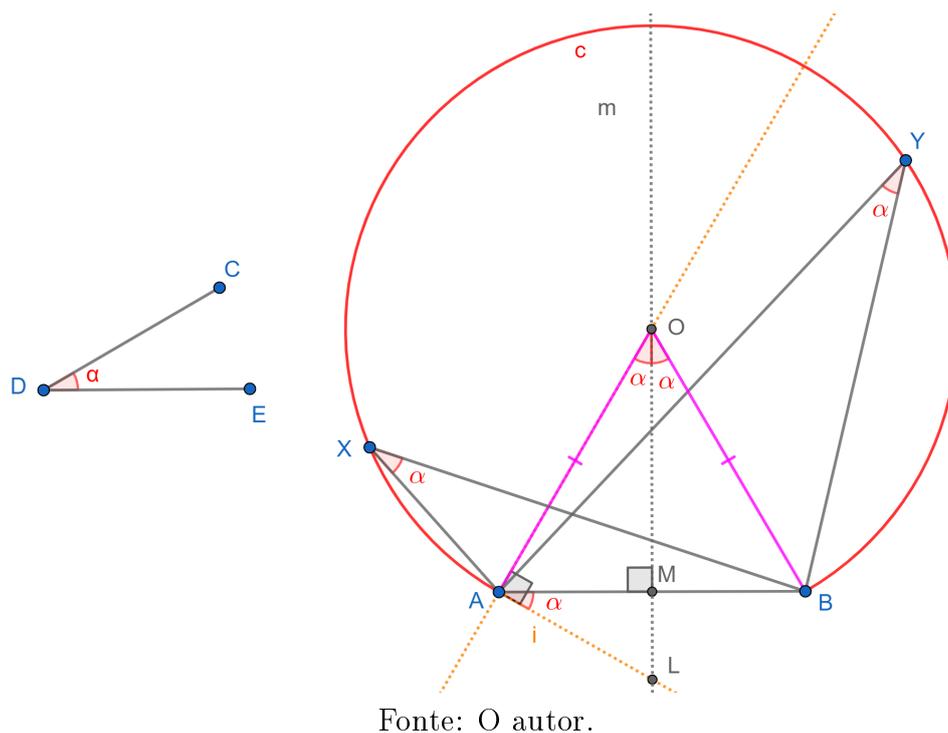
1. Transportar para o vértice A e o semiplano inferior determinado pela reta AB o ângulo α . Um dos lados do mesmo é denotado pela semirreta i .
2. Construir a mediatriz m dos pontos A e B . Denotar por M o ponto médio entre A e B . Marcar $L = m \cap i$.
3. Passando por A construir uma perpendicular à semirreta AL . Marcar a o ponto O , interseção desta com m . Como $\angle LAO = \angle AML = \angle OMA = 90^\circ$, segue que:

$$\angle LAM = \angle AOM = \alpha.$$

4. Construir o arco c , maior de AB , com centro em O e raio OA . Como O está na mediatriz de AB tem-se que $OA = OB$, o $\triangle AOB$ é isósceles e $\angle AOM = \angle BOM = \alpha$. De LA ser tangente a c em A o ângulo LAB é chamado de segmento e $\angle LAB = \frac{1}{2}\angle AOB$. O $\angle AOB$ define-se como central. Em palavras, o ângulo de segmento mede a metade do central correspondente.

5. Qualquer ponto X ou Y no arco c , maior da corda AB (Arco Capaz), é visto com o mesmo ângulo. Vale que $\angle AXB = \angle AYB = \alpha$ e estes são chamados de ângulos inscritos. Em palavras, os ângulos inscritos medem a metade do central correspondente (Figura 2.1).

Figura 2.1: Construção do Arco Capaz no semiplano superior do segmento AB . Versão interativa [aqui](#).



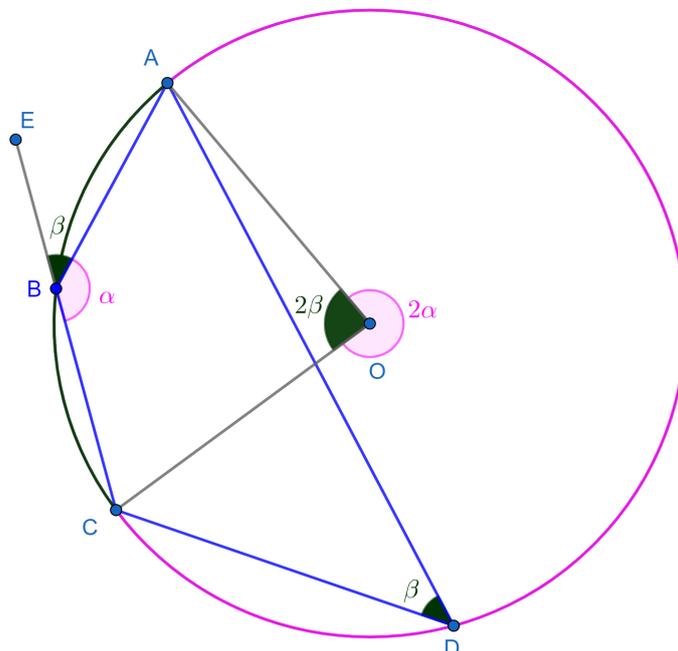
2.2 Quadrilátero inscrito ou cíclico

Definição 1. Um quadrilátero é dito *inscrito* ou *cíclico* quando seus quatro vértices pertencem a uma mesma circunferência.

Proposição 1 (Critério I). Um quadrilátero $ABCD$ é inscrito se, e somente se, a soma dos ângulos opostos é 180° :

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ.$$

Figura 2.2: Guia para a ida da Proposição 1. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

Demonstração. Inicialmente, suponha-se que $ABCD$ seja inscritível na circunferência de centro O (Figura 2.2). Considera-se o arco \widehat{ADC} de medida 2α . Um ângulo inscrito correspondente ao mesmo é $\angle ABC = \alpha$. Por outro lado, seja o arco \widehat{ABC} de medida 2β . Um ângulo inscrito correspondente será $\angle ADC = \beta$. Logo, uma volta completa em torno de O permite calcular:

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ,$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Isto é,

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ.$$

Seja E um ponto na prolongação do segmento CB , além de B . Vale que:

$$\angle EBA = \angle ADC = \beta.$$

Analogamente, mostra-se que:

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ.$$

Para a recíproca (Figura 2.3), por hipótese, a soma dos ângulos opostos no quadrilátero

convexo $ABCD$ é 180° :

$$\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ.$$

Seja $\angle BCD = \alpha$, logo:

$$\angle DAB = 180^\circ - \alpha.$$

Suponha-se, por absurdo, que o quadrilátero $ABCD$ não seja inscritível e o ponto C esteja fora da circunferência k , circunscrita ao $\triangle ABD$. Traça-se a reta CB e marca-se o ponto E na interseção com k . Por construção, $ABED$ é inscritível e segue que:

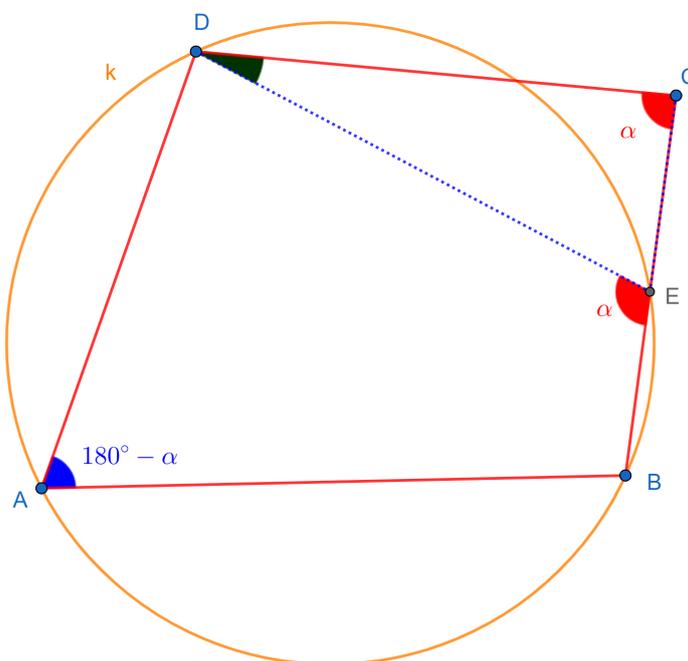
$$\angle DAB + \angle BED = 180^\circ.$$

Logo, $\angle BED = \angle BCD = \alpha$. Contradição, pois o ângulo externo em E , do $\triangle DEC$, pode ser escrito como:

$$\angle BED = \angle BCD + \angle CDE.$$

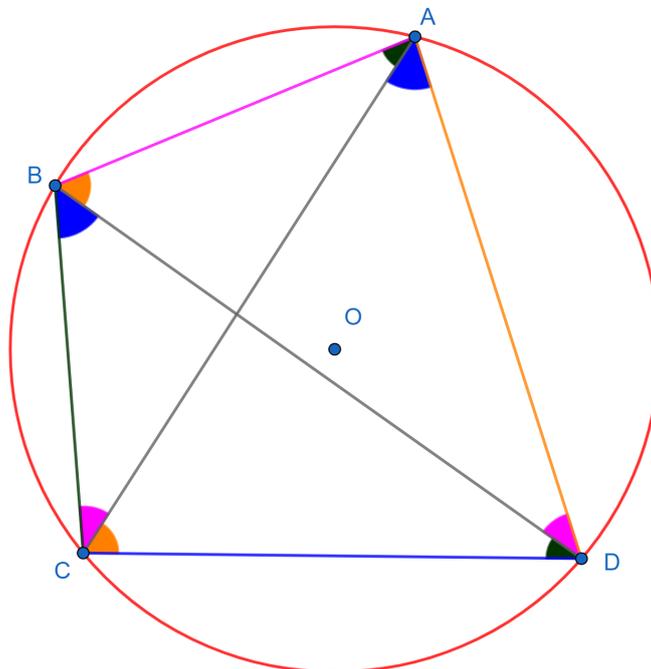
No caso em que C está no interior de k a demonstração é análoga. □

Figura 2.3: Guia para a volta da Proposição 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Proposição 2 (Critério II). *Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.*

Figura 2.4: Guia para a ida da Proposição 2. Versão interativa [aqui](#).

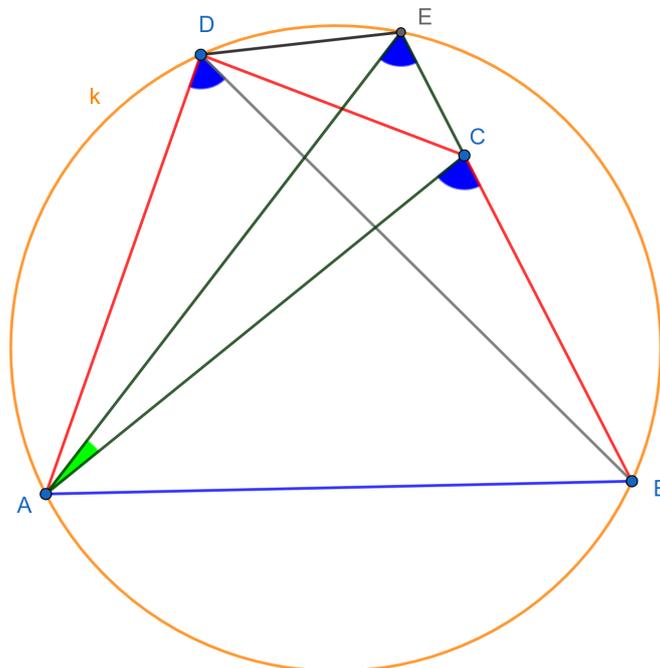
Fonte: O autor.

Demonstração. Inicialmente, suponha-se que $ABCD$ seja inscrito na circunferência de centro O (Figura 2.4). A prova segue do Exercício 1 (Construção do Arco Capaz). Para a recíproca (Figura 2.5), por hipótese, no quadrilátero convexo $ABCD$ vale que $\angle BDA = \angle BCA$. Suponha-se, por absurdo, que $ABCD$ não seja inscrito e o ponto C esteja no interior da circunferência k , circunscrita ao $\triangle ABD$. A semirreta BC intercepta k no ponto E . Por construção, $ABED$ é inscrito. Logo, $\angle BDA = \angle BEA$. Segue que $\angle BCA = \angle BEA$. Absurdo, pois no $\triangle ACE$ tem-se:

$$\angle BCA = \angle BEA + \angle EAC.$$

O caso em que C está fora de k é demonstrado de forma análoga. □

Figura 2.5: Guia para a volta da Proposição 2. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

2.3 Teorema de Reim

Teorema 3. *Suponha-se que as circunferências w_1 e w_2 interceptam-se nos pontos A e B . Sejam os pontos $A_1, B_1 \in w_1$ e $A_2, B_2 \in w_2$ e os trios A, A_1, A_2 e B, B_1, B_2 colineares. Então as retas A_1B_1 e A_2B_2 são paralelas (Figura 2.6).*

Demonstração. Seja $\angle B_2A_2A = \alpha$. Como o quadrilátero ABB_2A_2 é inscrito, então

$$\angle ABB_2 = 180^\circ - \alpha.$$

Segue que $\angle B_1BA = \alpha$. Por outro lado, o quadrilátero AA_1B_1B é cíclico, então

$$\angle AA_1B_1 = 180^\circ - \alpha.$$

Seja o ponto A_0 na semirreta AA_1 , além A_1 ou a esquerda de A_1 . Com isto,

$$\angle B_1A_1A_0 = \alpha.$$

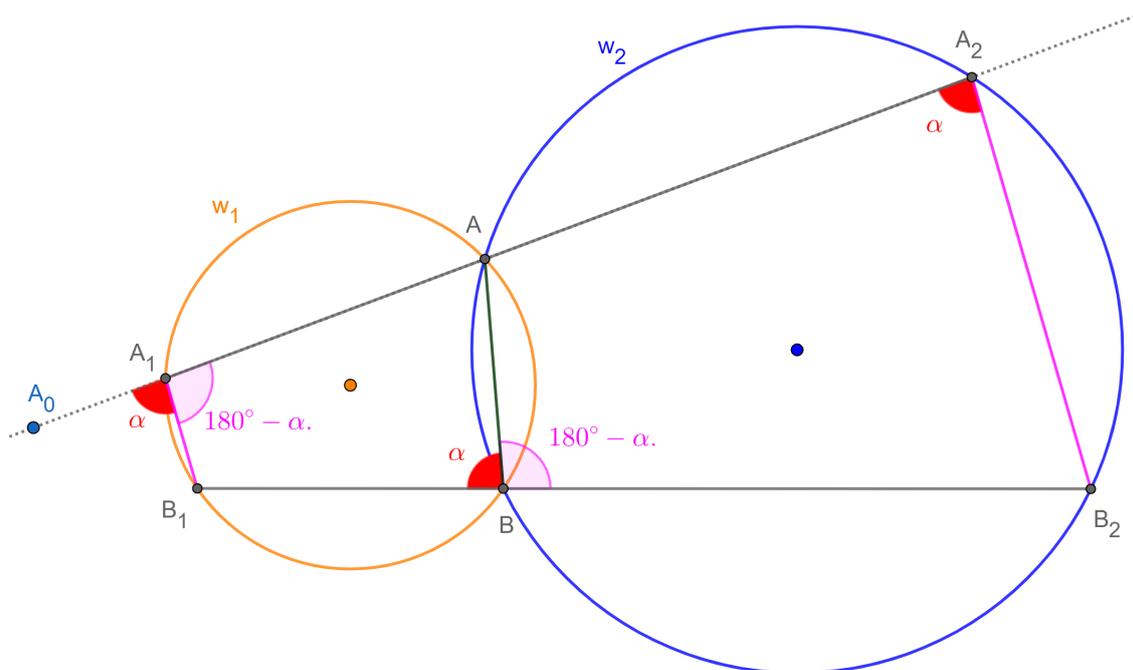
Da igualdade $\angle B_1A_1A_0 = \angle B_2A_2A = \alpha$ e a recíproca de ângulos correspondentes entre

paralelas encontra-se:

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2.$$

□

Figura 2.6: Guia para o Teorema 3. Versão interativa [aqui](#).



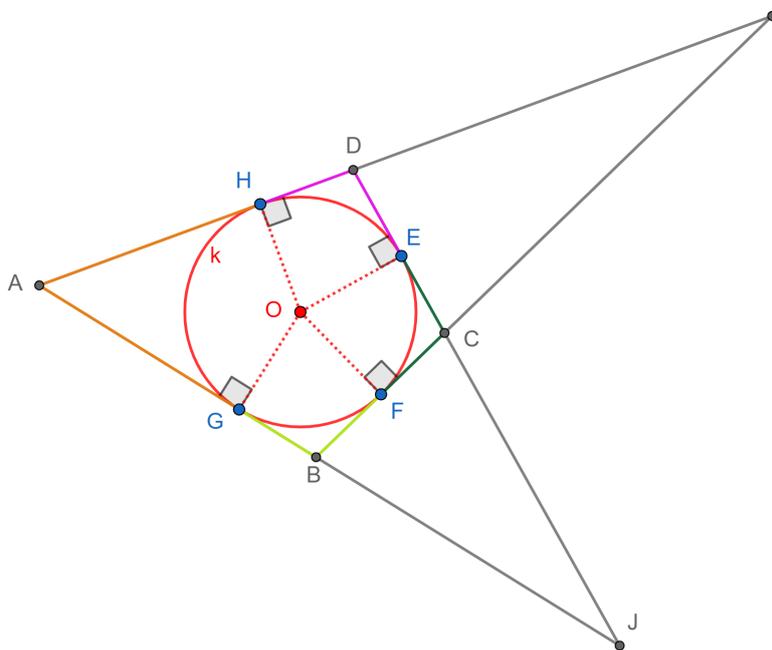
Fonte: O autor.

2.4 Quadrilátero circunscritível ou tangencial

Definição 2. Um quadrilátero (convexo ou não) é dito circunscritível ou tangencial quando é possível construir no interior deste uma circunferência que tangencia os quatro lados ou suas prorrogações.

Na Figura 2.7 sejam as interseções das retas AB e CD e BC e AD os pontos J e I , respectivamente. Os quadriláteros $ABCD$ e $AJCI$ circunscrevem k ou k está inscrita em $ABCD$ e $AJCI$.

Figura 2.7: Guia para a Definição 2 e o Teorema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Teorema 4 (Ida do teorema de Pitot). *Com referência a Figura 2.7, se $ABCD$ for um quadrilátero circunscrito a uma circunferência k , então*

$$AB + CD = BC + AD.$$

Alternativamente, se $AJCI$ for um quadrilátero circunscrito a k , então

$$AJ + CI = AI + JC.$$

Demonstração. Sejam G , F , E e H os pontos de tangência da circunferência k com os lados AB , BC , CD e DA , respectivamente (Figura 2.7). Tem-se:

$$AB + CD = (AG + GB) + (CE + ED).$$

Utilizando a igualdade dos segmentos tangentes $AG = HA$, $GB = BF$, $CE = FC$ e $ED = DH$ encontra-se:

$$AB + CD = (HA + BF) + (FC + DH),$$

$$AB + CD = (BF + FC) + (DH + HA),$$

$$AB + CD = BC + AD.$$

Analogamente,

$$AJ + CI = (AG + GJ) + (IF - FC).$$

Adicionalmente, $GJ = JE$ e $IF = HI$. Logo,

$$AJ + CI = (AH + JE) + (HI - EC),$$

$$AJ + CI = (AH + HI) + (JE - EC),$$

$$AJ + CI = AI + JC.$$

□

Teorema 5 (Volta do teorema de Pitot). *Se $ABCD$ for um quadrilátero tal que*

$$AB + CD = BC + AD,$$

então $ABCD$ está circunscrito a uma circunferência k . Ou seja, $ABCD$ é circunscritível.

Demonstração. A demonstração é feita por redução ao absurdo. Suponha-se que o centro I da circunferência k encontra-se na interseção das bissetrizes dos ângulos CDA e DAB . Ou seja, k é tangente aos lados CD , DA e AB . Mas não é tangente ao lado BC (Figura 2.8).

Seja o ponto $E \in AB$ tal que CE é tangente a k . Considera-se o caso em que BC não intercepta k . Pelo Teorema 4 (Ida de Pitot) vale que:

$$AE + CD = CE + AD.$$

Por hipótese tem-se:

$$AB + CD = BC + AD.$$

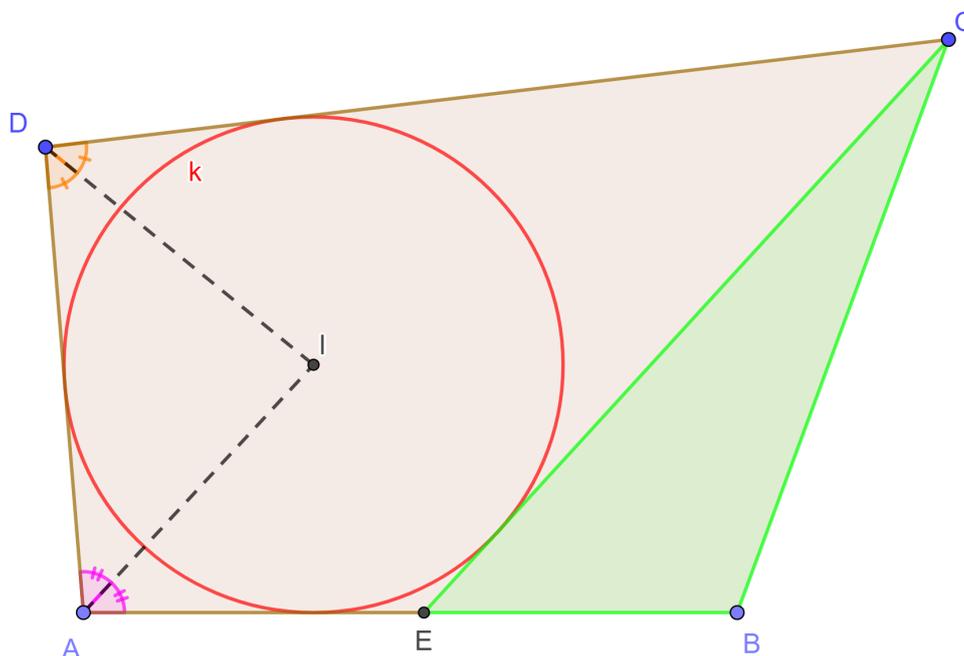
Da diferença das duas últimas equações encontra-se:

$$AB - AE = EB = BC - CE.$$

Ou seja:

$$CE + EB = BC.$$

Mas a última igualdade está em contradição com a desigualdade triangular aplicada no $\triangle BCE$. O estudo do caso em que BC e k interceptam-se em dois pontos é análogo. □

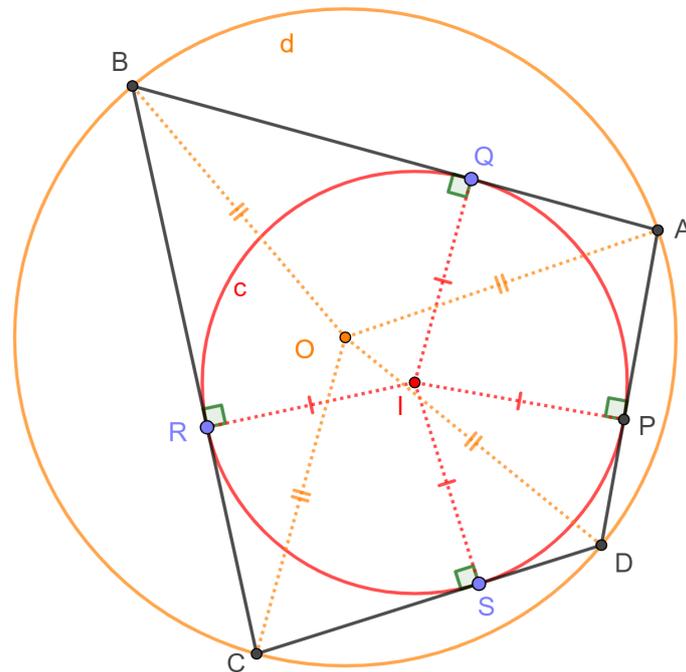
Figura 2.8: Guia para o Teorema 5. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

2.5 Quadrilátero bicêntrico

Definição 3. Um quadrilátero $ABCD$ é chamado bicêntrico se é inscrito (pela circunferência d , de centro O) e circunscrito (pela circunferência c , de centro I) simultaneamente (Figura 2.9).

Figura 2.9: Guia para a Definição 3. Versão interativa [aqui](#).

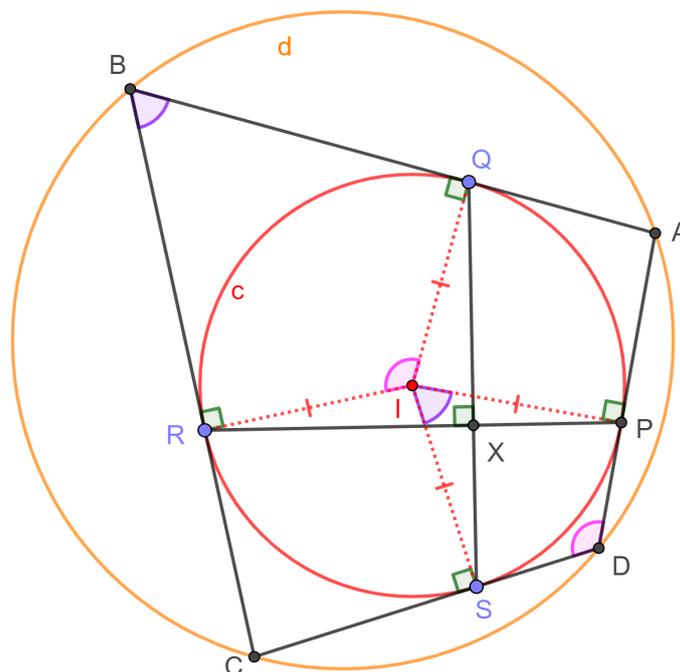


Fonte: O autor.

2.6 Caraterização de quadrilátero bicêntrico

Proposição 6. *O quadrilátero $ABCD$, circunscrito a circunferência c , com pontos de tangência $P \in DA$, $Q \in AB$, $R \in BC$ e $S \in CD$, é bicêntrico se, e somente se, os segmentos PR e QS são perpendiculares (Figura 2.10).*

Figura 2.10: Guia para a Proposição 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Demonstração. Inicialmente, suponha-se que $ABCD$ é bicêntrico. Tem-se que:

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ,$$

por $ABCD$ ser cíclico. Como o quadrilátero $QBRI$ também é inscritível vale que:

$$\angle ABC + \angle QIR = 180^\circ.$$

Logo, $\angle ADC = \angle QIR$. Analogamente, $\angle ABC = \angle PIS$.

Segue que:

$$\angle QIR + \angle PIS = 180^\circ.$$

Nota-se agora que pelo ângulo em X ser excêntrico interior de c tem-se:

$$\angle QXR = \frac{\angle QIR + \angle PIS}{2} = 90^\circ.$$

Reciprocamente, partindo do quadrilátero circunscritível $ABCD$, onde seus pontos de tangência são como mostrados e $\angle QXR = 90^\circ$, revertendo os passos mostra-se que:

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ.$$

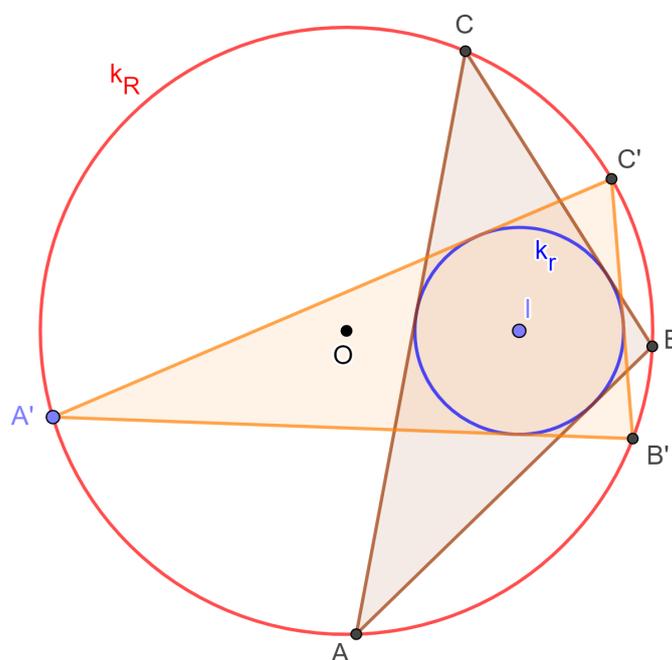
Isto é, $ABCD$ também é cíclico. Logo, bicêntrico. □

2.7 Porismo ou grande teorema de Poncelet

Teorema 7. *Sempre que um polígono está inscrito em uma seção cônica e circunscreve outra, o polígono deve fazer parte de uma família infinita de polígonos que estão todos inscritos e circunscrevem as mesmas duas cônicas.*

A Figura 2.11 ilustra o caso dos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ e circunferências k_r e k_R .

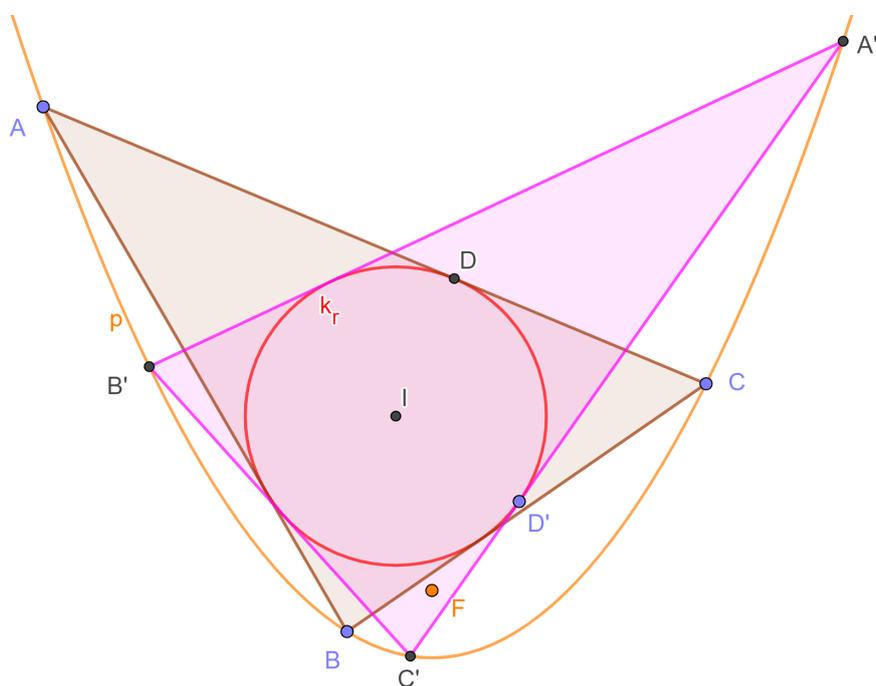
Figura 2.11: Exemplo com triângulos e circunferências do grande teorema de Poncelet. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

A Figura 2.12 ilustra o grande teorema de Poncelet no caso dos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ a circunferência k_r e uma parábola p . O ponto F é o foco de p .

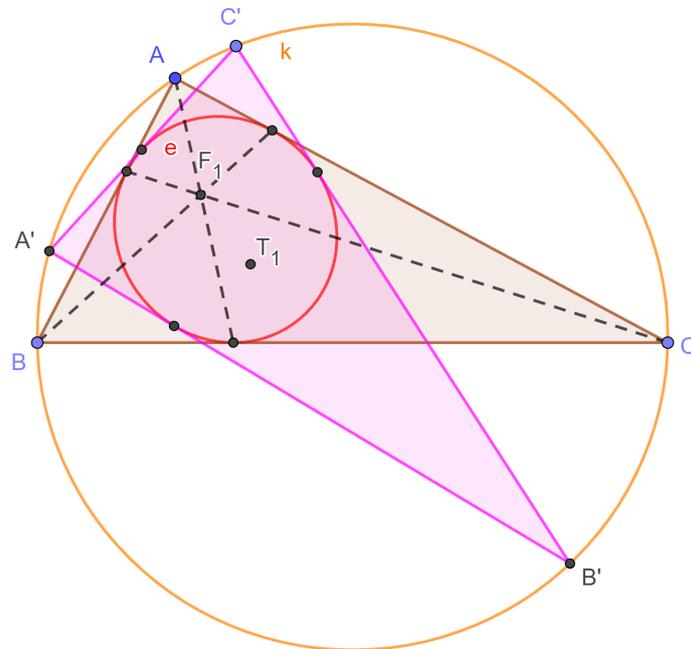
Figura 2.12: Exemplo com triângulos, circunferência e parábola do grande teorema de Poncelet. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

A Figura 2.13 ilustra o grande teorema de Poncelet no caso dos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, a circunferência k e uma elipse e . Os pontos $F_1 = X13$ (Fermat) e $T_1 = X15$ (primeiro isodinâmico), relativos ao $\triangle ABC$, são os focos de e .

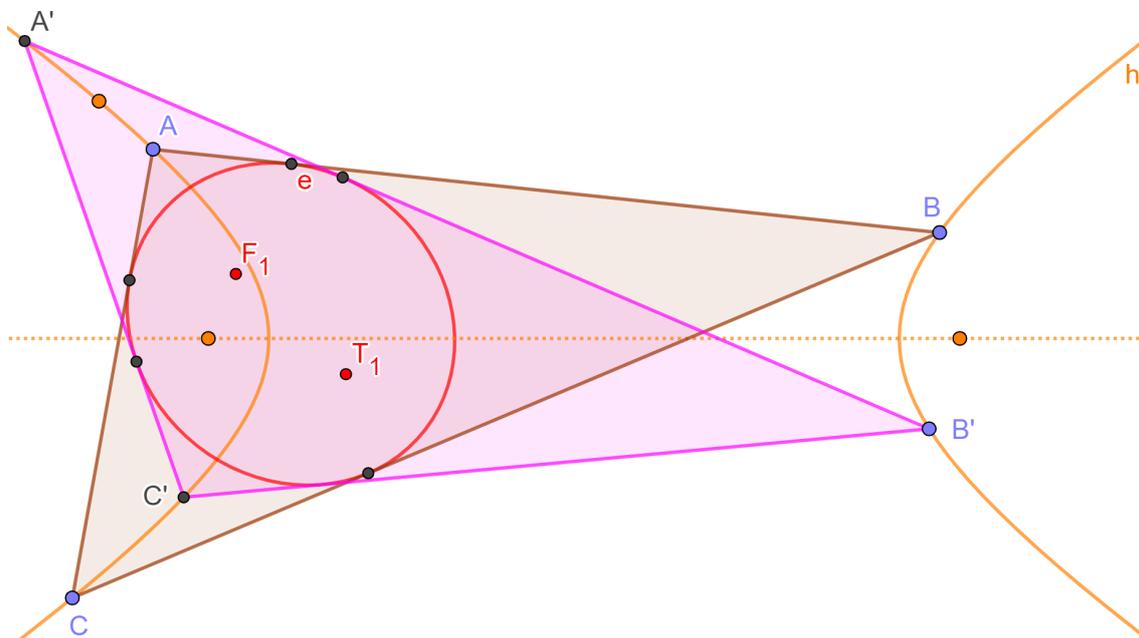
Figura 2.13: Exemplo com triângulos, elipse e circunferência do grande teorema de Poncelet. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

A Figura 2.14 ilustra o grande teorema de Poncelet no caso dos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, a hipérbole h e uma elipse e . Os pontos $F_1 = X13$ (Fermat) e $T_1 = X15$ (primeiro isodinâmico), relativos ao $\triangle ABC$, são os focos de e .

Figura 2.14: Exemplo com triângulos, elipse e hipérbole do grande teorema de Poncelet. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

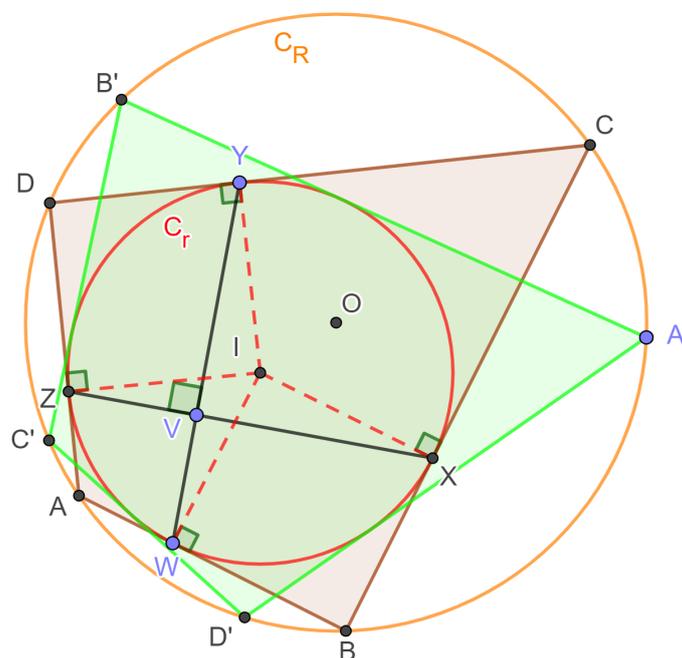
Capítulo 3

Construções, exercícios e desafios

3.1 Construção de quadrilátero bicêntrico

1. Inicia-se com o incírculo C_r de centro I e raio r .
2. Colocam-se os pontos $Y, W \in C_r$ e um ponto $V \in YW$.
3. Por V é traçada uma perpendicular a corda YW que intersepta C_r em X e Z .
4. Traçam-se os segmentos IW, IX, IY e IZ .
5. Por W, X, Y e Z esboçam-se tangentes a C_r . Estas intersectam-se nos pontos A, B, C e D , vértices de um quadrilátero bicêntrico.
6. Desenharam-se duas mediatrizes p_1 e p_2 dos lados de $ABCD$. Marca-se o ponto $O = p_1 \cap p_2$ e com raio $R = OA$ é construído o circuncírculo C_R (Figura 3.1).

Figura 3.1: Guia para a construção de quadrilátero bicêntrico. Versão interativa [aqui](#).



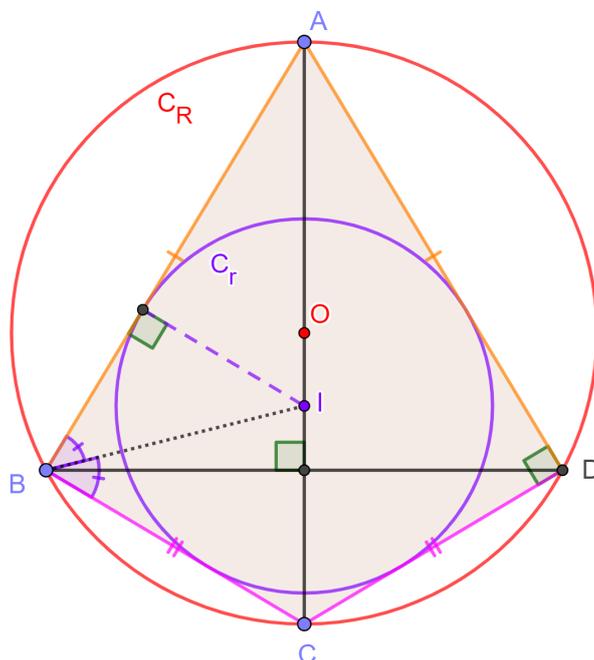
Fonte: O autor.

Partindo de qualquer ponto $A' \in C_R$ é possível construir um outro quadrilátero bicêntrico $A'B'C'D'$ que compartilha o mesmo incírculo e circuncírculo com $ABCD$. Este é um caso do Teorema 7, conhecido por Porismo de Poncelet.

3.2 Pipa reta é bicêntrica

A Pipa reta $ABCD$, onde $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, é um quadrilátero bicêntrico (Figura 3.2).

Figura 3.2: A Pipa reta $ABCD$ é um quadrilátero bicêntrico. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

3.3 Trapézio equilátero bicêntrico

Um trapézio $ABCD$, de bases $AB = x$ e $CD = y$, é bicêntrico quando

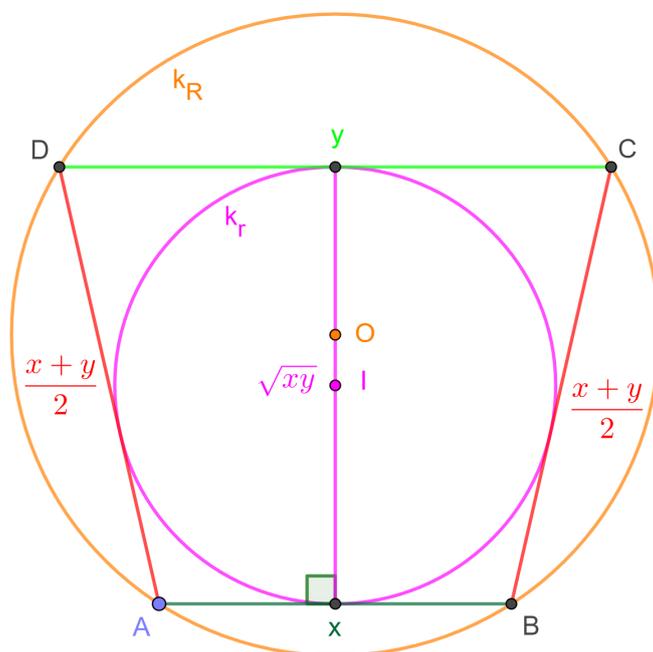
$$AD = BC = \frac{x + y}{2}$$

(média aritmética) e a distância entre os lados paralelos é

$$\sqrt{xy}$$

(média geométrica). A Figura 3.3 mostra um exemplo.

Figura 3.3: Trapézio equilátero bicêntrico $ABCD$ de lados não paralelos e altura iguais as médias aritmética e geométrica das bases. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

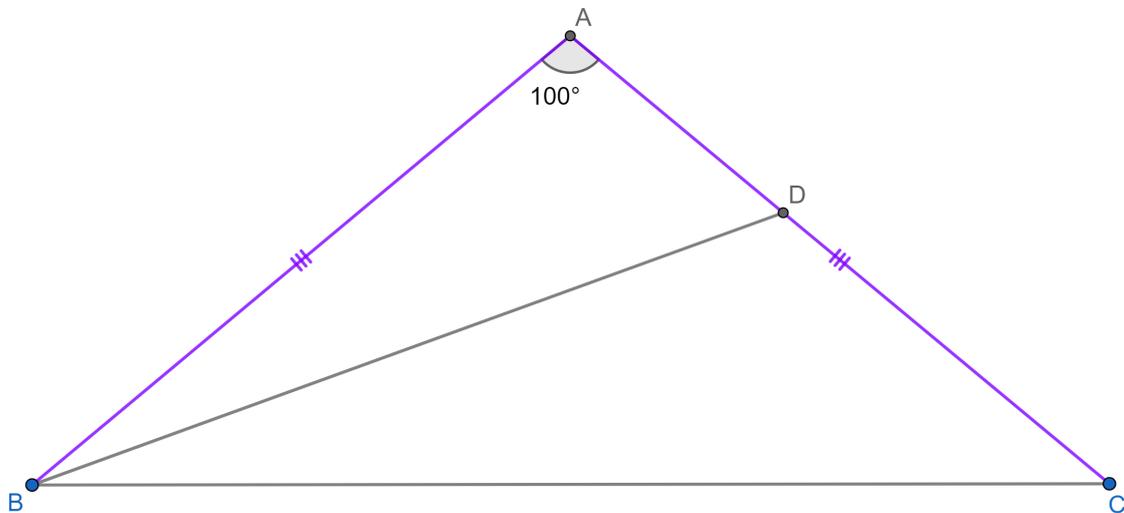
3.4 Quadrilátero inscritível, bissetriz e triângulos isósceles.

Problema 1. Em um triângulo ABC , o ângulo $BAC = 100^\circ$ e $AB = AC$. Seja BD a bissetriz do ângulo ABC , com D sobre o lado AC . Provar que $AD + BD = BC$.

3.4.1 Resolução do Problema 1

A Figura 3.4 ilustra uma construção geométrica inicial para o problema.

Figura 3.4: Uma construção geométrica inicial para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Pela soma dos ângulos internos no $\triangle ABC$ (isósceles) encontra-se:

$$\angle ABC = \angle ACB = 40^\circ.$$

Como BD é bissetriz, então

$$\angle ABD = \angle DBC = 20^\circ.$$

Seja o ponto $E \in BC$ tal que $BD = BE$. Segue que o triângulo BDE é isósceles:

$$\angle BDE = \angle BED = 80^\circ.$$

Pela soma dos ângulos internos no $\triangle BDC$ encontra-se que:

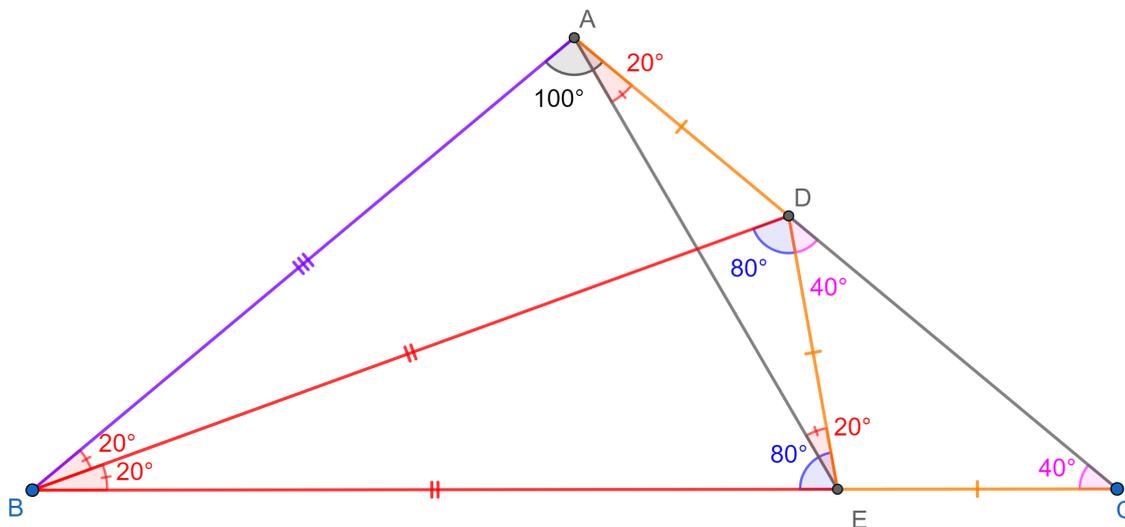
$$\angle EDC = \angle ECD = 40^\circ.$$

Logo, o $\triangle EDC$ é isósceles e $DE = EC$. Adicionalmente, $ABED$ é um quadrilátero inscritível, pois a soma dos ângulos BAD e BED é 180° . Segue que $\angle EAD = \angle EBD = 20^\circ$ e $\angle AED = \angle ABD = 20^\circ$. Portanto, o $\triangle AED$ é isósceles e $AD = DE$. Ou seja,

$$AD + BD = DE + BE = EC + BE = BC.$$

A Figura 3.5 ilustra uma construção geométrica para o problema.

Figura 3.5: Uma construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

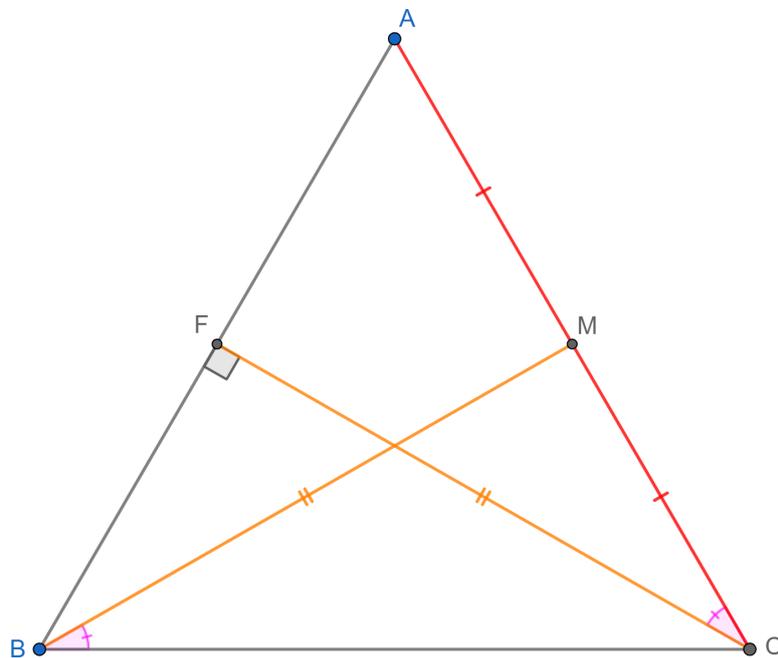
3.5 Quadrilátero inscrito, mediana de triângulo retângulo e congruências.

Problema 2. No triângulo acutângulo ABC , CF é altura, com F em AB e BM é mediana, com M em CA . Se $BM = CF$ e os ângulos MBC e FCA são congruentes, provar que o $\triangle ABC$ é equilátero.

3.5.1 Resolução do Problema 2

A Figura 3.6 ilustra uma construção geométrica inicial para o problema.

Figura 3.6: Uma construção geométrica inicial para o Problema 2. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

O segmento FM é mediana do triângulo retângulo CFA . Logo, $FM = AM = MC$. Segue que o $\triangle MFC$ é isósceles, de base FC , e $\angle MFC = \angle MCF$. Como os ângulos MBC e MFC são iguais o quadrilátero $BCMF$ é inscrito (Figura 3.7). Com isso vale:

$$\angle FBM = \angle FCM,$$

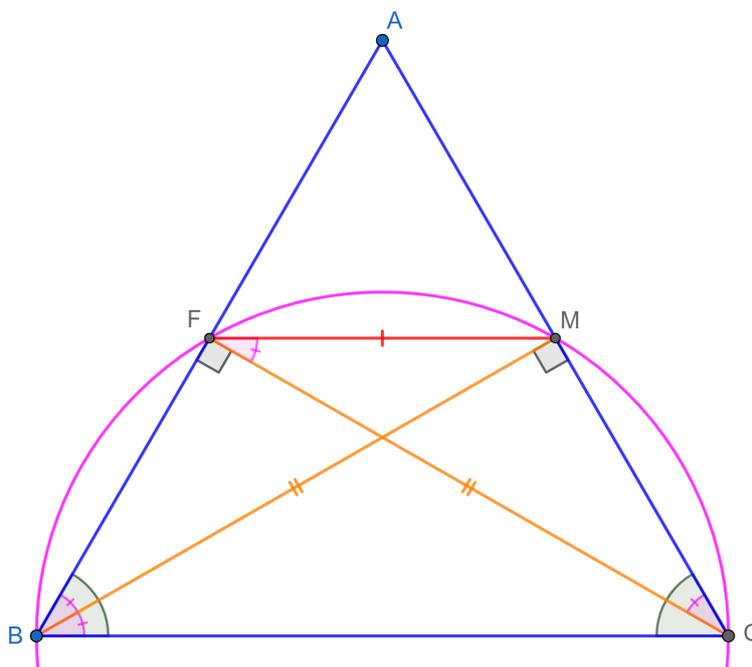
$$\angle BFC = \angle BMC.$$

Os triângulos BMC e BMA são congruentes pelo critério ALA. Portanto, $AB = BC$. Adicionalmente, por CH os triângulos BFC e CMB são congruentes. Segue que:

$$\angle FBC = \angle MCB.$$

Logo, o $\triangle ABC$ é isósceles, de base BC , e $AB = AC$. Como $AB = BC = AC$, então o $\triangle ABC$ é equilátero.

Figura 3.7: Construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

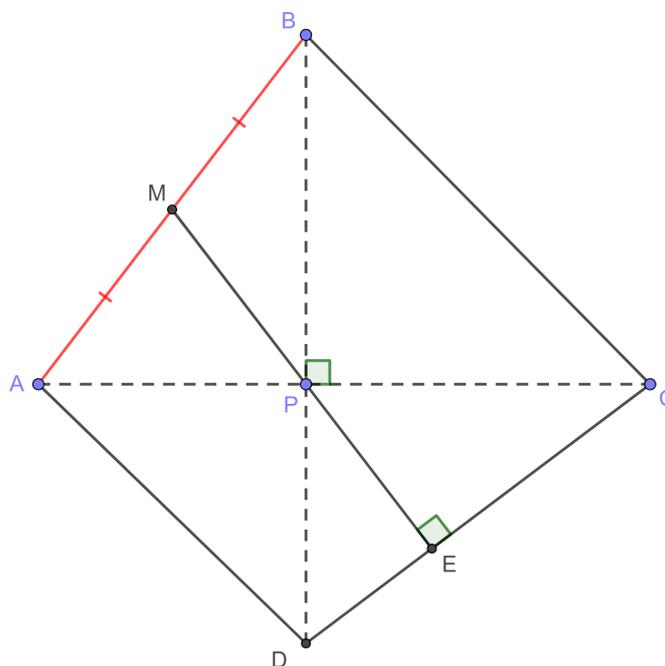
3.6 Quadrilátero inscritível, mediana de triângulo retângulo e ângulos.

Problema 3. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Seja P a intersecção de AC e BD e seja M o ponto médio de AB . Mostrar que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, as retas PM e CD são perpendiculares.*

3.6.1 Resolução do Problema 3

Primeiramente estuda-se o caso quando as retas PM e CD são perpendiculares. A Figura 3.8 ilustra uma construção geométrica inicial.

Figura 3.8: Uma construção geométrica inicial para a ida do Problema 3. Versão interativa [aqui](#).



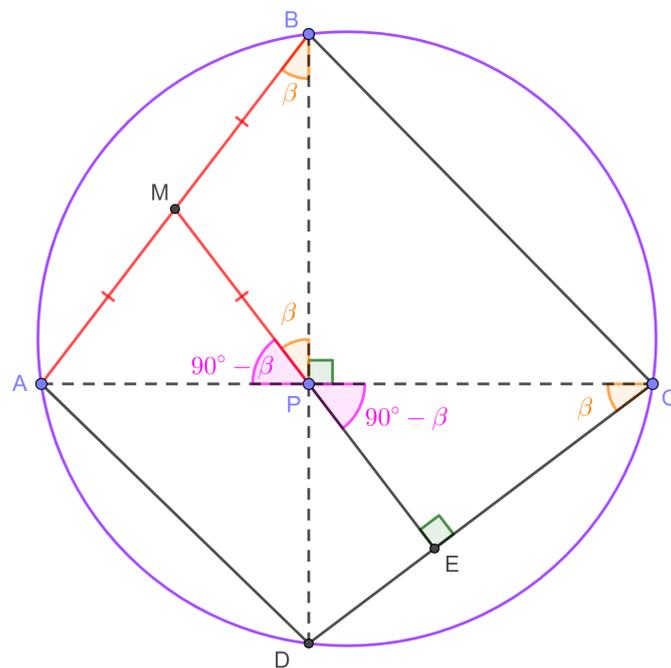
Fonte: O autor.

Como o $\triangle APB$ é retângulo em P e M é ponto médio de AB , então vale:

$$PM = AM = MB.$$

O $\triangle BMP$ é isósceles, de base BP , e $\angle MBP = \angle MPB = \beta$. Segue que $\angle MPA = 90^\circ - \beta$. Seja o ponto $E = MP \cap CD$. Por oposto pelo vértice $\angle EPC = 90^\circ - \beta$. Pela soma dos ângulo internos no $\triangle EPC$ encontra-se $\angle PCE = \beta$. Como os ângulos ABD e ACD são iguais o quadrilátero $ABCD$ é inscrito (Figura 3.9).

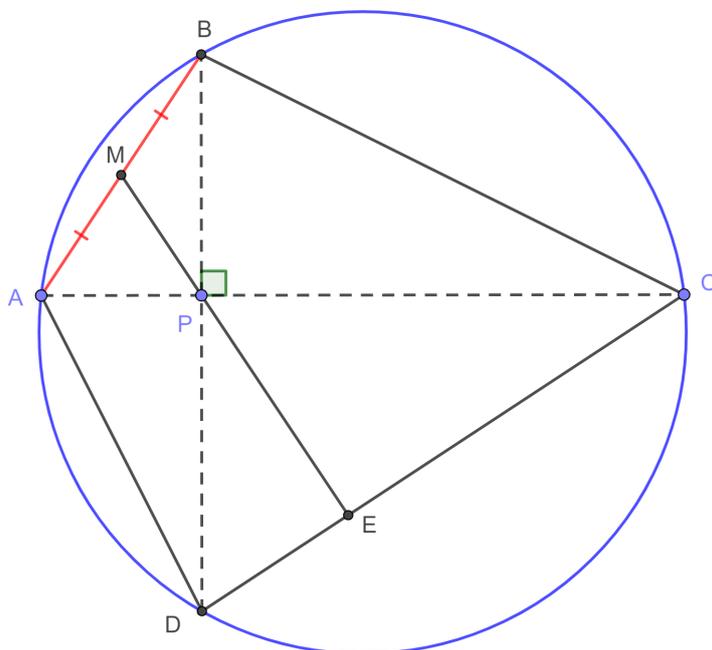
Figura 3.9: Construção geométrica para a ida do Problema 3. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Para a recíproca tem-se que o quadrilátero $ABCD$ é inscrito (Figura 3.10). Com isto, $\angle ACD = \angle ABD = \beta$.

Figura 3.10: Uma construção geométrica inicial para a recíproca do Problema 3. Versão interativa [aqui](#).



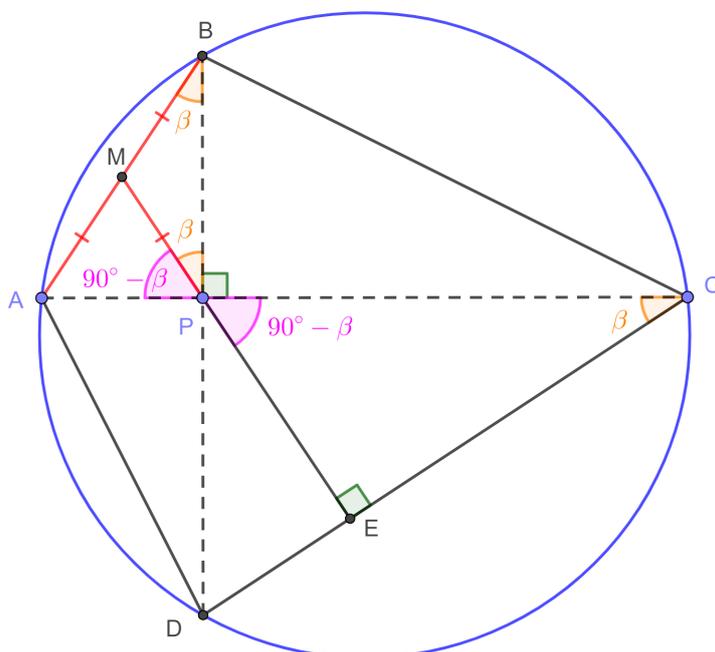
Fonte: O autor.

Como o $\triangle APB$ é retângulo em P e M é ponto médio de AB , então vale:

$$PM = AM = MB.$$

O $\triangle BMP$ é isósceles, de base BP , e $\angle MBP = \angle MPB = \beta$. Segue que $\angle MPA = 90^\circ - \beta$. Seja o ponto $E = MP \cap CD$. Por oposto pelo vértice $\angle EPC = 90^\circ - \beta$. Pela soma dos ângulo internos no $\triangle EPC$ encontra-se $\angle PEC = 90^\circ$ (Figura 3.11).

Figura 3.11: Construção geométrica para a recíproca do Problema 3. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

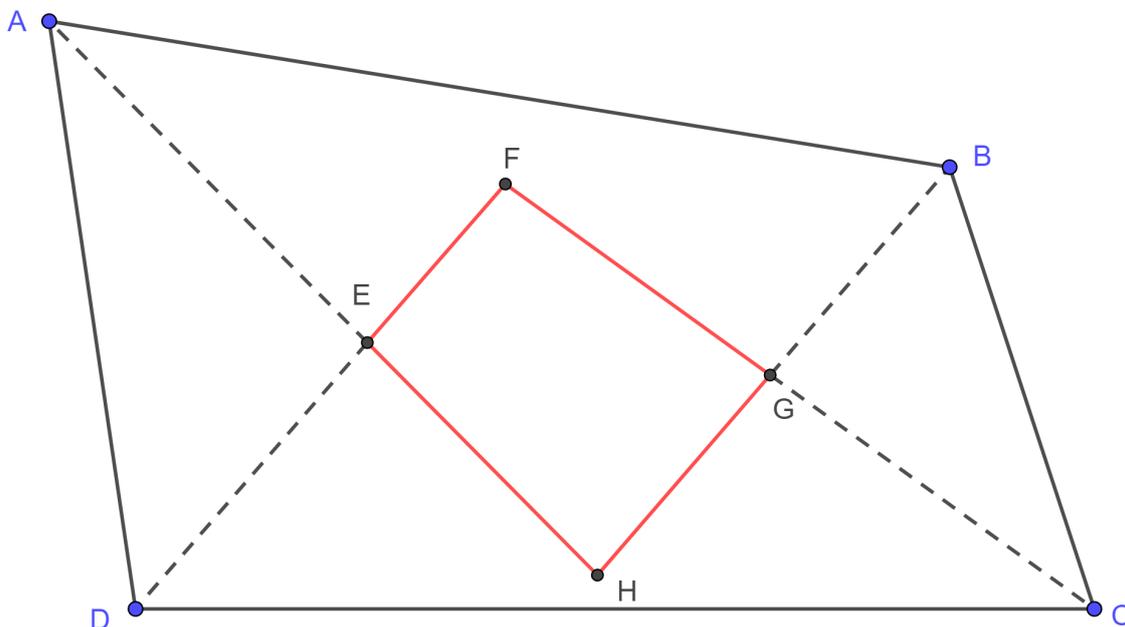
3.7 Quadrilátero inscrito, bissetrizes e ângulos.

Problema 4. *Provar que as bissetrizes internas dos quatro ângulos de um quadrilátero convexo $ABCD$ determinam um quadrilátero $EFGH$ inscrito.*

3.7.1 Resolução do Problema 4

A Figura 3.12 ilustra uma construção geométrica inicial.

Figura 3.12: Uma construção geométrica inicial do Problema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam 2α , 2β , 2γ e 2δ os ângulos internos nos vértices A , B , C e D , respectivamente (Figura 3.13). Da soma dos ângulos internos do quadrilátero $ABCD$ encontra-se:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ,$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ.$$

Pela soma dos ângulos internos no $\triangle ADE$ encontra-se:

$$\angle AED = 180^\circ - \alpha - \delta = \angle FEH.$$

Igualmente, pela soma dos ângulos internos no $\triangle BGC$ encontra-se:

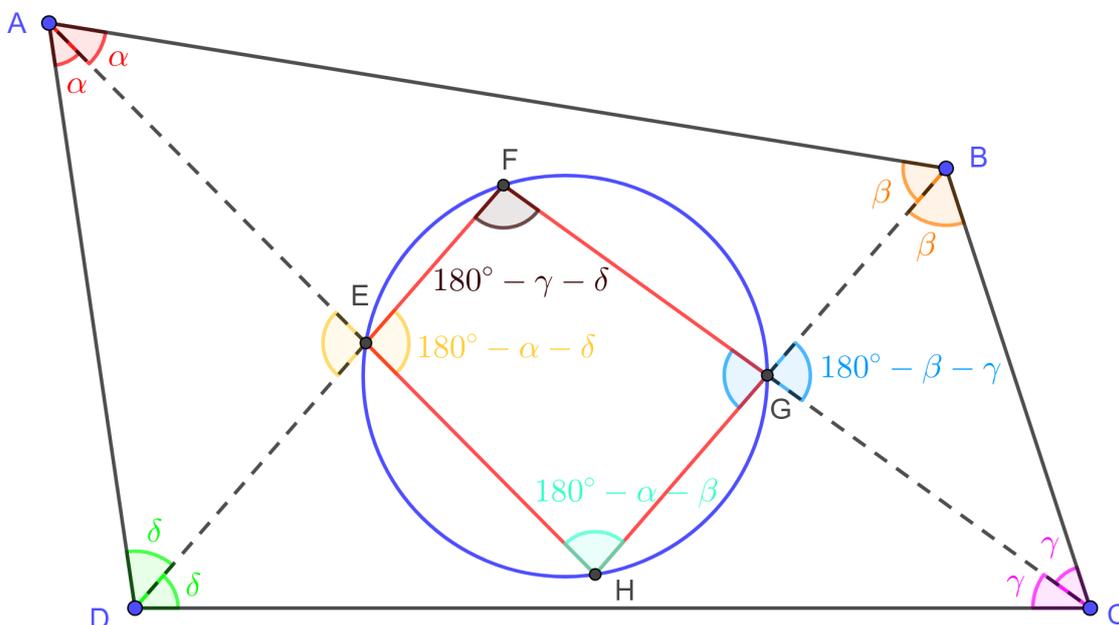
$$\angle BGC = 180^\circ - \beta - \gamma = \angle FGH.$$

Combinando as três equações anteriores segue:

$$\angle FEH + \angle FGH = 180^\circ.$$

Ou seja, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível. O mesmo resultado pode ser provado pela análise dos triângulos DFC e AHB .

Figura 3.13: Construção geométrica do Problema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

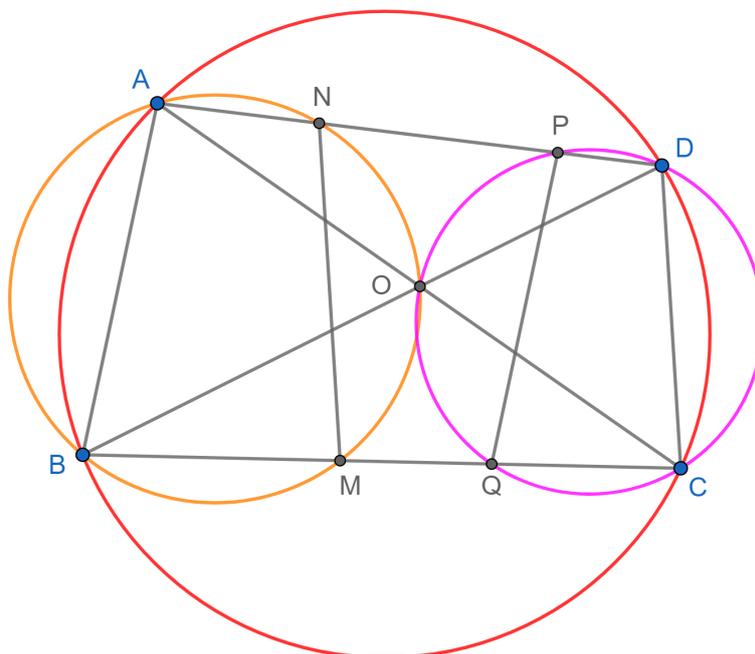
3.8 Quadrilátero inscrito e ângulos em circunferências.

Problema 5. *As diagonais de um quadrilátero inscrito $ABCD$ intersectam-se em O . As circunferências circunscritas aos triângulos AOB e COD intersectam as retas BC e AD , pela segunda vez, nos pontos M, N, P e Q . Provar que o quadrilátero $MNPQ$ está inscrito em um círculo de centro O .*

3.8.1 Resolução do Problema 5

A Figura 3.14 ilustra uma construção geométrica inicial.

Figura 3.14: Uma construção geométrica inicial do Problema 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Como o quadrilátero $ABCD$ é cíclico tem-se a igualdade dos ângulos inscritos:

$$\angle ADB = \angle PDO = \angle QCO = \angle ACB = \alpha.$$

Seja F o centro da circunferência que circunscreve ao quadrilátero $PDCQ$ (Figura 3.15). Segue que o valor dos ângulos centrais correspondentes é:

$$\angle PFO = \angle QFO = 2\alpha.$$

Conseqüentemente, $OP = OQ$. Analogamente prova-se que $ON = OM$. Como $ABCD$ é cíclico:

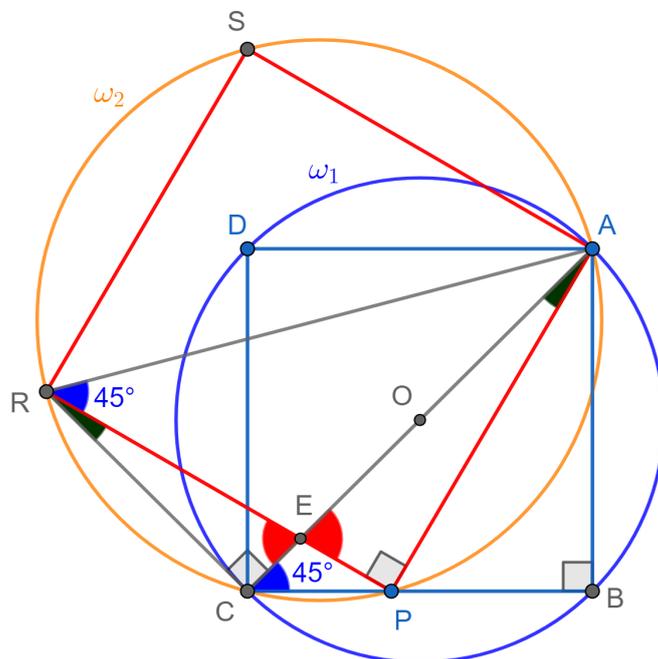
$$\angle BAC = \angle BDC = \beta.$$

Adicionalmente, $AOMB$ e $DOQC$ também são cíclicos. Logo,

$$\angle OMQ = \angle OQM = \beta.$$

Ou seja, o $\triangle OMQ$ é isósceles e $OM = OQ$. Concluí-se que $MNPQ$ é cíclico e a circunferência circunscrita tem centro em O .

Figura 3.17: Construção geométrica do Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

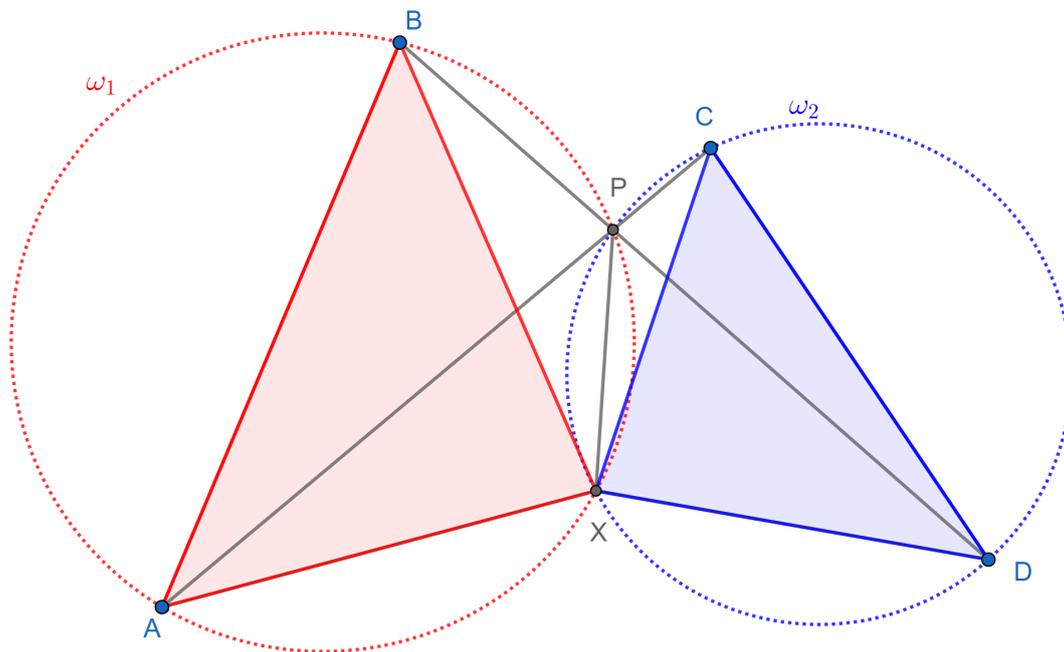
3.10 Quadriláteros inscritíveis, semelhança espiral, mapeando dois segmentos.

Problema 7. *Dados os segmentos AB e CD encontrar para cada ponto $E \in CD$ seu correspondente $E'' \in AB$.*

3.10.1 Resolução do Problema 7

Traçam-se segmentos ligando os vértices opostos. Na Figura 3.18 estes são AC e BD e marca-se o ponto $P = AC \cap BD$. Esboça-se a circunferência w_1 circunscrita ao triângulo PAB e a circunferência w_2 circunscrita ao triângulo PCD . Seja o ponto $X = (w_1 \cap w_2) \neq P$. Por construção, os quadriláteros $PXAB$ e $PXDC$ são cíclicos.

Figura 3.18: Construção inicial. Mapeando os segmentos AB e CD pelo uso da Semelhança Espiral. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Será provado pelo critério de semelhança ângulo-ângulo (AA) que:

$$\triangle XAB \sim \triangle XCD.$$

Isto é, existe uma Semelhança Espiral entre eles. De fato,

$$\alpha = \angle XAB = 180^\circ - \angle BPX = \angle XPD.$$

Adicionalmente, por enxergarem a mesma corda XD vale que: $\angle XPD = \angle XCD$. Com isso:

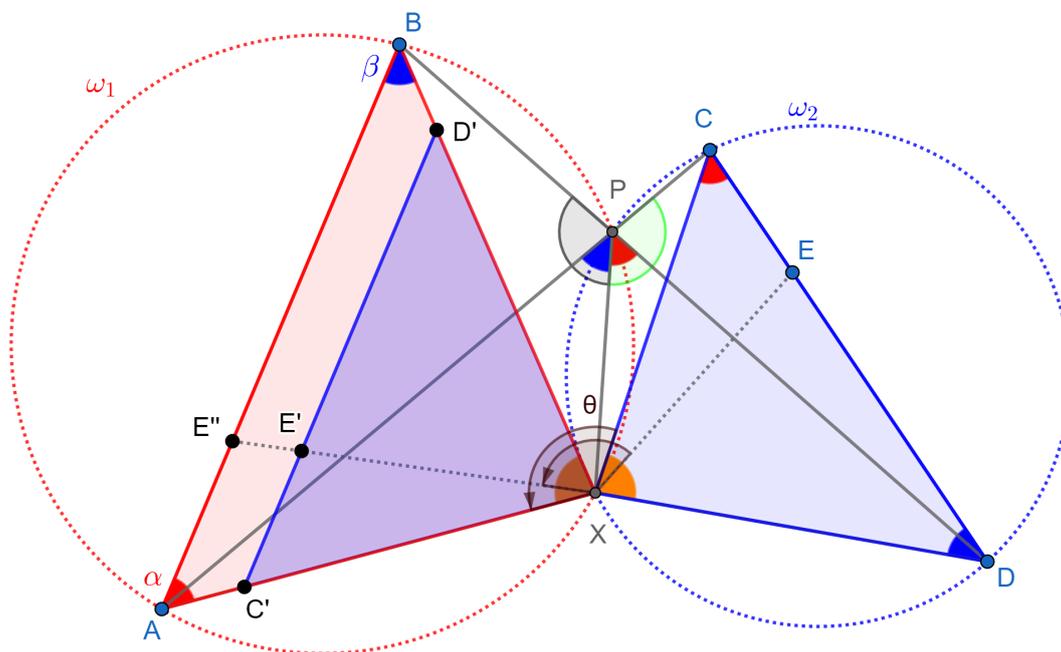
$$\alpha = \angle XAB = \angle XCD.$$

Analogamente,

$$\beta = \angle ABX = \angle APX = 180^\circ - \angle XPC = \angle CDX.$$

Ou seja, $\triangle XAB \sim \triangle XCD$ e $\angle BXA = \angle DXC$. Com uma rotação anti-horária, de centro no ponto X , e ângulo $\theta = CXA$ o triângulo XCD é transformado em outro congruente $XC'D'$ e o ponto $E \in CD$ no ponto $E' \in C'D'$. Uma homotetia com centro em X e fator $\frac{AX}{CX}$ transforma o $\triangle XC'D'$ no $\triangle XAB$ e o ponto E' no ponto E'' . Isto é, E'' é o correspondente em AB de E em CD . A Figura 3.19 mostra todos os elementos da construção.

Figura 3.19: Mapeando os segmentos AB e CD pelo uso da Semelhança Espiral. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Capítulo 4

Problemas de olimpíadas internacionais

4.1 Quadriláteros cíclicos, triângulo circunscrito e desigualdades. P4 IMO 1967.

Problema 8. *São dados dois triângulos acutângulos: $\triangle A_0B_0C_0$ e $\triangle A'B'C'$. Descrever como construir um $\triangle ABC$, semelhante ao $\triangle A'B'C'$ e circunscrito ao $\triangle A_0B_0C_0$, de tal forma que A , B e C correspondam a A' , B' e C' e AB passe por C_0 , BC por A_0 e CA por B_0 . Entre os $\triangle ABC$ possíveis, descrever e provar qual é o de área maior.*

A IMO 1967 foi realizada na cidade de Cetinje, Montenegro (Antiga Iugoslávia). Problema 29 da lista longa e escolhido como P4 da competição, proposto pela delegação da Itália [2].

4.1.1 Resolução do Problema 8

Construir o Arco Capaz l_a do $\angle A' = \alpha$ no lado de B_0C_0 oposto com A_0 (Exercício 1). Seja S_a o centro da circunferência k_a , do qual o arco l_a faz parte. Isto é, $l_a \subset k_a$ (Figura 4.1). Analogamente, construir os arcos capazes l_b e l_c dos $\angle B' = \beta$ e $\angle C' = \gamma$ no lado de C_0A_0 oposto com B_0 e no lado de A_0B_0 oposto com C_0 . Sejam S_b e S_c os centros das circunferências k_b e k_c , dos quais os arcos l_b e l_c fazem parte. Ou seja, $l_b \subset k_b$ e $l_c \subset k_c$.

Posicionar $A \in l_a$, construir as semirretas AC_0 e AB_0 e marcar os pontos $B = AC_0 \cap l_b$ e $C = AB_0 \cap l_c$. Pelo critério de semelhança ângulo-ângulo $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ e $C_0 \in AB$, $A_0 \in BC$ e $B_0 \in CA$. Seja o ponto $S = k_a \cap k_b \neq C_0$. Tem-se:

$$\angle B_0AC_0 = \alpha, \quad \angle C_0BA_0 = \beta, \quad \angle A_0CB_0 = \gamma.$$

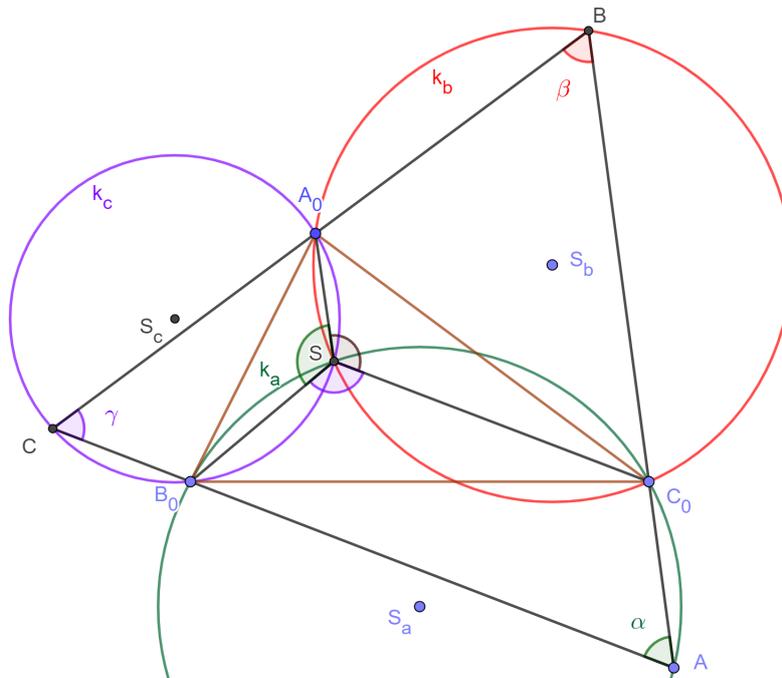
Dos quadriláteros B_0AC_0S e C_0BA_0S serem inscritíveis encontra-se:

$$\angle B_0SC_0 = 180^\circ - \alpha,$$

$$\angle C_0SA_0 = 180^\circ - \beta.$$

Logo, $\angle A_0SB_0 = \alpha + \beta$. Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ segue que o quadrilátero A_0CB_0S é cíclico e $S \in k_c$. A Figura 4.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.1: Uma construção geométrica inicial para o Problema 8. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

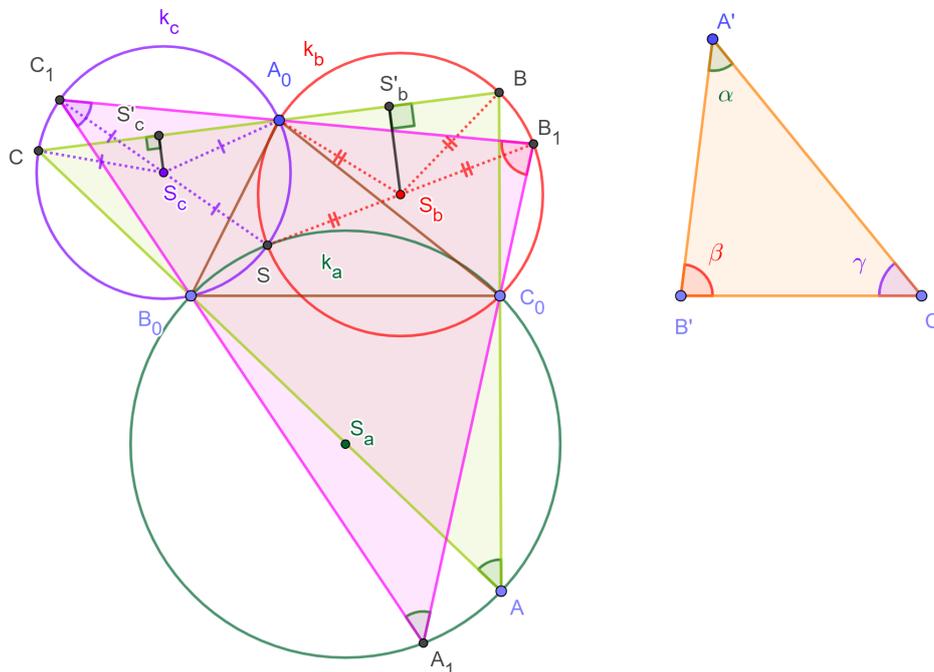
Construir os pontos simétricos de S com respeito a S_a , S_b e S_c e chama-los de A_1 , B_1 e C_1 , respectivamente. Como SB_1 e SC_1 são diâmetros de k_b e k_c segue:

$$\angle SA_0B_1 = \angle SA_0C_1 = 90^\circ$$

e $A_0 \in B_1C_1$. Analogamente, $B_0 \in C_1A_1$ e $C_0 \in A_1B_1$. Ou seja, o $\triangle A_1B_1C_1$ satisfaz as condições do problema. Provar-se-á que entre os triângulos $\triangle ABC$ o triângulo $\triangle A_1B_1C_1$ é o de maior área.

Mostra-se primeiro que $BC \leq B_1C_1$. Sejam S'_b e S'_c as projeções de S_b e S_c sobre BC . Os triângulos S_bBA_0 , S_cCA_0 , $S_bB_1A_0$ e $S_cC_1A_0$ são isósceles. Logo, $BC = 2S'_bS'_c$ e $B_1C_1 = 2S_bS_c$. No trapézio retângulo $S_bS'_bS'_cS_c$ tem-se $S'_bS'_c \leq S_bS_c$ e conseqüentemente $BC \leq B_1C_1$. De forma semelhante mostra-se que $CA \leq C_1A_1$ e $AB \leq A_1B_1$. Isso demonstra que o $\triangle A_1B_1C_1$ é o de maior área. A Figura 4.2 ilustra uma construção geométrica com o problema resolvido.

Figura 4.2: Construção geométrica da resolução do Problema 8. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.2 Eixo e centro radical, quadriláteros cíclicos, ângulos. P5 IMO 1985.

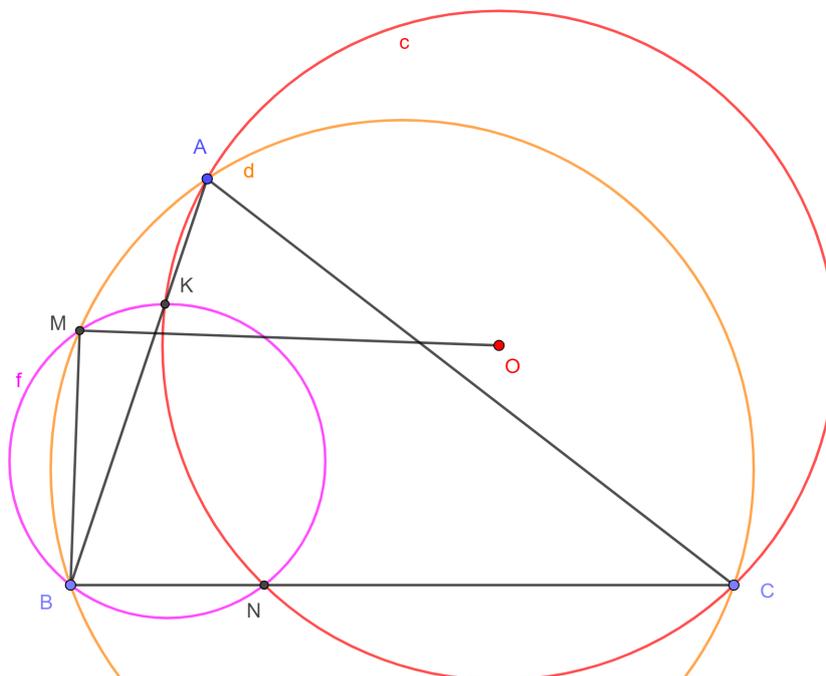
Problema 9. *Um círculo de centro O passa pelos vértices A e C de um triângulo ABC e intersecta os segmentos AB e BC novamente em pontos distintos K e N , respectivamente. Os círculos circunscritos aos triângulos ABC e KBN intersectam-se em exatamente 2 pontos distintos B e M . Provar que $\angle OMB = 90^\circ$.*

A IMO 1985 foi realizada na cidade de Joutsa, Finlândia. Problema 22 da lista curta e escolhido como P5 da competição, proposto pela delegação da Rússia [2].

4.2.1 Resolução do Problema 9.

A Figura 4.3 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.3: Construção geométrica inicial para o Problema 9. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam c , d e f a circunferência de centro O , a circunscrita ao $\triangle ABC$ e ao $\triangle KBN$, respectivamente. As retas AC , KN , e MB são eixos radicais das circunferências c , d , c e f e d e f , respectivamente [28]. Seja P o centro radical das três circunferências anteriores. Isto é, $P = AC \cap KN \cap MB$ (Figura 4.4).

Como os quadriláteros $BNKM$ e $NCAK$ são cíclicos tem-se:

$$180^\circ = \angle PMK + \angle BMK = \angle BNK + \angle CNK = \angle CAK + \angle PAK.$$

Logo, o quadrilátero $PMKA$ é cíclico. Seja E a segunda interseção da linha MA com a circunferência c . Como o quadrilátero $KNEA$ é cíclico:

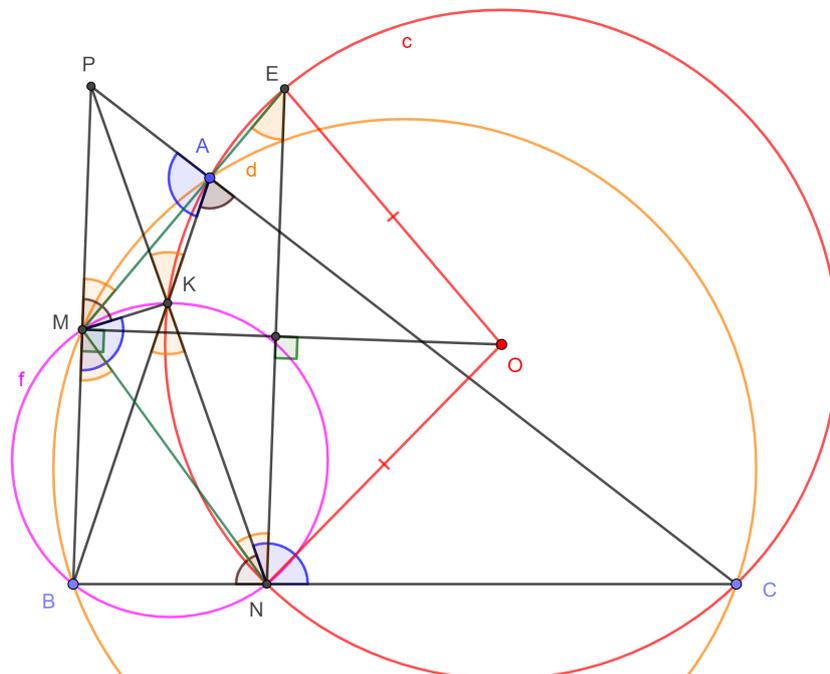
$$\angle MEN = \angle AEN = \angle AKP = \angle AMP.$$

Segue que $BP \parallel MP \parallel NE$ e bastará mostrar que $OM \perp EN$. Mas também tem-se:

$$\angle MNE = \angle BMN = \angle BKN = \angle MEN.$$

Os triângulos MEN e OEN são isósceles com a mesma base EN , segue que $ME = MN$ e $OE = ON$. Os pontos O e M pertencem a mediatriz do segmento EN , disto é concluído que $OM \perp EN$. A Figura 4.4 mostra uma construção geométrica.

Figura 4.4: Construção geométrica para o Problema 9. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.3 Potência de ponto relativo a circunferência, base média, semelhança. P2 IMO 2009.

Problema 10. *Seja ABC um triângulo com circuncentro O . Sejam P e Q pontos no interior dos lados CA e AB , respectivamente. Sejam K , L e M os pontos médios dos segmentos BP , CQ e PQ , respectivamente, e seja Γ o círculo que passa por K , L e M . Se PQ é tangente a Γ , provar que $OP = OQ$.*

A IMO 2009 foi realizada na cidade de Brémen, Alemanha. Problema 17 da lista curta e escolhido como P2 da competição, proposto pela delegação da Rússia [2].

4.3.1 Resolução do Problema 10.

A Figura 4.5 mostra uma construção geométrica inicial. Seja c a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$ e O' o centro de Γ . No $\triangle PQB$ tem-se que M e K são pontos médios (Figura 4.6). Logo, $MK \parallel QB \parallel AB$ e

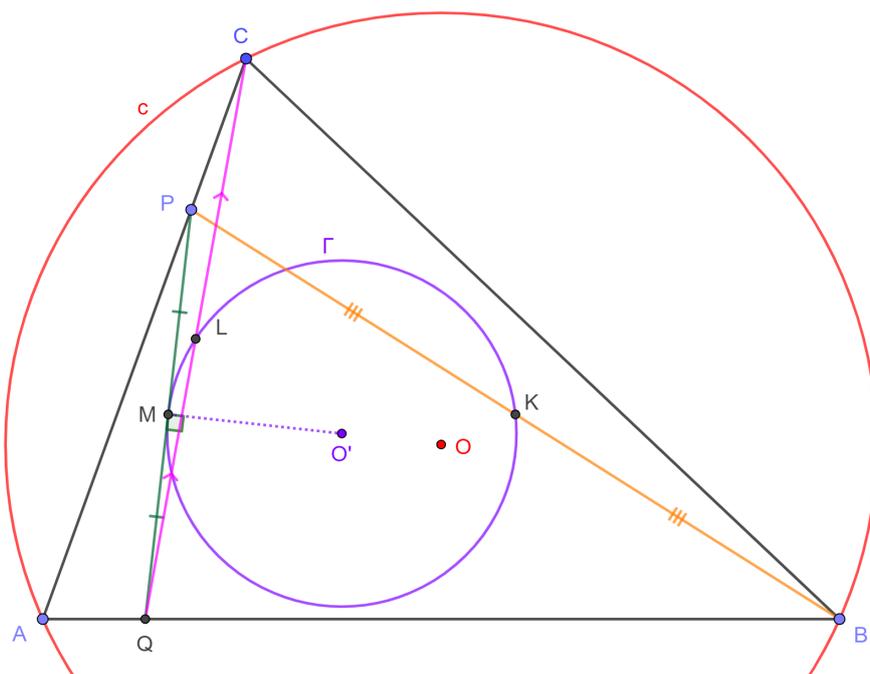
$$\frac{MK}{QB} = \frac{1}{2}.$$

Analogamente, no $\triangle PQC$ tem-se que M e L são pontos médios. Segue que:

$$ML \parallel PC \parallel AC,$$

$$\frac{ML}{PC} = \frac{1}{2}.$$

Figura 4.5: Construção geométrica inicial para o Problema 10. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Por serem ângulos formados de segmentos mutuamente paralelos encontra-se:

$$\angle KML = \angle BAC.$$

Adicionalmente, vale que:

$$\frac{ML}{MK} = \frac{PC}{QB}. \tag{4.3.1}$$

Por ângulos alterno entre paralelas $\angle AQP = \angle KMQ$. Como PQ é tangente a Γ , referente a corda KM , tem-se a igualdade de um ângulo de segmento com um inscrito $\angle KMQ = \angle MLK$. Segue que $\triangle AQP \sim \triangle MLK$,

$$\frac{AQ}{ML} = \frac{AP}{MK} = \frac{QP}{LK}. \tag{4.3.2}$$

De (4.3.1) e (4.3.2) tem-se:

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{ML}{MK} = \frac{PC}{QB}.$$

Logo,

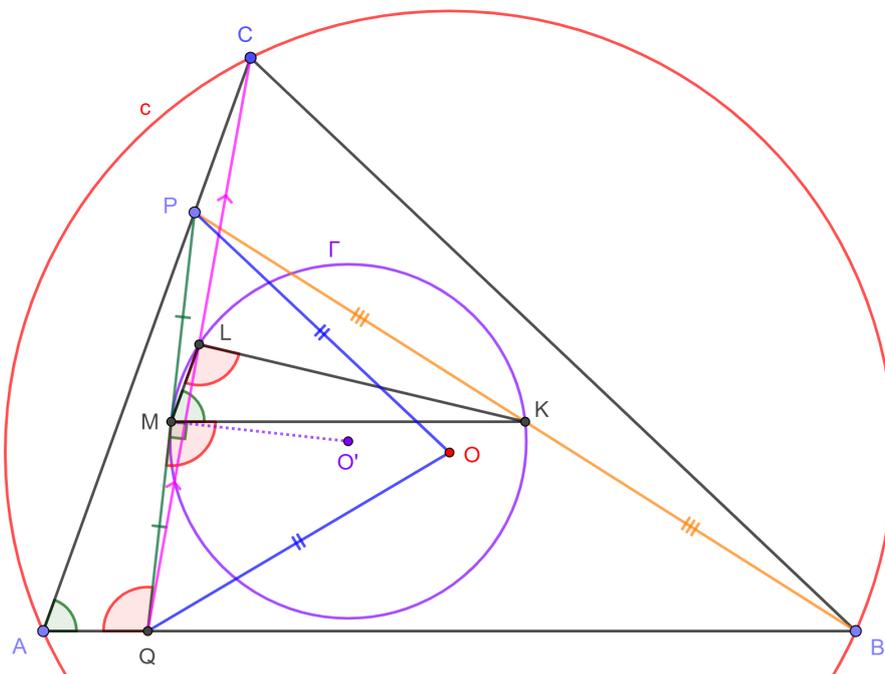
$$AQ \cdot QB = AP \cdot PC. \tag{4.3.3}$$

A equação (4.3.3) indica que a potência de Q e P em relação a circunferência c é a mesma:

$$Pot_c(Q) = OA^2 - OQ^2 = OA^2 - OP^2 = Pot_c(P).$$

Isto é, $OQ = OP$. A Figura 4.6 mostra uma construção geométrica.

Figura 4.6: Construção geométrica para o Problema 10. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.4 Quadrilátero circunscritível, teorema de Pitot, incentro e ortocentro. P23 SL IMO 2009.

Problema 11. *Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Seja g uma reta que passa por A e encontra as retas BC e CD em M e N , respectivamente. Denotar por I_1, I_2 , e I_3 os incentros dos $\triangle ABM$, $\triangle MNC$ e $\triangle NDA$, respectivamente. Mostrar que o ortocentro do $\triangle I_1I_2I_3$ está sobre g .*

A IMO 2009 foi realizada na cidade de Brémen, Alemanha. Problema 23 da lista curta, proposto pela delegação da Bulgária [2].

4.4.1 Resolução do Problema 11.

A Figura 4.7 mostra uma construção geométrica inicial. A circunferência c ilustra que o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível. Pelo Teorema 4 (ida de Pitot) vale que:

$$AB + CD = AD + BC. \quad (4.4.1)$$

Sejam k_1 , k_2 e k_3 os incírculos dos triângulos ABM , MNC , e NDA , respectivamente (Figura 4.8). É construída a reta tangente h de C a k_1 , diferente de CB . Será mostrado que h também é tangente a k_3 .

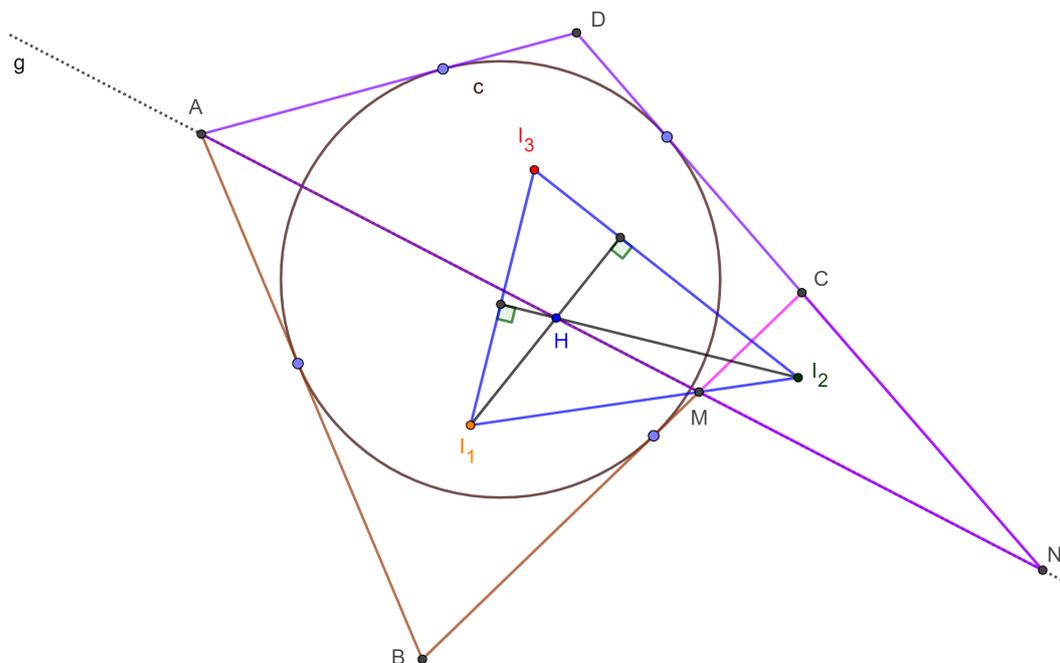
Seja o ponto $X = g \cap h$. Nota-se que os lados (ou suas extensões) do quadrilátero $ABCX$, são tangentes a k_1 . Pelo Teorema 4 (ida de Pitot) vale:

$$AB + CX = BC + AX. \quad (4.4.2)$$

Somando e subtraindo AB e das equações (4.4.1) e (4.4.2) segue que:

$$\begin{aligned} CD - CX &= (AB + CD) - (AB + CX) = \\ &= (AD + BC) - (BC + AX) = AD - AX. \end{aligned}$$

Figura 4.7: Construção geométrica inicial para o Problema 11. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Isto é,

$$CD + AX = AD + CX.$$

Pelo Teorema 5 (volta de Pitot), o quadrilátero $ADCX$ também é circunscritível, assim como h é tangente à k_3 . Adicionalmente, como I_3C , I_2C , I_1C , I_3N e I_1I_2 são bissetrizes, encontra-se:

$$\begin{aligned} \angle I_3CI_1 &= \angle I_3CX + \angle XCI_1 = \\ &= \frac{1}{2}(\angle DCX + \angle XCB) = \frac{1}{2}\angle DCB = \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MCN) = 180^\circ - \angle MI_2N = \angle I_3I_2I_1. \end{aligned}$$

O anterior permite concluir que os pontos C , I_1 , I_2 e I_3 pertencem a uma mesma circunferência d .

Sejam L_1 e L_3 as reflexões do ponto C em relação as retas I_2I_3 e I_1I_2 , respectivamente. Como I_2I_3 é bissetriz do $\angle CNM$ e I_1I_2 do $\angle CMN$ segue que $L_1 \in g$ e $L_3 \in g$.

Seja H o ortocentro do $\triangle I_1I_2I_3$. Tem-se:

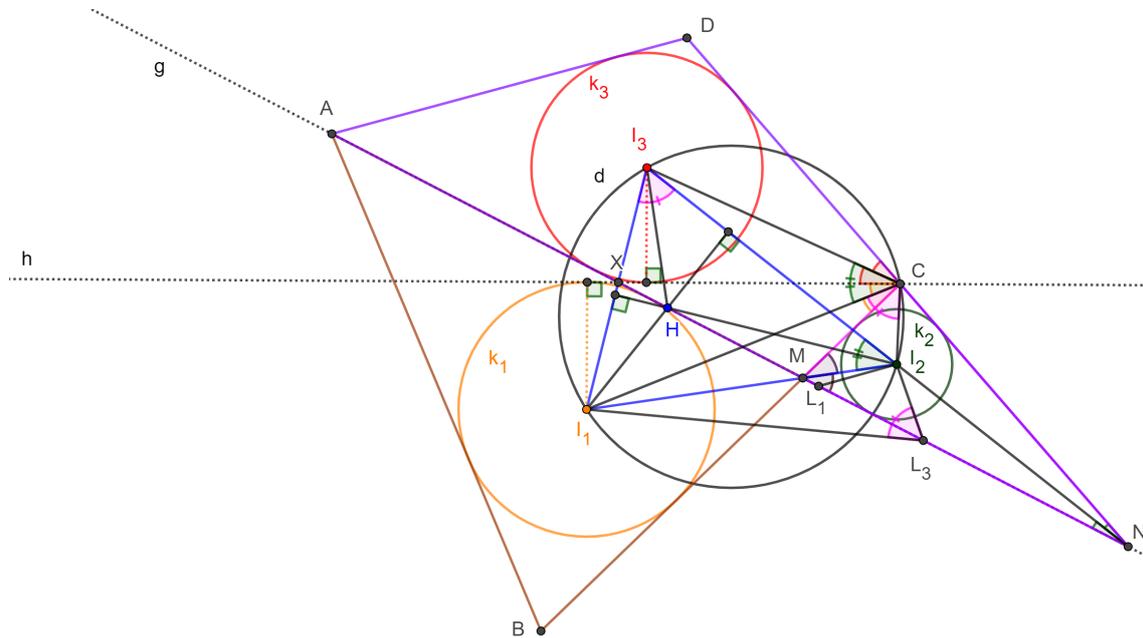
$$\angle I_2L_3I_1 = \angle I_1CI_2 = \angle I_1I_3I_2 = 180^\circ - \angle I_1HI_2.$$

Isto significa que o quadrilátero $I_2HI_1L_3$ é cíclico. Analogamente, $I_3HL_1I_2$ é inscritível. Na configuração da Figura 4.8 encontra-se:

$$\begin{aligned} \angle L_3HI_2 &= \angle L_3I_1I_2 = \angle I_2I_1C = \\ &= \angle I_2I_3C = \angle L_1I_3I_2 = \angle L_1HI_2. \end{aligned}$$

Portanto, L_1 , L_3 e H são colineares. Como $L_1 \neq L_3$, o problema fica demonstrado.

Figura 4.8: Construção geométrica para o Problema 11. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.5 Ortocentro, quadrilátero inscrito e ângulos na circunferência. P3 NE IGO 2014.

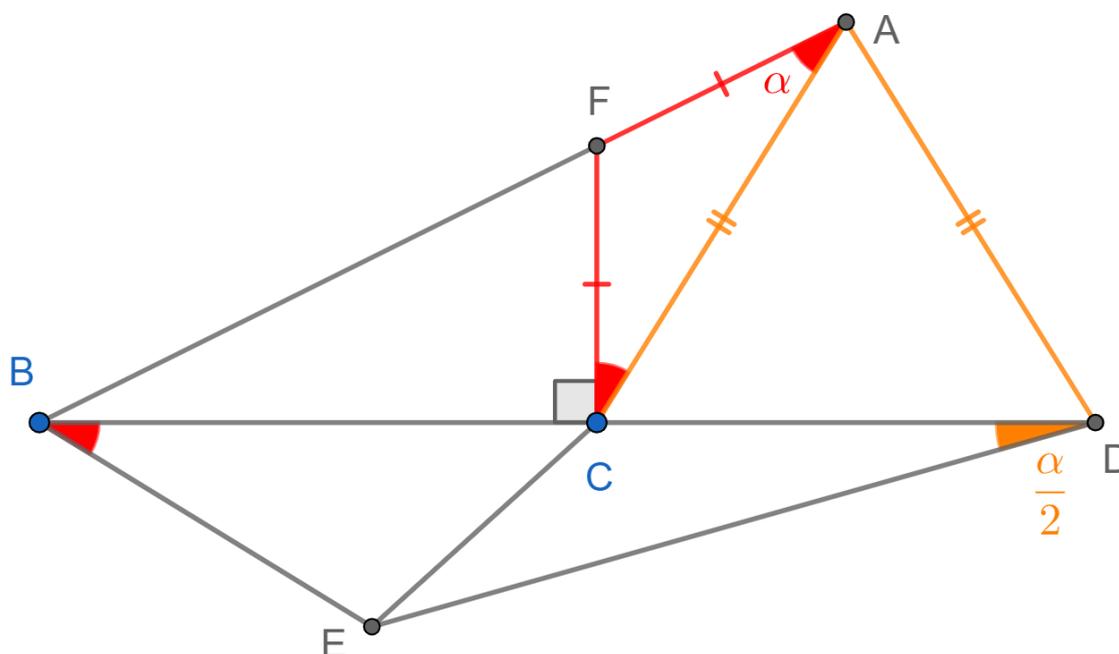
Problema 12. *Em um triângulo ABC tem-se $\angle C = \angle A + 90^\circ$. O ponto D na continuação de BC é tal que $AC = AD$. O ponto E está no lado de BC que não contém A e deve satisfazer que $\angle EBC = \angle A$ e $\angle EDC = \frac{1}{2}\angle A$. Provar que $\angle CED = \angle ABC$.*

Problema 3 (Nível Elemental) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Morteza Saghafian.

4.5.1 Resolução do Problema 12

A Figura 4.9 ilustra uma construção geométrica inicial para o problema.

Figura 4.9: Uma construção geométrica inicial para o Problema 12. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Para construir o triângulo ABC utiliza-se um ponto auxiliar F tal que:

$$CF \perp BC, CF = FA.$$

Como o $\triangle CFA$ é isóscele de base CF é garantido:

$$\angle FCA = \angle FAC = \alpha, \angle C = \alpha + 90^\circ.$$

Seja M o ponto médio CD . Como o triângulo ACD é isósceles, então AM está na mediatriz de CD . Sejam P e Q as interseções de AM com DE e BE , respectivamente. Como o ponto P está na mediatriz de C e D tem-se $PC=PD$ e

$$\angle PCD = \frac{\alpha}{2}.$$

Pela soma dos ângulos internos no triângulo ABC encontra-se:

$$\angle B = 90^\circ - 2\alpha.$$

Logo,

$$\angle EBA + \angle CAB = \alpha + \angle B + \alpha = 90^\circ.$$

Tem-se $\angle AX'X = \angle ABX$, pois enxergam o mesmo arco AX de w_2 . Como

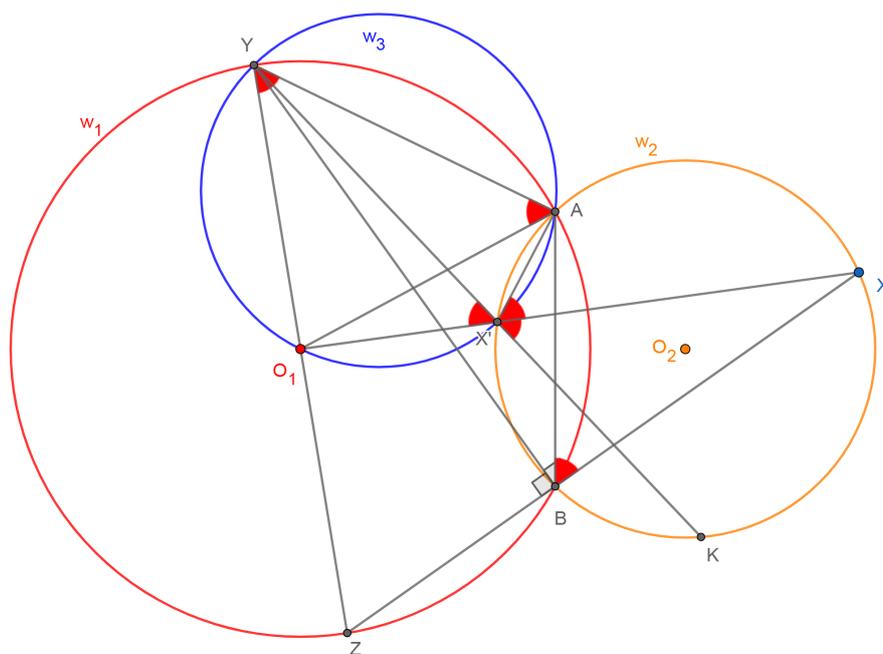
$$\angle AX'X = \angle O_1YA,$$

o quadrilátero $YO_1X'A$ também é cíclico, circunferência w_3 . De $O_1Y = O_1A$ encontra-se:

$$\angle O_1AY = \angle O_1YA.$$

Adicionalmente, $\angle YAO_1 = \angle YX'O_1$, pois enxergam o mesmo arco YO_1 de w_3 . Por ângulos opostos pelo vértice $\angle YX'O_1 = \angle KX'X$. Como $\angle AX'X = \angle KX'X$ os arcos menores AX e XK de w_2 tem a mesma medida. Isto é, X é o ponto médio do arco AXK . A Figura 4.12 mostra uma construção geométrica com o problema resolvido.

Figura 4.12: Construção geométrica da resolução do Problema 13. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

4.7 Reflexão, quadrilátero inscrito, projeção. P4 NI IGO 2017

Problema 14. No triângulo isósceles ABC ($AB = AC$), seja l uma linha paralela a BC que passa por A . Seja D um ponto arbitrário sobre l . Sejam E, F os pés das perpendiculares a BD, CD que passam por A , respectivamente. Suponha que P e Q são as imagens de E e F sobre l .

Provar que:

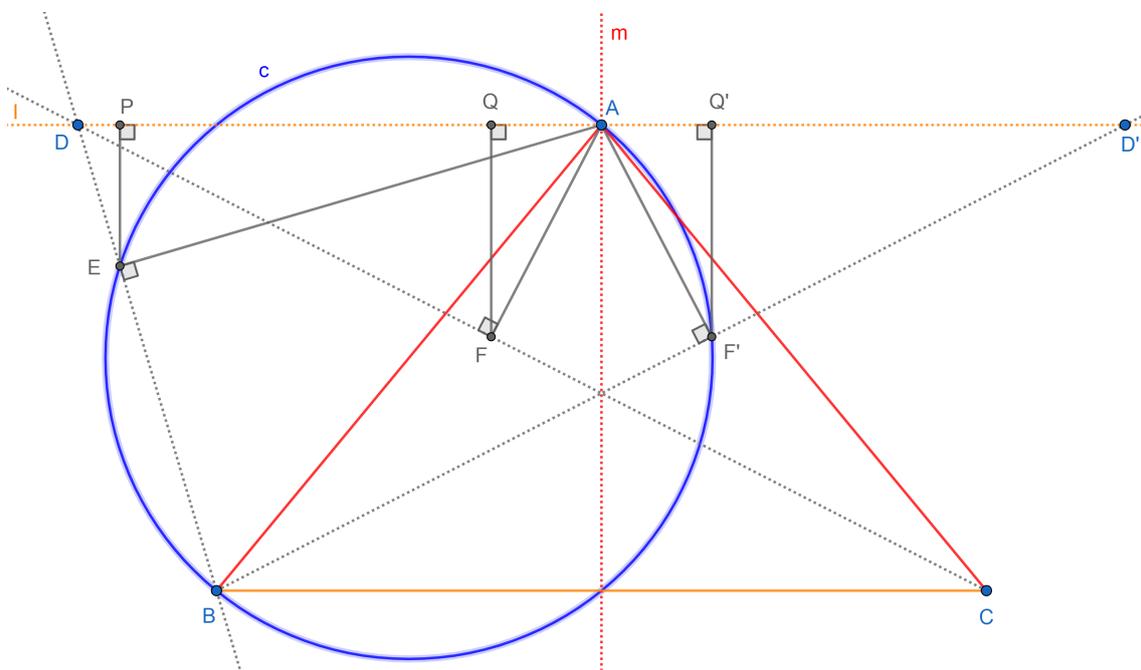
$$AP + AQ \leq AB.$$

Problema 4 (Nível Intermediário) da 4 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2017.

4.7.1 Resolução do Problema 14

A Figura 4.13 ilustra uma construção geométrica possível para auxiliar na interpretação do problema.

Figura 4.13: Construção geométrica possível para o Problema 14. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

A reta m é mediatriz dos pontos B e C . O ponto A pertence a m , ou seja, o triângulo ABC é isósceles, como descrito no enunciado. Deve-se comparar a soma dos segmentos AP e AQ com o segmento AB .

Primeiro, a ideia será mostrar que o ponto Q' é a reflexão do ponto Q em relação a mediatriz m . Isto é, $AP + AQ = PQ'$ e bastará provar que $PQ' \leq AB$.

Seja D' a reflexão do ponto D em relação a mediatriz m . Tem-se que $DA = D'A$ e $DC = D'B$. Traça-se a semirreta BD' e uma perpendicular a esta que passe por A . Chama-se F' à interseção. A seguir é construído o ponto Q' , projeção do ponto F' sobre a reta l .

Os triângulos DAC e $D'AB$ são congruentes pelo critério LAL ($\angle DAC = \angle D'AB$). A reta m também é bissetriz do ângulo BAC . Segue que $DC = D'B$ e as alturas respetivas são

iguais. Isto é, $FA = F'A$.

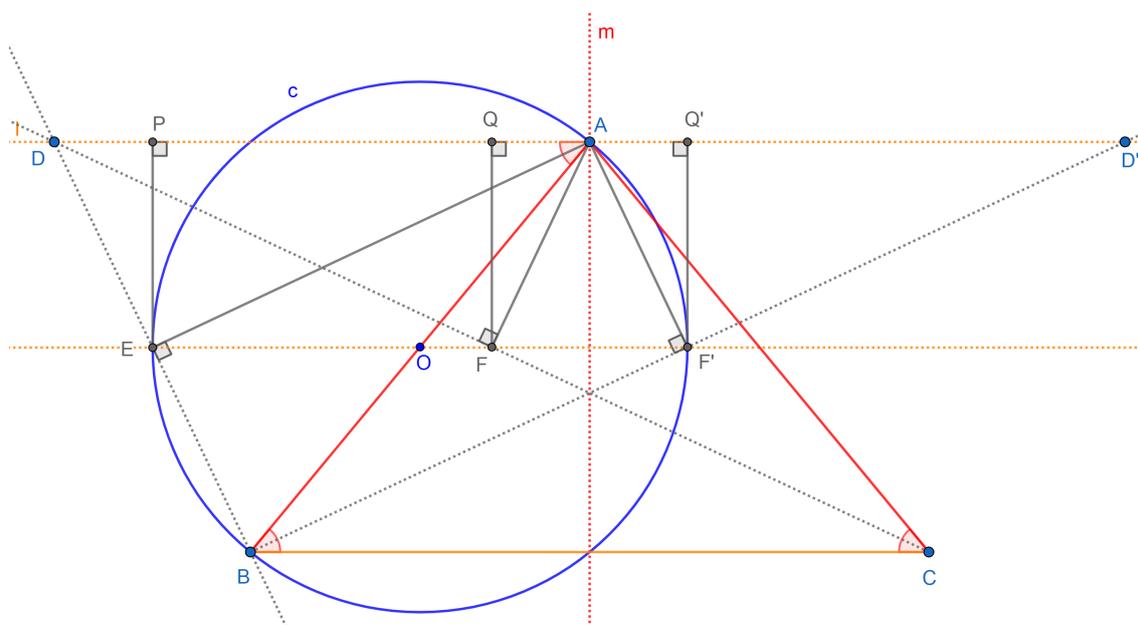
Nota-se também que os triângulos DFA e $D'F'A$ são congruentes pelo critério CH, segue que as alturas respeito aos lados DA e $D'A$ são iguais. Ou seja, $FQ = F'Q'$. Portanto, os triângulos FQA e $F'Q'A$ são congruentes pelo critério CH, o que mostra que o ponto Q' é a reflexão do ponto Q em relação a mediatriz m .

Segundo, como $\angle AEB = \angle AF'B = 90^\circ$ o quadrilátero $AEBF'$ é inscrito e AB é um diâmetro da circunferência c circunscrita a ele. Segue que EF' é uma corda de c e consequentemente $EF' \leq AB$.

Terceiro, PQ' é a projeção sobre l do segmento EF' . Logo, $AP + AQ = PQ' \leq EF' \leq AB$, como queria-se demonstrar.

Ocorre a igualdade quando EF' é diâmetro de c ($AB = EF'$) e a linha EF' é paralela com l ($EF' = PQ'$). A Figura 4.14 ilustra esta situação.

Figura 4.14: Caso de igualdade na desigualdade do problema. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

O quadrilátero $AEBF'$ é um retângulo, suas diagonais são iguais e cortam-se no ponto médio O (também centro de c). Segue que $EO = OB$ e o triângulo EOB é isósceles de base EB . Neste caso, $\angle ABC = \angle BAD = \angle BOE = \alpha$ (alternos entre paralelas) e

$$\angle OBE = \angle OEB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

(soma dos ângulos internos de um triângulo). Logo, $\angle BAE = \frac{\alpha}{2}$ e AE é bissetriz e altura do triângulo DAB . É concluído que o triângulo DAB é isósceles de base DB e $AD = AB$. Uma

solução em vídeo está disponível [aqui](#).

Capítulo 5

Referências Bibliográficas

- [1] DELGADO, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Página 12)
- [2] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium**: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009. New York: Springer, 2011. (Página 49, 51, 53, 55)
- [3] HOLANDA, B. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2011. (Página 12)
- [4] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: [10.22533/at.ed.24221310814](https://doi.org/10.22533/at.ed.24221310814). Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [5] LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023311>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [6] LÓPEZ LINARES, J.; ; BRUNO-ALFONSO, A. Trigonometria: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:14-36, jun. 2023. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6799/5334>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [7] LÓPEZ LINARES, J. **Ex-incentros: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de

Alimentos, 2023. 80 p. ISBN 978-65-87023-32-8 (e-book). Disponível em:
<https://doi.org/10.11606/9786587023328>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)

- [8] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [9] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [10] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [11] LÓPEZ LINARES, J. Jogos com a desigualdade triangular. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 3, p. 73-94, dez. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n32022073094. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [12] LÓPEZ LINARES, J. **Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e desigualdades**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 85 p. ISBN 978-65-87023-28-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023281>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [13] LÓPEZ LINARES, J. **Potência de ponto relativo a uma circunferência: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 64 p. ISBN 978-65-87023-30-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023304>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [14] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática**.

LÓPEZ LINARES, J. **Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicêntricos: problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 72 p. ISBN 978-65-87023-34-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023342>.

2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [15] LÓPEZ LINARES, J. Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis: cinco problemas resolvidos propostos para olimpíadas internacionais de matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 23, n. 1, p. 317-334, jul. 2023. DOI: 10.21167/cqdv23n12023317334. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/373/382>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [16] LÓPEZ LINARES, J. **Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 57 p. ISBN 978-65-87023-26-7 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023267>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [17] LÓPEZ LINARES, J. Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 1, p. 27-47, jul. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n12022027047. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [18] LÓPEZ LINARES, J. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023250>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [19] LÓPEZ LINARES, J. **Treinamento de Professores e Estudantes do Ensino Fundamental e Médio com Problemas de Olimpíadas de Matemática**. 155 f. Tese (Livre-docência) Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, 2022. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/livredocencia/74/tde-28112022-091705/pt-br.php>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [20] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdv19202023169664jll118127. ISSN 2316-9664.

Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)

- [21] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [22] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023212>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [23] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [24] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra - v. 3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 91 p. ISBN 978-65-87023-24-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [25] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [26] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvoll7ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [27] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista**

LÓPEZ LINARES, J. **Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicêntricos: problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 72 p. ISBN 978-65-87023-34-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023342>.

- Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdvoll8202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [28] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22–40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdvoll20202123169664jlljpmfaj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12, 52)
- [29] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [30] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [31] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [32] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [33] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)

LÓPEZ LINARES, J. **Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicêntricos: problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 72 p. ISBN 978-65-87023-34-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023342>.

- [34] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [35] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdvol21202123169664jlljpmsafj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [36] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção ProfMat). (Página 12)
- [37] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Página 12)
- [38] PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Página 12)
- [39] SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [40] SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J.; RAMALHO DE FREITAS, M.P.O. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol.3, N.1, Jan-Jun 2022, pp. 70-87. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)
- [41] SANTOS, J. P. M.; Marcus Vinícius de Araújo Lima; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J. Minimização da soma de quadrados de distâncias aos vértices em polígonos convexos, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol. 3, N. 2, Jul - Dez 2022, pp. 66 – 82. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i2.11309>. Acesso em: 1 ago. 2023. (Página 12)

- [42] THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria-Nível 2, 2006. (Página 12)

